

Seminar
Justus-Liebig-Universität Gießen

Short-Rate Models

vorgetragen von
Christina Wißmeyer

10.12.20

Inhaltsverzeichnis

1	Zinsdynamik: Ein Paradigmenwechsel	7
1.1	Was sind Short-Rate Modelle?	7
1.2	Was sind Zero-Coupon-Bonds ?	10
1.3	Grundlagen	11
1.4	Das Marktmodell	13
1.5	Charakterisierung der Preise	19
1.6	Affine Term-Structures	22
2	Die Ergründung gängiger Modelle	27
2.1	Das Vasiček-Modell	27
2.2	Das Cox-Ingersoll-Ross-Modell	36
2.3	Das Dothan-Modell	40
2.4	Das Ho-Lee-Modell	42
2.5	Das Hull-White-Modell	45

List of figures

1.1	Entwicklung des Bankkontos im klassischen Modell . . .	7
2.1	Simulation von drei unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit jeweils gleichen Parametern $\beta = -0.86$, $b = 0.09 \cdot \beta $, $\sigma = 0.0148$ und $r_0 = 0.15$	29
2.2	Simulation von vier unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit unterschiedlichen Initialraten $r_0 = 0.2$ (blau), $r_0 = 0.05$ (grün), $r_0 = 0.01$ (rot) und $r_0 = 0$, aber sonst gleichen Parametern $\beta = -1.86$, $b = 0.09 \cdot \beta $, $\sigma = 0.0248$. Es liegt in allen vier Situationen ein Mean-Reversion-Level von $b/ \beta = 0.9$ vor und somit lässt sich erkennen, dass die Pfade in Richtung dieses Wertes gezogen werden.	32
2.3	Simulation von vier unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit unterschiedlichen Diffusionsparametern $\sigma = 0$ (blau) (deterministischer Spezialfall), $\sigma = 0.05$ (grün), $\sigma = 0.08$ (rot) und $\sigma = 0.01$ (orange), aber sonst gleichen Parametern $\beta = -1.86$, $b = 0.09 \cdot \beta $, $\sigma = 0.0248$ und $r_0 = 0.09$. Es liegt demnach in allen vier Situationen ein Mean-Reversion-Level von $b/ \beta = 0.9$ vor und somit lässt sich erkennen, dass die Pfade in Richtung dieses Wertes gezogen werden.	33
2.4	Simulation von drei Wurzel-Diffusionsprozessen mit gleichen Parametern, außer dass der grüne Pfad $\sigma = 0$ besitzt (deterministisch). Wir erkennen, dass sich die anderen Pfade um diesen deterministischen Pfad stochastisch bewegen (Mean-Reversion-Effekt).	36
2.5	Simulation von vier Short-Rate Pfaden im Ho-Lee-Modell. (Dabei sind die Parameter für die Pfade grün, rot, orange: $r_0 = 0.1$, $\sigma = 0.1$ und $b(t) = \sin(10 \cdot t)$ und für den blauen Pfad genauso bis auf $\sigma = 0$, also deterministisch). Die Simulation soll illustrieren, dass die Funktion b es unter anderem ermöglicht deterministische, periodisch wiederkehrende Struktureffekte abzubilden.	42

- 2.6 Simulation von vier Short-Rate Pfaden im Hull-White-Modell. (Dabei sind die Parameter für die Pfade grün, rot, orange: $r_0 = 0.1$, $\sigma = 0.1$, $\beta = -1$ und $b(t) = \sin(10 \cdot t)$ und für den blauen Pfad genauso bis auf $\sigma = 0$ also deterministisch). Die Simulation soll illustrieren, dass die Funktion b es unter anderem ermöglicht deterministische, periodisch wiederkehrende Struktureffekte abzubilden. 45

Kapitel 1

Zinsdynamik: Ein Paradigmenwechsel

1.1 Was sind Short-Rate Modelle?

Im klassischen [Black-Scholes-Modell](#) existiert eine Konstante r , genannt der risikolose Zinssatz. Legt ein Marktteilnehmer zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geldeinheit in dem zugehörigen risikolosen Asset $(S_t^0)_{t \geq 0}$ an, so besitzt dieser zu einem späteren Zeitpunkt \tilde{t} den Betrag

$$S_{\tilde{t}} = e^{\int_0^{\tilde{t}} r dv} = e^{r\tilde{t}},$$

auf dem Spargbuch.

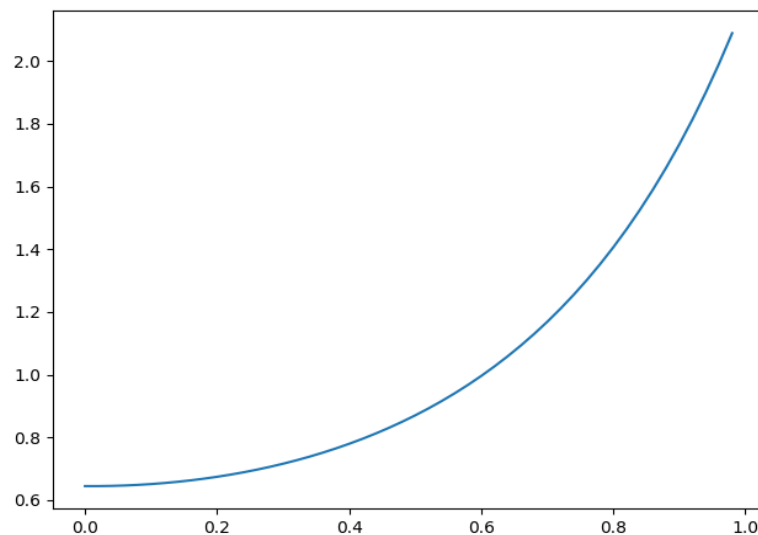


Abbildung 1.1: Entwicklung des Bankkontos im klassischen Modell

Der risikolose Zins spielt eine maßgebliche Rolle bei der Ermittlung arbitragefreier Preise von Finanzprodukten.

Zur Erinnerung: Hierzu benötigen wir ein äquivalentes Martingalmaß (ÄMM) Q , so dass die zu den gehandelten Ressourcen zugehörigen **diskontierten** Preisprozesse unter diesem Maß zu einem Martingal werden.

Reminder ((äquivalentes) Martingalmaß)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf (Ω, \mathcal{F}_N) heißt Martingalmaß, falls für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ der diskontierte Prozess

$$(X_k^i)_{k \in \{0, \dots, N\}} := \left(\frac{S_k^i}{S_k^0} \right)_{k \in \{0, \dots, N\}}$$

ein Q -Martingal bezüglich (\mathcal{F}_k) ist. Ein Martingalmaß Q heißt äquivalentes Martingalmaß, falls $Q \sim P$ auf (Ω, \mathcal{F}_N) .

Marktwirtschaftliche und empirische Beobachtungen haben gezeigt, dass die Annahme eines deterministischen und sogar konstanten Zinssatzes zu optimistisch ist.

Short-Rate Modelle eignen sich dazu den Begriff des Zinses, wie wir ihn kennen, zu verallgemeinern und damit eine bessere Beschreibung der Realität zu erlangen. Wenn wir uns auf diesen neuen Ansatz einlassen, ist der **Momentanzins ein stochastischer Prozess** $(r_t)_{t \in [0, T]}$, dessen Dynamik durch die stochastische Differentialgleichung

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad (1.1)$$

beschrieben wird, wobei W eine Brownsche Bewegung bezeichnet. Außerdem müssen die Funktionen b und σ nicht zwangsweise deterministisch sein, sondern können nach dieser allgemeinen Formulierung echte stochastische Prozesse sein.

Innerhalb dieses Seminars werden wir verschiedenste Modelle vom Typ (1.1) kennenlernen.

Bemerkung Setze $b(t) = 0$ und $\sigma(t) = 0$. Dann ist die Lösung von (1.1) zu der Anfangsbedingung $r(0)=r$ durch

$$r(t) = r,$$

gegeben. Wir erkennen also das in der Vorlesung behandelte Modell im Spezialfall wieder.

Die Betrachtung von Short-Rate Modellen bringt eine gewisse Art von Finanzprodukten hervor, die sogenannten **Zero-Coupon-Bonds**, welche im nächsten Abschnitt noch genauer betrachtet werden. Vorweg wird aber schonmal eine grobe Definition angegeben.

Zero-Coupon-Bonds: Wie viel Geld müssen wir heute anlegen, um zum Fälligkeitszeitpunkt T einen Euro zu erhalten? Diesen Betrag bezeichnen wir mit $P(t, T)$.

Kommentar:

Wenn wir an die Vorlesung mit deterministischem Zinssatz r zurückdenken, sind solche Produkte recht langweilig. Dort kann man sich sehr leicht ausrechnen, wie viel Geld man auf sein Sparkonto legen muss, um zu einem beliebigen Zeitpunkt T einen Euro zu besitzen. Für die Bewertung eines solchen Produktes braucht man also keine Martingalthorie bzw. Martingalmaße zu verwenden. Für ein allgemeines Short-Rate Modell stellt sich diese Frage jedoch als nicht-trivial heraus. Diese Problemstellung wollen wir innerhalb dieser Arbeit untersuchen.

Außerdem sind Short-Rate Modelle Finanzmarktmodelle, bei denen als Ausgangspunkt immer die Dynamik des Momentanzinses r (Short-Rate) betrachtet wird. Ziel ist es dann aus dieser Schlüsse zur Berechnung der Preise von Zero-Coupon-Bonds zu ziehen und weiter die Preise verschiedener Finanzmarktderivate abzuleiten.

Die **Short-Rate** $r = (r(t))_{t \in [0, T]}$ ist also der Prozess, welcher **jegliche Informationen über die Zinsstruktur des Modells enthält**.

Zu einem festen Zeitpunkt t stellt die Variable $r(t)$ den augenblicklichen Zinssatz für einen infinitesimal kurzen Zeitraum dar und ihre Entwicklung wird durch eine stochastische Differentialgleichung dargestellt.

1.2 Was sind Zero-Coupon-Bonds ?

Ein Zero-Coupon-Bond stellt einen Vertrag dar, der dem Inhaber am Ende der Laufzeit eine sichere Zahlung in Höhe eines Euros garantiert, während der Laufzeit aber keine Zinserträge liefert. Der Preis des Zero-Bonds entspricht also dem heutigen Wert von einem Euro zum Zeitpunkt T .

Definition (Zero-Coupon-Bonds)

Ein Zero-Coupon-Bond bzw. Nullkuponanleihe ist ein Finanzgut, welches zu einem fest vereinbarten Zeitpunkt, dem Fälligkeitszeitpunkt (Maturity) $T > 0$, den Nennwert $N=1$ zahlt. Der Preis einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq T$, wird mit $P(t, T)$ bezeichnet.

Annahmen in der Theorie:

- für jedes $T > 0$ existiert ein reibungsloser Markt für T -Anleihen (T -Bonds). Das heißt für beliebige $T > t$ kann man einen Zero-Bond $P(T, t)$ am Markt kaufen.
- $P(T, T) = 1 \forall T$.
- $P(t, T)$ ist in T differenzierbar.

In der Realität stellen sich diese Annahmen als idealisiert heraus. Zero-Coupon-Bonds werden nicht für alle Laufzeiten gehandelt und $P(T, T)$ kann kleiner 1 sein.

Als Beispiel denken wir an das Szenario, dass die Bank bei dem der Marktteilnehmer den Bond erstanden hat vor T pleite geht und somit nicht zum Fälligkeitsdatum einen Euro auszahlen kann.

