

Masterarbeit
im Studiengang Mathematik

Die Front der verzweigenden Brownschen Bewegung

The Frontier of a Branching Brownian Motion

Christina Wißmeyer

Matrikelnummer: 2125987

22.11.21

Betreuung: Prof. Dr. Matthias Meiners

Justus-Liebig-Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Grundlagen	3
2	Die Verzweigende Brownsche Bewegung	5
2.1	Grundlegende Eigenschaften der VBB	7
3	Die F-KPP-Gleichung und McKean Darstellung	10
3.1	Die McKean Darstellung	10
3.2	Traveling wave Lösungen	15
4	Die Maximalposition in einer VBB	19
4.1	Die Ergebnisse von Bramson, Hu und Shi	19
4.2	Momentenberechnung und der unabhängige Fall	20
4.3	Grundlegende Eigenschaften von Bessel-3-Prozesse	22
4.4	Das many-to-one und many-to-two Lemma	30
4.5	Beweis von Satz 1	31
4.6	Beweis von Satz 2	48
5	Der verzweigende Random-Walk	54
6	Codes	58
7	Literatur	61

Symbolverzeichnis (draft)

Symbol	Description
--------	-------------

Kapitel 1

Einleitung

.

.

.

1.1 Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es im Wesentlichen, die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Notation zu festigen. Die hier aufgelisteten Resultate werden nicht bewiesen, da sie sich in Standardwerken der Stochastik wiederfinden.

Definition 1.1.1 [4, S.37] (Filtration)

Eine *Filtration* auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ist eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ von σ -Algebren, sodass $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ für alle $s < t$ gilt.

In diesem Fall heißt $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ *filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum*.

Definition 1.1.2 [4, S.37] (stochastischer Prozess, adaptiert)

Eine Familie von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *stochastischer Prozess*. Sei $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ eine Filtration. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt *adaptiert* an $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, falls für alle $t \geq 0$ gilt: X_t ist \mathcal{F}_t -messbar.

Definition 1.1.3 [4, S.53] (Martingal)

Ein reellwertiger stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ ist ein Martingal bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wenn er an die Filtration adaptiert ist, $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ für alle $t \geq 0$ und für jedes Paar von Zeiten $0 \leq s \leq t$ gilt

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{f. s.}$$

Der Prozess wird als Submartingal bezeichnet, wenn \geq gilt und als Supermartingal, wenn \leq gilt in der obigen Darstellung.

Die wohl fundamentalsten Beispiele stochastischer Prozesse stellen die Brownsche Bewegung und der Poisson-Prozess dar. Im engen Zusammenhang mit diesen Prozessen steht die verzweigende Brownsche Bewegung, die sich aus einer einfachen Konstruktion der beiden ergibt.

Definition 1.1.4 [4, S.7] (Brownsche Bewegung)

Ein reellwertiger stochastischer Prozess $\{B(t) : t \geq 0\}$ wird eine (lineare) *Brownsche Bewegung* mit Start in $x \in \mathbb{R}$ genannt, wenn folgendes gilt:

- $B(0) = x$,
- der Prozess besitzt unabhängige Zuwächse, d. h., für alle $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ sind die Zuwächse $B(t_n) - B(t_{n-1}), B(t_{n-1}) - B(t_{n-2}), \dots, B(t_2) - B(t_1)$ unabhängige Zufallsvariablen,
- Für alle $t \geq 0$ und $h > 0$ sind die Zuwächse $B(t+h) - B(t)$ normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz h ,
- die Funktion $t \rightarrow B(t)$ ist fast sicher stetig.

Wir sagen, dass $\{B(t) : t \geq 0\}$ eine Standard-Brownsche Bewegung ist, wenn $x = 0$.

Definition 1.1.5 [9, S.69] (Poisson-Prozess)

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ wird *Poisson-Prozess* genannt, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (1) $X(t)$ ist ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen, d. h., für jedes $n \in \mathbb{N}$, t_0, \dots, t_n ($0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$) sind die Zufallsvariablen $X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ unabhängig,
- (2) $X(t)$ ist ein homogener Prozess, d. h., für jedes $s \geq 0$, $t \geq 0$ und $h > 0$ sind die Zufallsvariablen $X(t+h) - X(t)$ und $X(s+h) - X(s)$ identisch verteilt,
- (3) $X(0) = 0$,
- (4) Es existiert ein $\lambda > 0$, sodass für $h \downarrow 0$ gilt

$$P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h);$$

$$P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(X(h) \geq 2) = o(h).$$

Definition 1.1.6 [4, S.40] (Stoppzeit)

Eine Zufallsvariable τ mit Werten in $[0, \infty]$, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ definiert ist, heißt *Stoppzeit* bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, wenn $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

Satz 1.1.7 [4, S.353] (Doobscher Supermartingal-Konvergenzsatz)

Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ ein Supermartingal, das in L^1 beschränkt ist, d. h., es gibt ein $K > 0$, sodass $\mathbb{E}|X_n| \leq K$ für alle n . Dann gibt es eine integrierbare Zufallsvariable X auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum, sodass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \quad \text{f. s.}$$

Kapitel 2

Die Verzweigende Brownsche Bewegung

Eine binäre *verzweigende Brownsche Bewegung* (VBB) ist eine Brownsche Bewegung eines Individuums, das sich nach einer von der Bewegung unabhängigen exponentialverteilten Zeit in zwei spaltet. Die entstehenden Individuen führen unabhängige Brownsche Bewegungen durch und spalten sich wiederum nach unabhängigen exponentialverteilten Zeiten. Diese Rekursionsdynamik führt zu einer Baumstruktur in den resultierenden Pfaden.

Konstruktion 2.0.1 (Verzweigende Brownsche Bewegung)

Eine verzweigende Brownsche Bewegung startet zur Zeit 0 mit einem Individuum, dem Vorfahren. Sei T eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1. Wir definieren die monotone Folge T_1, T_2, T_3, \dots durch

$$T_i = T \cdot 1_{\{i < 3\}} + \infty \cdot 1_{\{i \geq 3\}}.$$

Diese Folge besitzt (mit der Konvention $\sup(\emptyset) = 0$) einen sogenannten assoziierten Zählprozess ξ , der definiert ist durch

$$\xi_t = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\}.$$

Mit jedem endlichen Zeitpunkt assoziieren wir ein weiteres Individuum. Aus dem Prozess ξ definieren wir uns die Anzahl der Nachkommen N des Vorfahren durch

$$N = \sup\{k \in \mathbb{N} : T_k < \infty\} = 2.$$

Die Lebenszeit des Vorfahren ist definiert durch $\zeta = T$. Sei $X = (X_t)_{t \in [0, \zeta]}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in $X_0 = 0$. Der Lebensweg des Vorfahren ist gegeben durch X . Wir indizieren Individuen $u \in \mathcal{I}$ unter Berücksichtigung des Stammbaums. Zu jedem $u \in \mathcal{I}$ assoziieren wir ein Tupel (ξ_u, ζ_u, X_u) das eine unabhängige Kopie von (ξ, ζ, X) darstellt. Weiter indizieren wir alle Größen, die von (ξ, ζ, X) abgeleitet werden mit u . So bezeichnet N_u die Gesamtzahl der Nachkommen von u und $X_{u,k}$ ist die Differenz zwischen dem Zeitpunkt der Geburt des k -ten Nachkommen und dem Geburtszeitpunkt von u . Formell bedeutet dies, dass wenn $S(u)$ der Geburtszeitpunkt von u ist, dann sind die Geburtszeitpunkte der beiden Nachkommen gegeben durch $S(u) + X_{u,1}$ und $S(u) + X_{u,2}$. Die Generationen $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ des Verzweigungsprozesses sind gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \{\emptyset\} \\ \mathcal{G}_{n+1} &= \{vi \in \mathbb{N}^{n+1} : v \in \mathcal{G}_n, 1 \leq i \leq 2\}. \end{aligned}$$

Kurz gefasst gilt das folgende Schema der VBB:

1. Eine Standard-Brownsche Bewegung X startet bei $X(0) = 0$.
2. Nach einer unabhängigen exponentialverteilten Zeit T mit Rate 1 spaltet sich die Brownsche Bewegung in zwei Teilchen.
3. Jedes der neuen Teilchen bewegt sich gemäß einer unabhängigen Brownschen Bewegung, die in $X(T)$ beginnt und verhält sich, bezogen auf ihren Geburtszeitpunkt und ihre Position, wie unabhängige Kopien ihres Elternteils.
4. Jedes der neuen Teilchen unterliegt dann der gleichen Aufteilungsregel.

Die Zufallsvariable $n(t)$ bezeichne die Anzahl aller lebenden Teilchen zum Zeitpunkt t . Zu jedem beliebigen Individuum können wir die Vergangenheit als Pfad abtragen und die Menge aller dadurch resultierenden Pfade fassen wir zusammen mit

$$N(t) = \{x_k(t), k \leq n(t)\}.$$

Zur Erklärung: Ist $v \in N(t)$, dann sei $x_v(t)$ die Position von v zum Zeitpunkt t . Ist $v \in N(t)$ und $s < t$, dann sei $x_v(s)$ die Position des eindeutigen Vorfahren von v , der zum Zeitpunkt s lebte. Wir definieren mit

$$M(t) = \max_{v \in N(t)} x_v(t)$$

die maximale Position aller Individuen in der VBB zur Zeit t .

Im Folgenden stellen wir zwei Realisationen einer verzweigenden Brownschen Bewegung in einer Grafik dar. Um einen besseren Eindruck für die Populationsdynamik zu erhalten, betrachten wir die jeweiligen Realisationen bis zu unterschiedlichen Zeitpunkten.

2.1 Grundlegende Eigenschaften der VBB

Zunächst wollen wir die Anzahl der zu erwartenden Teilchen zu einem beliebigen Zeitpunkt angeben. In einem weiteren Schritt werden wir dann sehen, dass sich diese Größe auch in der Betrachtung einer gewissen Martingaltransformation widerspiegelt.

Proposition 2.1.1 [8, S.63]

$$\mathbb{E}n(t) = e^t$$

Beweis:

Sei τ der Zeitpunkt der ersten Verzweigung. Selbstverständlich gilt für alle Zeitpunkte $t < \tau$, dass die Anzahl der Teilchen $n(t) = 1$ ist, da der Prozess per Definition stets mit einem Teilchen beginnt und zur Zeit t noch keine Teilung stattgefunden hat.

Andernfalls gilt $n(t) = n'(t - \tau) + n''(t - \tau)$, wobei n' und n'' der Anzahl der Teilchen in den beiden unabhängigen Abzweigungsprozessen der Nachkommen entsprechen.

Dies führt zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}n(t) &= \mathbb{E}[n(t)\mathbb{1}_{\{t < \tau\}}] + \mathbb{E}[n(t)\mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{t < \tau\}}] + \mathbb{E}[n(t)\mathbb{1}_{\{t \geq \tau\}}] \\ &= \mathbb{P}(\tau > t) + \int_0^t \mathbb{P}(\tau \in ds) 2\mathbb{E}n(t-s) \\ &= e^{-t} + 2 \int_0^t e^{-s} \mathbb{E}n(t-s) ds. \end{aligned}$$

Differenzieren der Gleichung mit Hilfe der verallgemeinerten *Leibnizregel* zur Integration

$$\partial_t \int_0^t f(s, t) ds = \int_0^t \partial_t f(s, t) ds + f(t, t)$$

ergibt

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{E}n(t) &= \partial_t e^{-t} + 2\partial_t \int_0^t e^{-s} \mathbb{E}n(t-s) ds \\ &= -e^{-t} + 2e^{-t} \mathbb{E}n(t-t) + 2 \int_0^t e^{-s} \partial_t \mathbb{E}n(t-s) ds \\ &= -e^{-t} + 2e^{-t} \underbrace{\mathbb{E}n(0)}_{=1} + 2 \int_0^t e^{-s} \partial_t \mathbb{E}n(t-s) ds \\ &= -e^{-t} + 2e^{-t} + 2 \int_0^t e^{-s} \partial_t \mathbb{E}n(t-s) ds. \end{aligned}$$

Nun müssen wir uns überlegen, für welches $f(t) := \mathbb{E}n(t)$ die Differentialgleichung erfüllt ist. Durch Prüfen der Gleichung mit $f(t) = e^t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\partial_t e^t &= -e^{-t} + 2e^{-t}e^0 + 2 \int_0^t e^{-s}e^{t-s} ds \\
&= -e^{-t} + 2e^{-t} + 2 \int_0^t e^{t-s-s} ds \\
&= -e^{-t} + 2e^{-t} + 2 \left[-\frac{1}{2}e^{t-2s} \right]_0^t \\
&= -e^{-t} + 2e^{-t} - 2 \left[\frac{1}{2}e^{t-2t} + \frac{1}{2}e^t \right] \\
&= -e^{-t} + 2e^{-t} - e^{-t} + e^t \\
&= e^t.
\end{aligned}$$

Somit ist die Differenzialgleichung für $\mathbb{E}n(t) = e^t$ erfüllt.

□

Nachdem wir eingesehen haben, dass die Population in Erwartung exponentiell wächst, werden wir nun erkennen, dass die Exponentialfunktion für die Konstruktion von Martingalen ebenfalls eine wichtige Rolle einnimmt.

Proposition 2.1.2 [8, S.64]

Sei $n(t)$ die Anzahl der Partikel der VBB zum Zeitpunkt t , dann ist

$$Y(t) \equiv e^{-t}n(t)$$

ein nicht-negatives Martingal bezüglich seiner natürlich erzeugten Filtration. Außerdem konvergiert $Y(t)$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable $Y_\infty \in L^1$.

Beweis:

Als Erstes zeigen wir, dass Y ein Martingal bezüglich seiner natürlich erzeugten Filtration \mathcal{F} ist, das heißt, dass die σ -Algebra \mathcal{F}_s definiert ist durch

$$\mathcal{F}_s = \sigma(\{Y_v \mid v \leq s\}).$$

1) Zu zeigen: Für alle $t \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{E}|Y(t)| < \infty$.

Es gilt

$$\mathbb{E}|Y(t)| = \mathbb{E}Y(t) = e^{-t}e^t = 1.$$

2) Zu zeigen: Für alle $s < t \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{E}[Y(t) \mid \mathcal{F}_s] = Y(s)$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y(t) \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[e^{-t}n(t) \mid \mathcal{F}_s] \\
&= e^{-t}\mathbb{E}[n(t) \mid \mathcal{F}_s] \\
&\stackrel{(*)}{=} e^{-t}n(s)\mathbb{E}[n(t-s)] \\
&= e^{-t}n(s)e^{t-s} \\
&= e^{-s}n(s).
\end{aligned}$$

(*) Dies begründet sich dadurch, dass jedes Individuum sich stochastisch identisch verhält. Somit entspricht die Anzahl der zu erwartenden lebenden Individuen zur Zeit t gegeben die Zeit bis s , exakt der Situation wie als würden wir zur Zeit 0 mit $n(s)$ Teilchen starten und die erwartete Populationsgröße bis zur Zeit $t - s$ betrachten.

3) Y ist adaptiert.

Wir haben die Filtration von dem Prozess erzeugen lassen. Dies ist per Definition die kleinste Filtration, an die der Prozess adaptiert ist.

Somit haben wir bewiesen, dass Y ein Martingal ist.

Als Nächstes zeigen wir, dass $Y(t)$ fast sicher gegen eine Zufallsvariable konvergiert. Hierzu nehmen wir den Konvergenzsatz von Doob zur Hilfe, aus dem die Aussage folgt, wenn wir eine Konstante c finden, sodass $\mathbb{E}[|Y(t)|] < c$ für alle t gilt. Da es sich um ein nicht-negatives Martingal handelt erhalten wir

$$\mathbb{E}[|Y(t)|] = \mathbb{E}[Y(t)] = 1.$$

Somit ist die Konvergenz in L^1 bewiesen.

□

Bemerkung 2.1.3 Mit einer leichten Modifizierung lässt sich zeigen, dass Y_∞ eine exponential verteilte Zufallsvariable zum Parameter 1 ist.

Kapitel 3

Die F-KPP-Gleichung und McKean Darstellung

Die *Fisher-Kolmogorov-Petrovski-Piscounov Gleichung* (F-KPP) ist gegeben durch

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + u(u - 1). \quad (1)$$

Interessant an Gleichung (1) ist, dass diese im engen Zusammenhang mit der verzweigenden Brownschen Bewegung steht. Ziel dieses Kapitels ist es dies herzuleiten und zu motivieren.

3.1 Die McKean Darstellung

Die wesentliche Verbindung zwischen der VBB und der F-KPP-Gleichung wird im Allgemeinen auf McKean zurückgeführt, der die Gleichung für den Fall einer binären Verzweigung herleitete. Diese lässt sich jedoch noch auf allgemeinere Verzweigungsmodelle ausweiten. Grundlage für die Herleitung dieser Beziehung ist das Duhamelsche Prinzip aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, welches wir in dem folgenden Lemma ohne Beweis wiedergeben wollen.

Es sei daran erinnert, dass die Faltung zweier Funktion f und g an der Stelle x definiert ist durch

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy,$$

sofern $f, g \in L^1(\lambda)$.

Proposition 3.1.1 [12, S.3] (Duhamelsches Prinzip)

Gegeben sei eine Funktion f und gesucht ist eine Funktion u in Raum und Zeit, die das System

$$\begin{aligned} \partial_t u - Lu &= 0 \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned}$$

löst, wobei L einen Differential-Operator in x darstellt. Sei nun H eine Funktion in zwei Variablen, sodass

$$u(t, x) = (H(t, \cdot) * f)(x).$$

Sei nun g eine weitere Funktion in Ort und Zeit. Wir betrachten nun das System

$$\begin{aligned}(\partial_t u - Lu)(t, x) &= g(t, x) \\ u(0, x) &= f(x).\end{aligned}\tag{2}$$

Dann löst die Funktion v definiert durch

$$v(t, x) = (H(t, \cdot) * f)(x) + \int_0^t (H(s, \cdot) * g(t - s, \cdot))(x) ds,$$

die Gleichung (2). Die Funktion H wird als Greensche Funktion zum Operator L bezeichnet.

Ohne Beweis. □

Ein Beispiel für eine Greensche Funktion zu einem gegebenen Differential-Operator stellt das folgende Resultat dar. Dieses wird auch im Beweis des Hauptresultats dieses Abschnittes zum Einsatz kommen.

Proposition 3.1.2 [12, S.3] (Ein Beispiel für eine Greensche Funktion)

Wir betrachten den Differential-Operator $L = \frac{1}{2}\partial_{xx}^2$. Dann ist die Funktion G definiert durch

$$G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

die Greensche Funktion zu L .

Ohne Beweis. □

Mit den vorangegangenen Resultaten sind wir nun in der Lage den folgenden Satz herzuleiten, der die Lösungen der F-KPP-Gleichung in Form einer VBB darstellt.

Satz 3.1.3 [8, S.65]

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, f Borel-messbar und $\{x_k(t) : k \leq n(t)\}$ eine verzweigende Brownsche Bewegung, die bei 0 beginnt. Sei

$$v(t, x) \equiv \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right].$$

Dann ist $u(t, x) \equiv 1 - v(t, x)$ die Lösung der F-KPP-Gleichung

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_x^2 u + u(u - 1),$$

mit der Anfangsbedingung $u(0, x) = 1 - f(x)$.

Bemerkung 3.1.4 Im Rahmen der Beweisführung von Satz 3.1.3 werden wir von der Gleichung

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau < t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] = \int_0^t e^{-s} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \mid \tau = s \right] ds$$

gebrauch machen. Offenbar handelt es sich bei τ , um eine exponentialverteilte Zufallsvariable. Wir diskretisieren diesen Umstand und nehmen für τ eine diskrete Verteilung $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ an mit

$$\mathbb{P}[\tau = t_i] = p_i,$$

wobei $0 < t_1 < t_2 < \dots$ gilt. Unter der neu definierten Situation finden wir die Identität

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau < t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\{\tau = t_i\}} \mathbb{1}_{\{\tau < t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) d\mathbb{P} \\ &= \sum_{\{i: t_i < t\}} \int_{\{\tau = t_i\}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \mid \tau = t_i \right] d\mathbb{P} \\ &= \sum_{\{i: t_i < t\}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \mid \tau = t_i \right] \int_{\{\tau = t_i\}} d\mathbb{P} \\ &= \sum_{\{i: t_i < t\}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \mid \tau = t_i \right] p_i. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ geeignet gegen eine Exponentialverteilung konvergiert, erhalten wir die kontinuierliche Analogie, welche in dem folgenden Beweis verwendet wird.

