

Bachelorarbeit
im Studiengang Mathematik

Beiträge und Simulationen zur Edgeworth-Reihenentwicklung

Contributions and simulations to the Edgeworth-Expansion

Christina Wißmeyer

Matrikelnummer: 2125987

15.06.19

Betreuung: Prof. Dr. Dr. h.c. Winfried Stute

Justus-Liebig-Universität Gießen

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	3
1.1	Die charakteristische Funktion	3
2	Die Edgeworth-Expansion	13
2.1	Der erste Fall	18
2.2	Der zweite Fall	25
2.3	Der dritte Fall	27
3	Simulationen	28
3.1	Eine Simulationsstudie zum zentralen Grenzwertsatz	28
3.2	Die Edgeworth-Expansion der Exponentialverteilung	32
4	Alternative Inversionsformel	37
5	R Codes	41
6	Literatur	45

Einleitung

Diese Ausarbeitung behandelt die Edgeworth-Expansion, welche ein Approximationsverfahren für Wahrscheinlichkeitsverteilungen darstellt. Benannt wurde diese nach dem irischen Ökonomen Francis Ysidro Edgeworth. Im ersten Abschnitt werden zunächst die Grundlagen rund um die charakteristische Funktion, auch Fouriertransformierte genannt, eingeführt und wichtige Eigenschaften und Stze, wie der Satz von Riemann-Lebesgue und die Riemann-Inversion bewiesen.

Im nächsten Abschnitt stellen wir einen Zusammenhang zum zentralen Grenzwertsatz her und erläutern die drei verschiedenen Fälle der Entwicklung. Diese werden in den darauffolgenden Unterabschnitten genauer behandelt, wobei wir uns hauptsächlich auf den ersten Fall spezialisieren.

Anschließend werden im dritten Abschnitt die zuvor gewonnenen Erkenntnisse des zentralen Grenzwertsatzes und der Edgeworth-Expansion in einer Simulationsstudie mit Hilfe von R dargestellt und interpretiert.

Das letzte Kapitel bezieht sich auf die Masterthesis “Fourier Inversion und ihre Anwendungen in der Stochastik“ von Herr Kaftan, in dessen Arbeit eine Alternative Inversionsformel zur Riemann-Inversion hergeleitet wurde. Diese besitzt den Vorteil, dass sie schwächere Voraussetzungen an die Transformation stellt. Wir geben mit dieser Inversionsformel einen Vorschlag für die Edgeworth-Entwicklung an, welche die drei angegebenen Fälle vereinigen könnte.

Kapitel 1

Grundlagen

Wir wollen in diesem ersten Kapitel die wichtigsten Grundlagen aufarbeiten und die Zusammenhänge zwischen den mathematischen Begriffen verstehen.

1.1 Die charakteristische Funktion

Die Fouriertransformation, in der Stochastik auch charakteristische Funktion genannt, zählt wohl zu den bekanntesten Transformationen in der Mathematik überhaupt. In diesem Abschnitt wollen wir uns einen Überblick über die wichtigsten Resultate verschaffen.

Definition 1.1.1 (charakteristische Funktion)

Es sei $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Die charakteristische Funktion $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\phi(t) = \mathbb{E}[\exp(iXt)] = \int_{\mathbb{R}} \exp(ixt) F(dx).$$

Im Fall, dass die Verteilung F der Zufallsvariable eine Lebesgue-Dichte f besitzt, folgt aus Definition 1.1.1 direkt die Gleichung

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} F(dx) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x) dx.$$

Hier sieht man auch direkt den Zusammenhang der charakteristischen Funktion aus der Stochastik und der klassischen Fouriertransformation, wie sie in der Analysis eingeführt wird. Oftmals bezeichnet man diese auch mit $\hat{\phi}(t)$. Sprechen wir jedoch über diskrete Verteilungen, ergibt sich ein anderes Bild. Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{P}[X = k] = p_k$. Für die Fouriertransformation ϕ_X erhalten wir in diesem Fall

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{ikt} p_k.$$

Eine weitere Darstellung ergibt sich bei der Betrachtung des Zusammenhangs zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen.