Die dritte Bedingung impliziert, dass die Termstruktur der Zero-Coupon-Bond-Preise $T \rightarrow P(t, T)$ (auch Abzinsungskurve genannt) eine glatte Kurve ist. Dies ist eine eher technische Voraussetzung und wird bei der Anwendung der Itô-Formel benötigt.

Der [Preisprozess der Nullkuponanleihe](#) mit Fälligkeit T entspricht der Abbildung

$$P(t, T) : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+, (t, w) \rightarrow P(t, T)(w).$$

Es handelt sich hierbei um einen stochastischen Prozess, da die Anleihepreise $P(t, T)$ nicht mit Sicherheit vor t bekannt sind. Außer in dem trivialen Fall bei dem der Zinsprozess deterministisch ist.

1.3 Grundlagen

Um in erster Linie die Notation einzuführen, die wir in dieser Abhandlung verwenden, werden zunächst ein paar wichtige Definitionen und Sätze wiederholt.

Reminder (Brownsche Bewegung)

Eine Familie $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) heißt Brownsche Bewegung, falls gilt:

1. $W_0 = 0$,
 2. $\forall w \in \Omega$ ist die Abbildung $\rightarrow W_t(w)$ stetig,
 3. $\forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ sind die Zuwächse $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$ unabhängig,
 4. $\forall 0 \leq s \leq t$ gilt: Die Verteilung von $W_t - W_s$ ist $\mathcal{N}(0, t - s)$.
-

Reminder (stochastisches Exponential + Eigenschaften)

Es sei $(X_t)_{t \in I}$ ein Itô-Prozess. Wir bezeichnen den stochastischen Prozess $(\mathcal{E}_t(X))_{t \in I}$ definiert durch

$$\mathcal{E}_t(X) = e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X, X \rangle_t}, \quad (\text{K1})$$

als das stochastische Exponential des Prozesses von X . Dieser Prozess besitzt eine Reihe nützlicher Eigenschaften, die auch beim Maßwechsel von Girsanov eine Rolle spielen. Zudem folgt, dass das stochastische Exponential $\mathcal{E}(X)$ ein lokales Martingal ist, wenn X ein lokales Martingal ist.

Bemerkung: Wir haben das stochastische Exponential in (K1) konstruktiv eingeführt. Es lässt sich weiter zeigen, dass sich das stochastische Exponential auch als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dU_t = U_t dX_t,$$

äquivalent definieren lässt.

Reminder (Maßwechsel von Girsanov)

Es sei $(\gamma_t)_{t \in I}$ ein stochastischer Prozess mit der Eigenschaft

$$\int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds < \infty \quad \forall t > 0$$

und dass der Prozess $(\mathcal{E}_t(\int_0^\cdot \gamma_s dW_s))_{t \in I}$ ein gleichgradig integrierbares Martingal ist mit $\mathcal{E}_\infty(\int_0^\cdot \gamma_s dW_s) > 0$. Dann wird durch

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\infty\left(\int_0^\cdot \gamma_s dW_s\right)$$

ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ definiert und der Prozess $(W^*(t))_{t \in I}$ definiert durch

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s) ds,$$

ist eine Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q} .

Wir kennen γ auch als [Market Price of Risk](#). Dieser besitzt eine anschauliche wirtschaftliche Interpretation, auf die in einem späteren Kapitel noch genauer eingegangen wird.

1.4 Das Marktmodell

Konstruktion: Gegeben sei ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}).$$

Das Maß \mathbb{P} steht für das objektive Wahrscheinlichkeitsmaß, also diejenige Verteilung die den am Markt beobachteten Prozessen und Größen zugrundeliegt. Zudem sei W eine Brownsche Bewegung auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum.

Wir nehmen folgendes an:

- (a) Die Entwicklung der Short-Rate wird durch einen **Itô-Prozess**

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

dargestellt.

- (b) Es existiert ein **risikoloses Geldmarktkonto** $B(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$, dessen Preisprozess als stochastischer Diskontfaktor dient.

Dies ist bereits aus der Vorlesung bekannt, denn dort hatten wir neben den Aktienpreisprozessen ebenfalls ein risikoloses Asset beschrieben, nämlich das Sparbuch. Im Unterschied dazu ist dieses hier aber stochastisch.

- (c) **No Arbitrage:** Es existiert ein ÄMM \mathbb{Q} der Form $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}_\infty(\int_0^\cdot \gamma(s)dW_s)$, unter dem der abdiskontierte Zero-Coupon-Bond-Preisprozess $\frac{P(t,T)}{B(t)}$, $t \leq T$ ein \mathbb{Q} -Martingal ist und $P(T, T) = 1 \ \forall \ T > 0$.

In der Vorlesung hatten wir neben unserem risikoloses Geldmarktkonto zusätzlich noch einen Aktienpreisprozess gegeben und aus diesen beiden Prozessen lies sich der Market Price of Risk endogen aus dem Marktmodell herleiten und somit das Martingalmaß \mathbb{Q} bestimmen. Da wir hier nun nur ein risikoloses Geldmarktkonto gegeben haben, wird nicht festgelegt wie der Prozess γ genau aussieht, sondern nur dessen Existenz angenommen.

Damit haben wir den allgemeinen Rahmen festgelegt, den wir in den nächsten Abschnitten noch genauer untersuchen werden.

Am Ende dieser Arbeit werden wir außerdem grundlegende Eigenschaften für die wichtigsten Spezialfälle herausarbeiten, also Fälle betrachten in denen wir die Funktionen b und σ genauer spezifizieren.

Die in dieser Arbeit besprochenen Short-Rate Modelle haben allesamt die folgenden beiden Eigenschaften:

- $(r(t))_{0 \leq t \leq T}$ hat stetige Pfade.

Dies ist eine Eigenschaft bei welcher man sich überlegen könnte, ob diese denn wirklich in der Realität zutrifft?

Anschaulich interpretiert bedeutet Stetigkeit, dass sich von jetzt auf gleich nicht viel ändert. Wenn aber beispielsweise Nachrichten veröffentlicht werden kann es durchaus sein, dass der Markt abrupt darauf reagiert.

- $(r(t))$ ist ein Markov-Prozess.

Dies kann so übersetzt werden, dass zukünftige Entwicklungen der Short-Rate nur von dem momentanen Zins abhängen.

Auch diese Eigenschaft könnte man in der Realität hinterfragen.

Im Folgenden Stellen wir uns zwei Szenarien vor. Einmal wenn die Zinsen aktuell bei dem Wert $r(t) = 0.04$ sind und seit den letzten Jahren permanent ansteigend waren, gegen die Situation bei der der Momentanzins ebenfalls bei $r(t) = 0.04$ liegt, die Zinsen in den letzten Jahren jedoch ausnahmslos fallend waren. Nach den diskutierten Modellen spielt es keine Rolle wie das System in den aktuellen Zustand $r(t) = 0.04$ gekommen ist in Hinsicht auf zukünftige Entwicklungen.

Die Annahme in (c), dass \mathbb{Q} nicht nur ein ÄLMM (äquivalentes lokales Martingalmaß) sondern ein ÄMM (äquivalentes Martingalmaß) ist benötigen wir, damit folgendes Korollar gilt.

Korollar(Risikoneutrale Bewertungsgleichung)

Ist \mathbb{Q} ein äquivalentes Martingalmaß, dann gilt für den Preis eines T-Bonds in t

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} | \mathcal{F}_t].$$

Beweis:

Aus der Martingaleigenschaft der abdiskontierten Bondpreise unter \mathbb{Q} folgt für $0 \leq t \leq T$:

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{P(T, T)}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] \underbrace{=}_{P(T, T)=1} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{B(T)} | \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(s) ds} | \mathcal{F}_t \right].$$

Da die Zufallsvariable $B(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}$ messbar bezüglich \mathcal{F}_t ist ergibt sich die Behauptung. □

In unserem nächsten Satz betrachten wir die Dynamik der Short-Rate und T -Bond Preisprozesse unter dem ÄMM.

Satz

Die Short-Rate $r(t)$ folge einem Itô-Prozess unter dem objektiven Maß \mathbb{P} mit der obigen stochastischen Differentialgleichung (1.1). Dann gilt unter jedem zu \mathbb{P} äquivalenten Martingalmaß \mathbb{Q} :

Der Prozess $r(t)$ genügt unter \mathbb{Q} der Dynamik

$$dr(t) = (b(t) + \sigma(t)\gamma(t))dt + \sigma(t)dW^*(t),$$

wobei $W^*(t)$ eine Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q} bezeichne.

Wenn die Filtration (\mathcal{F}_t) durch die Brownsche Bewegung W erzeugt wird, existiert außerdem für jedes $T > 0$ ein progressiver \mathbb{R} -wertiger Prozess $v(t, T)$, $t \leq T$, sodass

$$dP(t, T) = P(t, T)(r(t)dt + v(t, T)dW^*(t))$$

und daher

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = P(0, T)\mathcal{E}_t\left(\int_0^t v(s, T)dW^*(s)\right).$$

Beweis:

Der erste Teil des Satzes ergibt sich aus der Tatsache, dass der Prozess $(W^*(t))_{t \in I}$ definiert durch

$$W^*(t) = W(t) - \int_0^t \gamma(s)ds$$

eine Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q} ist ([Satz von Girsanov](#)).

In Differentialschreibweise erhalten wir

$$\begin{aligned} dW^*(t) &= dW(t) - \gamma(t)dt \\ \Leftrightarrow dW(t) &= dW^*(t) + \gamma(t)dt. \end{aligned}$$

Für die Dynamik der Short-Rate folgt damit

$$\begin{aligned} dr(t) &= b(t)dt + \sigma(t)dW(t) \\ &= b(t)dt + \sigma(t)(dW^*(t) + \gamma(t)dt) \\ &= b(t)dt + \sigma(t)dW^*(t) + \sigma(t)\gamma(t)dt \\ &= (b(t) + \sigma(t)\gamma(t))dt + \sigma(t)dW^*(t). \end{aligned}$$

Wir definieren den stochastischen Prozess $(\tilde{P}(t, T))_{t \in I}$ durch

$$\tilde{P}(t, T) = \frac{P(t, T)}{B(t)}.$$

Dies ist der [diskontierte Preisprozess von \$P\$](#) und ist nach Annahme somit ein Martingal unter \mathbb{Q} .