Beweis:

Der Beweis ist den im vorherigen Abschnitt verwendeten Argumenten sehr ähnlich. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ und Borel-messbar. Definiere

$$v(t, x) \equiv \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right], \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Unterscheiden der Fälle, in denen die erste Verzweigung vor oder nach t auftritt, liefert

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] + \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau < t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right]. \end{aligned}$$

Für den ersten Erwartungswert ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] &= \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} f(x - x_1(t))] \\
&= \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{\tau > t\}}] \mathbb{E} [f(x - x_1(t))] \\
&= \mathbb{P} [\tau > t] \mathbb{E} [f(x - x_1(t))] \\
&= e^{-t} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} f(x - z) dz.
\end{aligned}$$

Seien x' und x'' die beiden Tochterprozesse von x_1 nach der ersten Teilung. Der zweite Summand wird zu

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\tau < t\}} \prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] \\
&\stackrel{\text{Bemerkung 3.1.4}}{=} \int_0^t e^{-s} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \mid \tau = s \right] ds \\
&= \int_0^t e^{-s} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n'(t-s)} f(x - x'_k(t-s) - x(s)) \prod_{j=1}^{n''(t-s)} f(x - x''_j(t-s) - x(s)) \right] ds \\
&= \int_0^t e^{-s} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n'(t-s)} f(x - x'_k(t-s) - z) \prod_{j=1}^{n''(t-s)} f(x - x''_j(t-s) - z) \right] dz ds \\
&= \int_0^t e^{-s} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n'(t-s)} f(x - x'_k(t-s) - z) \right] \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^{n''(t-s)} f(x - x''_j(t-s) - z) \right] dz ds \\
&= \int_0^t e^{-s} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}} v(t-s, x-z)^2 dz ds.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir somit die Gleichung

$$v(t, x) = e^{-t} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} f(x - z) dz + \int_0^t e^{-s} \int \frac{e^{-\frac{z^2}{2s}}}{\sqrt{2\pi s}} v(t-s, x-z)^2 dz ds. \quad (3)$$

Wir verwenden nun das Duhamelschen Prinzip aus Proposition 3.1.1 um zu zeigen, dass aus der Darstellung (3) folgt, dass v die Differentialgleichung

$$\partial_t v = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 v - v + v^2$$

erfüllt.

Nach Proposition 3.1.2 wissen wir, dass $G(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$ die Greensche Funktion für den Differential-Operator $L = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2$ ist. Dies nutzen wir aus, um den Operator L^H zu bestimmen, zu dem die Funktion $H(t, x) = e^{-t} G(t, x)$ den Greenschen Operator darstellt. Dies bedeutet, dass $(H(t, x) * f)(x)$ eine Lösung zu dem assoziierten System darstellt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_t u(t, x) &= \partial_t (e^{-t} (G(t, \cdot) * f)(x)) \\
&= e^{-t} \partial_t ((G(t, \cdot) * f)(x)) - e^{-t} (G(t, \cdot) * f)(x) \\
&= \partial_{xx}^2 (e^{-t} \frac{1}{2} (G(t, \cdot) * f)(x)) - u(t, x) \\
&= \left(\frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u - u \right) (t, x).
\end{aligned}$$

Also ist H die Greensche Funktion für $L = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 - 1$. Die obige Gleichung zeigt uns, dass

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(t, y) f(x - y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} H(s, y) u(t - s, x - y)^2 dy ds \\
&= (H(t, \cdot) * f)(x) + \int_0^t (H(s, \cdot) * u^2(t - s, \cdot))(x) ds
\end{aligned}$$

und somit haben wir nach dem Duhamelschen Prinzip wie gewünscht

$$\partial_t u - LU = u^2 \Rightarrow \partial_t u = \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u - u + u^2.$$

□

Dieses Lemma gilt für eine große Klasse von messbaren Funktionen f . Wir interessieren uns jedoch besonders für die hier angenommene Form $f(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$, welche die folgende Darstellung

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} f(x - x_k(t)) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} \mathbb{1}_{(x - x_k(t) \geq 0)} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{x \geq x_1(t) \vee x \geq x_2(t) \vee \dots \vee x \geq x_{n(t)}(t)\}} \right] \\
&= \mathbb{P} \left(\max_{k \leq n(t)} x_k(t) \leq x \right) \\
&= \mathbb{P}(M(t) \leq x).
\end{aligned}$$

liefert. Dies ist die Verteilungsfunktion der maximalen Position der VBB zum Zeitpunkt t .

Das folgende Korollar gibt eine weitere Anwendung der hergeleiteten Formel an.

Korollar 3.1.5 [6, S.324]

Sei $n(t) = |N(t)|$. Dann ist $\mathbb{P}(n(t) = k) = e^{-t} (1 - e^{-t})^{k-1}$.

Beweis:

Wir lösen die F-KPP-Gleichung für f konstant, also $f(x) = a$ für ein beliebiges $a \in [0, 1]$. Offensichtlich wird die Funktion u für ein solches f zu einer raumunabhängigen Lösung, das heißt, $u(t, x) = z(t)$ für eine Funktion z .

Da u für diesen Anwendungsfall nun konstant im Ort ist, vereinfacht sich die Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned}\partial_t u &= \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u - u + u^2 \\ &= -u + u^2.\end{aligned}$$

Also äquivalent zu $z' = z(z - 1)$ mit $z(0) = a$. Es lässt sich verifizieren, dass z gegeben ist durch

$$z(t) = \frac{a}{a + (1 - a)e^t} = ae^{-t} \frac{1}{1 - (1 - e^{-t})a} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t} (1 - e^{-t})^{k-1} a^k. \quad (4)$$

Es gilt

$$z(t) = \frac{a}{a + (1 - a)e^t} = ae^{-t} \frac{1}{1 - (1 - e^{-t})a}.$$

Wegen $(1 - e^{-t})a \in (0, 1)$ können wir den Term auf der rechten Seite durch eine geometrische Reihe ausdrücken und erhalten somit

$$z(t) = ae^{-t} \frac{1}{1 - (1 - e^{-t})a} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t} (1 - e^{-t})^{k-1} a^k.$$

Andererseits wissen wir aus dem Theorem, dass

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[\prod_{i \in N(t)} a \right] = \mathbb{E} [a^{n(t)}] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(n(t) = k) a^k.$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (4) erhalten wir die Formel $\mathbb{P}(n(t) = k) = e^{-t} (1 - e^{-t})^{k-1}$.

□

3.2 Traveling wave Lösungen

Die F-KPP-Gleichung stellt ein Beispiel für eine partielle Differentialgleichung dar, dessen Lösungen die sogenannte *traveling wave* Eigenschaft erfüllen. Vereinfacht gesagt bezeichnet eine traveling wave eine Welle, die sich in eine bestimmte Richtung ausbreitet und dabei eine feste Form beibehält und sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt.

Definition 3.2.1 [6] (traveling wave)

Wir sagen, dass eine Funktion u in Raum und Zeit gegen eine traveling wave w_c mit Geschwindigkeit c konvergiert, wenn eine Funktion m in Zeit und Funktion w im Ort existieren, sodass $1 - w$ eine Verteilungsfunktion ist und

$$u(t, m(t) + x) \rightarrow w(x),$$

gleichmäßig in x für $t \rightarrow \infty$ und

$$u(t, x) = w_c(x - ct)$$

erfüllt.

Eine traveling wave Lösung ist eine Lösung, die $u(x, t) = w(x - ct)$ für eine Funktion $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ erfüllt, wobei mit x die räumliche und mit t die zeitliche Dimension dargestellt wird. Die Funktion w ist das Wellenprofil und c die Wellengeschwindigkeit. Wir definieren $\xi = x - ct$ für die folgenden Untersuchungen.

Nehmen wir zunächst an, dass die Lösungen zu der F-KPP Gleichung die traveling wave Eigenschaft erfüllen. Dies führt unmittelbar zu den folgenden Überlegungen.

Substituieren wir in der F-KPP Gleichung

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \partial_x^2 u + u(u - 1)$$

u durch $w(\xi) = w(x - ct)$, so erhalten wir für die linke Seite der Gleichung

$$\partial_t u(\xi) = -cw'(\xi)$$

und für die rechte Seite

$$\frac{1}{2} \partial_x^2 u + u(u - 1) = \frac{1}{2} w''(\xi) + w(\xi)(w(\xi) - 1).$$

Insgesamt ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} w''(\xi) + cw'(\xi) + w(\xi)(w(\xi) - 1) = 0$$

oder

$$\frac{1}{2} w'' + cw' + w(w - 1) = 0.$$

Nachdem wir das System nun unter der Annahme von existierenden traveling wave Lösungen untersucht haben, muss deren Existenz gesichert werden. Eine Antwort auf diese Fragen liefert ein tiefgreifendes Resultat von Kolmogorov et al.

Satz 3.2.2 [10]

Es existiert eine Abbildung $t \rightarrow m_t$, sodass

$$u(t, m_t + x) \rightarrow w(x) \text{ gleichmäßig in } x \in \mathbb{R} \text{ für } t \rightarrow \infty,$$

wobei w die Gleichung

$$\frac{1}{2} w'' + \sqrt{2} w' + w(w - 1) = 0$$

löst.

Ohne Beweis.

□

Die folgenden Untersuchungen motivieren die Wichtigkeit der Konstanten $\sqrt{2}$ im Bezug auf die Geschwindigkeit mit der sich die Wellen fortbewegen.

Um das Verhalten der Lösungen zu untersuchen, transformieren wir unsere Differentialgleichung in ein zweidimensionales System von Gleichungen erster Ordnung. Dazu setzen wir $\psi = w'$ und erhalten somit folgendes System:

$$\begin{aligned} w' &= \psi \\ \psi' &= -2c\psi - 2w(w - 1). \end{aligned}$$

Für $w' = 0$ ergibt sich die Nulllinie $\psi = 0$ und für $\psi' = 0$ die Linie $\psi = \frac{1}{c}(w - w^2)$. Somit besitzt das System die beiden Fixpunkte $(w, \psi) = (0, 0)$ und $(w, \psi) = (1, 0)$.

Um die Art der Fixpunkte zu bestimmen, berechnen wir die Jacobi-Matrix J des Systems:

$$J(w, \psi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w'}{\partial w} & \frac{\partial w'}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \psi'}{\partial w} & \frac{\partial \psi'}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4w + 2 & -2c \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der beiden Fixpunkte liefert

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2c \end{pmatrix}.$$

Durch Berechnen der Determinanten erhalten wir die jeweilige charakteristische Funktion $p_J(\lambda)$:

$$\begin{aligned} p_{J(0,0)}(\lambda) &= \det \left(J(0,0) - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 2 & -2c - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-2c - \lambda) - 2 \cdot 1 = \lambda^2 + 2\lambda c - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{J(1,0)}(\lambda) &= \det \left(J(1,0) - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -2 & -2c - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-2c - \lambda) - (-2 \cdot 1) = \lambda^2 + 2\lambda c + 2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen der beiden Funktionen liefern die Eigenwerte und sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 + 8}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2 + 2}, \\ b_{1,2} &= \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 - 8}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2 - 2}. \end{aligned}$$

Da die beiden Eigenwerte $a_{1,2}$ reell und von unterschiedlichem Vorzeichen sind, liegt hier ein instabiler Sattelpunkt für jedes $c > 0$ vor.

Für die Eigenwerte $b_{1,2}$ müssen wir diejenigen Werte finden, zu denen die Wurzel negativ wird und somit eine Fallunterscheidung vorgenommen werden muss.

$$c^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow c \geq \sqrt{2}$$

1. Fall: Für $c \geq \sqrt{2}$ sind die beiden Eigenwerte reell und negativ. Es handelt sich hierbei also um einen stabilen Knotenpunkt.

2. Fall: Für $0 < c < \sqrt{2}$ bekommen wir komplex konjugierte Eigenwerte mit negativem Realteil. Es handelt sich hierbei um eine stabile Spirale.

(Untersuchung der Fälle?)
(Phasendiagramm?)

Satz 3.2.3 [8, S.68]

Die F-KPP-Gleichung besitzt als Lösung eine monotone Traveling wave w_c der Geschwindigkeit c genau dann, wenn $c \geq \sqrt{2}$.

Zu jeder Geschwindigkeit c existiert bis auf Verschiebung genau eine Wellenlösung.

Wenn $c > 0$ (bzw. $c < 0$) ist sie steigend (bzw. fallend) mit $w_c(-\infty) = 0$, $w_c(\infty) = 1$ (bzw. $w_c(-\infty) = 1$, $w_c(\infty) = 0$).

Satz 3.2.4 [7, S.3]

Angenommen w ist eine monotone traveling wave der Geschwindigkeit $c > \sqrt{2}$. Dann gibt es ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, sodass

$$1 - w(x) \sim e^{\lambda(x+\tilde{x})} \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

wobei λ die größere Wurzel aus $\frac{1}{2}\lambda^2 + c\lambda + 2 = 0$ ist (sodass $\lambda = -c + \sqrt{c^2 - 2} < 0$).

Kapitel 4

Die Maximalposition in einer VBB

Wie wir bereits erkennen konnten ist die Quintessenz zur Untersuchung der Maximalposition $M(t) = \max_{v \in N(t)} x_v(t)$ unmittelbar verknüpft mit der berühmten F-KPP-Gleichung. Weitere wichtige Struktureigenschaften ergeben sich aus den Arbeiten von Bramson, Hu und Shi, die weitere neue (asymptotische) Erkenntnisse über den stochastischen Strukturaufbau der verzweigenden Brownschen Bewegung anführen konnten. Ziel dieser Arbeit ist es, die ursprünglichen und unter Umständen aufwändigen Beweise dieser Pioniere zu simplifizieren, durch eine geeignetere Wahl gewisser Schranken. Diese Ideen gehen auf den Mathematiker Mathew I. Roberts [5] zurück.

Zur Veranschaulichung der Maximalposition, dient die folgende Abbildung der Realisation eines möglichen Pfades von $M(t)$.

4.1 Die Ergebnisse von Bramson, Hu und Shi

Wir konnten bereits ein wellencharakteristisches Konvergenzverhalten der Form

$$u(t, m(t) + x) \rightarrow w(x) \text{ gleichmäßig in } x \text{ für } t \rightarrow \infty, \quad (1)$$

für Funktionen m und w ausmachen. Da diese beiden Funktionen nicht eindeutig durch die Gleichung festgelegt werden, haben wir für m die Median-Funktion gewählt. Mit anderen Worten setzen wir

$$m(t) := \sup \left\{ x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(M_t \leq x) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Bramson liefert in seiner Arbeit von 1978 das folgende wichtige Resultat über das Verhalten des Zentrierungsterms höherer Ordnung $m(t)$.

Satz 4.1.1 [5, S.3519] (Bramson)

Der Median $m(t)$ erfüllt

$$m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + O(1) \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Somit erhalten wir für die Konvergenz in (1)

$$u \left(t, \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + O(1) + x \right) \rightarrow w(x) \text{ gleichmäßig in } x \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Des Weiteren werden wir das folgende Ergebnis über das fast sichere (f. s.) Verhalten von M_t aus der Arbeit von Hu und Shi (2009) beweisen.

Satz 4.1.2 [5, S.3520] (Hu und Shi)

Das Maximum M_t erfüllt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t - \sqrt{2}t}{\log t} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \quad \text{f. s.} \quad (2)$$

und

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t - \sqrt{2}t}{\log t} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{f. s..} \quad (3)$$

Bevor wir die beiden Hauptresultate herleiten, werden zunächst unter der Zuhilfenahme von Momenten-Kalkulationen gewisse Schranken für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Maximalteilchens angegeben. Um die Komplexität des formulierten Ziels zu ergründen, betrachten wir dann ein simplifiziertes Modell, dass sich aus unabhängigen Brownschen Bewegungen mit gleichem Ursprung zusammensetzt.

4.2 Momentenberechnung und der unabhängige Fall

Wir wollen zunächst einen kritischen Wert $c > 0$ für die Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(\exists u \in N(t) : x_u(t) > ct) \quad (4)$$

im Bezug auf das Grenzverhalten für $t \rightarrow \infty$ bestimmen. In dem Kapitel über die Traveling wave Lösungen haben wir bereits gesehen, dass die Konstante $\sqrt{2}$ eine wichtige Rolle angesichts der Geschwindigkeit der Wellen spielt. Dies wollen wir nun wiederfinden, indem wir die folgende bekannte Abschätzung für standardnormalverteilte Zufallsvariablen anwenden.

Lemma 4.2.1 [4, S.349]

Sei X standardnormalverteilt. Dann gilt für alle $x > 0$, dass

$$\frac{x}{x^2 + 1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}.$$

Beweis:

Als Erstes zeigen wir die rechte Schranke. Für $u > x$ gilt

$$\mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{u}{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}.$$

Für die linke Abschätzung definieren wir uns zunächst die Funktion

$$f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 1) \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Es gilt $f(0) < 0$, da der erste Term für $x = 0$ entfällt und ein negatives Vorzeichen vor dem positiven Integral steht. Beachte außerdem, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Bilden wir die Ableitung von $f(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x \cdot (-xe^{-\frac{x^2}{2}}) - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= 2e^{-\frac{x^2}{2}} - 2x \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= -2x \left(\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} \right). \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass der zweite Faktor des Produktes auch negativ ist und somit ist die Ableitung für $x > 0$ positiv. Eine positive Ableitung impliziert jedoch, dass die Stammfunktion monoton wachsend ist. Zuvor hatten wir argumentiert, dass unsere Funktion f im Negativen startet und im Limes gegen 0 konvergiert. Damit ist die Eigenschaft $f(x) \leq 0$ bewiesen.

Das Kriterium $f(x) \leq 0$ liefert

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow xe^{-\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 1) \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq 0 \\ &\Leftrightarrow xe^{-\frac{x^2}{2}} \leq (x^2 + 1) \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir die Ungleichung mit $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ folgt unsere linke Schranke und somit ist das Lemma bewiesen.

□

Bemerkung 4.2.2

Die linke Schranke lässt sich weiter nach unten abschätzen durch

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Mithilfe des vorherigen Lemmas lässt sich die Wahrscheinlichkeit aus (4) nach oben

abschätzen durch

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\exists u \in N(t) : x_u(t) > ct) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{u \in N(t)} \{x_u(t) > ct\}\right) \\
&= \mathbb{E}[1_{\{\bigcup_{u \in N(t)} \{x_u(t) > ct\}\}}] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sum_{u \in N(t)} 1_{\{x_u(t) > ct\}}\right] \\
&\stackrel{\text{Formel von Wald}}{=} \underbrace{\mathbb{E}[|N(t)|]}_{=n(t)} \mathbb{E}[1_{\{x_u(t) > ct\}}] \\
&\stackrel{\text{Proposition 2.1.1}}{=} e^t \mathbb{P}[B(t) > ct] \\
&\stackrel{\text{Lemma 4.2.1}}{\leq} e^t \frac{e^{-\frac{c^2 t}{2}}}{ct^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} = e^{t(1-\frac{c^2}{2})} \frac{1}{ct^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}.
\end{aligned}$$

Diese obere Schranke geht für $t \rightarrow \infty$ gegen 0, falls $c \geq \sqrt{2}$. Des Weiteren können wir mit Lemma 4.2.1 die folgende untere Schranke

$$e^t \mathbb{P}[B(t) > ct] \geq e^{t(1-\frac{c^2}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ct^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{c^3 t^{\frac{3}{2}}} \right)$$

bestimmen. Für $t \rightarrow \infty$ geht diese Abschätzung gegen unendlich, falls $c < \sqrt{2}$. Nun müssen wir jedoch noch zeigen, dass die hergeleitete Ungleichung

$$e^{t(1-\frac{c^2}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ct^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{c^3 t^{\frac{3}{2}}} \right) \leq e^t \mathbb{P}[B(t) > ct],$$

ebenfalls auf die eigentlich interessierende Wahrscheinlichkeit

$$e^{t(1-\frac{c^2}{2})} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ct^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{c^3 t^{\frac{3}{2}}} \right) \leq \mathbb{P}(\exists u \in N(t) : x_u(t) > ct)$$

anwendbar ist. Heuristisch bedeutet dies, dass das Event nicht von seltenen Ereignissen dominiert wird und somit für unsere Wahrscheinlichkeit gilt. Damit sollten wir zeigen können, dass $c = \sqrt{2}$ ist.

