Matrices definidas positivas

Christian Sebastián Russo

16 de Septiembre de 2015

¿De dónde venimos?

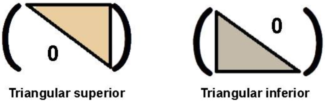
- Operaciones con matrices (suma, resta, permutaciones, etc.)
- Eliminación Gaussiana
- Factorización LU
- Teórica de Matrices definidas positivas
- Teórica de Factorización de Cholesky

Objetivos

- Dudas comunes
- Primeros ejercicios Matrices definidas positivas
- Ponernos cancheros con los ejercicios

Repaso

Matriz Triangular Superior e Inferior:



Proposición: Sea A una matriz triangular

$$det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

Propiedad: Sea v $\in \mathbb{R}^{nx1}$. Entonces $v^t \cdot v = \|v\|^2$
Propiedad: Sea A una matriz inversible. Entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene como única solución x $= 0$

Matrices definidas positivas

Definición

Sea A $\in \mathbb{R}^{nxn}$. A es **definida positiva** sii

$$x^t Ax > 0 \text{ para todo vector x} \neq 0 \text{ de dimensión n}$$

Ejercicio 8) (Práctica 3 - Métodos Numéricos)

Si A $= LL^t$ es una factorización de A con L una matriz triangular inferior con elementos de la diagonal positivos.
Demostrar que A es simétrica y definida positiva.

¿Qué tenemos que probar?

¿Qué tenemos que probar?

- A es una matriz simétrica

¿Qué tenemos que probar?

- A es una matriz simétrica
- A es una matriz definida positiva

¿Qué tenemos que probar?

- A es una matriz simétrica
- A es una matriz definida positiva
- Entonces, A es una matriz **simétrica definida positiva**

Primero veamos que A es una Matriz simétrica. ¿Cómo?

Definición

Sea A $\in \mathbb{R}^{nxn}$. A es **simetrica** sii

$$a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$$

Primero veamos que A es una Matriz simétrica. ¿Cómo?

Definición

Sea A $\in \mathbb{R}^{nxn}$. A es **simetrica** sii

$$a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$$

Usando esta definiciión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

En particular, podemos pensarla como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

En particular, podemos pensarla como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

multiplicando nos queda,

En particular, podemos pensarla como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

multiplicando nos queda,

- $a_{11} = l_{11} * l_{11}$

En particular, podemos pensarla como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

multiplicando nos queda,

- $a_{11} = l_{11} * l_{11}$
- $a_{12} = l_{11} * l_{21}$

En particular, podemos pensarla como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

multiplicando nos queda,

- $a_{11} = l_{11} * l_{11}$
- $a_{12} = l_{11} * l_{21}$
- $a_{13} = l_{11} * l_{31}$

En particular, podemos pensarla como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = LL^t = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

multiplicando nos queda,

- $a_{11} = l_{11} * l_{11}$
- $a_{12} = l_{11} * l_{21}$
- $a_{13} = l_{11} * l_{31}$
- $a_{21} = l_{21} * l_{11}$
- $a_{22} = l_{21} * l_{21} + l_{22} * l_{22}$
- $a_{23} = l_{21} * l_{31} + l_{22} * l_{32}$
- $a_{31} = l_{31} * l_{11}$
- $a_{32} = l_{31} * l_{21} + l_{32} * l_{22}$
- $a_{33} = l_{31} * l_{31} + l_{32} * l_{32} + l_{33} * l_{33}$

Ahora, queremos ver que $a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$

Ahora, queremos ver que $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$

- $a_{12} = a_{21} = l_{11} * l_{21}$

Ahora, queremos ver que $a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$

- $a_{12} = a_{21} = l_{11} * l_{21}$
- $a_{13} = a_{31} = l_{11} * l_{31}$

Ahora, queremos ver que $a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$

- $a_{12} = a_{21} = l_{11} * l_{21}$
- $a_{13} = a_{31} = l_{11} * l_{31}$
- $a_{23} = a_{32} = l_{21} * l_{31} + l_{22} * l_{32}$

Ahora, queremos ver que $a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$

- $a_{12} = a_{21} = l_{11} * l_{21}$
- $a_{13} = a_{31} = l_{11} * l_{31}$
- $a_{23} = a_{32} = l_{21} * l_{31} + l_{22} * l_{32}$

Luego, por la definición de matriz simétrica, **A es simétrica.**

Ahora, nos queda probar que es definida positiva. ¿Cómo?

Ahora, nos queda probar que es definida positiva. ¿Cómo?
Queremos ver que

$$\forall x \neq 0, \; x^t A x > 0$$

Ahora, nos queda probar que es definida positiva. ¿Cómo?
Queremos ver que

$$\forall x \neq 0,\ x^t A x > 0$$

Como $A = LL^t$ nos queda

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

Ahora, nos queda probar que es definida positiva. ¿Cómo?
Queremos ver que

$$\forall x \neq 0,\ x^t A x > 0$$

Como $A = LL^t$ nos queda

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

Recordando:

- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| \neq 0$ sii v $\neq 0$

Ahora, nos queda probar que es definida positiva. ¿Cómo?
Queremos ver que

$$\forall x \neq 0,\ x^t A x > 0$$

Como $A = LL^t$ nos queda

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

Recordando:

- $\|v\| \geq 0$
- $\|v\| \neq 0$ sii v $\neq 0$

Volviendo, tratemos de usar estas propiedades de la norma.

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ (x^t L)(x^t L)^t > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ (x^t L)(x^t L)^t > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ \|L^t * x\|^2 > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ (x^t L)(x^t L)^t > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ \|L^t * x\|^2 > 0$$

Veamos que $L^t * x \neq 0$ ¿Cómo?

Propiedad

Sea A una matriz inversible. Entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene como única solución x = 0

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ (x^t L)(x^t L)^t > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ \|L^t * x\|^2 > 0$$

Veamos que $L^t * x \neq 0$ ¿Cómo?

Propiedad

Sea A una matriz inversible. Entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene como única solución x = 0

Probemos que L^t es inversible.

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ (x^t L)(x^t L)^t > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ \|L^t * x\|^2 > 0$$

Veamos que $L^t * x \neq 0$ ¿Cómo?

Propiedad

Sea A una matriz inversible. Entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene como única solución x = 0

Probemos que L^t es inversible. Dado que los elementos de la diagonal son positivos tenemos que

$$det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} > 0$$

Luego, A es inversible.

$$\forall x \neq 0,\ x^t * L * L^t * x > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ (x^t L)(x^t L)^t > 0$$

$$\forall x \neq 0,\ \|L^t * x\|^2 > 0$$

Veamos que $L^t * x \neq 0$ ¿Cómo?

Propiedad

Sea A una matriz inversible. Entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene como única solución x = 0

Probemos que L^t es inversible. Dado que los elementos de la diagonal son positivos tenemos que

$$det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii} > 0$$

Luego, A es inversible. Entonces **A es simétrica definida positiva**.

Bibliografía

Análisis numérico, International Thomson Editors, 1998.
Capítulo 6
R. Burden y J.D.Faires

Fin

¿Preguntas?