Da die Filtration, an die das Martingal \tilde{P} adaptiert ist von einer Brownschen Bewegung erzeugt wird, folgt mit dem [Martingaldarstellungssatz](#) die Existenz eines progressiven Prozesses ψ mit

$$d\tilde{P}(t, T) = \psi(t, T)dW^*(t).$$

Wir erhalten die gewünschte Darstellung des Prozesses P durch

$$\begin{aligned} dP(t, T) &= d\left(\frac{B(t)}{B(t)}P(t, T)\right) \\ &= dB(t)\tilde{P}(t, T) \\ &= B(t)d\tilde{P}(t, T) + \tilde{P}(t, T)dB(t) \\ &= B(t)\psi(t, T)dW^*(t) + \tilde{P}(t, T)r(t)B(t)dt \\ &= B(t)\psi(t, T)dW^*(t) + P(t, T)r(t)dt \\ &= P(t, T) \left(r(t)dt + \underbrace{\frac{B(t)\psi(t, T)}{P(t, T)}}_{:=v(t, T)} dW^*(t) \right). \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\frac{P(t, T)}{B(t)} = P(0, T)\mathcal{E}_t\left(\int_0^t v(s, T)dW^*(s)\right).$$

Es gilt

$$\partial_t \frac{1}{B(t)} = \partial_t e^{-\int_0^t r(s)ds} = -r(t) \frac{1}{B(t)}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} d\tilde{P}(t, T) &= dP(t, T) \frac{1}{B(t)} \\ &= -P(t, T) r(t) \frac{1}{B(t)} dt + \frac{1}{B(t)} dP(t, T) \\ &= -P(t, T) r(t) \frac{1}{B(t)} dt + \frac{1}{B(t)} P(t, T) (r(t) dt + v(t, T) dW^*(t)) \\ &= \frac{1}{B(t)} P(t, T) v(t, T) dW^*(t) \\ &= \tilde{P}(t, T) v(t, T) dW^*(t). \end{aligned}$$

Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$d\tilde{P}(t, T) = \tilde{P}(t, T) \underbrace{v(t, T) dW^*(t)}_{:=dX_t}$$

ist das stochastische Exponential bezüglich des Prozesses $(X_t)_{t \in I}$.

Es gilt demnach

$$\tilde{P}(t, T) = \tilde{P}(0, T) \mathcal{E}_t \left(\int_0^t v(s, T) dW^*(s) \right)$$

und somit die Behauptung.

□

Die Betrachtung der Dynamiken unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} haben wir nicht ohne Grund vorgenommen. Neben der Notwendigkeit zur Bestimmung des arbitragefreien Preises werden wir in den später diskutierten Spezialfällen sehen, dass die Short-Rate Dynamiken nicht unter dem objektiven Maß \mathbb{P} eingeführt werden, sondern dem Martingalmaß \mathbb{Q} . Dies wurde bei der Definition des Marktmodells bereits im Zusammenhang mit dem Market Price of Risk angedeutet und im Folgenden nun weiter vertieft.

Bemerkung (Market Price of Risk γ)

Der Marktpreis des Risikos $\gamma = \frac{\mu-r}{\sigma}$ ist ein Quotient der angibt, wie lohnend ein Investment in ein risikobehaftetes Asset ist, im Vergleich zu einer Anlage zum risikolosen Zins r . *Zur Erklärung:* γ ist ein Quotient, also ein Vergleich der beiden Größen $(\mu - r)$ und σ .

Der Market Price of Risk wird also groß, wenn entweder der Markt wenig volatil ist oder μ den risikolosen Zins r weit übertrifft. Beide Szenarien begünstigen aber die Bereitschaft eines Marktteilnehmers sich für ein Investment in ein risikobehaftetes Asset zu entscheiden.

Im klassischen Black-Scholes-Modell hatten wir ein risikoloses Asset $(S_t^0)_{t \in I}$ mit

$$S_t^0 = e^{rt},$$

mit einer Konstanten (Short-Rate) r und ein risikobehaftetes Asset $(S_t^1)_{t \in I}$ definiert durch

$$S_t^1 = S_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t},$$

mit Driftparameter μ und Diffusionsparameter σ gegeben. Aus diesem Modell ließ sich der Marktpreis des Risikos mit

$$\gamma(t) = \gamma = \frac{\mu - r}{\sigma},$$

endogen aus dem Marktmodell heraus ableiten.

Im Seminar: Hier haben wir nur einen stochastischen Prozess $(r(t))_{t \in I}$ gegeben und nehmen an, dass ein Martingalmaß \mathbb{Q} existiert. Ein Marktmodell, das lediglich aus einem risikolosen Asset, also dem Geldmarktkonto, besteht, ist jedoch nicht vollständig. Somit lässt sich der Market Price of Risk $(\gamma(t))_{t \in I}$ nicht aus dem Modell endogen herleiten und muss exogen hinzugefügt werden. Aus diesem Grund ist es in der Literatur üblich die Dynamik der Short-Rate unter dem risikolosen Maß \mathbb{Q} zu postulieren. Dieser Umstand wird im späteren Teil des Seminars deutlich, wenn wir eine Reihe von berühmten Modellen genauer betrachten.

1.5 Charakterisierung der Preise

Ziel dieses Abschnittes ist es den arbitragefreien Preis einer Auszahlung $\Phi(r(T))$ in Form einer Differentialgleichung zu charakterisieren. Wir betrachten demnach Optionen deren Auszahlung zur Zeit T lediglich abhängig vom Zustand der Short-Rate r zum Endzeitpunkt T ist.

Bemerkung: Unser ursprüngliches Ziel bestand darin Zero-Optionen $P(t, T)$ in Short-Rate Modellen zu bewerten. Setzen wir $\Phi = 1$, so erreichen wir dies als Spezialfall.

Bemerkung: Denken wir zurück an das Black-Scholes-Modell. Wenn wir in diesem eine [pfadunabhängige Option \$\Phi\$](#) zu einem beliebigen Zeitpunkt t bewerten wollten, musste die Betrachtung des abdiskontierten Erwartungswertes unter dem äquivalenten Martingalmaß herangezogen werden.

Es galt demnach im Modell mit deterministischer Verzinsung r und risikobehaftetem Aktienpreisprozess X die Gleichung

$$P_\Phi(t, T) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q[\Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t]. \quad (1.2)$$

Die Betrachtung von Optionen deren Auszahlung vom Zustand r abhängt, spielt im klassischen Black-Scholes-Modell keine Rolle, da der assoziierte arbitragefreie Preisprozess zu einer Option mit Auszahlungsprofil $\Phi(r(T)) = \Phi(r)$ deterministisch ist und hierfür offensichtlich keine tiefgreifenden mathematischen Methoden zur Bewertung herangezogen werden müssen.

Für den Fall (1.2) bereits bekannt ist die sogenannte [Feynman Formel](#), als Charakterisierung des arbitragefreien Preises durch eine Differentialgleichung. Diese ist gegeben durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, x) + rx \partial_x F(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \partial_x^2 F(t, x) - rF(t, x) &= 0 \\ F(T, x) &= \Phi(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Eine Funktion F , die diese Gleichung erfüllt, gibt den arbitragefreien Preis zur Zeit t an durch

$$F(t, X_t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_Q[\Phi(X_T) \mid \mathcal{F}_t].$$

Der Preis zur Zeit t einer solchen Option hängt lediglich vom jetzigen Aktienwert X_t und dem aktuellen Zeitpunkt t ab. Diese (semi)-Markoveigenschaft werden wir ebenfalls als typisches Muster wiedererkennen.

Im Folgenden Lemma wird die Differentialgleichung zur Bewertung einer Option angegeben, dessen Payoff von dem Endzustand der Short-Rate $r(T)$ abhängt. Wir sehen unmittelbar, dass diese die selbe Struktur aufweist wie die Differentialgleichung im Black-Scholes-Modell.

Lemma (Term-Structure Gleichung)

Sei $T > 0$ und Φ eine stetige Funktion auf \mathcal{Z} (Zustandsraum der Short-Rate) und man nehme an, dass $F = F(t, r) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{Z})$ eine Lösung für das Randwertproblem auf $[0, T] \times \mathcal{Z}$

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, r) + b(t, r) \partial_r F(t, r) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) \partial_r^2 F(t, r) - r F(t, r) &= 0, \\ F(T, r) &= \Phi(r) \end{aligned}$$

ist. Dann ist

$$M(t) = F(t, r(t)) e^{-\int_0^t r(u) du}, \quad t \leq T,$$

ein lokales Martingal. Wenn zusätzlich eine der Bedingungen

- (a) $\mathbb{E}[\int_0^T |\partial_r F(t, r(t)) e^{-\int_0^t r(u) du} \sigma(t, r(t))|^2 dt] < \infty$ oder
- (b) M ist gleichmäßig beschränkt

erfüllt ist, dann ist M ein wahres Martingal und

$$F(t, r(t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(u) du} \Phi(r(T)) | \mathcal{F}_t \right], \quad t \leq T.$$

Beweis:

Wir können die [Produktformel von Itô](#) auf $dM(t) = d \left(F(t, r(t)) \cdot e^{-\int_0^t r(u) du} \right)$ anwenden. Es gilt

$$F(t, r(t)) d(e^{-\int_0^t r(u) du}) = -r(t) e^{-\int_0^t r(u) du} F(t, r(t)) dt$$

und

$$\begin{aligned} &e^{-\int_0^t r(u) du} dF(t, r(t)) \\ &= e^{-\int_0^t r(u) du} \left[\left(\partial_t F(t, r(t)) + b(t, r(t)) \partial_r F(t, r(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r(t)) \partial_r^2 F(t, r(t)) \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \sigma(t, r(t)) \partial_r F(t, r(t)) dW^*(t) \right]. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Produktformel erhalten wir somit

$$\begin{aligned} dM(t) &= \left(\partial_t F(t, r(t)) + b(t, r(t)) \partial_r F(t, r(t)) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r(t)) \partial_r^2 F(t, r(t)) \right. \\ &\quad \left. - r(t) F(t, r(t)) \right) \cdot e^{-\int_0^t r(u) du} dt + \partial_r F(t, r(t)) e^{-\int_0^t r(u) du} \sigma(t, r(t)) dW^*(t) \\ &= \partial_r F(t, r(t)) e^{-\int_0^t r(u) du} \sigma(t, r(t)) dW^*(t). \end{aligned}$$

Somit ist M ein lokales Martingal, da sich der Prozess als stochastisches Integral bezüglich einer Brownschen Bewegung darstellen lässt und das stochastische Integral als Prozess ein lokales Martingal ist, wenn der Integrand ein Martingal ist. Selbstverständlich ist die Brownsche Bewegung ein Martingal.

Sobald die Bedingung (a) oder (b) erfüllt ist, handelt es sich bei M sogar um ein Martingal bzgl. \mathbb{Q} .

Der Prozess M erfüllt zum Zeitpunkt T die Gleichung

$$M(T) = \Phi(r(T))e^{-\int_0^T r(u)du}.$$

Somit können wir in Situation (a) als auch (b) folgern

$$F(t, r(t))e^{-\int_0^t r(u)du} = M(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{e^{-\int_0^T r(u)du} \Phi(r(T))}_{M(T)} \mid \mathcal{F}_t \right].$$

Das Multiplizieren beider Seiten mit $e^{\int_0^t r(u)du}$ ergibt die Forderung.

□

Bemerkung (Eine geschlossene Formel für die Bepreisung)

Wir haben nun für ein (relativ) allgemeines Short-Rate Modell eine hinreichende Bedingung an eine Funktion F angegeben, welche sicherstellt, dass die Funktion den arbitragefreien Preis einer vom Endzustand $r(T)$ abhängigen Option widerspiegelt.

Die Frage, wie diese Funktion F für einen Zero-Coupon mit beliebiger Laufzeit T in einem konkreten Modell aussieht, ist mit diesem Abschnitt nicht beantwortet. Da die Anzahl von möglichen Zeitpunkten T ziemlich mächtig ist, nämlich überabzählbar, ist es eher weniger gewünscht, wenn diese durch ein numerisches Verfahren bestimmt werden müssen. Modelle, deren Lösungen sich in einer geschlossenen Formel angeben lassen und gleichzeitig flexibel sind, sind somit zu bevorzugen.