Wir betrachten nun den einfacheren Fall, indem wir die Annahme treffen, dass es sich um unabhängige Brownsche Bewegungen handelt.

.

.

.

4.3 Grundlegende Eigenschaften von Bessel-3-Prozesse

Ein fundamentaler stochastischer Prozess, der bei der Beweisführung zum tragen kommen wird, ist der sogenannte Bessel-3-Prozess, den wir aus Notationsgründen im Rahmen dieser Abhandlung einfach als Bessel-Prozess bezeichnen werden.

Definition 4.3.1 [4, S.140] (Der Bessel-Prozess)

Sei $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+} = (W_t^1, W_t^2, W_t^3)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine mehrdimensionale Brownsche Bewegung auf \mathbb{R}^3 , mit dem Startwert $W_0 = (x, 0, 0)$. Ein stochastischer Prozess $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, der in Verteilung mit dem betraglichen Prozess $(|W_t|)_{t \in \mathbb{R}_+}$ übereinstimmt, d. h. $Z =_{\mathcal{L}} |W|$, nennen wir einen Bessel-Prozess mit Start in x .

Angenommen $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist eine eindimensionale Brownsche Bewegung, die von $B_0 = x$ unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß P_x startet. Da es sich bei der Brownschen Bewegung um ein Martingal bezüglich seiner natürlich erzeugten Filtration handelt, ist der stochastische Integralprozess $(I^h(B)_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ definiert durch

$$I^h(B)_t = \int_0^t h_s dB_s,$$

ebenfalls ein Martingal bezüglich dieser Filtration für jeglichen vorhersehbaren Prozess h . Betrachten wir den Integralprozess zu dem vorhersehbaren Prozess g definiert durch $g_t := x^{-1} \mathbb{1}_{\{B_s > 0 \forall s \leq t\}}$. Es ergibt sich

$$I^g(B)_t = \int_0^t g_s dB_s = x^{-1} B_t \mathbb{1}_{\{B_s > 0 \forall s \leq t\}}.$$

Folglich ist der Prozess X definiert durch

$$X_t := x^{-1} B_t \mathbb{1}_{\{B_s > 0 \forall s \leq t\}}$$

ein nicht-negatives Martingal mit Start im Wert eins unter dem Maß P_x . Die Eigenschaft der Nicht-Negativität kommt uns zusätzlich in dem Sinne zu Gute, dass wir den Prozess als Radon-Nikodym Dichte verwenden können, um ein neues Maß zu bestimmen. Wir definieren das neue Maß \hat{P}_x demnach durch

$$\frac{d\hat{P}_x}{dP_x} \Big|_{\mathcal{F}_t} = X_t,$$

wobei \mathcal{F}_t dabei noch stets die natürliche Filtration unserer zugrundeliegenden Brownschen Bewegung B_t darstellt. Mithilfe von maßtheoretischen Untersuchungen lässt sich beweisen, dass B in Verteilung der Definition eines Bessel-Prozess genügt, unter dem neu definierten Maß \hat{P}_x .

Weiter ist bekannt, dass die Dichte eines Bessel-Prozesses der Gleichung

$$\hat{P}_x(B_t \in dz) = \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) dz,$$

entspricht. Die folgenden analytischen Abschätzungen bezüglich Bessel-Prozessen werden einen Großteil der Arbeit bei den Beweisführungen unserer beiden Hauptresultate leisten.

Lemma 4.3.2 [5, S.3521] (Abschätzung für die Dichte eines Bessel-3-Prozesses)

Sei $\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Für jedes $t > 0$ und $x, y \geq 0$,

$$\frac{\gamma z^2}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{2t} - \frac{x^2}{2t}} \leq \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) \leq \frac{\gamma z^2}{t^{\frac{3}{2}}}$$

Beweis:

Es gilt

$$e^{\frac{xz}{t}} - e^{-\frac{xz}{t}} = 2 \left(\frac{1}{2} (e^{\frac{xz}{t}} - e^{-\frac{xz}{t}}) \right) = 2 \sinh \left(\frac{xz}{t} \right) \geq \frac{2xz}{t}.$$

Somit folgt für die untere Schranke

$$\begin{aligned} \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) &= \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{\frac{-z^2+2zx-x^2}{2t}} - e^{\frac{-z^2-2zx-x^2}{2t}}) \\ &= \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{\frac{-z^2-x^2}{2t}} e^{\frac{zx}{t}} - e^{\frac{-z^2-x^2}{2t}} e^{-\frac{zx}{t}}) \\ &= \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{\frac{-z^2-x^2}{2t}} 2 \frac{1}{2} (e^{\frac{zx}{t}} - e^{-\frac{zx}{t}})) \\ &\geq \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{\frac{-z^2-x^2}{2t}} 2 \frac{xz}{t}) \\ &= \frac{\gamma z^2}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{z^2}{2t} - \frac{x^2}{2t}} \end{aligned}$$

Für die obere Schranke ist zu beachten, dass

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) &= \frac{x}{t} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} + e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) + \frac{z}{t} (e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}} + e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}}) \\ &\leq \frac{2x}{t} \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}} \leq \frac{2xz}{t}$$

und somit haben wir

$$\frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) \leq \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} \frac{2xz}{t} = \frac{\gamma z^2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

□

Illustration der Schranke für die Dichte des Bessel prozesses

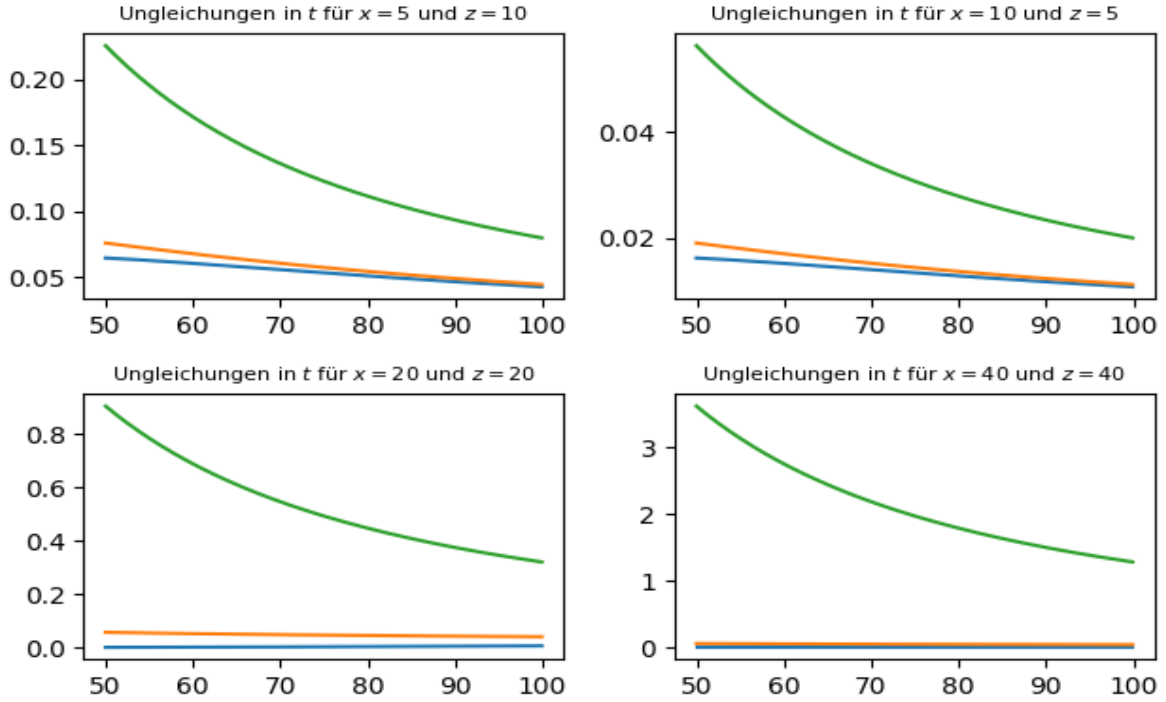


Abbildung 4.1: Illustration der Abschätzung für die Besel-Dichte zu verschiedenen Parametern. Wir erkennen augenscheinlich, dass die Abschätzungen mit größer werdendem t dazu tendieren schärfer zu werden. Dies kommt unseren Untersuchungen zu gute, in denen wir uns für das langfristige Verhalten der VBB interessieren.

Die folgenden beiden Lemma benötigen wir für den Großteil von unserem ersten großen Satz und für die schwierigste Proposition, die wir für den Beweis von Satz 2 brauchen. Dazu berechnen wir den Erwartungswert zweier Funktionale zweier abhängiger Bessel-3-Prozesse.

Das erste Lemma wird bei dem Beweis der unteren Schranke für Satz 1 verwendet.

Angenommen, wir haben unter \hat{P} zwei Prozesse Y_t^1 und Y_t^2 , $t \geq 0$, und einen Zeitpunkt $\tau \in [0, \infty)$, sodass:

- $(Y_t^1, t \geq 0)$ ein Bessel-Prozess ist, der von 1 ausgeht;
- τ exponentialverteilt ist mit dem Parameter 2 und unabhängig ist von $(Y_t^1, t \geq 0)$;
- $Y_t^2 = Y_t^1$ für alle $t \leq \tau$;
- bedingt durch τ und $(Y_t^1, t \leq \tau)$, $(Y_{t+\tau}^2, t \geq 0)$ ein von Y_τ^1 ausgehender Bessel-Prozess ist, der unabhängig von $(Y_t^1, t > \tau)$ ist.

Aus dieser Beschreibung ist ersichtlich, dass $(\tau, Y_\tau^1, Y_t^1, Y_t^2)$ eine wohlgeformte gemeinsame Dichte hat. Beachte, dass wir für diesen Aufbau weiterhin \hat{P} verwenden, ebenso wie für den oben betrachteten einzelnen Bessel-Prozess $(B_t, t \geq 0)$.

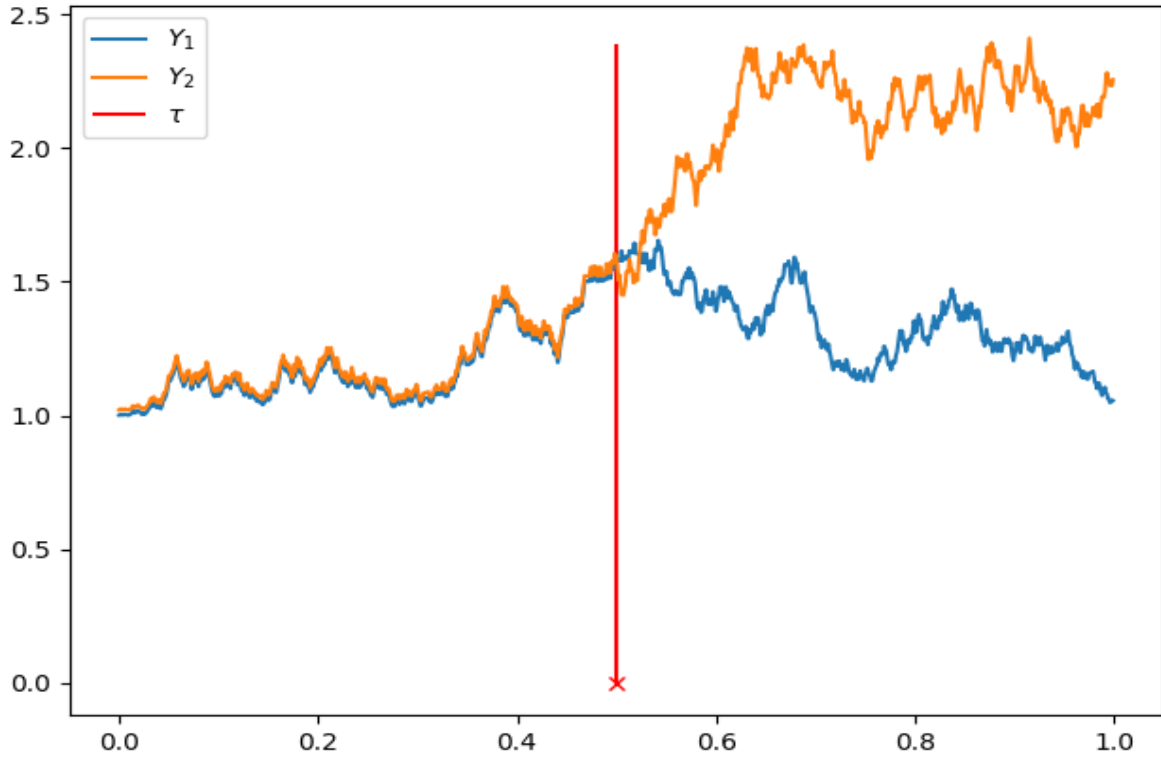


Abbildung 4.2: Illustration der Prozesse Y^1 und Y^2 und ihrer Abhängigkeitsstruktur unter τ .

Lemma 4.3.3 [5, S.3522]

Sei

$$\beta = \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t} + \frac{y}{t},$$

$$A_1 = \{1 \leq Y_1^1 \leq 2\} \text{ und } A_2 = \{1 \leq Y_2^2 \leq 2\}.$$

Es existiert eine Konstante C_1 , sodass für alle $y \geq 0$ und große t

$$\mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_\tau^1 e^{2\tau - (3\tau \log t)/(2t) - \beta Y_\tau^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \{\tau \leq t\}}] \leq C_1 t^{-3}$$

gilt.

Beweis:

Da es sich bei τ um eine exponentialverteilte Zufallsvariable zum Parameter 2 handelt, besitzt die Verteilung von τ die Lebesgue-Dichte $f(t) = 2e^{-2t}$. Wir erinnern an Bemerkung 3.1.4 und schreiben den Erwartungswert um zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_\tau^1 e^{2\tau - (3\tau \log t)/(2t) - \beta Y_\tau^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \{\tau \leq t\}}] \\ &= \int_0^t 2e^{-2s} \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_\tau^1 e^{2\tau - (3\tau \log t)/(2t) - \beta Y_\tau^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \{\tau \leq t\}} \mid \tau = s] ds \\ &= \int_0^t 2 \mathbb{E}^{\hat{P}}[e^{-2s} Y_s^1 e^{2s - (3s \log t)/(2t) - \beta Y_s^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \{s \leq t\}} \mid \tau = s] ds \\ &= 2 \int_0^t \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_s^1 e^{-(3s \log t)/(2t) - \beta Y_s^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} \mid \tau = s] ds \end{aligned}$$

umzuschreiben.

Die Idee ist nun, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Bessel-Prozess zum Zeitpunkt t in der Nähe des Ursprungs befindet, ungefähr $t^{-\frac{3}{2}}$ beträgt. Wenn s klein ist, dann haben wir zwei (fast) unabhängige Bessel-Prozesse, die beide zum Zeitpunkt t in der Nähe des Ursprungs liegen müssen, was t^{-3} ergibt. Wenn s groß ist, dann haben wir effektiv nur einen Bessel-Prozess, der $t^{-\frac{3}{2}}$ ergibt, aber $\exp(\frac{3 \log t}{2t})$ gibt uns ein zusätzliches $t^{-\frac{3}{2}}$. Wenn s weder groß noch klein ist, kombinieren sich die oben genannten Effekte, sodass sich die Dinge gut entwickeln. In jedem Fall wenden wir die obere Schranke aus Lemma 3 an.

Wir prüfen zunächst den Fall des kleinen s : Man beachte, dass $\beta \geq 1$ gilt und Y^1 ein nicht-negativer Prozess ist. Somit gilt für jegliche Realisation von Y_s^1 die Ungleichung $Y_s^1 e^{-\beta Y_s^1} \leq 1$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} \left[\underbrace{Y_s^1 e^{-(3s \log t)/(2t) - \beta Y_s^1}}_{\leq 1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} | \tau = s \right] ds \\
& \leq \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} [\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} | \tau = s] ds \\
& = \int_0^1 \hat{P}[A_1 \cap A_2 | \tau = s] ds \\
& = \int_0^1 \hat{P}[\{1 \leq Y_1^1 \leq 2\} \cap \{1 \leq Y_2^2 \leq 2\} | \tau = s] ds \\
& \leq \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} \left[\int_0^\infty \hat{P}(Y_t^1, Y_t^2 \in [1, 2] | \tau = s, Y_s^1 = x) \hat{P}(Y_s^1 \in dx) | \tau = s \right] ds \\
& = \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} \left[\int_0^\infty \hat{P}(Y_t^1 \in [1, 2] | \tau = s, Y_s^1 = x) \hat{P}(Y_t^2 \in [1, 2] | \tau = s, Y_s^1 = x) \hat{P}(Y_s^1 \in dx) | \tau = s \right] ds \\
& = \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} \left[\int_0^\infty \hat{P}(Y_t^1 \in [1, 2] | \tau = s, Y_s^1 = x)^2 \hat{P}(Y_s^1 \in dx) | \tau = s \right] ds \\
& = \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} \left[\int_0^\infty \left(\int_1^2 \frac{z}{x \sqrt{2\pi(t-s)}} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2(t-s)}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2(t-s)}}) dz \right)^2 \hat{P}(Y_s^1 \in dx) | \tau = s \right] ds \\
& \leq \int_0^1 \mathbb{E}^{\hat{P}} \left[\int_0^\infty \left(\int_1^2 \frac{2z^2}{\sqrt{2\pi(t-s)}^{\frac{3}{2}}} dz \right)^2 \hat{P}(Y_s^1 \in dx) | \tau = s \right] ds \\
& \leq c_1 t^{-3},
\end{aligned}$$

wobei die dritte Ungleichung Lemma 3 verwendet. Für den Fall eines großen s ,

$$\int_{t-1}^t \hat{P}[Y_s^1 e^{-(3s \log t)/(2t) - \beta Y_s^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} | \tau = s] ds \leq c_2 t^{-\frac{3}{2}} \hat{P}(A_1) \leq c_3 t^{-3},$$

wobei wir die Tatsache genutzt haben, dass $\beta \geq 1$, $x e^{-\beta x} \leq 1$. (Wir werden die Tatsache, dass $\beta \geq 1$ ist, im gesamten Artikel ohne weitere Erwähnung verwenden.) Schließlich der

Hauptfall, für $s \in [1, t-1]$,

$$\begin{aligned}
& \int_1^{t-1} \hat{P}[Y_s^1 e^{-(3s \log t)/(2t) - \beta Y_s^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2} | \tau = s] ds \\
& \leq \int_1^{t-1} \int_0^\infty \frac{z^3}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\beta z - (3s \log t)/(2t)} \left(\int_1^2 \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} dx \right)^2 dz ds \\
& = \int_1^{t-1} \int_0^\infty \frac{z^3}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\beta z - (3s \log t)/(2t)} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi(t-s)^3}} \int_1^2 x^2 dx \right)^2 dz ds \\
& = \int_1^{t-1} \int_0^\infty \frac{z^3}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\beta z - (3s \log t)/(2t)} \frac{4}{2\pi(t-s)^3} \left(\frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{3} 1^3 \right)^2 dz ds \\
& = \int_1^{t-1} \int_0^\infty \frac{z^3}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\beta z - (3s \log t)/(2t)} \frac{4}{2\pi(t-s)^3} \left(\frac{7}{3} \right)^2 dz ds \\
& = \underbrace{\left(\frac{7}{3} \right)^2 \frac{4}{2\pi}}_{:=c_4} \int_1^{t-1} \frac{e^{-(3s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}}(t-s)^3} \int_0^\infty z^3 \underbrace{e^{-\beta z}}_{\leq e^{-z}, \text{ da } \beta \geq 1} dz ds \\
& \leq c_4 \int_1^{t-1} \frac{e^{-(3s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}}(t-s)^3} \int_0^\infty z^3 e^{-z} dz ds \\
& \leq c_4 \int_1^{t-1} \frac{e^{-(3s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}}(t-s)^3} \underbrace{\int_0^\infty z^3 e^{-z} dz}_{6, \text{ daher } c_5 := 6c_4} ds \\
& \leq c_5 \int_1^{t-1} \frac{e^{-(3s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}}(t-s)^3} ds,
\end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung Lemma 3 angewendet haben. Es ist eine einfache Sache, das letzte Integral oben durch t^{-3} mal eine Konstante

$$\begin{aligned}
\int_1^{t-1} \frac{e^{-(3s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}}(t-s)^3} ds & \leq \int_1^{t-1} \frac{e^{-(3s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}} t^3} ds \\
& \leq \frac{c_6}{t^3} \int_1^{\frac{2t}{3}} \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} ds + \frac{c_7}{t^3} \int_{\frac{2t}{3}}^{t-\sqrt{t}} e^{-\log t} ds \\
& \quad + \frac{c_8}{t^3} \int_{t-\sqrt{t}}^{t-1} \frac{e^{(3 \log t)/(2\sqrt{t})}}{(t-s)^3} ds \\
& \leq c_9 t^{-3},
\end{aligned}$$

zu beschränken, womit der Beweis abgeschlossen ist. □

Unser nächstes Lemma ist sehr ähnlich; es schätzt ein etwas anderes Funktional, das in Proposition 15 (der schwierigste Teil von Theorem 2) erscheinen wird.