Proposition 1.1.2

Es gilt

$$e^{ixt} = \cos(xt) + i \cdot \sin(xt).$$

Beweis.

Die Eulersche Formel lässt sich mit Hilfe der Taylorreihen der Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion herleiten. Demnach gilt

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \left(\sum_{n=0}^N (-1)^n \frac{(iy)^{(2n+1)}}{(2n+1)!}\right) \\ &= \cos(y) + i \sin(y). \end{aligned}$$

□

Unter Ausnutzung der Linearität des Erwartungswertes und Proposition 1.1.2 erhalten wir somit die Gleichung

$$\phi(t) = \mathbb{E}[\exp(iXt)] = \mathbb{E}[\cos(Xt)] + i \cdot \mathbb{E}[\sin(Xt)].$$

Eine Dichte f erfüllt die Eigenschaft $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ und ist nichtnegativ. Also ist $f \in L^1(\mathbb{R})$. Aus 1.1.2 folgt zudem mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |e^{ixt}| &= |\cos(xt) + i \cdot \sin(xt)| \\ &= \sqrt{|\cos(xt)|^2 + |i|^2 \cdot |\sin(xt)|^2} \\ &= \sqrt{|\cos(xt)|^2 + |\sin(xt)|^2} \\ &= \sqrt{1} = 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung für Integrale und da die Funktion f nichtnegativ ist mit $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ insgesamt

$$\begin{aligned} |\phi_X(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ixt} f(x)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |e^{ixt}| \cdot |f(x)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |f(x)|dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \\ &= 1 < \infty. \end{aligned}$$

Allgemein gilt sogar für eine Zufallsvariable X mit Verteilung F

$$|\phi_X(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ixt}| F(dx) = \int_{\mathbb{R}} 1 F(dx) = 1.$$

Somit ist die Existenz der charakteristischen Funktion für den Anwender in der Stochastik stets sichergestellt. Eine wichtige Voraussetzung für eine Reihe von Anwendungen ist die Integrierbarkeit der charakteristischen Funktion. In diesem Zusammenhang lässt sich zeigen, dass ϕ_X genau dann integrierbar ist, wenn X eine stetige Lebesgue-Dichte besitzt. Diese Annahme an die Verteilung von X stellt sich jedoch in vielen Fällen als viel zu restriktiv heraus. Genannt seien an dieser Stelle diskrete Verteilungen, aber auch beispielsweise die Gleichverteilung, welche diese Annahme allesamt nicht erfüllen.

Die nachfolgenden Sätze liefern wichtige Zusammenhänge zwischen der Fouriertransformation und der Ableitung, die wir in späteren Beweisen noch benötigen werden.

Satz 1.1.3

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und sei $g = \frac{\delta f}{\delta x} \in L^1(\mathbb{R})$ die starke Ableitung von f in der L^1 -Norm, d.h.

$$\left\| \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} - g(\cdot) \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| dx \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Dann gilt:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta x} \right)^\wedge(t) = it \hat{f}(t).$$

Beweis.

Betrachte

$$\psi_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x).$$

Nach Voraussetzung gilt $\|\psi_h\|_1 \rightarrow 0, h \rightarrow 0$. Außerdem können wir aus

$$|\hat{\psi}_h(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \psi_h(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ixt}| |\psi_h(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi_h(x)| dx = \|\psi_h\|_1 \rightarrow 0$$

folgern, dass

$$\|\hat{\psi}_h\|_\infty \leq \|\psi_h\|_1 \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Des Weiteren gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_h &= \frac{(f(\cdot + h) - f(\cdot))^\wedge}{h} - \hat{g}(\cdot) \\ &= \frac{e^{iht} \hat{f}(t) - e^{i0t} \hat{f}(t)}{h} - \hat{g}(t) \\ &= \frac{e^{iht} - 1}{h} \hat{f}(t) - \hat{g}(t) \\ &= \frac{1}{h} \left(\frac{iht}{1!} + \frac{(iht)^2}{2!} + \frac{(iht)^3}{3!} + \dots \right) \hat{f}(t) - \hat{g}(t) \\ &= \left(it + \frac{(it)^2 h}{2!} + \frac{(it)^3 h^2}{3!} + \dots \right) \hat{f}(t) - \hat{g}(t) \rightarrow it \hat{f}(t) - \hat{g}(t), h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Es folgt insgesamt

$$|it \hat{f}(t) - \hat{g}(t)| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \|\hat{\psi}_h\|_\infty = 0.$$

Daraus folgt die Behauptung $it \hat{f}(t) = \hat{g}(t)$.