1.6 Affine Term-Structures

Die letzte Bemerkung aus dem vorherigen Abschnitt hat gezeigt, dass es in Anwendungen wünschenswert ist eine geschlossene Formel für die gesuchte Funktion F angeben zu können. In dem jetzigen Abschnitt werden wir eine Klasse von Modellen spezifizieren, die eben genau diese Eigenschaft erfüllen. Die Rede ist von Short-Rate Modellen mit affiner Laufzeitstruktur.

Definition(Affine Laufzeitstruktur (ATS))

Wir sagen ein Short-Rate Modell r ist von affiner Laufzeitstruktur, wenn der Zero-Coupon-Preis mit Laufzeit T zur Zeit t die Darstellung

$$F(t, r, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r),$$

mit glatten Funktion A und B zulässt.

Der Begriff affine Struktur motiviert sich durch den affinen Exponenten, der die Struktur einer affinen Funktion aufweist, wenn wir A und B als Koeffizienten ansehen. Als kleine Vorbemerkung sei zudem erwähnt, dass $F(T, r, T) = 1$ impliziert $B(T, T) = A(T, T) = 0$.

Der folgende Satz gibt ein notwendiges und zugleich hinreichendes Kriterium für die Dynamik der Short-Rate r an, sodass eine affine Laufzeitstruktur vorliegt.

Satz (Spezifikation der ATS anhand der Dynamik von r)

Ein Short-Rate Modell r mit Dynamik

$$dr(t) = b(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW^*(t),$$

liefert eine ATS genau dann wenn seine Diffusions- und Driftterme der Form

$$\sigma^2(t, r) = a(t) + \alpha(t)r \text{ und } b(t, r) = b(t) + \beta(t)r,$$

für stetige Funktionen a, α, b, β genügen und die Funktionen A und B die Lösung des Systems

$$\partial_t A(t, T) = \frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \tag{I}$$

$$\partial_t B(t, T) = \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0,$$

darstellen.

Beweis:

Es liege die in dem Satz formulierte Situation vor.

Wir wissen nach dem [Term-Structure Lemma](#), dass die Funktion

$$F(t, r; T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r) \quad (1.4)$$

den [arbitragefreien Preis zur Zeit \$t\$](#) genau dann darstellt, wenn die Bedingungen

$$\partial_t F(t, r) + b(t, r)\partial_r F(t, r) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)\partial_r^2 F(t, r) - rF(t, r) = 0, \quad (1.5)$$

$$F(T, r, T) = 1 \quad (1.5')$$

erfüllt sind. Bedingung (1.5') ergibt sich direkt aus den Annahmen.

Aus der Darstellung (1.4) folgt

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, r) &= -(\partial_t A(t, T) + \partial_t B(t, T)r(t))F(t, r), \\ \partial_r F(t, r) &= -B(t, T)F(t, r), \\ \partial_r^2 F(t, r) &= B^2(t, T)F(t, r). \end{aligned}$$

Die linke Seite von Gleichung (1.5) wird demnach zu

$$\begin{aligned} & -(\partial_t A(t, T) + \partial_t B(t, T)r)F(t, r) - b(t, r)B(t, T)F(t, r) \\ & + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T)F(t, r) - rF(t, r) \\ & = (-\partial_t A(t, T) - \partial_t B(t, T)r - b(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) - r)F(t, r) \\ & = \left(-\frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) + b(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T)r \right. \\ & \quad \left. + \beta(t)B(t, T)r + r - b(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) - r \right)F(t, r) \\ & = \left(-\frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) + b(t)B(t, T) - \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T)r \right. \\ & \quad \left. + \beta(t)B(t, T)r - b(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) \right)F(t, r) \\ & = \left(-\frac{1}{2}(a(t) + \alpha(t)r)B^2(t, T) + (b(t) + \beta(t)r)B(t, T) \right. \\ & \quad \left. - b(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) \right)F(t, r) \\ & = \left(-\frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) + b(t, r)B(t, T) - b(t, r)B(t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, r)B^2(t, T) \right)F(t, r) \\ & = 0. \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung in (1.5) erfüllt. F stellt also in der Tat den arbitragefreien Preisprozess dar und die gemachten Annahmen sind ein hinreichendes Kriterium.

Im letzten Schritt zeigen wir, dass diese Annahmen sogar notwendig sind, was den Beweis vervollständigt.

Sei $t \geq 0$ fest aber beliebig. Wir nehmen zunächst an, dass die Funktionen $B(t, \cdot)$ und $B^2(t, \cdot)$ **linear unabhängig** sind (d.h. $c_1 B + c_2 B^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$).

Dann können wir $T_1 > T_2 > t$ finden, sodass die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} B^2(t, T_1) & -B(t, T_1) \\ B^2(t, T_2) & -B(t, T_2) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Mit der vorherigen Kalkulation lässt sich die Gleichung in (1.5) auf die äquivalente Gleichung

$$\frac{1}{2} \sigma^2(t, r) B^2(t, T) - b(t, r) B(t, T) = \partial_t A(t, T) + (\partial_t B(t, T) + 1)r \quad (\text{II})$$

bringen. Damit leiten wir unmittelbar durch Einsetzen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \sigma^2(t, r)/2 \\ b(t, r) \end{pmatrix} = M^{-1} \left(\begin{pmatrix} \partial_t A(t, T_1) \\ \partial_t A(t, T_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial_t B(t, T_1) + 1 \\ \partial_t B(t, T_2) + 1 \end{pmatrix} r \right) \quad (1.6)$$

ab. Somit sind $\sigma^2(t, r)$ und $b(t, r)$ **affine Funktionen von r** , wie es in der Formulierung des Satzes angegeben ist.

Durch Einsetzen der gezeigten affinen Darstellungen von $\sigma(t, r)$ und $b(t, r)$ wird die linken Seite von (II) zu

$$\frac{1}{2} a(t) B^2(t, T) - b(t) B(t, T) + \left(\frac{1}{2} \alpha(t) B^2(t, T) - \beta(t) B(t, T) \right) r.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite von (II) erhalten wir Voraussetzung (I).

Es bleibt der Fall zu betrachten, in dem $B(t, \cdot) = c(t) B^2(t, \cdot)$ für eine Konstante $c(t)$ ist (**lineare Abhängigkeit**).

Dies impliziert jedoch $B(t, \cdot) \equiv B(t, t) = 0$ und im Hinblick auf (II) also $\partial_t B(t, T) = -1$. Daher ist die Menge der Elemente t , für die die Funktionen $B(t, \cdot)$ und $B^2(t, \cdot)$ linear unabhängig sind, offen und dicht in \mathbb{R}_+ .

Durch die Stetigkeit von $\sigma(t, r)$ und $b(t, r)$ schließen wir Existenz der Darstellungen

$$\sigma^2(t, r) = a(t) + \alpha(t)r \text{ und } b(t, r) = b(t) + \beta(t)r,$$

und folglich das (I) für alle t gilt.

□

Mit dem vorherigen Satz wird die Frage nach der Funktion F zu einem gegebenen Short-Rate Modell mit affiner Laufzeitstruktur äquivalent zu der Bestimmung der beiden Funktionen A und B , denn wir wissen im Falle einer (ATS) haben wir unmittelbar $F(t, r; T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r(t))$ gegeben.

Die Herleitung dieser beiden Abbildungen wird für eine kleine Auswahl von (ATS) Modellen in den folgenden Abschnitten anhand von Beispielen dargelegt werden.

Kapitel 2

Die Ergründung gängiger Modelle

2.1 Das Vasiček-Modell

Im Vasiček-Modell wird die Short-Rate durch einen sogenannten [Ornstein-Uhlenbeck-Prozess](#) modelliert. Der Short-Rate Prozess ergibt sich als Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma dW^*$$

mit festen aber beliebigen Konstanten b, β und σ und Anfangswert $r(0) = r_0$. Dabei ist W^* wie gewohnt eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} . Die Parameter lassen sich sehr leicht interpretieren und werden in den folgenden Diskussionen/Simulationen dargelegt.

Ein Vorteil des Modells ist, dass die Lösung $r(t)$ der DGL [Gauß-verteilt](#) ist mit leicht ermittelbarem Mittelwert und Varianz. Das Modell besitzt eine (ATS) und somit lässt sich der arbitragefreie Preisprozess der Zero-Coupons explizit ermitteln.

Lösung der stochastischen Differentialgleichung

Da die Short-Rate durch eine stochastische Differentialgleichung dargestellt wird, ist das nächste Ziel nun die Lösung dieses Anfangswertproblems zu bestimmen.

Dazu betrachten wir den Prozess $Y(t) = e^{-\beta t}r(t)$ und wenden darauf

Itô's Lemma an:

$$\begin{aligned} dY(t) &= e^{-\beta t} dr(t) - \beta e^{-\beta t} r(t) dt \\ &= e^{-\beta t} ((b + \beta r(t)) dt + \sigma dW^*(t)) - \beta e^{-\beta t} r(t) dt \\ &= b e^{-\beta t} dt + e^{-\beta t} \sigma dW^*(t). \end{aligned}$$

Integrieren der Gleichung liefert

$$Y(t) = \underbrace{Y(0)}_{e^{-\beta \cdot 0} r(0) = r(0)} + \int_0^t b e^{-\beta s} ds + \int_0^t e^{-\beta s} \sigma dW^*(s).$$

Es gilt

$$Y(t) = e^{-\beta t} r(t) \Leftrightarrow r(t) = e^{\beta t} Y(t)$$

und somit

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{\beta t} Y(t) \\ &= e^{\beta t} \left(r(0) + \int_0^t b e^{-\beta s} ds + \int_0^t e^{-\beta s} \sigma dW^*(s) \right) \\ &= e^{\beta t} r(0) + \int_0^t b e^{\beta(t-s)} ds + \int_0^t e^{\beta(t-s)} \sigma dW^*(s) \\ &= e^{\beta t} r(0) + b \int_0^t e^{\beta(t-s)} ds + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \\ &= e^{\beta t} r(0) + b \left[-\frac{1}{\beta} e^{\beta(t-s)} \right]_0^t + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \\ &= e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (-e^0 + e^{\beta t}) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \\ &= e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s). \end{aligned}$$

Wir haben somit eine Darstellung für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess aus der stochastischen Differentialgleichung hergeleitet.

Anhand dieser Form können wir direkt einsehen, dass die Short-Rate zu einem festen aber beliebigen Zeitpunkt t unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} [normalverteilt](#) ist, da $\sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s)$ als Itô-Integral über eine deterministische Funktion normalverteilt ist und die restlichen Terme von $r(t)$ deterministisch sind.