Lemma 4.3.4 [5, S.3524]

Sei $\beta_t = \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t}$ und $a_{s,t} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log s - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t} s$. Wenn $e \leq s \leq t \leq 2s$, dann ist

$$\begin{aligned}
& \hat{P}[Y_\tau^1 e^{2\tau - (\tau \log t)/(2t) - \beta_t Y_\tau^1} \mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}] \\
& \leq C_2 e^{-(s \log t)/(2t)} \left(\frac{1}{t^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}(t-s+1)^{\frac{3}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

eine Konstante C_2 , die nicht von s oder t abhängt.

Beweis:

Genau wie im Beweis von Lemma 4 verwenden wir die Dichte von τ , um

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_\tau^1 e^{2\tau - (\tau \log t)/(2t) - \beta_t Y_\tau^1} \mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}] \\ &= 2 \int_0^s e^{-(r \log t)/(2t)} \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_r^1 e^{-\beta_t Y_r^1} \mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} | \tau = r] dr \end{aligned}$$

umzuschreiben und approximieren dann das Integral. Im Wesentlichen bedeutet der Term $e^{-\beta_t Y_r^1}$, dass unser anfänglicher Bessel-Prozess zum Zeitpunkt r in der Nähe des Ursprungs liegen muss; dann müssen zwei unabhängige Bessel-Prozesse, die vom Zeitpunkt r aus gestartet werden, zum Zeitpunkt s bzw. t in der Nähe des Ursprungs liegen.

Wenn $r \in [1, s-1]$, dann integriere über Y_r^1 , wende Lemma 3 dreimal an. und benutze die Tatsache, dass $\int_0^\infty z^3 e^{-\beta_t z} dz < \infty$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_r^1 e^{-\beta_t Y_r^1} \mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} | \tau = r] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E}^{\hat{P}}[z e^{-\beta_t z} \mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} | \tau = r, Y_r^1 = z] \hat{P}[Y_r^1 = dz] \\ &\leq \int_0^\infty z e^{-\beta_t z} \mathbb{E}^{\hat{P}}[\mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} | \tau = r, Y_r^1 = z] \frac{\gamma z^2}{r^{3/2}} dz \\ &\leq \int_0^\infty z e^{-\beta_t z} \hat{P}[a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2 | \tau = r, Y_r^1 = z] \hat{P}[1 \leq Y_t^2 \leq 2 | \tau = r, Y_r^1 = z] \frac{\gamma z^2}{r^{3/2}} dz \\ &\leq c_1 \int_0^\infty z e^{-\beta_t z} \frac{z^2}{r^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(s-r)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(t-r)^{\frac{3}{2}}} dz \\ &\leq c_2 r^{-\frac{3}{2}} (s-r)^{-\frac{3}{2}} (t-r)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Für $r \leq 1$ fordern wir effektiv zwei unabhängige Bessel-Prozesse, die zum Zeitpunkt s und t in der Nähe des Ursprungs sein müssen, was $s^{-\frac{3}{2}} t^{-\frac{3}{2}}$ ergibt, und für $r \geq s-1$ haben wir nur einen Bessel-Prozess, der zum Zeitpunkt s und t in der Nähe des Ursprungs sein muss, was $s^{-\frac{3}{2}} (t-s+1)^{-\frac{3}{2}}$ ergibt.

Diese beiden einfachen Berechnungen folgen wie in Lemma 4. Somit ist

$$\begin{aligned} & \int_0^s e^{-(r \log t)/(2t)} \mathbb{E}^{\hat{P}}[Y_r^1 e^{-\beta_t Y_r^1} \mathbb{1}_{\{a_{s,t}+1 \leq Y_s^1 \leq a_{s,t}+2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} | \tau = r] dr \\ &\leq \int_0^s e^{-(r \log t)/(2t)} c_2 r^{-\frac{3}{2}} (s-r)^{-\frac{3}{2}} (t-r)^{-\frac{3}{2}} dr \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(r \log t)/(2t)} c_2}{r^{\frac{3}{2}} (s-r)^{\frac{3}{2}} (t-r)^{\frac{3}{2}}} dr + \int_1^{s-1} \frac{e^{-(r \log t)/(2t)} c_2}{r^{\frac{3}{2}} (s-r)^{\frac{3}{2}} (t-r)^{\frac{3}{2}}} dr + \int_{s-1}^s \frac{e^{-(r \log t)/(2t)} c_2}{r^{\frac{3}{2}} (s-r)^{\frac{3}{2}} (t-r)^{\frac{3}{2}}} dr \\ &\leq \frac{c_3}{s^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} + c_4 \int_1^{s-1} \frac{e^{-(r \log t)/(2t)}}{r^{\frac{3}{2}} (s-r)^{\frac{3}{2}} (t-r)^{\frac{3}{2}}} dr + \frac{c_5 e^{-(s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}} (t-s+1)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Da s und t von gleicher Ordnung sind und $\log s \geq \frac{\log t}{t} s$ vorausgesetzt $s, t \geq e$, bleibt es das Integral in der letzten Zeile oben zu schätzen. Wir gehen wieder so vor wie in Lemma 4.

Zunächst der kleine r Fall,

$$\begin{aligned} & \int_1^{\frac{s}{2}} \frac{e^{-(r \log t)/(2t)}}{r^{\frac{3}{2}} (s-r)^{\frac{3}{2}} (t-r)^{\frac{3}{2}}} dr \leq c_6 \int_1^{\frac{s}{2}} \frac{1}{r^{\frac{3}{2}} s^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}} dr \\ &\leq \frac{c_7}{s^{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

den größeren r Fall,

$$\int_{s-\frac{s}{t^{\frac{1}{4}}}}^{s-1} \frac{e^{-(r \log t)/(2t)}}{r^{\frac{3}{2}}(s-r)^{\frac{3}{2}}(t-r)^{\frac{3}{2}}} dr \leq \frac{c_8 e^{-(s \log t)/(2t)}}{s^{\frac{3}{2}}(t-s+1)^{\frac{3}{2}}}$$

und schließlich den mittleren r Fall,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{s}{2}}^{s-\frac{s}{t^{\frac{1}{4}}}} \frac{e^{-(r \log t)/(2t)}}{r^{\frac{3}{2}}(s-t)^{\frac{3}{2}}(t-r)^{\frac{3}{2}}} dr &\leq c_9 \frac{t^{\frac{3}{4}}}{s^{\frac{9}{2}}} \int_{\frac{s}{2}}^{s-\frac{s}{t^{\frac{1}{4}}}} e^{-(r \log t)/(2t)} dr \\ &\leq c_{10} \frac{t^{\frac{7}{4}}}{s^{\frac{9}{2}}} e^{-(s \log t)/(4t)} \\ &\leq \frac{c_{11}}{t^{\frac{5}{2}}} e^{-(s \log t)/(2t)}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder $\log s \geq \frac{\log t}{t} s$ und $s \leq t \leq 2s$.

□

4.4 Das many-to-one und many-to-two Lemma

jlkjelkfn.

Lemma 4.4.1 [5, S.3526] (Many-to-one Lemma) [Lemma 26 Julien Arbeit](#)

$$\mathbb{E} \left[\sum_{v \in N(t)} g_t(v) \mathbb{1}_{\{X_v(s) < \alpha + f(s) \forall s \leq t\}} \right] = e^t \mathbb{Q} \left[\frac{1}{\zeta(t)} g_t(\xi) \right],$$

wobei unter \mathbb{Q} , $\alpha + f(t) - \xi_t$, $t \geq 0$, ein Bessel-Prozess ist.

Ohne Beweis.

□

Lemma 4.4.2 [5, S.3527] (Many-to-two Lemma)

Seien $g_t(\cdot)$ und $h_t(\cdot)$ messbare Funktionale von t und der Weg eines Teilchens bis zum Zeitpunkt t , wie in Abschnitt 3.1. Dann sei

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\sum_{u,v \in N(t)} g_t(u) h_t(v) \mathbb{1}_{\{X_u(s) < 1 + \beta s \forall s \leq t, X_v(s) < 1 + \beta s \forall s \leq t\}} \right] \\ &= \mathbb{Q} \left[e^{2t + T \cap t} \frac{\zeta^1(T \cap t)}{\zeta^1(t) \zeta^2(t)} g_t(\xi^1) h_t(\xi^2) \right] \\ &= e^{3t} \mathbb{Q} \left[\frac{1}{\zeta^1(t)} \mathbb{1}_{\{T > t\}} g_t(\xi^1) h_t(\xi^1) \right] \\ &\quad + e^{2t} \mathbb{Q} \left[e^T \frac{\zeta^1(T)}{\zeta^1(t) \zeta^2(t)} \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} g_t(\xi^1) h_t(\xi^2) \right]. \end{aligned}$$

Beweis:

□

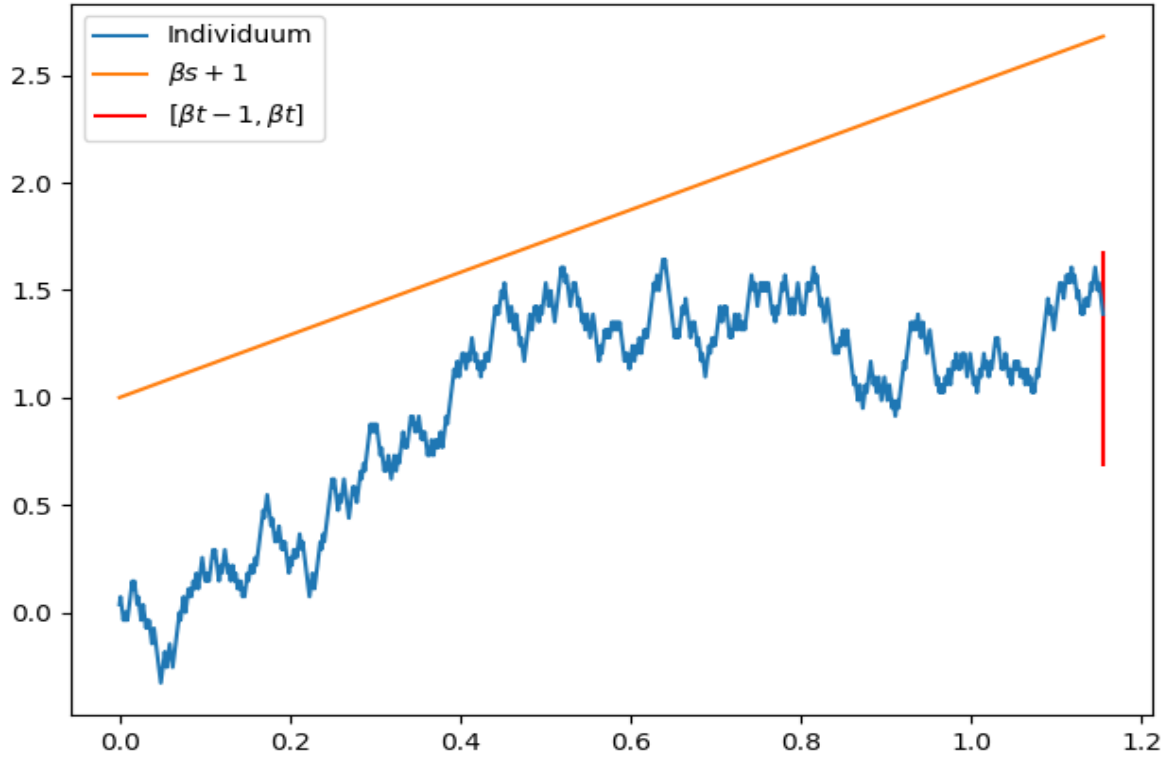


Abbildung 4.3: Abbildung des Lebenspfades eines Individuums inklusive der Pfade aller seiner Vorfahren, das zur Zeit $t = 1.2$ im Korridor $[\beta t - 1, \beta t]$ liegt und zuvor die Linie $\beta s + 1$ für alle $s \in [0, t]$ nicht überschritten hat. Den Parameter β haben wir hier mit $y = 0.2$ definiert.

4.5 Beweis von Satz 1

Wir erinnern an die Definition von β ,

$$\beta = \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t} + \frac{y}{t}.$$

Im Rahmen unserer Untersuchungen zum untere Schranken Theorem interessieren wir uns insbesondere für die Anzahl der Teilchen die unter die Kategorie

$$H(y, t) = \#\{u \in N(t) : X_u(s) \leq \beta s + 1 \ \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}.$$

fallen.

Lemma 4.5.1 [5, S.3527] [Lemma 27 Julien Arbeit](#)

Für $t \geq 1$ und $y \in [0, \sqrt{t}]$,

$$\mathbb{E}[H(y, t)] = e^{-\sqrt{2}y}.$$

Beweis:

Definiere das Funktional g in zwei Variablen (Zeit und Pfad) durch

$$g_t(v) = 1_{\{\beta t - 1 \leq X_v(t) \leq \beta t\}},$$

den Parameter $\alpha = \beta$ und die Funktion f aus dem Many-to-one Lemma durch

$$f(t) = t.$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(y, t)] &= \mathbb{E} \left[\sum_{v \in N(t)} 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{u \in N(t)} 1_{\{\beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}} 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{u \in N(t)} g_t(u) 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} \right] \\
&= e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\zeta(t)} g_t(\xi) \right] \\
&= e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^{-\beta \xi_t + \beta^2 \frac{t}{2}}}{\beta t + 1 - \xi_t} g_t(\xi) \right] \\
&= e^{t - \beta^2 \frac{t}{2}} \mathbb{Q}(\beta t - 1 \leq \xi_t \leq \beta t) \\
&= e^{t - \beta^2 \frac{t}{2}} \mathbb{Q}(-\beta t \leq -\xi_t \leq -\beta t + 1) \\
&= \underbrace{e^{t - \beta^2 \frac{t}{2}}}_{= t^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{2}y} ?} \mathbb{Q}(1 \leq \beta t + 1 - \xi_t \leq 2) \\
&= t^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{2}y} \mathbb{Q}(1 \leq \beta t + 1 - \xi_t \leq 2).
\end{aligned}$$

Nun ist $\beta t + 1 - \xi_t$ ein Bessel-Prozess, der unter \mathbb{Q} von 1 startet. Wir erinnern daran, dass für einen Bessel-Prozess B mit Start in $x = 1$ gilt

$$\hat{P}(B_t \in dz) = \frac{z}{\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-1)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+1)^2}{2t}}) dz.$$

Somit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, dass unser Bessel-Prozess zur Zeit t , in das Intervall $[1, 2]$ fällt die Gleichung

$$\mathbb{Q}(1 \leq \beta t + 1 - \xi_t \leq 2) = \int_1^2 \frac{z}{\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-1)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+1)^2}{2t}}) dz.$$

Anwendung von Lemma 4.3.2 auf den Integranden liefert uns die Möglichkeit die zu untersuchende Wahrscheinlichkeit einzukesseln durch

$$\int_1^2 \frac{\gamma z^2}{t^{3/2}} e^{-z^2/2t - 1/2t} dz \leq \mathbb{Q}(1 \leq \beta t + 1 - \xi_t \leq 2) \leq \int_1^2 \frac{\gamma z^2}{t^{3/2}} dz.$$

Da zudem gilt, dass $t \geq 1$ ist und die Laufvariable z sich zudem in dem Intervall $[1, 2]$ bewegt erhalten wir zudem

$$\int_1^2 \frac{\gamma z^2}{t^{3/2}} dz \leq \mathbb{Q}(1 \leq \beta t + 1 - \xi_t \leq 2) \leq \int_1^2 \frac{\gamma z^2}{t^{3/2}} dz.$$

Daraus folgt unmittelbar per Definition

$$\mathbb{Q}(1 \leq \beta t + 1 - \xi_t \leq 2) = \int_1^2 \frac{z^2}{t^{\frac{3}{2}}} dz = t^{-\frac{3}{2}}.$$

Proposition 4.5.2 [5, S.3528]

Es existiert eine Konstante $C_3 > 0$, sodass für $t \geq 1$ und $y \in [0, \sqrt{t}]$,

$$\mathbb{P}(\exists u \in N(t) : X_u(t) \geq \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + y) \geq C_3 e^{-\sqrt{2}y}$$

ist.