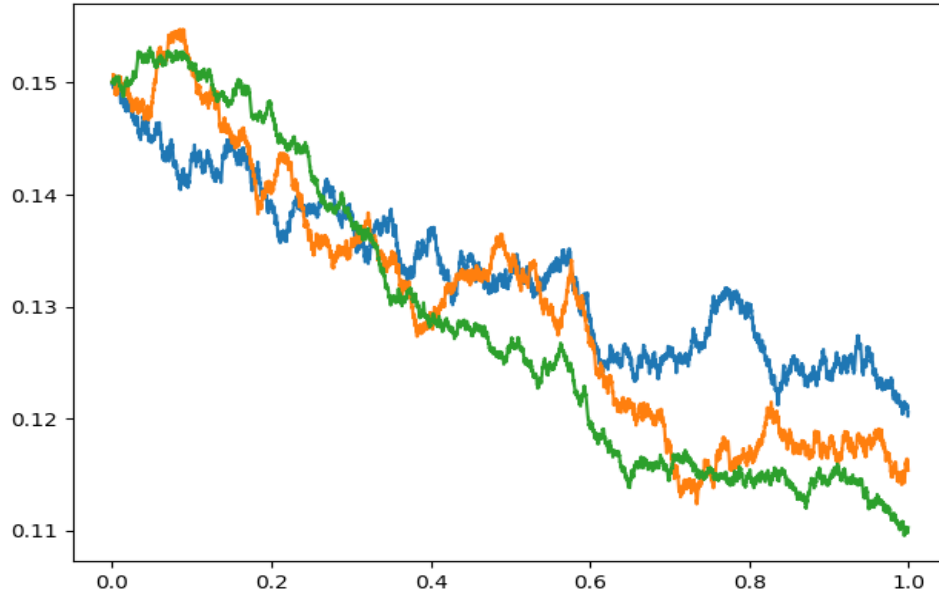


Abbildung 2.1: Simulation von drei unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit jeweils gleichen Parametern $\beta = -0.86$, $b = 0.09 \cdot |\beta|$, $\sigma = 0.0148$ und $r_0 = 0.15$.

Grundlegende statistische Merkmale

Als Nächstes werden die grundlegenden statistischen Größen wie Erwartungswert und Varianz der Short-Rate im Vasiček-Modell untersucht. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right] \\
 &= e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^t \sigma e^{\beta(t-s)} dW^*(s) \right]}_{\text{Martingal mit Start in 0, also } =0} \\
 &= e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1).
 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert der Short-Rate ist also der gewichtete Mittelwert aus $r(0)$ und $\frac{b}{\beta}$.

Weiter lässt sich die Varianz wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
& \text{Var}_{\mathbb{Q}}[r(t)] \\
&= \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right] \\
&= \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\sigma e^{\beta t} \int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right] \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \text{Var}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right] \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right)^2 \right] - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right]^2}_{\text{Martingal mit Start in 0, also =0}} \right) \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_0^t e^{-\beta s} dW^*(s) \right)^2 \right] \\
&\stackrel{\text{Itô Isometrie}}{=} \sigma^2 e^{2\beta t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_0^t e^{-2\beta s} ds \right] \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \int_0^t e^{-2\beta s} ds \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \left[-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta s} \right]_0^t \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \left(-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta t} + \frac{1}{2\beta} \right) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\beta} + \frac{\sigma^2}{2\beta} e^{2\beta t} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{2\beta t} - 1).
\end{aligned}$$

Der Grenzwert für t gegen unendlich (also das langfristige Verhalten) für $\beta < 0$ liefert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) \right) = \frac{b}{|\beta|}$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}_{\mathbb{Q}}[r(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\sigma^2}{2\beta} (e^{2\beta t} - 1) \right) = \frac{\sigma^2}{2|\beta|}.$$

Das Mean-Reversion-Prinzip

In diesem Abschnitt beschreiben wir das sogenannte Mean-Reversion-Prinzip und bestimmen zu guter Letzt den arbitragefreien Preisprozess. Dieser Preis lässt sich in einer expliziten Form darstellen, da es sich um ein Modell mit affiner Laufzeitstruktur handelt.

Betrachte $\beta < 0$. Modelliert durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess besitzt der Short-Rate Prozess die Mean-Reversion-Eigenschaft (Mittelwertrückkehr). Dabei ist $\frac{1}{|\beta|}$ die **Mean-Reversion-Geschwindigkeit** und $\frac{b}{|\beta|}$ stellt das **Mean-Reversion-Level** dar.

Interpretation der Größen:

Falls der aktuelle Wert der Short-Rate $r(t)$ **größer ist als** $\frac{b}{|\beta|}$, so ist der Driftterm negativ und der Short-Rate Prozess wird somit zu $\frac{b}{|\beta|}$ zurückgezogen.

Ausführlich: $r(t) > \frac{b}{|\beta|}$ und $\beta < 0$. Dann folgt für den Driftterm $((b + \beta r(t))dt)$

$$(b + \beta r(t)) < b + \beta \frac{b}{|\beta|} = b - b = 0.$$

Der Trend geht demnach ins Negative, also in Richtung des Mean-Reversion Levels.

Ist umgekehrt die aktuelle Short-Rate **kleiner als** $\frac{b}{|\beta|}$, so ist der Driftterm positiv und auch in diesem Fall wird der Short-Rate Prozess wieder zum Mean-Reversion-Level zurückgezogen.

Die **Mean-Reversion-Geschwindigkeit** $\frac{1}{|\beta|}$ drückt aus, wie stark der Drift auf Abweichungen der aktuellen Short-Rate zum Mean-Reversion-Level reagiert und wie schnell die Short-Rate zum Mean-Reversion-Level in Erwartung zurückkehrt. Das heißt je größer $\frac{1}{|\beta|}$ ist, desto stärker reagiert der Drift auf Abweichungen und desto schneller kehrt die Short-Rate zum Mean-Reversion-Level zurück.

Die Mean-Reversion-Eigenschaft ist für Short-Rate Modelle im Gegensatz zu Aktienkursmodellen sehr wichtig, denn bekanntlich ist es bei wachstumsorientierten Unternehmen nicht vorgesehen, dass sie auf einem Mean-Reversion-Level stehen bleiben. Wenn jedoch die Short-Rate hoch oder niedrig ist, wird die Zentralbank wahrscheinlich eingreifen, um den Zinssatz zu senken bzw. zu erhöhen.

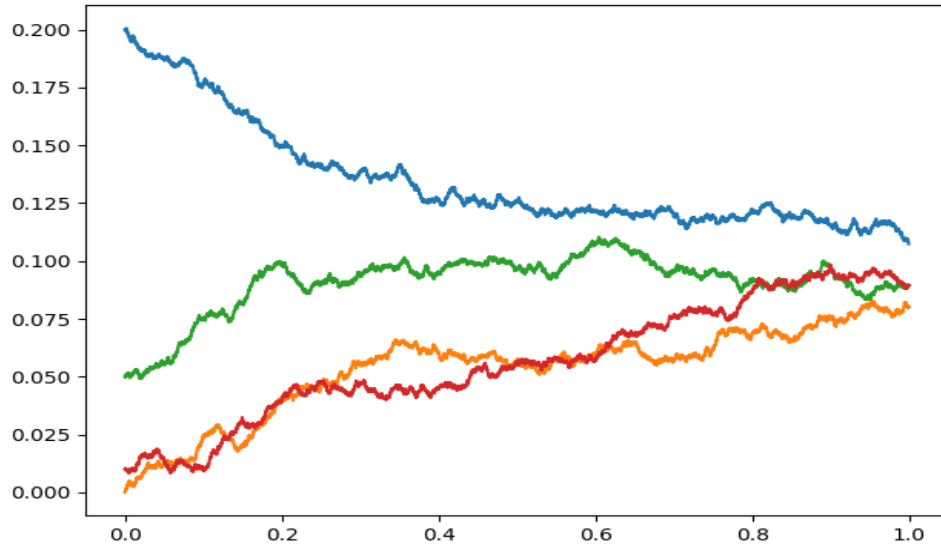


Abbildung 2.2: Simulation von vier unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit unterschiedlichen Initialraten $r_0 = 0.2$ (blau), $r_0 = 0.05$ (grün), $r_0 = 0.01$ (rot) und $r_0 = 0$, aber sonst gleichen Parametern $\beta = -1.86$, $b = 0.09 \cdot |\beta|$, $\sigma = 0.0248$. Es liegt in allen vier Situationen ein Mean-Reversion-Level von $b/|\beta| = 0.9$ vor und somit lässt sich erkennen, dass die Pfade in Richtung dieses Wertes gezogen werden.

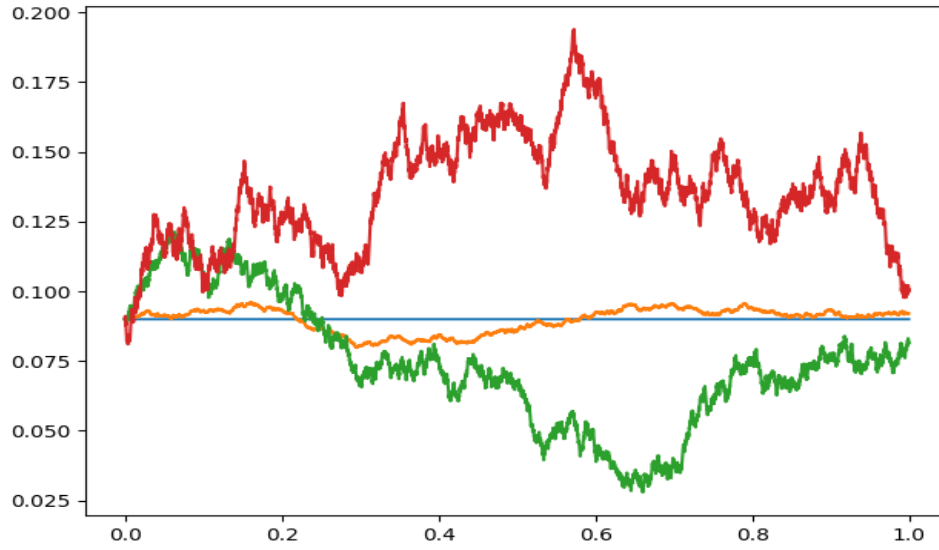


Abbildung 2.3: Simulation von vier unabhängigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen mit unterschiedlichem Diffusionsparametern $\sigma = 0$ (blau) (deterministischer Spezialfall), $\sigma = 0.05$ (grün), $\sigma = 0.08$ (rot) und $\sigma = 0.01$ (orange), aber sonst gleichen Parametern $\beta = -1.86$, $b = 0.09 \cdot |\beta|$, $\sigma = 0.0248$ und $r_0 = 0.09$. Es liegt demnach in allen vier Situationen ein Mean-Reversion-Level von $b/|\beta| = 0.9$ vor und somit lässt sich erkennen, dass die Pfade in Richtung dieses Wertes gezogen werden.

Die Bewertungsformel

In diesem Abschnitt wollen wir eine [explizite Form der Bewertungsformel](#) für Zero-Coupon-Bonds im Vasiček-Modell angeben.

Wir haben gelernt, dass dazu eine Funktion F gesucht werden muss, die dem System

$$\begin{aligned} \partial_t F(t, r) + b(t, r) \partial_r F(t, r) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, r) \partial_r^2 F(t, r) - r F(t, r) &= 0, \\ F(T, r) &= \Phi(r) \end{aligned}$$

genügt. Betrachten wir die Diffusions- und Driftterme in unserem Modell

$$\sigma^2(t, r) = \sigma^2 \quad \text{und} \quad b(t, r) = b + \beta r,$$

so erkennen wir das eine (ATS) vorliegt.

Im Abschnitt über affine Laufzeitstrukturen haben wir gelernt das daraus folgt, dass [der arbitragefreie Preis](#) die Form

$$F(t, r, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t))$$

besitzt, wobei die Funktionen A und B dem System

$$\begin{aligned}\partial_t A(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) - b(t) B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\ \partial_t B(t, T) &= -\beta(t) B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0,\end{aligned}$$

genügen.

Wir müssen also lediglich noch die Funktionen A und B bestimmen und haben damit unmittelbar das Ziel dieses Abschnittes erreicht.

Da die Differentialgleichung für $B(t, T)$ linear ist und wegen der Bedingung $B(T, T) = 0$ sieht man sofort, dass

$$B(t, T) = \frac{1}{\beta}(e^{\beta(T-t)} - 1).$$

Die explizite Lösung A berechnet sich damit durch

$$\begin{aligned}A(t, T) &= A(T, T) - (A(T, T) - A(t, T)) \\ &= A(T, T) - \int_t^T \partial_s A(s, T) ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s, T) + b \int_t^T B(s, T) ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T \left(\frac{1}{\beta}(e^{\beta(T-s)} - 1) \right)^2 ds + b \int_t^T \frac{1}{\beta}(e^{\beta(T-s)} - 1) ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} \int_t^T e^{2\beta(T-s)} - 2e^{\beta(T-s)} + 1 ds + \frac{b}{\beta} \int_t^T e^{\beta(T-s)} - 1 ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left[-\frac{1}{2\beta} e^{2\beta(T-s)} + \frac{2}{\beta} e^{\beta(T-s)} + s \right]_t^T + \frac{b}{\beta} \left[-\frac{1}{\beta} e^{\beta(T-s)} - s \right]_t^T \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left(-\frac{1}{2\beta} e^{2\beta(T-T)} + \frac{2}{\beta} e^{\beta(T-T)} + T + \frac{1}{2\beta} e^{2\beta(T-t)} - \frac{2}{\beta} e^{\beta(T-t)} - t \right) \\ &\quad + \frac{b}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{\beta(T-T)} - T + \frac{1}{\beta} e^{\beta(T-t)} + t \right) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left(\frac{-1 + 4 + 2\beta T + e^{2\beta(T-t)} - 4e^{\beta(T-t)} - 2\beta t}{2\beta} \right) \\ &\quad + \frac{b}{\beta} \left(\frac{-1 - \beta T + e^{\beta(T-t)} + \beta t}{\beta} \right) \\ &= \frac{\sigma^2(4e^{\beta(T-t)} - e^{2\beta(T-t)} - 2\beta(T-t) - 3)}{4\beta^3} + b \frac{e^{\beta(T-t)} - 1 - \beta(T-t)}{\beta^2}.\end{aligned}$$

Zur Erinnerung: Nullkupon-Anleihepreise werden in geschlossener Form wie folgt definiert:

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r(t)).$$

Somit besitzt das Vasiček-Modell die [geschlossene Lösung](#)

$$P(t, T) = \exp \left(- \left(\frac{\sigma^2(4e^{\beta(T-t)} - e^{2\beta(T-t)} - 2\beta(T-t) - 3)}{4\beta^3} \right. \right. \\ \left. \left. + b \frac{e^{\beta(T-t)} - 1 - \beta(T-t)}{\beta^2} \right) - \left(\frac{1}{\beta}(e^{\beta(T-t)} - 1) \right) r(t) \right)$$

für Anleihepreise.

2.2 Das Cox-Ingersoll-Ross-Modell

Als Nächstes wird das CIR-Modell eingeführt. Ein großer Unterschied zum Vasiček-Modell ist die Garantie, dass die Short-Rate lediglich positive Werte annehmen kann.

Die stochastische Differentialgleichung für die Short-Rate unter dem risikoneutralen Maß \mathbb{Q} ist gegeben durch

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW^*(t), \quad r(0) \geq 0, \quad (2.1)$$

wobei W^* wieder eine Brownsche Bewegung unter dem risikoneutralen Maß ist. Die Differentialgleichung besitzt eine eindeutige nichtnegative Lösung. Besonderheit des CIR-Modells ist der $\sqrt{r(t)}$ -Term in der Volatilität. Die Short-Rate wird aus diesem Grund auch als [Wurzel-Diffusionsprozess](#) bezeichnet, da sich die Volatilität der Short-Rate im Gegensatz zur konstanten Volatilität im Vasiček-Modell, proportional zur Wurzel in die stochastische Differentialgleichung einfügt.

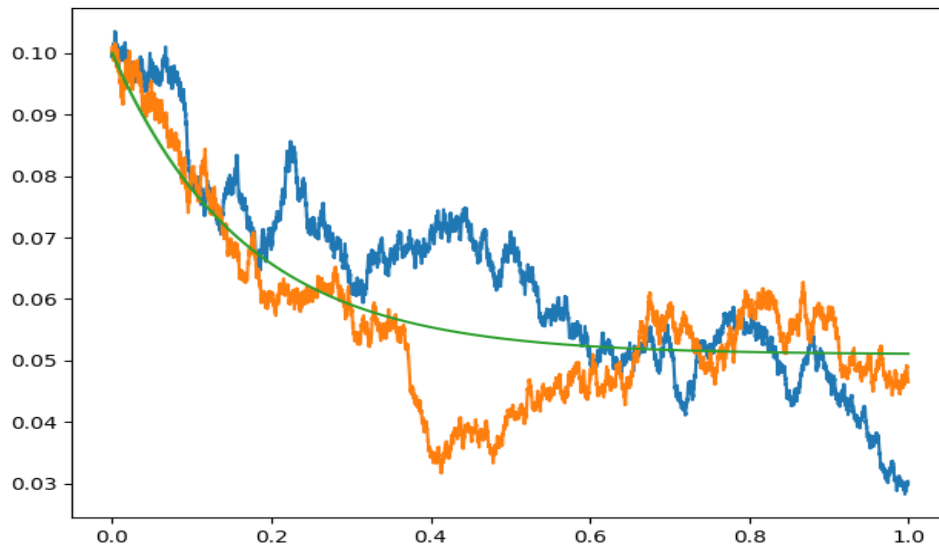


Abbildung 2.4: Simulation von drei Wurzel-Diffusionsprozessen mit gleichen Parametern, außer dass der grüne Pfad $\sigma = 0$ besitzt (deterministisch). Wir erkennen, dass sich die anderen Pfade um diesen deterministischen Pfad stochastisch bewegen (Mean-Reversion-Effekt).

Aus (2.1) ergeben sich die Parameter b, β und σ , die wir zusätzlich mit der Bedingung

$$b \geq \frac{\sigma^2}{2}$$

verknüpfen. Diese Beziehung stellt sicher, dass der Prozess lediglich positive Werte annimmt.

Lösung der stochastischen Differentialgleichung

Mit einer analogen Vorgehensweise wie im Vasicek-Modell erhalten wir die (semi)-explizite Darstellung

$$r(t) = e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \int_{[0,t)} e^{\beta(t-s)} \sigma \sqrt{r(s)} dW^*(s).$$

Semi-explizit, da sich das stochastische Integral nicht in einer geschlossenen Formel ausdrücken lässt, sondern lediglich in Integralschreibweise.

Grundlegende statistische Merkmale

Für den Erwartungswert der Short-Rate gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \int_{[0,t)} e^{\beta(t-s)} \sigma \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right] \\ &= e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{[0,t)} e^{\beta(t-s)} \sigma \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right]}_{\text{Martingal mit Start in 0, also } =0} \\ &= e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) \\ &= e^{\beta t} r(0) - \frac{b}{\beta} (1 - e^{\beta t}). \end{aligned}$$

Die Varianz erfüllt

$$\begin{aligned}
Var_{\mathbb{Q}}[r(t)] &= Var_{\mathbb{Q}} \left[e^{\beta t} r(0) + \frac{b}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \int_{[0,t)} e^{\beta(t-s)} \sigma \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right] \\
&= Var_{\mathbb{Q}} \left[\int_{[0,t)} e^{\beta(t-s)} \sigma \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right] \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} Var_{\mathbb{Q}} \left[\int_{[0,t)} e^{-\beta s} \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right] \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_{[0,t)} e^{-\beta s} \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. - \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\int_{[0,t)} e^{-\beta s} \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right]^2}_{=0, \text{ da Martingal}} \right) \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\left(\int_{[0,t)} e^{-\beta s} \sqrt{r(s)} dW^*(s) \right)^2 \right] \\
&\stackrel{\text{It\^o Isometrie}}{=} \sigma^2 e^{2\beta t} \int_{[0,t)} e^{-2\beta s} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(s)] ds \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \int_{[0,t)} e^{-2\beta s} \left(e^{\beta s} r(0) - \frac{b}{\beta} (1 - e^{\beta s}) \right) ds \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \int_{[0,t)} e^{-\beta s} r(0) - \frac{b}{\beta} (e^{-2\beta s} - e^{-\beta s}) ds \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \left[-\frac{1}{\beta} e^{-\beta s} r(0) - \frac{b}{\beta} \left(-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta s} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta s} \right) \right]_0^t \\
&= \sigma^2 e^{2\beta t} \left(r(0) \left(-\frac{1}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{1}{\beta} \right) - \frac{b}{\beta} \left(-\frac{1}{2\beta} e^{-2\beta t} + \frac{1}{\beta} e^{-\beta t} + \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{\beta} \right) \right).
\end{aligned}$$

Auch in diesem Modell finden wir die Mean-Reversion-Eigenschaft wieder, welche die Short-Rate in Richtung $\frac{b}{\beta}$ treibt.

Die Bewertungsformel

Wir wissen, dass eine (ATS) vorliegt genau dann wenn r der Dynamik

$$dr(t) = (b(t) + \beta(t)r)dt + \sqrt{a(t) + \alpha(t)r}dW^*(t),$$

für geeignete Funktionen genügt. Setzen wir $a(t) = 0$, $b(t) = b$, $\beta(t) = \beta$ und $\alpha(t) = \sigma^2$ so erhalten wir das CIR-Modell

$$dr(t) = (b + \beta r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)}dW^*(t).$$

Somit wissen wir, dass eine (ATS) vorliegt.

Die Preisbewertungsformel wird dann mit unseren vorherigen Überlegungen zu

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t)), \quad (2.2)$$

wobei die Funktionen A und B dem System

$$\begin{aligned} \partial_t A(t, T) &= -bB(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\ \partial_t B(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2} B^2(t, T) - \beta B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0. \end{aligned}$$

genügen.

$\partial_t B(t, T)$ ist die sogenannte [Riccati Gleichung](#), deren Lösung die explizite Darstellung

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma},$$

mit $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\sigma^2}$ besitzt. Durch Integration sehen wir weiter

$$A(t, T) = -\frac{2b}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma e^{(\gamma-\beta)(T-t)/2}}{(\gamma - \beta) - 1 + 2\gamma} \right).$$

Einsetzen von A und B in (2.2) liefert damit die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} P(t, T) &= \exp \left(\frac{2b}{\sigma^2} \log \left(\frac{2\gamma e^{(\gamma-\beta)(T-t)/2}}{(\gamma - \beta) - 1 + 2\gamma} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \cdot r(t) \right). \end{aligned}$$

2.3 Das Dothan-Modell

Dothan geht von einer driftlosen geometrischen Brownschen Bewegung unter dem objektiven Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}

$$dr(t) = \sigma r(t) dW(t)$$

mit der \mathbb{P} -Brownschen Bewegung W aus.

Wir nehmen an, dass der [Marktpreis des Risikos](#) konstant sei. Dann gilt die Differentialgleichung

$$dr(t) = \beta r(t) dt + \sigma r(t) dW^*(t)$$

unter dem Martingalmaß \mathbb{Q} . Somit ist r eine geometrische Brownsche Bewegung unter \mathbb{Q} mit Drift β und Diffusion σ . Diesen Prozesstyp haben wir in der Vorlesung bereits für die Dynamik des risikobehafteten Assets behandelt. Um eine vollständige Übersicht innerhalb dieser Abhandlung zu garantieren, werden an dieser Stelle grundlegende Eigenschaften noch einmal ausgeführt.