Beweis:

Durch Reduktion von C_3 , falls nötig, genügt es, die Behauptung für alle großen t zu beweisen. Für $i = 1, 2$ sei $A'_i = \{\beta t - 1 \leq \xi_t^i \leq \beta t\}$. Wir definieren die Funktionale g und h im Many-To-Two-Lemma durch

$$g_t(u) := h_t(u) = 1_{\{\beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}}.$$

Zudem werden wir die Gleichung des Many-to-One Lemmas

$$e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\zeta^1(t)} \right] = H(y, t)$$

in den kommenden Umformungen anwenden.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[H(y, t)^2] &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{u \in N(t)} 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}} \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{u \in N(t)} 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} 1_{\{\beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}} \right)^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{u, v \in N(t)} 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} 1_{\{\beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}} 1_{\{X_v(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} 1_{\{\beta t - 1 \leq X_v(t) \leq \beta t\}} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{u, v \in N(t)} 1_{\{X_u(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} g_t(u) 1_{\{X_v(s) < \beta s + 1 \forall s \leq t\}} h_t(v) \right] \\
&= e^{3t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\zeta^1(t)} \mathbb{1}_{\{T > t\}} \underbrace{g_t(\xi^1) h_t(\xi^1)}_{g_t(\xi^1)^2 = g_t(\xi^1) = 1_{A'_1}} \right] + e^{2t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^T \frac{\zeta^1(T)}{\zeta^1(t) \zeta^2(t)} \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} \underbrace{g_t(\xi^1)}_{1_{A'_1}} \underbrace{h_t(\xi^2)}_{=1_{A'_2}} \right] \\
&= e^{3t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{\mathbb{1}_{\{T > t\}}}{\zeta^1(t)} \mathbb{1}_{A'_1} \right] + e^{2t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^T \zeta^1(T)}{\zeta^1(t) \zeta^2(t)} \mathbb{1}_{A'_1 \cap A'_2 \cap \{T \leq t\}} \right] \\
&= e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\zeta^1(t)} \mathbb{1}_{A'_1} \right] + e^{2t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^T (\beta T + 1 - \xi_T^1) e^{\beta \xi_T^1 - \beta^2 \frac{T}{2}} \mathbb{1}_{A'_1 \cap A'_2 \cap \{T \leq t\}}}{(\beta t + 1 - \underbrace{\xi_t^1}_{\leq \beta t, \text{ da } A'_1}) (\beta t + 1 - \underbrace{\xi_t^2}_{\leq \beta t, \text{ da } A'_2}) e^{\beta \xi_t^1 + \beta \xi_t^2 - \beta^2 t}} \right] \\
&\leq e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\zeta^1(t)} \mathbb{1}_{A'_1} \right] + e^{2t} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{e^T (\beta T + 1 - \xi_T^1) e^{\beta \xi_T^1 - \beta^2 \frac{T}{2}} \mathbb{1}_{A'_1 \cap A'_2 \cap \{T \leq t\}}}{\exp(\beta \underbrace{\xi_t^1}_{\geq \beta t - 1} + \beta \underbrace{\xi_t^2}_{\geq \beta t - 1} - \beta^2 t)} \right] \\
&\leq \mathbb{E}[H(y, t)] + e^{2t - \beta^2 t + 2\beta} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^T (\beta T + 1 - \xi_T^1) e^{\beta \xi_T^1 - \beta^2 \frac{T}{2}} \mathbb{1}_{A'_1 \cap A'_2 \cap \{T \leq t\}}] \\
&\leq \mathbb{E}[H(y, t)] + c_1 t^3 e^{-\sqrt{2}y} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [(\beta T + 1 - \xi_T^1) \times e^{2T - (3T \log t)/(2t) - \beta(\beta T + 1 - \xi_T^1)} \mathbb{1}_{A'_1 \cap A'_2 \cap \{T \leq t\}}],
\end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichheit verwendet haben, dass T eine exponentielle Zufallsvariable des Parameters 2 ist, die unabhängig vom Pfad von ξ^1 ist und für die letzte Ungleichung haben wir verwendet, dass wenn $y \in [0, \sqrt{t}]$, dann ist

$$\beta^2 T = 2T - 3 \frac{\log t}{t} T + \frac{2\sqrt{2}y}{t} T + O(1).$$

Unter \mathbb{Q} , sind $(\beta s + 1 - \xi_s^1, s \geq 0)$ und $(\beta s + 1 - \xi_s^2, s \geq 0)$ Bessel-Prozesse, die von 1 ausgehen, bis T gleich sind und nach T unabhängig (bei T und ξ_T^1). Ersetzen der Notation (d.h. $\hat{P} \equiv \mathbb{Q}$, $T \equiv \tau$ und $\beta t + 1 - \xi_t^1 \equiv Y_t^1$) ergibt

$$\mathbb{E}[H(y, t)^2] \leq \mathbb{E}[H(y, t)] + c_1 t^3 e^{-\sqrt{2}y} \mathbb{E}^{\hat{P}} [Y_\tau^1 e^{2\tau - (3\tau \log t)/(2t) - \beta Y_\tau^1} \mathbb{1}_{A_1 \cap A_2 \cap \{\tau \leq t\}}].$$

Lemma 4 besagt in dieser Situation, dass die \hat{P} -Erwartung höchstens von der Ordnung t^{-3} multipliziert mit einer Konstanten ist. Der Faktor t^{-3} hebt den bereits vorkommenden Faktor t^3 auf, sodass wir für große t und $y \geq 0$ die Ungleichung

$$\mathbb{E}[H(y, t)^2] \leq c_2 \mathbb{E}[H(y, t)]$$

vorliegen haben für eine Konstante c_2 , die nicht von y oder t abhängt. Man bedenke für eine beliebige Zufallsvariable X mit Werten in den natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$ gilt

$$\mathbb{P}[X \neq 0] = \mathbb{P}[X \geq 1].$$

Wir wissen, dass mit der Cauchy-Schwarz Ungleichung für zwei beliebige Zufallsvariablen Y und Z gilt $|\mathbb{E}[YZ]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]\mathbb{E}[Z^2]}$. Definieren wir nun $Y := H(y, t)$ und $Z := H(y, t)1_{\{H(y, t) \geq 1\}}$ erhalten wir folglich die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(y, t)1_{\{H(y, t) \geq 1\}}] &\leq \mathbb{E}[H(y, t)^2]^{1/2} \mathbb{E}[1_{\{H(y, t) \geq 1\}}^2]^{1/2} \\ &= \mathbb{E}[H(y, t)^2]^{1/2} \mathbb{E}[1_{\{H(y, t) \geq 1\}}]^{1/2} \\ &= \mathbb{E}[H(y, t)^2]^{1/2} \mathbb{P}[H(y, t) \geq 1]^{1/2} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(y, t)1_{\{H(y, t) \geq 1\}}] &= \int_{\{H(y, t) \geq 1\}} H(y, t)1_{\{H(y, t) \geq 1\}} d\mathbb{P} + \int_{\{H(y, t) = 0\}} H(y, t)1_{\{H(y, t) \geq 1\}} d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{H(y, t) \geq 1\}} H(y, t) d\mathbb{P} + \int_{\{H(y, t) = 0\}} 0 d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}[H(y, t)], \end{aligned}$$

erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(y, t)] &\leq \mathbb{E}[H(y, t)^2]^{1/2} \mathbb{P}[H(y, t) \geq 1]^{1/2} \\ &= \mathbb{E}[H(y, t)^2]^{1/2} \mathbb{P}[H(y, t) \neq 0]^{1/2} \end{aligned}$$

Umschreiben dieser Ungleichung und anwenden von Lemma 8 führt nun insgesamt zu

$$\mathbb{P}(H(y, t) \neq 0) \geq \frac{\mathbb{E}[H(y, t)]^2}{\mathbb{E}[H(y, t)^2]} \geq c_3 e^{-\sqrt{2}y}.$$

□

Wir haben nun eine untere Grenze für die zu untersuchende Wahrscheinlichkeit angegeben. In den folgenden Untersuchungen wird nun eine obere Grenze mit Hilfe der ersten Momente Methode aufgeführt. Dazu fixieren wir zunächst erneut einen beliebigen Zeitpunkt t und definieren die Funktion l durch

$$l(s) = \begin{cases} \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(s+1) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/2, \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t-s+1) & \text{falls } t/2 \leq s \leq t. \end{cases}$$

Da die Funktion l leider nicht differenzierbar im Punkt $s = t/2$ ist (siehe Plot) wählen wir nun eine zweifach stetig differenzierbare Funktion $L : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

1. $L(s) = l(s)$ für alle $s \notin [t/2 - 1, t/2 + 1]$
2. $L(s) = L(t - s)$ für alle $s \in [0, t]$
3. $L''(s) \in [-10/t, 0]$ für alle $s \in [t/2 - 1, t/2 + 1]$.

Wir definieren nun $f(s) = \beta s + L(s)$. Unser Ziel ist es die Anzahl der Teilchen zu studieren die der Kategorie

$$\Gamma = \#\{u \in N_t : X_u(s) < f(s) + y + 1 \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t + y\}$$

genügen.

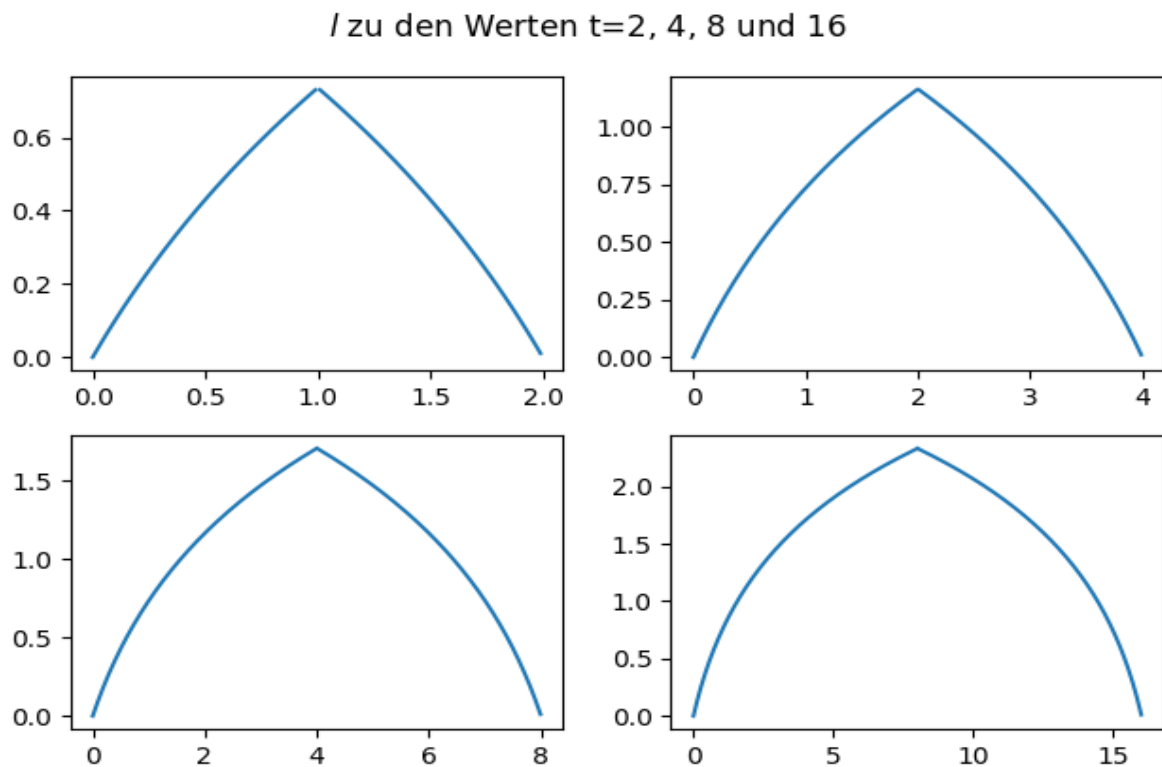


Abbildung 4.4: κ zu unterschiedlichen Werten für die Herleitung der Ungleichung.

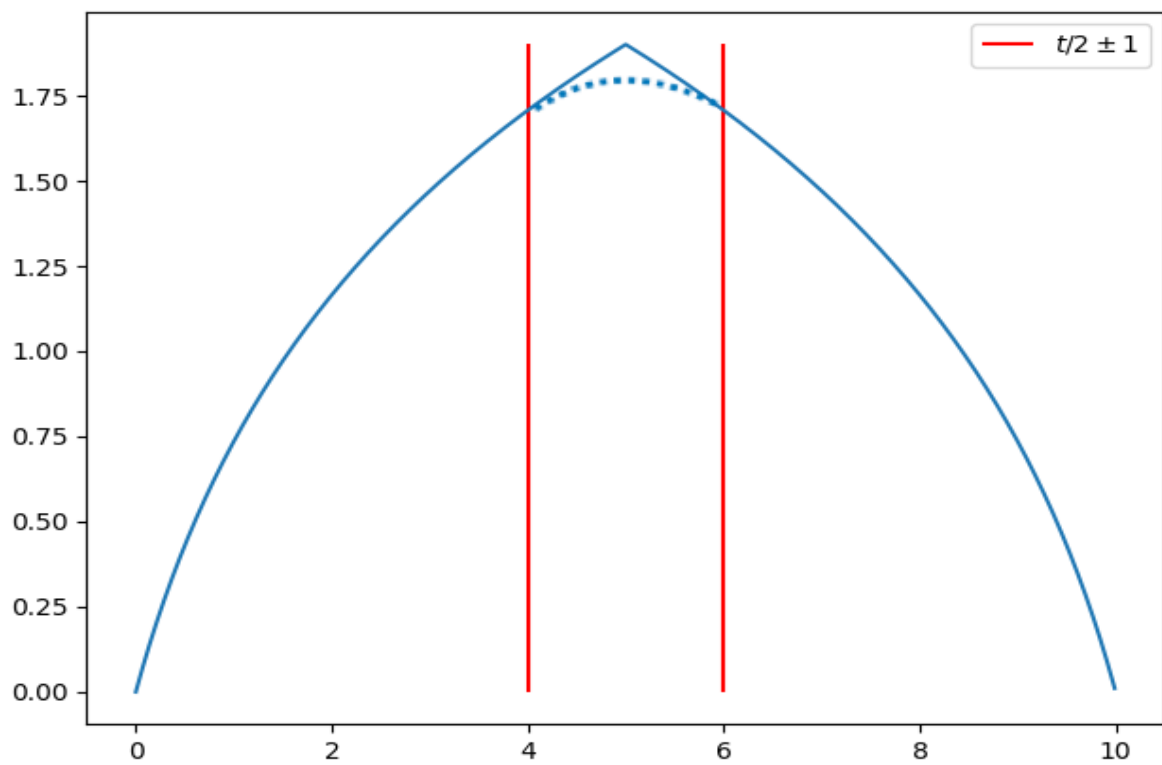


Abbildung 4.5: Illustration einer Wahl von L mit hinreichenden Glattheitsbedingungen.

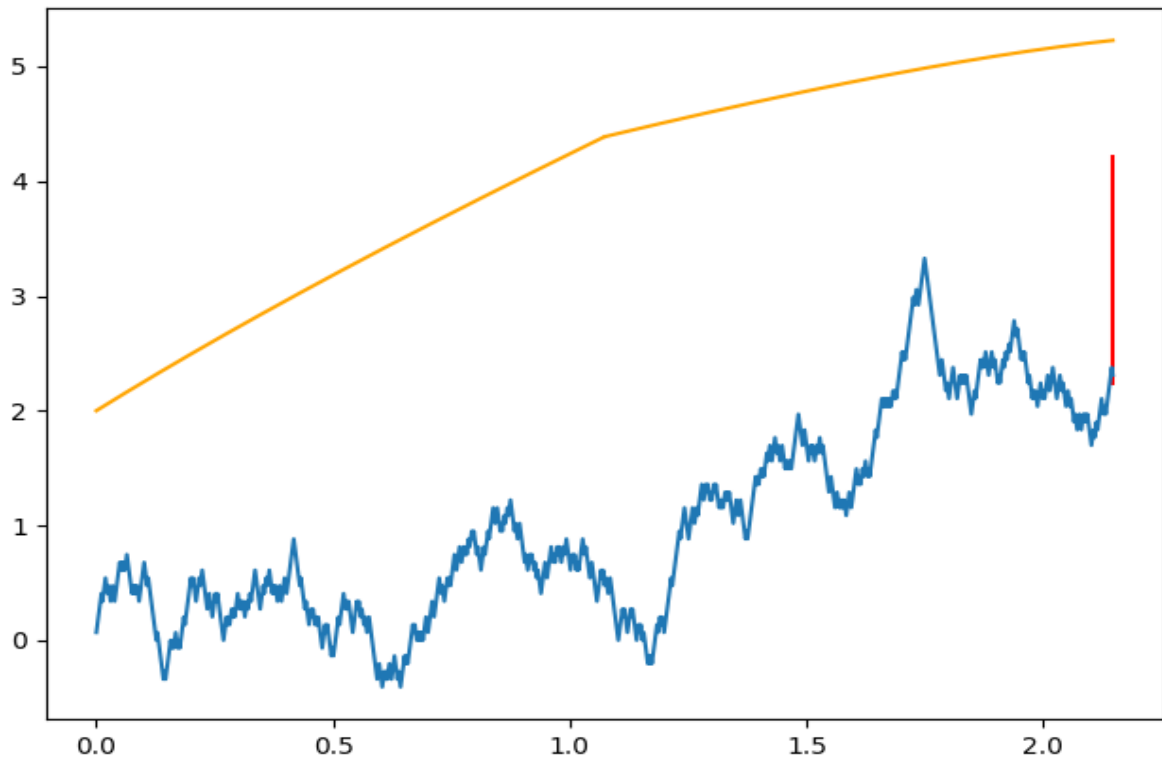


Abbildung 4.6: Abbildung des Lebenspfades eines Individuums inklusive der Pfade aller seiner Vorfahren, das zur Zeit $t = 2.3$ im Korridor $[\beta t - 1, \beta t + y]$ liegt und zuvor die Linie $\beta s + l(s) + y + 1$ für alle $s \in [0, t]$ nicht überschritten hat. Den Parameter β haben wir hier mit $y = 1$ definiert.

Lemma 4.5.3 [5, S.3529]

Es existiert ein C_4 , sodass für alle $t \geq 1$ und $y \in [0, \sqrt{t}]$,

$$\mathbb{E}[\Gamma] \leq C_4(y+2)^4 e^{-\sqrt{2}y}.$$

Beweis:

Durch das Many-To-One-Lemma mit $\alpha = y + 1$, haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Gamma] &= \mathbb{E} \left[\sum_{u \in N(t)} \mathbb{1}_{\{X_u(s) < f(s) + y + 1 \forall s \leq t\}} \mathbb{1}_{\{\beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t + y\}} \right] \\ &\leq e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{y+1}{y+1+f(t)-\xi_t} e^{-\int_0^t f'(s) d\xi_s + (\int_0^t f'(s)^2 ds)/2} \mathbb{1}_{\{\beta t - 1 \leq \xi_t \leq \beta t + y\}} \right], \end{aligned}$$

wobei zusätzlich folgt, dass unter \mathbb{Q} der Prozess $y + 1 + f(s) - \xi_s$, $s \geq 0$, ein Bessel-Prozess ist. Mit der Produktregel aus der stochastischen Analysis und der Anwendung der klassischen Regel $df'(s) = f''(s)ds$ für Riemann-Stieltjes Integrale folgt

$$\begin{aligned} f'(t)\xi_t &= \int_0^t f'(s) d\xi_s + \int_0^t \xi_s df'(s) \\ &= \int_0^t f'(s) d\xi_s + \int_0^t \xi_s f''(s) ds. \end{aligned}$$

Wir erinnern an den Fakt, dass $\beta \geq 1, y \geq 0$ gilt. Zudem folgt aus der Definition von $f(t) = \beta t + L(t) = \beta t + \frac{3}{2\sqrt{2}}$ direkt die Ungleichung $f(t) \geq \beta t$. Somit haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Gamma] &= e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{y+1}{y+1+f(t)-\xi_t} e^{-\int_0^t f'(s) d\xi_s + (\int_0^t f'(s)^2 ds)/2} \mathbb{1}_{\{\beta t - 1 \leq \xi_t \leq \beta t + y\}} \right] \\ &\leq e^t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\underbrace{\frac{y+1}{y+1+f(t)-\beta t - y}}_{\geq 1} e^{-f'(t)\xi_t + \int_0^t f''(s)\xi_s ds + (\int_0^t f'(s)^2 ds)/2} \mathbb{1}_{\{\beta t - 1 \leq \xi_t\}} \right] \\ &\leq (y+1) e^t \mathbb{Q} [e^{-f'(t)\xi_t + \int_0^t f''(s)\xi_s ds + (\int_0^t f'(s)^2 ds)/2} \mathbb{1}_{\{\xi_t \geq \beta t - 1\}}] \\ &\leq (y+1) e^t \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[\exp \left(-f'(t)\beta t + \int_0^t f''(s)(f(s) + y + 1 - B_s) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \int_0^t f'(s)^2 ds \right) \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \right] \\ &= (y+1) e^t \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[\exp \left(-f'(t)\beta t + \int_0^t f''(s)f(s) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (y+1) \int_0^t f''(s) ds - \int_0^t f''(s)B_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t f'(s)^2 ds \right) \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \right] \\ &= (y+1) e^{t - \beta^2 \frac{t}{2} - (\int_0^t L'(s)^2 ds)/2} \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} [e^{\int_0^t L''(s)(y+1-B_s) ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}}], \end{aligned}$$

wobei $(B_s, s \geq 0)$ ein Bessel-Prozess unter \hat{P} ist. Beachte, dass $t - \frac{1}{2}\beta^2 t = \frac{3}{2} \log t - \sqrt{2}y + O(1)$, also

$$\mathbb{E}[\Gamma] \leq c_1(y+1)t^{\frac{3}{2}} e^{-\sqrt{2}y} \hat{P}_{y+1} [e^{\int_0^t L''(s)(y+1-B_s) ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}}].$$

κ zu den Werten $t=2, 4, 8$ und 16

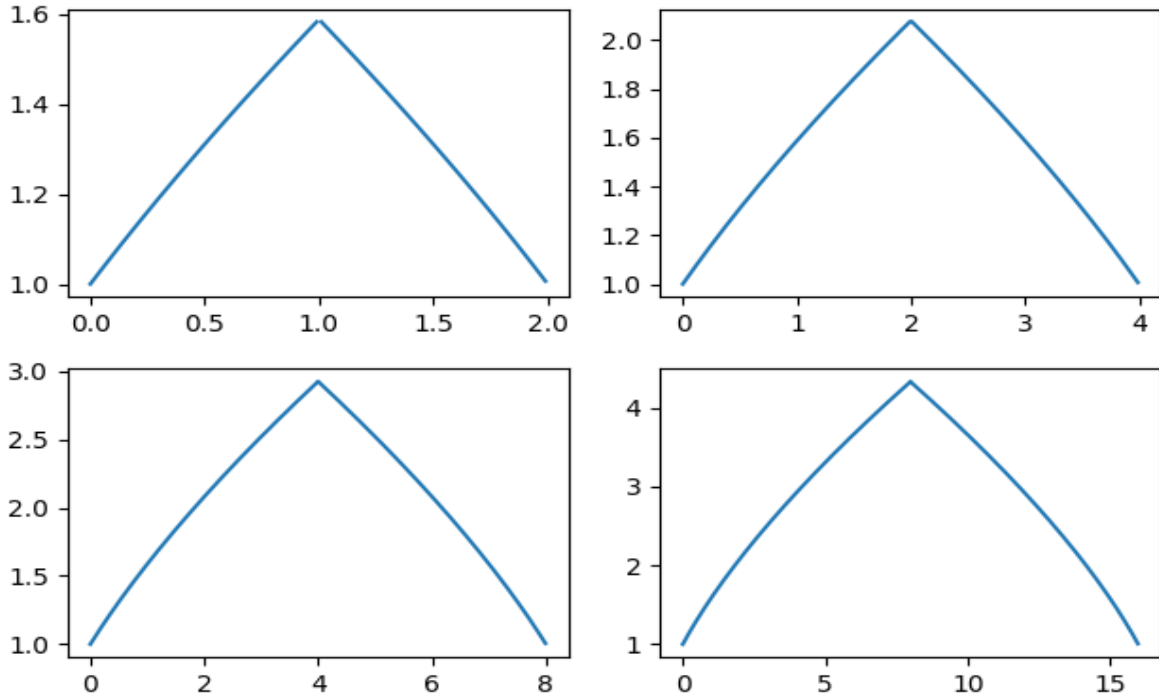


Abbildung 4.7: κ zu unterschiedlichen Werten für die Herleitung der Ungleichung.

ist. Nun sei

$$\kappa(x) = \begin{cases} (s+1)^{\frac{2}{3}}, & \text{wenn } s \leq \frac{t}{2}, \\ (t-s+1)^{\frac{2}{3}}, & \text{wenn } s > \frac{t}{2}; \end{cases}$$

dann ist $-\int_0^t L''(s)\kappa(s)ds \uparrow \kappa$ für ein $\kappa \in (0, \infty)$. Wir wissen, dass im Falle des Ereignisses $\{B_t \leq y+2\}$, $B_s - (y+1)$ mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit deutlich unterhalb der Kurve $\kappa(s)$ bleibt, sodass die obige \hat{P}_{y+1} -Erwartung wie eine Konstante mal $(y+2)^3 t^{-\frac{3}{2}}$ aussehen sollte. Die folgenden Berechnungen verifizieren diese Tatsache. Wir teilen das Ereignis, dass $B_s - (y+1)$ über $\kappa(s)$ geht, in vier Möglichkeiten auf. Entweder gibt es einen starken Anstieg über ein kleines Zeitintervall, oder $B_s - (y+1)$ ist zu einem Zeitpunkt der Form $\frac{j}{t}$ für ein $j \in \mathbb{N}$ groß; im letzteren Fall ist entweder $(y+1)t^{\frac{4}{3}} \leq j \leq t - (y+1)t^{\frac{4}{3}}$, was so unwahrscheinlich ist, dass wir vergessen können, darauf zu bestehen, dass $B_t \leq y+2$ ist, oder j ist nahe 0 oder t^2 und wir können die Markov-Eigenschaft zum Zeitpunkt $\frac{j}{t}$ anwenden.

In der Tat, setzt man $\tilde{B}_s = \frac{(B_s - y - 1)}{\kappa(s)}$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[e^{\int_0^t L''(s)(y+1-B_s)ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \right] \\
&= \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[e^{\int_0^t L''(s)(y+1-B_s)ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1)\}} \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[e^{\int_0^t L''(s)(y+1-\frac{\kappa(s)}{\kappa(s)}(B_s-y-1)-y-1)ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1)\}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[e^{\underbrace{-\int_0^t L''(s) \tilde{B}_s \kappa(s) ds}_{\leq 0}} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1)\}} \right] \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[e^{-\int_0^t L''(s)(k+1)\kappa(s)ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1)\}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)\int_0^t L''(s)\kappa(s)ds} \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[\mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1)\}} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(k+1)\kappa} \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[\mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \mathbb{1}_{\{\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1)\}} \right] \\
&= e^{\kappa} \hat{P}_{y+1}(B_t \leq y+2) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \hat{P}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1), B_t \leq y+2 \right]
\end{aligned}$$

Nehmen wir für den Moment ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \hat{P}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1), B_t \leq y+2 \right] \\
&\leq \hat{P}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2 \right] \\
&\leq \hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2 \right] \\
&\leq \hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2 \right) \right] \\
&= \hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2, \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k/2 + \max(\tilde{B}_{j/t}, \tilde{B}_{(j+1)/t}) \right) \right. \\
&\quad \left. \cup \bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2, \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s < k/2 + \max(\tilde{B}_{j/t}, \tilde{B}_{(j+1)/t}) \right) \right] \\
&\leq \sum_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \hat{P}_{y+1} \left[B_t \leq y+2, \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k/2 + \max(\tilde{B}_{j/t}, \tilde{B}_{(j+1)/t}) \right] \\
&\quad + \underbrace{\hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2, \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s < k/2 + \max(\tilde{B}_{j/t}, \tilde{B}_{(j+1)/t}) \right) \right]}_{:=(II)}
\end{aligned}$$

Für (II) bedenken wir das für alle

$$\omega \in \left\{ \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s < k/2 + \max(\tilde{B}_{j/t}, \tilde{B}_{(j+1)/t}) \right\}$$

unmittelbar folgt, dass ω auch ein Element der Menge

$$M = \left\{ \tilde{B}_{j/t} \geq k/2 \cup \tilde{B}_{(j+1)/t} \geq k/2 \right\},$$

also stellt M eine Obermenge dar und ist für eine Abschätzung nach oben geeignet. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2, \sup_{s \in [j/t, (j+1)/t)} \tilde{B}_s < k/2 + \max(\tilde{B}_{j/t}, \tilde{B}_{(j+1)/t}) \right) \right] \\ & \leq \hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=0}^{\lceil t^2 \rceil} \left(\tilde{B}_{j/t} \geq k/2 \cup \tilde{B}_{(j+1)/t} \geq k/2, B_t \leq y+2 \right) \right] \\ & = \hat{P}_{y+1} \left[\bigcup_{j=1}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \left(\tilde{B}_{j/t} \geq k/2, B_t \leq y+2 \right) \right] \\ & \leq \sum_{j=1}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \hat{P}_{y+1} \left[\tilde{B}_{j/t} \geq k/2, B_t \leq y+2 \right] \\ & = \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2] + \sum_{j=\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil + 1}^{t^2 - (y+1)^{4/3}} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2] \\ & \quad + \sum_{j=t^2 - (y+1)^{4/3}}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2] \\ & \leq \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2] + \sum_{j=\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil + 1}^{t^2 - (y+1)^{4/3}} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2] \\ & \quad + \sum_{j=t^2 - (y+1)^{4/3}}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2]. \end{aligned}$$

Durch einsetzen unserer Untersuchungen für ein festes k in die Ursprüngliche Ungleichung

erhalten wir nun zusammengefasst

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}^{\hat{P}_{y+1}} \left[e^{\int_0^t L''(s)(y+1-B_s)ds} \mathbb{1}_{\{B_t \leq y+2\}} \right] \\
& \leq e^{\kappa} \hat{P}_{y+1}(B_t \leq y+2) + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \hat{P}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0,t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1), B_t \leq y+2 \right] \\
& \leq e^{\kappa} (y+2)^3 t^{-\frac{3}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=0}^{\lfloor t^2 \rfloor} \hat{P}_{y+1} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t]} \tilde{B}_s \geq (\tilde{B}_{j/t} \cup \tilde{B}_{(j+1)/t}) + \frac{k}{2}, \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. B_t \leq y+2 \right) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \hat{P}_{y+1}(\tilde{B}_{j/t} \geq k/2, B_t \leq y+2) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil+1}^{\lceil t^2 - (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \hat{P}_{y+1}(\tilde{B}_{j/2} \geq k/2) \\
& \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=\lceil t^2 - (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil+1}^{\lfloor t^2 \rfloor - 1} \hat{P}_{y+1}(\tilde{B}_{j/t} \geq k/2, B_t \leq y+2).
\end{aligned}$$

Bevor wir die Untersuchung der vier Doppelsummen fortführen, erinnern wir zunächst an die Bessel-Dichte

$$\hat{P}_x(B_t \in dz) = \frac{z}{x\sqrt{2\pi t}} (e^{-\frac{(z-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{2t}}) dz,$$

welche nun häufiger im folgenden zum tragen kommen wird.

Man bedenke die Regel $\mathbb{P}[A \cap B] \cap \mathbb{P}[A]$ und das $\frac{y+2}{y+1} \geq 1$, da $y \geq 0$. Somit erhalten wir für die erste Doppelsumme die obere Schranke

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=0}^{\lfloor t^2 \rfloor} \hat{P}_{y+1} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t]} \tilde{B}_s \geq (\tilde{B}_{j/t} \cup \tilde{B}_{(j+1)/t}) + \frac{k}{2}, B_t \leq y+2 \right) \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=0}^{\lfloor t^2 \rfloor} \hat{P}_{y+1} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t]} \tilde{B}_s \geq (\tilde{B}_{j/t} \cup \tilde{B}_{(j+1)/t}) + \frac{k}{2} \right) \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=0}^{\lfloor t^2 \rfloor} \frac{y+2}{y+1} \mathbb{P}_{y+1} \left(\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t]} \tilde{B}_s \geq (\tilde{B}_{j/t} \cup \tilde{B}_{(j+1)/t}) + k/2 \right) \\
& \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=0}^{\lfloor t^2 \rfloor} 2\mathbb{P}_0 \left(\sup_{s \in [0,1/t]} B_s \geq k/2 \right) \\
& \leq c_2 t^2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa - k^2 t/8}.
\end{aligned}$$

begrenzt. Für die nächste Doppelsumme mache man folgende Vorüberlegungen: Leicht lässt sich aus der Konstruktion des Bessel-Prozesses die Eigenschaft

$$\tilde{P}_{y+1}[B_t \leq y+2 \mid B_{j/t} = z] = \tilde{P}_z[B_{t-j/t} \leq y+2],$$

ableiten. Dies bedeutet nichts anderes als das die Verteilung des Prozess $(B_v)_{v \geq j/t}$ gegeben dem Event $\{B_{j/t} = z\}$ erneut ein Bessel-Prozess mit Start in z ist. Mit Anwendung von Lemma 4.3.2 auf die rechte Seite folgt sogar

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{y+1}[B_t \leq y+2 \mid B_{j/t} = z] &= \tilde{P}_z[B_{t-j/t} \leq y+2] \\ &\leq \int_0^{y+2} \frac{\gamma v^2}{(t-j/t)^{\frac{3}{2}}} dv \\ &= \frac{\gamma}{(t-j/t)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{3} (y+2)^3 \\ &\leq \frac{\gamma}{(t-j/t)^{\frac{3}{2}}} (y+2)^3 \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt behandelt die zweite Doppelsomme den Fall, diejenigen Zeitpunkte j/t , die nah bei 0 liegen. Somit gilt hier $\kappa(j/t) = (j/t + 1)^{2/3}$. Zusammen mit dem Anwenden der Bessel-Dichte und , ergibt sich

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \hat{P}_{y+1}(\tilde{B}_{j/t} \geq k/2, B_t \leq y+2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \hat{P}_{y+1}(B_{j/t} \geq \kappa(j/t)k/2 + y+1, B_t \leq y+2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \hat{P}_{y+1}(B_{j/t} \geq (j/t + 1)^{2/3}k/2 + y+1, B_t \leq y+2) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \int_{(j/t+1)^{2/3}k/2+y+1}^{\infty} \underbrace{\frac{z}{(y+1)\sqrt{2\pi(j/t)}} \left(e^{-\frac{(z-y-1)^2}{2(j/t)}} - e^{-\frac{(z+y+1)^2}{2(j/t)}} \right)}_{\geq 0} \hat{P}_z(B_t \leq y+2) dz \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{\frac{4}{3}} \rceil} \int_{k(j/t+1)^{2/3}/2+y+1}^{\infty} \frac{ze^{-(z-y-1)^2/2j}}{(y+1)\sqrt{2\pi j/t}} \hat{P}_z(B_{t-j/t} \leq y+2) dz \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \int_{k(j/t+1)^{2/3}/2}^{\infty} \frac{ze^{-z^2/2j}}{\sqrt{2\pi j/t}} \cdot \frac{\gamma(y+2)^3}{(t-j/t)^{3/2}} dz \\ &\leq c_3 \frac{(y+2)^3}{t^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \int_{k(j/t)^{1/6}/2}^{\infty} (j/t)^{1/2} ze^{-z^2/2} dz \\ &\leq c_3 \frac{(y+2)^3}{t^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} k(j/t)^{2/3} e^{(k+1)\kappa - k^2 j^{1/3}/8t^{1/3}}. \end{aligned}$$

begrenzt. Erneutes anwenden der Bessel-Dichte unter der Berücksichtigung, dass $z + y + 1 \leq z(y+2)$ für alle $z \geq 1$, und anschließendes substituieren mit $\tilde{z} = (z - y - 1)/\sqrt{t/j}$

ergibt

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \tilde{P}_{y+1}[\tilde{B}_{j/t} \geq k/2] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \tilde{P}_{y+1}[B_{j/t} \geq \kappa(j/t)k/2 + y + 1] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \int_{\kappa(j/t)k/2 + y + 1}^{\infty} \underbrace{\frac{z}{(y+1)\sqrt{2\pi j/t}} \left(e^{-\frac{(z-y-1)^2}{2(j/t)}} - e^{-\frac{(z+y+1)^2}{2(j/t)}} \right)}_{\geq 0} dz \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil + 1}^{\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil} \int_{k\kappa(j/t)/2 + y + 1}^{\infty} \frac{ze^{-(z-y-1)^2/2j}}{(y+1)\sqrt{2\pi j/t}} dz \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil + 1}^{\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil} \int_{k\kappa(j/t)\sqrt{t/j/2}}^{\infty} \frac{(\sqrt{j/t}\tilde{z} + y + 1)e^{-\tilde{z}^2/2}}{(y+1)\sqrt{2\pi j/t}} \sqrt{j/t} d\tilde{z} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil + 1}^{\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil} \int_{k\kappa(j/t)t^{1/2}/2j^{1/2}}^{\infty} (j/t)^{1/2} \tilde{z} e^{-\tilde{z}^2/2} d\tilde{z} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} c_4 k t^{2/3} e^{(k+1)\kappa - k^2(y+1)^{1/3}t^{1/9}/8},
\end{aligned}$$

begrenzt ist.

Schließlich ist die vierte Doppelsumme im Wesentlichen die zeitliche Umkehrung der zweiten Doppelsumme: Wenn wir Lemma 3 und die Markov-Eigenschaft anwenden und dann die Bessel-Dichte ausschreiben, sehen wir, dass die vierte Doppelsumme oben begrenzt ist durch

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \int_{y+1+(t-j/t+1)^{2/3}k/2}^{\infty} \frac{\gamma z^2}{(j/t)^{3/2}} \hat{P}_z(B_{t-j/t} \leq y+2) dz \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \times \sum_{j=\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \int_{y+1+(t-j/t+1)^{2/3}k/2}^{\infty} \int_0^{y+1} \frac{\gamma z w e^{-(w-z)^2/2(t-j/t)}}{(j/t)^{3/2} \sqrt{2\pi(t-j/t)}} dw dz \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil}^{\lceil t^2 \rceil - 1} c_5 \frac{(y+2)^2}{t^{3/2}} \times \int_{y+1+(t-j/t+1)^{2/3}k/2}^{\infty} \frac{z}{\sqrt{t-j/t}} e^{-(z-y-1)^2/2(t-j/t)} dz \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{(k+1)\kappa} \sum_{j=\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil}^{\lceil t^2 \rceil - 1} c_6 \frac{(y+2)^3}{t^{3/2}} \int_{(t-j/t)^{1/6}k/2}^{\infty} (t-j/t)^{1/2} z e^{-z^2/2} dz \\
&\leq c_7 \frac{(y+2)^3}{t^{3/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=\lceil t^2 - (y+1)t^{4/3} \rceil}^{\lceil t^2 \rceil - 1} k(t-j/t)^{2/3} e^{(k+1)\kappa - k^2(t-j/t)^{1/3}/8}.
\end{aligned}$$

Für $t \geq 1$ ist jeder dieser Terme kleiner als eine Konstante mal $(y+2)^3 t^{-3/2}$, wie erforderlich.

□

Proposition 4.5.4

Definiere β_s durch

$$\beta_s = \max \left(\beta - \frac{L(s) + y}{t - s}, 0 \right).$$

Dann gilt

$$\beta_s \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t - s)}{t - s}.$$

Beweis.

Einsetzen der Definition von β liefert die Ungleichung

$$\max \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t)}{t} + \frac{y}{t} - \frac{L(s) + y}{t - s}, 0 \right) \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t - s)}{t - s}.$$

Diese Ungleichung wird impliziert wenn wir die Ungleichung

$$\max \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t)}{t} + \frac{y}{t} - \frac{l(s) + y}{t - s}, 0 \right) \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t - s)}{t - s},$$

beweisen. Dabei war l definiert durch

$$l(s) = \begin{cases} \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(s + 1) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/2, \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t - s + 1) & \text{falls } t/2 \leq s \leq t. \end{cases}$$

An dieser Stelle machen wir aufgrund der Definition von l die folgenden Fall Unterscheidungen

1. $s \leq t/2$:

Einsetzen der Definition von l liefert

$$\max \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t)}{t} + \frac{y}{t} - \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} \log(s + 1) + y}{t - s}, 0 \right) \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t - s)}{t - s},$$

Die rechte Seite ist stets positiv, also müssen wir nur zeigen, dass

$$\sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t)}{t} + \frac{y}{t} - \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} \log(s + 1) + y}{t - s} \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t - s)}{t - s}$$

Standardumformungen liefern die äquivalente Ungleichung

$$\begin{aligned} & -\frac{\log(t)}{t} - \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{y}{t - s} - \frac{y}{t} \right)}_{>0} - \frac{\log(s + 1)}{t - s} \leq -\frac{\log(t - s)}{t - s} \\ \Leftrightarrow & \frac{\log(t)}{t} + \underbrace{\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{y}{t - s} - \frac{y}{t} \right)}_{>0} + \frac{\log(s + 1)}{t - s} > \frac{\log(t - s)}{t - s} \end{aligned}$$

Standardumformungen zeigen, dass diese Aussage impliziert, wenn für alle $s \in [0, t/2)$ gilt

$$\frac{t^{(t-s)/t}(s+1)}{t-s} > 1.$$

Eine wahre Aussage. Damit ist dieser Fall bewiesen.