In Integralschreibweise erhalten wir

$$r(t) = r(s) + \int_{[s,t)} \beta r(v) dv + \int_{[s,t)} \sigma r(v) d^*W(v).$$

Anwendung der [Itô-Formel](#) auf den Prozess $\ln r(t)$ liefert

$$\begin{aligned} \ln r(t) &= \ln(s) + \int_{[s,t)} \frac{1}{r(v)} dr(v) + \frac{1}{2} \int_{[s,t)} \frac{-1}{r(v)^2} r(v)^2 \sigma^2 dv \\ &= \ln r(s) + \int_{[s,t)} \frac{1}{r(v)} \beta r(v) dv + \int_{[s,t)} \frac{1}{r(v)} \sigma r(v) dW^*(v) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{[s,t)} \frac{-1}{r(v)^2} r(v)^2 \sigma^2 dv \\ &= \ln r(s) + \int_{[s,t)} \beta dv + \int_{[s,t)} \sigma dW^*(v) - \frac{1}{2} \int_{[s,t)} \sigma^2 dv \\ &= \ln r(s) + \beta t - \beta s + \sigma W^*(t) - \sigma W^*(s) - \frac{1}{2} \sigma^2 (t - s). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Anwendung der e-Funktion

$$\begin{aligned} r(t) &= r(s) \exp(\beta(t - s) + \sigma(W^*(t) - W^*(s)) - \frac{1}{2} \sigma^2 (t - s)) \\ &= r(s) \exp((\beta - \frac{1}{2} \sigma^2)(t - s) + \sigma(W^*(t) - W^*(s))), \quad s \leq t. \end{aligned}$$

Man bedenke $\sigma W^*(t-s)$ ist [zentriert normalverteilt](#) mit Varianz $\sigma^2(t-s)$. Somit ist die \mathcal{F}_s -bedingte Verteilung von $r(t)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= r(s) \exp((\beta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{\sigma(W^*(t)-W^*(s))}|\mathcal{F}_s] \\
 &\stackrel{\text{Stationaritat}}{=} r(s) \exp((\beta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{\sigma(W^*(t-s))}] \\
 &\stackrel{\text{log-norm-vert.}}{=} r(s) \exp((\beta - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)) \exp(\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)) \\
 &= r(s) \exp(\beta(t-s)).
 \end{aligned}$$

Daraus leiten wir nun die Varianz ab. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Var}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(r(t) - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)|\mathcal{F}_s])^2|\mathcal{F}_s] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(r(s)e^{\beta(t-s)-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma(W^*(t)-W^*(s))} - r(s)e^{\beta(t-s)}\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(r(s)(e^{\beta(t-s)})(e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma(W^*(t)-W^*(s))} - 1)\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
 &= r^2(s)e^{2(\beta-\frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(e^{\sigma(W^*(t)-W^*(s))} - 1)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
 &= r^2(s)e^{2\beta(t-s)}(e^{\sigma^2(t-s)} - 1).
 \end{aligned}$$

Dabei folgt das letzte Gleichheitszeichen wegen

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma(W^*(t)-W^*(s))} - 1\right)^2|\mathcal{F}_s\right] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2(-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma(W^*(t)-W^*(s)))} - 2e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)-\sigma(W^*(t)-W^*(s))} + 1|\mathcal{F}_s\right] \\
 &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2(-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)+\sigma(W^*(t)-W^*(s)))}|\mathcal{F}_s\right] - 2\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)-\sigma(W^*(t)-W^*(s))}|\mathcal{F}_s\right] + 1 \\
 &= e^{-\sigma^2(t-s)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{2\sigma(W^*(t)-W^*(s))}|\mathcal{F}_s\right] - 2e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\sigma(W^*(t)-W^*(s))}|\mathcal{F}_s\right]}_{=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sigma(W^*(t)-W^*(s))}|\mathcal{F}_s]} + 1 \\
 &= e^{-\sigma^2(t-s)} e^{\frac{2}{2}\sigma^2(t-s)} - 2e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\sigma(W^*(t)-W^*(s))}|\mathcal{F}_s\right] + 1 \\
 &= e^{-\sigma^2(t-s)} e^{\frac{2}{2}\sigma^2(t-s)} - 2e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)} e^{\sigma^2/2(t-s)} + 1 \\
 &= e^{\sigma^2(t-s)} - 2 + 1 \\
 &= e^{\sigma^2(t-s)} - 1.
 \end{aligned}$$

2.4 Das Ho-Lee-Modell

Das Ho-Lee-Modell charakterisiert sich durch die Dynamik

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma dW^*(t).$$

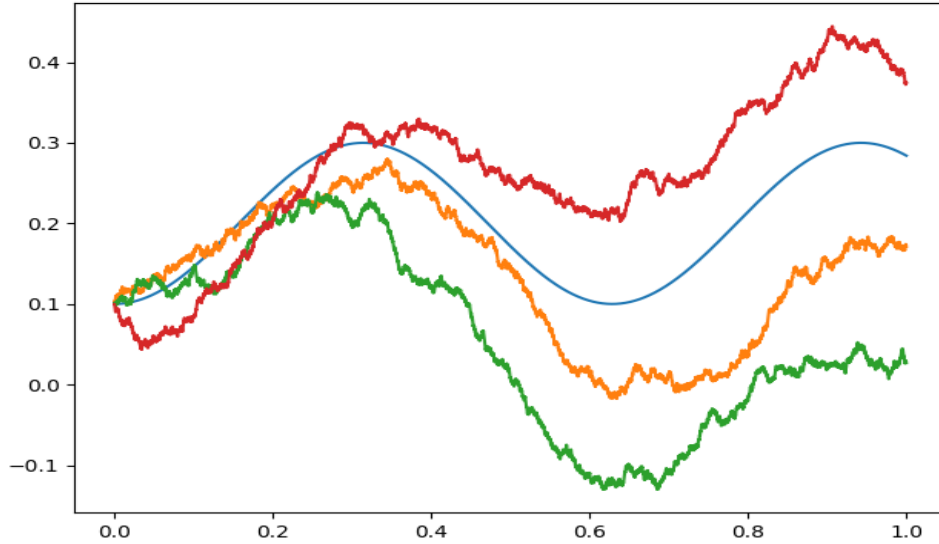


Abbildung 2.5: Simulation von vier Short-Rate Pfaden im Ho-Lee-Modell. (Dabei sind die Parameter für die Pfade grün, rot, orange: $r_0 = 0.1$, $\sigma = 0.1$ und $b(t) = \sin(10 \cdot t)$ und für den blauen Pfad genauso bis auf $\sigma = 0$, also deterministisch). Die Simulation soll illustrieren, dass die Funktion b es unter anderem ermöglicht deterministische, periodisch wiederkehrende Struktureffekte abzubilden.

Erinnerung: Damit wir eine [affine Laufzeitstruktur \(ATS\)](#) nachweisen können, müssen die Koeffizienten der Form

$$\sigma(t, r) = \sqrt{a(t) + \alpha(t)r} \text{ und } b(t, r) = b(t) + \beta(t)r$$

genügen. Somit folgt unmittelbar, dass das Ho-Lee-Modell eine affine Laufzeitstruktur besitzt mit

$$a(t) = \sigma^2, \alpha(t) = 0, \beta(t) = 0, b(t) = b(t).$$

Es folgt die Darstellung für den [arbitragefreien Preis](#)

$$F(t, r, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t)), \quad (2.3)$$

wobei die Funktionen A und B dem System

$$\begin{aligned}\partial_t A(t, T) &= \frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\ \partial_t B(t, T) &= \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0,\end{aligned}\tag{I}$$

genügen.

Durch Einsetzen der Koeffizienten im Ho-Lee-Modell wird (I) unmittelbar zu

$$\begin{aligned}\partial_t A(t, T) &= \frac{\sigma^2}{2}B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\ \partial_t B(t, T) &= -1, \quad B(T, T) = 0.\end{aligned}\tag{II}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}B(t, T) &= T - t, \\ A(t, T) &= -\frac{\sigma^2}{6}(T - t)^3 + \int_t^T b(s)(T - s)ds.\end{aligned}$$

Welche interessanten Eigenschaften besitzt das Modell?

Die **Forward-Curve** $f(t, T)$ gibt die Sensitivität der logarithmierten Preise im Bezug auf die Laufzeit T zur Zeit t an und ist somit definiert durch

$$f(t, T) = \partial_T \log(F(t, r, T)).$$

Mit der Betrachtung von (2.3) und Hinzunahme von (II) folgt somit

$$\begin{aligned}f(t, T) &= \partial_T \log(F(t, r, T)) \\ &= \partial_T \log(\exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t))) \\ &= -\partial_T A(t, T) - \partial_T B(t, T)r(t) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}(T - t)^2 + \int_t^T b(s)ds + r(t).\end{aligned}\tag{III}$$

Man bedenke bei dem letzten Gleichheitszeichen **die Regel von Leibniz**:

$$\partial_T \left(\int_t^T b(s)T ds \right) = \int_t^T \partial_T(b(s)T) ds + b(T)T = \int_t^T b(s)ds + b(T)T.$$

Sei $f_0(T) = f(0, T)$ die [initiale Forward-Curve](#). Differenzieren nach T von (III) liefert

$$b(s) = \partial_s f_0(s) + \sigma^2 s.$$

Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t, T) &\stackrel{\text{(III)}}{=} -\frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + \int_t^T b(s)ds + r(t) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + \int_t^T (\partial_s f_0(s) + \sigma^2 s)ds + r(t) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2}(T^2 - 2Tt + t^2) + f_0(T) - f_0(t) + \frac{\sigma^2}{2}T^2 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + r(t) \\ &= f_0(T) - f_0(t) + \sigma^2 t(T-t) + r(t). \end{aligned}$$

Wegen $f(s, T) = -\partial_T A(s, T) - \partial_T B(s, T)r(s)$ folgt

$$\begin{aligned} F(t, r, T) &= e^{\int_t^T f(s, T)ds} \\ &= e^{-\int_t^T f_0(s)ds + f_0(t)(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}t(T-t)^2 - (T-t)r}. \end{aligned}$$

Somit haben wir den [arbitragefreien Preis](#) mit der initialen Forward-Curve ausgedrückt.

Mit unseren Überlegungen folgt

$$\begin{aligned} r(t) &= r(0) + \int_0^t b(s)ds + \sigma W^*(t) \\ &= r(0) + \int_0^t \partial_s f_0(s) + \sigma^2 s ds + \sigma W^*(t) \\ &= r(0) + f_0(t) - \underbrace{f_0(0)}_{=r(0)} + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W^*(t) \\ &= f_0(t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W^*(t). \end{aligned}$$

Daraus lässt sich leicht die folgende Gleichung ableiten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[r(t)] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f_0(t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W^*(t)] \\ &= f_0(t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sigma W^*(t)]}_{=0} \\ &= f_0(t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2}. \end{aligned}$$

2.5 Das Hull-White-Modell

Als letztes Modell betrachten wir das Hull-White-Modell. Dieses Modell kann im Allgemeinen nicht analytisch gehandhabt werden. Wir beschränken uns daher auf die folgende Erweiterung des Vasiček-Modells, welche von Hull und White analysiert wurde:

$$dr(t) = (b(t) + \beta r(t))dt + \sigma dW^*(t).$$

Im Gegensatz zu dem normalen Vasiček-Modell hängt b auch von t ab, der Diffusionsterm $b(t)$ ist also (deterministisch) zeitabhängig.