2. $s > t/2$:

Analoges vorgehen unter Berücksichtigung, dass für $s \in [t/2, t)$ gilt $l(s) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t-s+1)$ zeigt, dass auch für diesen Fall die Ungleichung erfüllt ist.

□

Um nun das Hauptresultat dieses Abschnitts beweisen zu können, müssen wir lediglich noch den folgenden Hilfssatz herleiten, der einige zuvor hergeleitete Aussagen in seinem Beweis benötigt. Hierbei geht es darum zu zeigen, dass eine universelle Konstante C_5 existiert, sodass wir die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines Teilchens das die Schranke

$$\sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t) + y,$$

überschreitet zu einem beliebigen Zeitpunkt t nach oben abschätzen können. Diese Schranke hängt nur von y ab.

Proposition 4.5.5 Es existiert eine Konstante C_5 , sodass

$$\mathbb{P}(\exists u \in N(t) : X_u(t) \geq \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + y) \leq C_5(y+2)^4 e^{-\sqrt{2}y},$$

wenn $t \geq 1$ und $y \in [0, \sqrt{t}]$.

Beweis:

Um die Aussage beweisen zu können stellt es sich heraus das wir zeigen müssen, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit kein Teilchen jemals über $\beta s + L(s) + y$ für $s \in [0, t]$ gehen wird. Zu diesem Zweck definieren wir

$$\tau = \inf\{s \in [0, t] : \exists u \in N(s) \text{ mit } X_u(s) > \beta s + L(s) + y\}.$$

Informell gesprochen entspricht somit die Stoppzeit τ , demjenigen Zeitpunkt an dem das erste Mal der Lebenspfad eines Individuums u die Schwelle $\beta\tau + L(\tau) + y$ überschreitet. Erinnerung sei an die Definition von Γ , die durch

$$\Gamma = \#\{u \in N_t : X_u(s) < f(s) + y + 1 \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t + y\},$$

gegeben war, mit $f(s) = \beta s + L(s)$.

Wir behaupten, dass die Anzahl der zu erwartenden Teilchen, die zu der Menge Γ gehören bedingt durch das Event $\{\tau < t\}$, sich durch

$$\mathbb{E}[\Gamma | \tau < t] \geq c_1$$

für eine Konstante $c_1 > 0$ abschätzen lässt. Man beachte, dass diese obere Schranke weder von t noch y abhängt. Unsere Herangehensweise für den Beweis dieser Behauptung ist informell gesprochen die folgende: Wenn ein Teilchen zu einem Zeitpunkt vor t bereits $\beta s + L(s) + y$ erreicht hat, dann hat es gute Arbeit verrichtet in dem Sinn, dass die üblichen Kosten $e^{-\sqrt{2}y}$ (Lemma 4.5.1) für das Erreichen von βt verschwinden. Sei also $\omega \in \Omega$, sodass ein $s < t$ existiert mit $\{\tau = s\}$. Wir erinnern an unsere Konstruktion unseres Verzweigungsprozesses (Konstruktion 2.0.1): Sei v dasjenige Teilchen, dass sich zum Zeitpunkt s an eben exakt dieser Position $\beta s + L(s) + y$ befindet und definiere $N_v(r)$ als die Menge der Nachkommen des Teilchens v zur Zeit r , für $r \geq s$. Wir definieren $\beta_s = \max(\beta - \frac{L(s)+y}{t-s}, 0)$. Dann gilt auf unserer Menge $\{\tau = s\}$ die Ungleichung

$$\Gamma \geq \#\{u \in N_v(t) : X_u(r) - X_u(s) \leq \beta_s(r - s) + 1 \forall r \in [s, t], \\ \beta_s(t - s) - 1 \leq X_u(t) - X_u(s) \leq \beta_s(t - s)\},$$

da es sich bei den Individuen auf der rechten Seite der Ungleichungen um diejenigen Nachkommen von v handelt, die in der Menge Γ liegen, was offensichtlich eine Teilmenge von Γ ist.

In Proposition 4.5.4 haben wir bewiesen, dass $\beta_s \leq \sqrt{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{\log(t-s)}{t-s}$. Wir erinnern an die Definition von H . Diese war gegeben durch

$$H(y, t) = \#\{u \in N(t) : X_u(s) \leq \beta s + 1 \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\}$$

und erfüllte nach Lemma 4.5.1 für $t \geq 1$ und $y \in [0, \sqrt{t}]$ die Eigenschaft,

$$\mathbb{E}[H(y, t)] = e^{-\sqrt{2}y}.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Gamma | \tau = s] &\geq \mathbb{E}[\#\{u \in N(t) : X_u(s) \leq \beta s + 1 \forall s \leq t, \beta t - 1 \leq X_u(t) \leq \beta t\} | \tau = s] \\ &\geq \mathbb{E}[\#\{u \in N(t - s) : X_u(s) \leq \beta w + 1 \forall w \leq t - s, \\ &\quad \beta(t - s) - 1 \leq X_u(t - s) \leq \beta(t - s)\}] \\ &= \mathbb{E}[H(1, t - s)] \end{aligned}$$

und final nach Lemma 4.5.1, wenn $s \leq t - 1$ ist, dann

$$\mathbb{E}[\Gamma | \tau = s] \geq c_2. \tag{4.1}$$

Für den Fall $s > t - 1$ machen wir die Beobachtung: $\mathbb{E}[\Gamma | \tau = s]$ ist mindestens die Wahrscheinlichkeit, dass eine einzelne Brownsche Bewegung B_r , $r \geq 0$, für alle $r \in [0, 1]$ innerhalb $[-1, 1]$ bleibt und $B_1 \in [-1, 0]$ erfüllt.

Somit haben wir zusammenfassend mit (4.1)

$$\mathbb{E}[\Gamma | \tau < t] \geq c_1 \text{ und } \mathbb{E}[\Gamma] \leq C_4(y + 2)^4 e^{-\sqrt{2}y}.$$

Berücksichtigen wir zusätzlich aufgrund der nichtnegativität der Zufallsvariable Γ die Eigenschaft $0 \leq \mathbb{E}[\Gamma 1_{\{\tau < t\}}] \leq \mathbb{E}[\Gamma]$. So folgt insgesamt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau < t) &= \frac{\mathbb{E}[\Gamma] \mathbb{P}(\tau < t)}{\mathbb{E}[\Gamma]} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[\Gamma] \mathbb{P}(\tau < t)}{\mathbb{E}[\Gamma 1_{\{\tau < t\}}]} \\ &= \frac{\mathbb{E}[\Gamma]}{\mathbb{E}[\Gamma | \tau < t]} \\ &\leq \frac{C_4}{c_1} (y + 2)^4 e^{-\sqrt{2}y}. \end{aligned}$$

Wendet man die Markovsche Ungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\exists u \in N(t) : X_u(t) \geq \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + y) &\leq \mathbb{P}(\Gamma \geq 1) + \mathbb{P}(\tau < t) \\ &\leq c_3(y+2)^4 e^{-\sqrt{2}y},\end{aligned}$$

wie gefordert. □

Nun können wir unser erstes Hauptresultat beweisen.

Beweis Satz 1:

Wir haben gezeigt, dass $t \geq 1$ und $y \in [0, \sqrt{t}]$, für Konstanten $C_3, C_5 \in (0, \infty)$,

$$C_3 e^{-\sqrt{2}y} \leq \mathbb{P}(M_t > \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + y) \leq C_5 (y+2)^4 e^{-\sqrt{2}y}.$$

Es existiert also $\delta > 0$, sodass wenn wir $\tilde{m}(t) := \sup\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(M_t \leq x) \leq 1 - \delta\}$ definieren, dann

$$\tilde{m}(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + O(1).$$

Setze $\epsilon > 0$. Wähle L , sodass $\mathbb{E}[(1 - \delta)^{-|N(L)|}] < \frac{\epsilon}{2}$ und dann a , sodass $\mathbb{P}(M_L^- < -a) < \frac{\epsilon}{2}$, wobei $M_t^- = \min_{u \in N(t)} X_u(t)$ das Minimum zum Zeitpunkt t ist. Für ein Teilchen $u \in N(L)$ und $t > L$ sei $M_t^{(u)} = \max_{v \in N(t): u \leq v} X_v(t)$ die maximale Position unter den Nachkommen von u zum Zeitpunkt t . Dann ist für $t > L$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M_t < \tilde{m}(t-L) - a) &\leq \mathbb{P}(M_L^- < -a) + \mathbb{P}(M_L^- \geq -a, \max_{u \in N(L)} M_t^{(u)} < \tilde{m}(t-L) - a) \\ &\leq \mathbb{P}(M_L^- < -a) + \mathbb{E}[\mathbb{P}(M_{t-L} < \tilde{m}(t-L))^{N(L)}] \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.\end{aligned}$$

Somit ist $M_t - \tilde{m}_t$ straff und wir folgern, dass auch

$$m(t) = \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t + O(1).$$

□

4.6 Beweis von Satz 2

bflerjngjbgel

Lemma 4.6.1 [5, S.3534]

Die obere Schranke in (1) erfüllt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t - \sqrt{2}t}{\log t} \leq -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ fast sicher.}$$

Beweis:

Um die Aussage des Lemmas umzuformulieren, zeigen wir, dass es für jedes $\epsilon > 0$ beliebig große Zeiten gibt, sodass es keine Teilchen über $\sqrt{2}t - (\frac{3}{2\sqrt{2}} - \epsilon) \log t$ gibt. Wähle $R > \frac{2}{\epsilon}$, lasse $t_1 = 1$ und für $n > 1$ lasse $t_n = e^{Rt_{n-1}}$.

Definiere

$$E_n = \{\exists u \in N(t_n) : X_u(t) > \sqrt{2}t_n - (\frac{3}{2\sqrt{2}} - \epsilon) \log t_n\}$$

und

$$F_n = \{|N(t_n)| \leq e^{2t_n}, |X_u(t_n)| \leq \sqrt{2}t_n \forall u \in N(t_n)\}.$$

Wir wissen, dass F_n für alle großen n zutrifft, also genügt es zu zeigen, dass

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k \geq n} (E_k \cap F_k) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^N \mathbb{P} \left(E_k \cap F_k \mid \bigcap_{j=n}^{k-1} (E_j \cap F_j) \right) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Für ein Teilchen u sei E_n^u das Ereignis, dass ein Nachkomme von u zum Zeitpunkt t_n eine Position größer als $\sqrt{2}t_n - (\frac{3}{2\sqrt{2}} - \epsilon) \log t_n$. Außerdem sei $s_n = t_n - t_{n-1}$ und

$$G_n = \left\{ \exists u \in N(s_n) : X_u(s_n) > \sqrt{2}s_n - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log s_n + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{t_n - t_{n-1}}{t_n} \right) + \epsilon \log t_n \right\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(E_k \cap F_k \mid \bigcap_{j=n}^{k-1} (E_j \cap F_j) \right) &\leq \mathbb{P} \left(E_k \mid \bigcap_{j=n}^{k-1} (E_j \cap F_j) \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{u \in N(t_{k-1})} E_k^u \mid \bigcap_{j=n}^{k-1} (E_j \cap F_j) \right) \\ &\leq e^{2t_{k-1}} \mathbb{P}(G_k) \\ &\leq C_5 (\log t_k + 2)^4 t_k^{\frac{2}{R}} \left(1 - \frac{t_{k-1}}{t_k} \right)^{-\frac{3}{2}} t_k^{-\epsilon}, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung die Proposition 11 verwendet. Da wir $R > \frac{2}{\epsilon}$ gewählt haben, ist dies viel kleiner 1, wenn k groß ist, wie erforderlich.

□

Lemma 4.6.2 [5, S.3535]

Die untere Schranke in (2) erfüllt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t - \sqrt{2}t}{\log t} \leq -\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{fast sicher.}$$

Beweis:

Wir zeigen, dass es für große t und beliebige $\epsilon > 0$ keine Teilchen über $\sqrt{2}t - (\frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\epsilon) \log t$.
Nach Proposition 11 gilt

$$\mathbb{P} \left(\exists u \in N(t) : X_u(t) > \sqrt{2}t - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \epsilon \right) \log t \right) \leq C_5 (\log t + 2)^4 t^{-1-\epsilon\sqrt{2}}.$$

Für beliebige Gitterzeiten $t_n \rightarrow \infty$ ist also nach Borel-Cantelli

$$\mathbb{P} \left(\exists u \in N(t_n) : X_u(t_n) > \sqrt{2}t_n - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \epsilon \right) \log t_n \text{ für unendlich viele } n \right) = 0.$$

Es ist nun eine einfache Übung, die exponentielle Straffheit der Brownschen Bewegung und die Tatsache zu nutzen, dass wir $t_n - t_{n-1}$ beliebig klein wählen können, um sicherzustellen, dass kein Teilchen über $\sqrt{2}t - (\frac{1}{2\sqrt{2}} - 2\epsilon) \log t$ für irgendeine Zeit t hinausgehen kann.

□

Lemma 4.6.3 [5, S.3536]

Die untere Schranke in (1) erfüllt

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t - \sqrt{2}t}{\log t} \geq -\frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ fast sicher.}$$

Beweis:

Wir zeigen, dass es für große t und beliebige $\epsilon > 0$ immer Teilchen über $\sqrt{2}t - (\frac{3}{2\sqrt{2}} + 3\epsilon) \log t$ gibt. Es sei

$$A_t = \{ \exists u \in N(t) : X_u(t) > \sqrt{2}t - (\frac{3}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}) \log t \}$$

und

$$B_t = \{ |N(\epsilon \log t)| \geq t^{\frac{\epsilon}{2}}, X_v(\log t) \geq -\sqrt{2}\epsilon \log t \forall v \in N(\epsilon \log t) \}.$$

Definiere $N(v; t)$ als die Menge der Nachkommen des Teilchens v , die zum Zeitpunkt t am Leben sind. Sei $l_t = t - \epsilon \log t$. Dann gilt für große t ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_t \cap B_t) &\leq \mathbb{E} \left[\prod_{v \in N(\epsilon \log t)} \mathbb{P} \left(\exists u \in N(v; t) : X_u(t) > \sqrt{2}t - \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\epsilon \right) \log t \mid \mathcal{F}_{\log t} \right) \mathbb{1}_{B_t} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\prod_{v \in N(\log t)} \mathbb{P} \left(\exists u \in N(v; t) : X_u(l_t) > \sqrt{2}l_t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log l_t \right) \mathbb{1}_{B_t} \right] \\ &\leq (1 - C_3)^{t^{\frac{\epsilon}{2}}}, \end{aligned}$$

wobei $C_3 > 0$ die Konstante aus Proposition 9 ist. Nach Borel-Cantelli ist also für beliebige Gitterzeiten $t_n \rightarrow \infty$, $\mathbb{P}(A_{t_n} \cap B_{t_n} \text{ unendlich oft}) = 0$. Aber für alle großen t , $|N(\epsilon \log t)| \geq e^{(\epsilon \log t)/2} = t^{\frac{\epsilon}{2}}$ und $X_v(\epsilon \log t) \geq -\sqrt{2}\epsilon \log t$ für alle $v \in N(\log t)$, sodass wir ableiten, dass $\mathbb{P}(A_{t_n} \text{ unendlich oft}) = 0$. Dann ist es wiederum eine einfache Aufgabe, mit Hilfe der exponentiellen Straffheit der Brownschen Bewegung zu prüfen, dass sich kein Teilchen zwischen den Gitterzeiten unendlich oft weiter als $(3 - 2\sqrt{2})\epsilon \log t$ bewegt (vorausgesetzt, wir wählen $t_n - t_{n-1}$ klein genug).

Lemma 4.6.4 [5, S.3537]

Die untere Schranke in (2) erfüllt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t - \sqrt{2}t}{\log t} \geq -\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ fast sicher.}$$

Beweis:

Dies hängt mit dem Beweis der unteren Schranke in Satz 1 zusammen; die Grundidee ist ähnlich wie bei dem Beweis von Hu und Shi. Wir setzen $\beta_t = \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t}$ und

$$V(t) = \{v \in N(t) : X_v(r) < \beta_t r + 1 \forall r \leq t, \beta_t t - 1 \leq X_v(t) \leq \beta_t t\}$$

und definieren

$$I_n = \int_n^{2n} \mathbb{1}_{\{V(t) \neq \emptyset\}} dt.$$

Wir schätzen die ersten beiden Momenten von I_n . Aus unserer früheren unteren Schranke für $\mathbb{P}(H(y, t) \neq 0)$ (aus dem Beweis von Proposition 9, mit $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \log t$) erhalten wir

$$\mathbb{E}[I_n] = \int_n^{2n} \mathbb{P}(V(t) \neq \emptyset) dt \geq c_1 \int_n^{2n} e^{-(\sqrt{2} \log t)/\sqrt{2}} dt = c_2.$$

Jetzt ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_n^2] &= \mathbb{E} \left[\int_n^{2n} \int_n^{2n} \mathbb{1}_{\{V(s) \neq \emptyset\}} \mathbb{1}_{\{V(t) \neq \emptyset\}} ds dt \right] \\ &= 2 \int_n^{2n} \int_n^t \mathbb{P}(V(s) \neq \emptyset, V(t) \neq \emptyset) ds dt. \end{aligned}$$

Aber sobald $s \leq t$,

$$\mathbb{P}(V(s) \neq \emptyset, V(t) \neq \emptyset) \leq \mathbb{E}[|V(s)| |V(t)|] = \mathbb{E}[|V(s)| \mathbb{E}[|V(t)| | \mathcal{F}_s]]$$

und $N(u; t)$ sei die Menge der Nachkommen des Teilchens u , die zum Zeitpunkt t am Leben sind,

$$\mathbb{E}[|V(t)| | \mathcal{F}_s] = \sum_{u \in N(s)} \mathbb{E} \left[\sum_{v \in N(u; t)} \mathbb{1}_{\{v \in V(t)\}} | \mathcal{F}_s \right].$$

Für jedes $s, t > 0$ sei nun

$$A_t(s) = \{u \in N(s) : X_u(r) < \beta_t r + 1 \forall r \leq s\}$$

und

$$B_t(s) = \{u \in N(s) : \beta_t s - 1 \leq X_u(s) \leq \beta_t s\}.$$

Nach der Markov-Eigenschaft und der Anwendung des Many-To-One-Lemma mit $f(r) = \beta_t(r - s)$ und $\alpha = \beta_t s - x + 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\sum_{v \in N(u; t)} \mathbb{1}_{\{v \in V(t)\}} | \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{1}_{\{u \in A_t(s)\}} \times \mathbb{E} \left[\sum_{v \in N(t-s)} \mathbb{1}_{\{X_v(r-s) + x < \beta_t r + 1 \forall r \leq t-s, \beta_t t - 1 \leq X_v(t-s) + x \leq \beta_t t\}} \right] \Big|_{x=X_u(s)} \\
&= \mathbb{1}_{\{u \in A_t(s)\}} e^{t-s} \mathbb{Q} \left[\frac{(\beta_t s - X_u(s) + 1) \mathbb{1}_{\{\beta_t t - x - 1 \leq \xi_{t-s} \leq \beta_t t - x\}}}{(\beta_t t - x + 1 - \xi_{t-s}) e^{\beta_t \xi_{t-s} - \beta_t^2(t-s)/2}} \right] \Big|_{x=X_u(s)} \\
&\leq \mathbb{1}_{\{u \in A_t(s)\}} e^{t-s} \frac{\beta_t s - X_u(s) + 1}{e^{\beta_t^2 t - \beta_t X_u(s) - \beta_t - \beta_t^2(t-s)/2}} \mathbb{Q}[\mathbb{1}_{\{\beta_t t - x - 1 \leq \xi_{t-s} \leq \beta_t t - x\}}] \Big|_{x=X_u(s)} \\
&\leq c_3 e^{-2s} t^{\frac{1}{2}} e^{(s \log t)/(2t)} \times \mathbb{1}_{\{u \in A_t(s)\}} \frac{\beta_t s - X_u(s) + 1}{e^{-\beta_t X_u(s)}} \mathbb{Q}(\xi_t \in B_t(t) | \xi_s = x) \Big|_{x=X_u(s)},
\end{aligned}$$

wobei wir für die letzte Gleichheit die Tatsache verwendet haben, dass Bessel-Prozesse die Markov-Eigenschaft erfüllen. Wenn man (4) wieder einsetzt und das Many-To-Two-Lemma anwendet, erhält man

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(V(s) \neq \emptyset, V(t) \neq \emptyset) \\
&\leq \mathbb{E} \left[\sum_{u, v \in N(s)} \mathbb{1}_{\{u \in V(s)\}} c_3 e^{-2s} t^{\frac{1}{2}} e^{(s \log t)/(2t)} \times \mathbb{1}_{\{v \in A_t(s)\}} (\beta_t s - X_v(s) + 1) e^{\beta_t X_v(s)} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{Q}(\xi_t \in B_t(t) | \xi_s = x) \Big|_{x=X_v(s)} \right] \\
&= e^{3s} \mathbb{Q} \left[\frac{\mathbb{1}_{\{T > s\}}}{\zeta^1(s)} \mathbb{1}_{\{\xi_s^1 \in B_s(s)\}} c_3 e^{-2s} t^{\frac{1}{2}} e^{(s \log t)/(2t)} \times \zeta^1(s) e^{\beta_t^2 s/2} \mathbb{Q}(\xi_t^1 \in B_t(t) | \xi_s^1) \right] \\
&\quad + e^{2s} \mathbb{Q} \left[\frac{e^T \zeta^1(T) \mathbb{1}_{\{T \leq s\}}}{\zeta^1(s) \zeta^2(s)} \mathbb{1}_{\{\xi_s^1 \in B_s(s)\}} c_3 e^{-2s} t^{\frac{1}{2}} e^{(s \log t)/(2t)} \times \zeta^2(s) e^{\beta_t^2 s/2} \mathbb{Q}(\xi_t^2 \in B_t(t) | \xi_s^2) \right] \\
&\leq c_4 t^{\frac{1}{2}} \mathbb{Q}(\xi_s^1 \in B_s(s), \xi_t^1 \in B_t(t)) \\
&\quad + c_4 t^{\frac{1}{2}} \mathbb{Q} \left[\frac{(\beta_t r - \xi_r^1 + 1) e^{T + \beta_t \xi_T^1 - \beta_t^2 T/2}}{(\beta_t s - \xi_s^1 + 1) e^{\beta_t \xi_s^1 - \beta_t^2 s/2}} \mathbb{1}_{\{T \leq s\}} e^s \mathbb{1}_{\{\xi_s^1 \in B_s(s), \xi_t^2 \in B_t(t)\}} \right] \\
&\leq c_4 t^{\frac{1}{2}} \mathbb{Q}(\xi_s^1 \in B_s(s), \xi_t^1 \in B_t(t)) \\
&\quad + c_5 t^{\frac{1}{2}} e^{(s \log t)/(2t)} \mathbb{Q} \left[(\beta_t T - \xi_T^1 + 1) e^{2T - (T \log t)/(2t) - \beta_t(\beta_t T - \xi_T^1 + 1)} \times \mathbb{1}_{\{T \leq s\}} \mathbb{1}_{\{\xi_s^1 \in B_s(s), \xi_t^2 \in B_t(t)\}} \right].
\end{aligned}$$

Wir müssen nun die letzte Zeile oben schätzen. Der $\mathbb{Q}(\cdot)$ -Teil des ersten Terms ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Bessel-Prozess zum Zeitpunkt s in der Nähe des Ursprungs befindet und dann wieder zum Zeitpunkt t ; der erste Term ist also nicht größer als eine Konstante mal $t^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{3}{2}} (t - s + 1)^{-\frac{3}{2}}$.

Unter Verwendung der Notation aus Abschnitt 2 ist der Erwartungswert $\mathbb{Q}[\cdot]$ im zweiten Term

$$\begin{aligned}
& \hat{P} \left[Y_\tau^1 e^{2\tau - (\tau \log t)/(2t) - \beta_t Y_\tau^1} \mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{1}_{\{(\log s)/(2\sqrt{2}) - (s \log t)/(2\sqrt{2}t) + 1 \leq Y_s^1 \leq (\log s)/(2\sqrt{2}) - (s \log t)/(2\sqrt{2}t) + 2\}} \mathbb{1}_{\{1 \leq Y_t^2 \leq 2\}} \right].
\end{aligned}$$

Nach Lemma 5 ist also

$$\mathbb{P}(V(s) \neq \emptyset, V(t) \neq \emptyset) \leq c_6 (t^{-2} + t^{-1}(t - s + 1)^{\frac{3}{2}})$$

und damit

$$\mathbb{E}[I_n^2] \leq 2c_6 \int_n^{2n} \int_n^t (t^{-2} + t^{-1}(t-s+1)^{\frac{3}{2}}) ds dt \leq c_7,$$

also

$$\mathbb{P}(I_n > 0) \geq \mathbb{P}(I_n \geq \frac{\mathbb{E}[I_n]}{2}) \geq \frac{\mathbb{E}[I_n]^2}{4\mathbb{E}[I_n^2]} \geq c_8 > 0.$$

Wenn n groß ist, gibt es zum Zeitpunkt $2\delta \log n$ mindestens n^δ Teilchen, die alle eine Position von mindestens $-2\sqrt{2}\delta$ haben. Nach den obigen Ausführungen ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines dieser Teilchen einen Nachkommen hat, der über $\sqrt{2}s - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log s - 2\sqrt{2}\delta \log n$ für jedes s zwischen $2\delta \log n + n$ und $2\delta \log n + 2n$ hinausgeht, nicht größer als

$$(1 - c_8)^{n^\delta}.$$

Das Ergebnis folgt durch das Borel-Cantelli Lemma, da $\sum_n (1 - c_8)^{n^\delta} < \infty$.

□

Beweis von Satz 2:

Das Ergebnis ergibt sich aus der Kombination der Lemmata 12, 13 und 14 und Proposition 15.

□

Kapitel 5

Der verzweigende Random-Walk

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit dem zeitlich und zugleich räumlich diskreten Analogon der verzweigenden Brownschen Bewegung. Hier liegt es nahe als den Lebenspfad durch einen Random-Walk zu definieren, da dieser bekanntlich mit einem Argument von Donsker gegen eine Brownsche-Bewegung konvergiert. Für die Lebenszeiten der verzweigenden Brownschen Bewegung hatten wir in unseren Untersuchungen die exponentialverteilung kennengelernt. Die exponentialverteilung nimmt ihre Werte auf der positiven reellen Achse an, da wir wie bereits angekündigt ebenfalls die zeitliche Dimension diskretisieren möchten sind wir gezwungen, eine andere Verteilung herzunehmen.

Wir erinnern an die folgende Eigenschaft der Exponentialverteilung.

Proposition 5.0.1 (Gedächtnislosigkeit)

Es sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter 1. Dann gilt für alle beliebigen $s < t$ die Eigenschaft

$$\mathbb{P}[X > t \mid X > s] = \mathbb{P}[X > t - s]$$

Beweis.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X > t \mid X > s] &= \frac{\mathbb{P}[X > t, X > s]}{\mathbb{P}[X > s]} \\ &= \frac{\mathbb{P}[X > t]}{\mathbb{P}[X > s]} \\ &= \frac{e^{-t}}{e^{-s}} \\ &= e^{-(t-s)} \\ &= \mathbb{P}[X > t - s]\end{aligned}$$

□

Die nächste Untersuchung zeigt die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung auf.

Proposition 5.0.2 (Gedächtnislosigkeit)

Es sei X eine geometrischeverteilte Zufallsvariable mit Parameter p . Dann gilt für alle natürlichen Zahlen $m < n$ die Eigenschaft

$$\mathbb{P}[X > n \mid X > m] = \mathbb{P}[X > n - m]$$

Beweis.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X > n \mid X > m] &= \frac{\mathbb{P}[X > n, X > m]}{\mathbb{P}[X > m]} \\
&= \frac{\mathbb{P}[X > n]}{\mathbb{P}[X > m]} \\
&= \frac{(1-p)^n}{(1-p)^m} \\
&= (1-p)^{n-m} \\
&= \mathbb{P}[X > n-m]
\end{aligned}$$

□

Konstruktion 5.0.3 (Verzweigender Random-Walk)

Ein verzweigender Random-Walk startet zur Zeitperiode 0 mit einem Individuum, dem Vorfahren. Sei T eine geometrisch verteilte Zufallsvariable zum Parameter p . Wir definieren die monotone Folge T_1, T_2, T_3, \dots durch

$$T_i = T \cdot 1_{\{i < 3\}} + \infty \cdot 1_{\{i \geq 3\}}.$$

Diese Folge besitzt (mit der Konvention $\sup(\emptyset) = 0$) einen sogenannten assoziierten Zählprozess $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$, der definiert ist durch

$$\xi_k = \sup\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq k\}.$$

Mit jedem endlichen Zeitpunkt assoziieren wir ein weiteres Individuum. Aus dem Prozess ξ definieren wir uns die Anzahl der Nachkommen N des Vorfahren durch

$$N = \sup\{k \in \mathbb{N} : T_k < \infty\} = 2.$$

Die Lebenszeit des Vorfahren ist definiert durch $\zeta = T$. Sei $X = (X_k)_{k \in [0, \zeta]}$ ein Random Walk mit Start in $X_0 = 0$. Der Lebensweg des Vorfahren ist gegeben durch X . Wir indizieren Individuen $u \in \mathcal{I}$ unter Berücksichtigung des Stammbaums. Zu jedem $u \in \mathcal{I}$ assoziieren wir ein Tupel (ξ_u, ζ_u, X_u) das eine unabhängige Kopie von (ξ, ζ, X) darstellt. Weiter indizieren wir alle Größen, die von (ξ, ζ, X) abgeleitet werden mit u . So bezeichnet N_u die Gesamtzahl der Nachkommen von u und $X_{u,k}$ ist die Differenz zwischen dem Zeitpunkt der Geburt des k -ten Nachkommen und dem Geburtszeitpunkt von u . Formell bedeutet dies, dass wenn $S(u)$ der Geburtszeitpunkt von u ist, dann sind die Geburtszeitpunkte der beiden Nachkommen gegeben durch $S(u) + X_{u,1}$ und $S(u) + X_{u,2}$. Die Generationen $(\mathcal{G}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ des Verzweigungsprozesses sind gegeben durch die Rekursion

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \{\emptyset\} \\
\mathcal{G}_{n+1} &= \{vi \in \mathbb{N}^{n+1} : v \in \mathcal{G}_n, 1 \leq i \leq 2\}.
\end{aligned}$$

Kurz gefasst gilt das folgende Schema der VRW:

1. Ein Random-Walk X startet bei $X(0) = 0$.

2. Nach einer unabhängigen geometrisch verteilten Zeit T mit Parameter p spaltet sich der Random-Walk in zwei Teilchen.
3. Jedes der neuen Teilchen bewegt sich gemäß eines unabhängigen Random-Walk, die in $X(T)$ beginnt und verhält sich, bezogen auf ihren Geburtszeitpunkt und ihre Position, wie unabhängige Kopien ihres Elternteils.
4. Jedes der neuen Teilchen unterliegt dann der gleichen Aufteilungsregel.

In den folgenden Untersuchungen wollen wir einige bekannte Eigenschaften die wir für die verzweigende Brownsche Bewegung kennengelernt haben auf den VRW übertragen.

Proposition 5.0.4

Für den verzweigenden Random Walk zum Parameter p gilt

$$\mathbb{E}[n(k)] = (1 + p)^{k-1}.$$

Beweis.

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir lassen die σ -Algebra \mathcal{F}_{k-1} von dem VRW bis zur Periode $k - 1$ erzeugen. Offensichtlich ist die Verteilung der Zufallsvariable $n(k) - n(k - 1)$ Binomialverteilt zu den Parametern $n = n(k - 1)$ und p .

Somit ergibt sich für den bedingten Erwartungswert

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[n(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}] &= \sum_{j=n(k-1)}^{2n(k-1)} j \cdot \mathbb{P}[n(k) = j \mid \mathcal{F}_{k-1}] \\
&= \sum_{j=n(k-1)}^{2n(k-1)} j \binom{n(k-1)}{j - n(k-1)} p^{j - n(k-1)} (1 - p)^{n(k-1) - (j - n(k-1))} \\
&= \sum_{j=0}^{n(k-1)} (j + n(k-1)) \binom{n(k-1)}{j} p^j (1 - p)^{n(k-1) - j} \\
&= \sum_{j=0}^{n(k-1)} j \binom{n(k-1)}{j} p^j (1 - p)^{n(k-1) - j} \\
&\quad + n(k-1) \underbrace{\sum_{j=0}^{n(k-1)} \binom{n(k-1)}{j} p^j (1 - p)^{n(k-1) - j}}_{=1} \\
&= np + n(k-1).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt ausgenutzt, dass für den Erwartungswert einer Binomialverteilten Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[X] = np$. Wir sind nur in der Lage den unbedingten Erwartungswert von $n(k)$ zu berechnen. Zunächst gilt Offensichtlich für den Fall $k = 1$, dass $\mathbb{E}[n(1)] = n(1) = 1$. Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[n(k)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[n(k) \mid \mathcal{F}_{k-1}]] \\
&= np + \mathbb{E}[n(k-1)].
\end{aligned}$$

Durch umschreiben erhalten wir die Differenzengleichung

$$\Delta \mathbb{E}[n(k)] = \mathbb{E}[n(k-1)] \cdot p,$$

die unter Berücksichtigung der Anfangswertbedingung $\mathbb{E}[n(1)] = 1$ die Lösung

$$\mathbb{E}[n(k)] = (1+p)^{k-1},$$

besitzt.

□

It remains to show that

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0, t]} \tilde{B}_s \in [k, k+1), B_t \leq y+2 \right] &\leq \sum_{j=0}^{\lceil t \rceil} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} \left[\sup_{s \in [j/t, (j+1)/t]} \tilde{B}_s \geq \max(\tilde{B}_{j/t}, B_{(j+1)/t}) + \frac{k}{2} \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2] \\ &\quad + \sum_{j=\lceil (y+1)t^{4/3} \rceil + 1}^{t^2 - (y+1)^{4/3}} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2] \\ &\quad + \sum_{j=t^2 - (y+1)^{4/3}}^{\lceil t^2 \rceil - 1} \hat{\mathbb{P}}_{y+1} [B_{j/t} > k/2, B_t \leq y+2]. \end{aligned}$$

We split the event into the case where we have a sharp increase over one minor intervall and the other case where $\tilde{B}_{j/t}$ is large for some j

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbb{P}}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0, t]} \tilde{B}_s, B_t \leq y+2 \right] \\ &\leq \hat{\mathbb{P}}_{y+1} \left[\sup_{s \in [0, t]} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2 \right] \\ &= \hat{\mathbb{P}}_{y+1} \left[\exists j \in \{0, 1, \dots, \lceil t^2 \rceil\} : \sup_{s \in [0, t]} \tilde{B}_s \geq k, B_t \leq y+2 \right] + \end{aligned}$$

Kapitel 6

Codes

In diesem Kapitel wollen wir eine Zusammenstellung der wichtigsten Python-Codes geben.

Programm 6.0.1 (Verzweigende Brownsche Bewegung)

.....

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import math
import pandas as pd}

granularity = 1000
generations = 4

class Individual():
    def __init__(self, birthplace=0, birthtime=0, generation="1"):
        lifetime = np.random.exponential(1)
        lifepath, life_axis = self.brownian_motion_on_lifepath(lifetime)
        self.lifetime = lifetime
        self.lifepath = lifepath
        self.life_axis = life_axis
        self.death_place = lifepath[-1]
        self.birth_place = birthplace
        self.birthtime = birthtime
        self.generation = generation

    def brownian_motion_on_lifepath(self, lifetime, birthtime, birthplace):
        path = self.get_brownian_motion_unit()
        return lifetime*path + birthplace, np.linspace(0, 1, granularity)

    def get_brownian_motion_unit(self):
        plus_minus_func = np.vectorize(lambda number: 1 if number < 0.5
        brownian_motion_unit_interval = (1/math.sqrt(granularity))*np.c
        return brownian_motion_unit_interval

class BranchingProcess():
    def __init__(self, start=0, end=1, granularity=1000):
        self.start = start
```

```

        self.end = end
        self.granularity = granularity
        self.ancestor = Individual()
        self.genealogy = self._get_genealogy()
        #self.all_alive = self.

def _get_genealogy(self):
    result_dict = {"1": self.ancestor}
    last = self.ancestor.death_place
    last_generation = ["1"]

    max_stage = 1
    while last < generations:
        next_generation = []
        for key in last_generation:
            if len(key) == generations-1:
                last = generations + 1
                key1 = key + "0"
                key2 = key + "1"

                result_dict[key1] = Individual(result_dict[key].death_p
                                                result_dict[key].birthtime+result

                result_dict[key2] = Individual(result_dict[key].death_p
                                                result_dict[key].birthtime+result

                next_generation += [key1, key2]
                print(result_dict[key2].birthtime)
                print(key2)
            last_generation = next_generation
    return result_dict

def get_minimum_from_last_generation(self):
    minimum = 0
    minimum_key = None
    for key in self.genealogy.keys():
        death = self.genealogy[key].birthtime + self.genealogy[key]
        if len(key) == generations and (minimum > death or minimum
            minimum = death
            minimum_key = key
    return minimum #, minimum_key

def get_offspring(self, ancestor):
    birthtime = ancestor.birthtime + ancestor.lifetime
    return ancestor

def create_plot(self, min_plot=True):
    for life in self.genealogy.keys():
        if not min_plot:
            plt.plot(self.genealogy[life].life_axis, self.genealogy
        else:

```

```

        which = np.where(self.genealogy[life].life_axis < self.
axis = self.genealogy[life].life_axis[which]
path = self.genealogy[life].lifepath[which]
plt.plot(axis, path)
plt.show()

def creat_max_particle_plot(self, min_plot=True):
    max_val, last_key = -100, ""
    for life in self.genealogy.keys():
        if not min_plot:
            plt.plot(self.genealogy[life].life_axis, self.genealogy
        else:
            which = np.where(self.genealogy[life].life_axis < self.
axis = self.genealogy[life].life_axis[which]
path = self.genealogy[life].lifepath[which]
plt.plot(axis, path, color='grey')
            if len(path) > 0:
                last_key = life if path[-1] > max_val else last_key
                max_val = path[-1] if path[-1] > max_val else max_v
    while last_key != "":
        which = np.where(self.genealogy[last_key].life_axis < self.
axis = self.genealogy[last_key].life_axis[which]
path = self.genealogy[last_key].lifepath[which]
plt.plot(axis, path, color='red')
        last_key = last_key[:-1]

    plt.show()

instance = BranchingProcess()

x = pd.DataFrame([[2,3],[2,3], [2,3]], columns=["Start", "End", "Start"]
x.rename(columns=lambda x: x if x!="Start2" else "Start")
instance.creat_max_particle_plot()

```

Kapitel 7

Literatur

1. Aïdékon, E., Berestycki, J., Brunet, E., Shi, Z. (2013): Branching Brownian motion seen from its tip
2. Bramson, M. D. (1978): Maximal displacement of branching Brownian motion
3. Hu, Y., Shi, Z. (2009): Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees
4. Mörters, P., Peres, Y. (2010): Brownian motion. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics
5. Roberts, M. I. (2013): A simple path to asymptotics for the frontier of a branching Brownian motion
6. McKean, H. P. (1975): Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov
7. Harris, S. C. (1999): Travelling-waves for the FKPP equation via probabilistic arguments
8. Bovier, A. (2017): Gaussian Processes on Trees: From Spin Glasses to Branching Brownian Motion
9. Bening, V. E., Korolev, V. Y. (2002): Generalized Poisson Models and their Applications in Insurance and Finance
10. Kolmogorov, A. N., Petrovsky, I.G., Piskunov, N. S. (1937): Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique
11. Berestycki, J. (2014): Topics on Branching Brownian motion
12. Zou, J. (2017): Some aspects of Branching Brownian motion