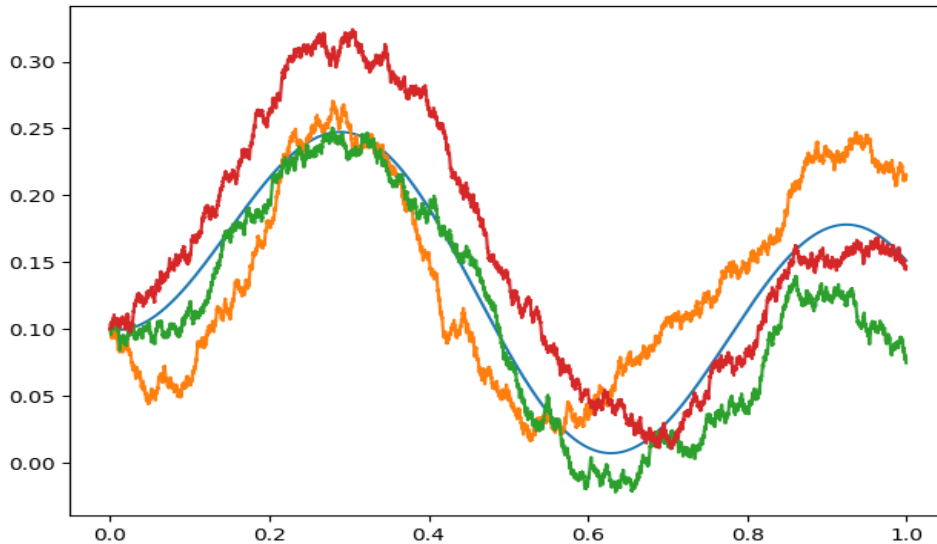


Abbildung 2.6: Simulation von vier Short-Rate Pfaden im Hull-White-Modell. (Dabei sind die Parameter für die Pfade grün, rot, orange: $r_0 = 0.1, \sigma = 0.1, \beta = -1$ und $b(t) = \sin(10 \cdot t)$ und für den blauen Pfad genauso bis auf $\sigma = 0$ also deterministisch). Die Simulation soll illustrieren, dass die Funktion b es unter anderem ermöglicht deterministische, periodisch wiederkehrende Struktureffekte abzubilden.

Erinnerung: Damit wir eine [affine Laufzeitstruktur \(ATS\)](#) nachweisen können, müssen die Koeffizienten der Form

$$\sigma(t, r) = \sqrt{a(t) + \alpha(t)r} \text{ und } b(t, r) = b(t) + \beta(t)r$$

genügen. Wegen

$$a(t) = \sigma^2, \alpha(t) = 0, b(t) = b(t), \beta(t) = \beta$$

handelt es sich offensichtlich um ein solches System.

Das System für die Funktionen A und B ist bekanntlich im allgemeinen Modell durch

$$\begin{aligned} \partial_t A(t, T) &= \frac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\ \partial_t B(t, T) &= \frac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0, \end{aligned}$$

gegeben und wird in diesem Spezialfall durch Einsetzen zu

$$\begin{aligned} \partial_t A(t, T) &= \frac{1}{2}\sigma^2 B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\ \partial_t B(t, T) &= -\beta B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung für $B(t, T)$ ist genau wie im Vasiček-Modell mit der expliziten Lösung

$$B(t, T) = \frac{1}{\beta}(e^{\beta(T-t)} - 1).$$

Man bedenke, dass für die Funktion B die Gleichung

$$\partial_T B(s, T) = e^{\beta(T-s)} = -\partial_s B(s, T)$$

gilt.

Die Gleichung für $A(t, T)$ lautet

$$\begin{aligned} A(t, T) &= A(T, T) - \int_t^T \partial_s A(s, T) ds \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s, T) ds + \int_t^T b(s)B(s, T) ds. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die initiale Forward-Curve. Mit der verallgemeinerten [Leibniz Regel](#) zur Integration

$$\partial_T \int_0^T h(s, T) ds = \int_0^T \partial_T h(s, T) ds + h(T, T)$$

folgt

$$\begin{aligned}
f_0(T) &= \partial_T A(0, T) + \partial_T B(0, T)r(0) \\
&= \partial_T \left(-\frac{\sigma^2}{2} \int_0^T B^2(s, T)ds + \int_0^T b(s)B(s, T)ds \right) + \partial_T B(0, T)r(0) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \partial_T B^2(s, T)ds + \underbrace{B(T, T)}_{=0} + \int_0^T \partial_T (b(s)B(s, T)) ds \\
&\quad + \underbrace{B(T, T)b(T)}_{=0} + \partial_T B(0, T)r(0) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \partial_s B^2(s, T)ds + \int_0^T b(s)\partial_T B(s, T)ds + \partial_T B(0, T)r(0) \\
&= -\underbrace{\frac{\sigma^2}{2\beta^2}(e^{\beta T} - 1)^2}_{=:g(T)} + \underbrace{\int_0^T b(s)e^{\beta(T-s)}ds + e^{\beta T}r(0)}_{=: \phi(T)}.
\end{aligned}$$

Erneutes Anwenden der Leibniz Regel für Integration liefert für die Funktion ϕ die Gleichung

$$\partial_T \phi(T) = \beta \phi(T) + b(T), \quad \phi(0) = r(0).$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned}
b(T) &= \partial_T \phi(T) - \beta \phi(T) \\
&= \partial_T (f_0(T) + g(T)) - \beta (f_0(T) + g(T)).
\end{aligned}$$

Unser letztes Ziel besteht nun darin die Forward-Curve zu einem beliebigen Zeitpunkt t durch die initiale Forward-Curve f_0 auszudrücken. Es gilt

$$\begin{aligned}
f(t, T) &= \partial_T A(t, T) + \partial_T B(t, T)r(t) \\
&= \partial_T \left(-\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T B^2(s, T)ds + \int_t^T b(s)B(s, T)ds \right) + \partial_T B(t, T)r(t) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T \partial_T B^2(s, T)ds + \int_t^T b(s)\partial_T B(s, T)ds + \partial_T B(t, T)r(t) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2} \int_t^T \partial_s B^2(s, T)ds + \int_t^T b(s)e^{\beta(T-s)}ds + \partial_T B(t, T)r(t) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + \int_t^T b(s)e^{\beta(T-s)}ds + e^{\beta(T-t)}r(t).
\end{aligned}$$

Berechnen des Integrals liefert

$$\begin{aligned}
& \int_t^T b(s) e^{\beta(T-s)} ds \\
&= \int_t^T (\partial_s(f_0(s) + g(s)) - \beta(f_0(s) + g(s))) e^{\beta(T-s)} ds \\
&= \int_t^T \partial_s(f_0(s)) e^{\beta(T-s)} + e^{\beta(T-s)} \partial_s g(s) - \beta e^{\beta(T-s)} g(s) - \beta f_0(s) e^{\beta(T-s)} ds.
\end{aligned}$$

Also ergeben sich vier Teilintegrale. Das Erste ergibt sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_t^T e^{\beta(T-s)} \partial_s f_0(s) ds &= [e^{\beta(T-s)} f_0(s)]_t^T - \int_t^T f_0(s) (-\beta) e^{\beta(T-s)} ds \\
&= f_0(T) - e^{\beta(T-t)} f_0(t) + \int_t^T f_0(s) \beta e^{\beta(T-s)} ds.
\end{aligned}$$

Das zweite Integral ergibt

$$\begin{aligned}
& \int_t^T e^{\beta(T-s)} \partial_s g(s) ds \\
&= \left[e^{\beta(T-s)} \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta s} - 1)^2 \right]_t^T - \int_t^T (-\beta) e^{\beta(T-s)} g(s) ds \\
&= \left[\frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta T} - 1)^2 \right] - \left[e^{\beta(T-t)} \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta t} - 1)^2 \right] - \int_t^T (-\beta) e^{\beta(T-s)} g(s) ds \\
&= \frac{\sigma^2}{2\beta^2} [(e^{\beta T} - 1)^2 - e^{\beta(T-t)} (e^{\beta t} - 1)^2] - \int_t^T (-\beta) e^{\beta(T-s)} g(s) ds.
\end{aligned}$$

Damit gilt aber

$$\int_t^T b(s) e^{\beta(T-s)} ds = f_0(T) - e^{\beta(T-t)} f_0(t) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} [(e^{\beta T} - 1)^2 - e^{\beta(T-t)} (e^{\beta t} - 1)^2].$$

Insgesamt haben wir damit

$$\begin{aligned}
& f(t, T) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + \int_t^T b(s)e^{\beta(T-s)} ds + e^{\beta(T-t)} r(t) \\
&= -\frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + f_0(T) - e^{\beta(T-t)} f_0(t) \\
&\quad + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} [(e^{\beta T} - 1)^2 - e^{\beta(T-t)}(e^{\beta t} - 1)^2] + e^{\beta(T-t)} r(t) \\
&= f_0(T) - e^{\beta(T-t)} f_0(t) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{\beta(T-t)} - 1) (e^{\beta(T-t)} + e^{\beta(T+t)}) + e^{\beta(T-t)} r(t).
\end{aligned}$$

Dabei folgt das letzte Gleichheitszeichen durch Umformung der Terme mit Koeffizienten $\frac{\sigma^2}{2\beta^2}$:

$$\begin{aligned}
& - (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + (e^{\beta T} - 1)^2 - e^{\beta(T-t)}(e^{\beta t} - 1)^2 \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + e^{\beta T} e^{\beta T} - 2e^{\beta T} + 1 - e^{\beta T} e^{-\beta t} (e^{\beta t} e^{\beta t} - 2e^{\beta t} + 1) \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + e^{\beta T} e^{\beta T} - 2e^{\beta T} + 1 - e^{\beta T} (e^{\beta t} - 2 + e^{-\beta t}) \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + e^{\beta T} e^{\beta T} - 2e^{\beta T} + 1 - e^{\beta T} e^{\beta t} + e^{\beta T} 2 - e^{\beta T} e^{-\beta t} \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + e^{\beta T} e^{\beta T} + 1 - e^{\beta T} e^{\beta t} - e^{\beta T} e^{-\beta t} \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1)^2 + e^{\beta T} e^{\beta T} - e^{\beta T} e^{\beta t} - (e^{\beta(T-t)} - 1) \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1) \left((e^{\beta(T-t)} - 1) + \frac{e^{\beta T} e^{\beta T} - e^{\beta T} e^{\beta t}}{e^{\beta(T-t)} - 1} - 1 \right) \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1) \left((e^{\beta(T-t)} - 1) + \frac{e^{\beta T} e^{\beta T} - e^{\beta T} e^{\beta t}}{e^{\beta(T-t)} - 1} + 1 \right) \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1) \left(e^{\beta(T-t)} + e^{\beta(T+t)} \frac{e^{\beta(T-t)} - 1}{e^{\beta(T-t)} - 1} \right) \\
&= - (e^{\beta(T-t)} - 1) (e^{\beta(T-t)} + e^{\beta(T+t)}) .
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [1] Björk, T., (2020) fourth edition, Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford Finance
- [2] Filipović, D., (2009), Term-Structure Models, Springer Finance
- [3] Karatzas, I., Shreve, S. (2016), Methods of Mathematical Finance, Springer
- [4] Lamberton, D., Lapeyre, B. (2011), Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Taylor and Francis Ltd.