□

Satz 1.1.4

Es gelte $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $xf \in L^1(\mathbb{R})$. Dann ist \hat{f} differenzierbar nach t und es gilt:

$$\frac{\delta \hat{f}(t)}{\delta t} = (-ixf(x))^\wedge(t).$$

Insbesondere ist $\frac{\delta \hat{f}(t)}{\delta t}$ stetig.

Beweis.

Für h gilt

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}(t+h) - \hat{f}(t)}{h} &= \frac{(f(x)e^{-ixh})^\wedge(t) - \hat{f}(t)}{h} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} f(x) e^{-ixt} dx. \end{aligned}$$

Mit Satz 1.1.3 gilt

$$\frac{e^{-ixh} - 1}{h} f(x) e^{-ixt} \rightarrow -ixf(x)e^{-ixt},$$

punktweise fast überall für $|h| \rightarrow 0$. Es gilt die Ungleichung $|e^{-i\alpha} - 1| \leq |\alpha|$ für $\alpha \in \mathbb{R}$. Daher ist

$$\left| \frac{e^{-ixh} - 1}{h} f(x) e^{-ixt} \right| \leq |xf(x)|$$

die integrierbare Majorante. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue gilt:

$$\frac{\hat{f}(t+h) - \hat{f}(t)}{h} \rightarrow \int_{\mathbb{R}} (-ix)f(x)e^{-ixt} dx = (-ixf(x))^\wedge(t).$$

□

Definition 1.1.5 (Kern)

Sei $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit $\phi(0) = 1$ und $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \phi(x) = 0$, dann nennt man ϕ einen Kern.

Der wohl bekannteste Kern ist der Gauß-Kern:

$$\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Dieser liefert eine wichtige Eigenschaft der Standardnormalverteilung, auf welche wir später noch genauer eingehen.

Mit dieser Diskussion sind wir nun in der Lage, eine Reihe von wichtigen Beispielen in der Stochastik zu erörtern.

Beispiel 1.1.6 (Die charakteristischen Funktionen bekannter Verteilungen)

1. Die Standardnormalverteilung

Für den Fall $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ erhält man mit Hilfe von

$$\begin{aligned} I &:= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\ I^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}r^2} r d\phi dr = 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr = -2\pi [e^{\frac{1}{2}r^2}]_0^\infty = 2\pi \\ \Rightarrow I &= \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

und Substitution mit $z = x - it$ die charakteristische Funktion

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{iXt}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2 - 2ixt + (it)^2 - (it)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot I = e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Man sieht an dieser Stelle, dass die Normalverteilung auch bei der Fouriertransformation eine besondere Rolle spielt, da ihre Dichte eine Eigenfunktion bezüglich der Fouriertransformation ist, was wir im nachfolgenden Lemma noch beweisen werden. Das heißt also die Fouriertransformation ist ein Vielfaches des Kerns.

2. Die Normalverteilung:

Den Fall einer normalverteilten Zufallsvariable X mit den Parametern μ und σ^2 erhalten wir als leichte Folgerung aus dem ersten Beispiel. Zunächst gilt

$$X =_{\mathcal{L}} \sigma Z + \mu,$$

mit standardnormalverteilter Zufallsvariable Z . Also folgt

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \phi_{\sigma Z + \mu}(t) = \mathbb{E}(e^{it(\sigma Z + \mu)}) = \mathbb{E}(e^{it\sigma Z} e^{it\mu}) = e^{it\mu} \mathbb{E}(e^{it\sigma Z}) = e^{it\mu} \phi(\sigma t) \\ &= \exp(it\mu) \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2) = \exp(it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2). \end{aligned}$$

3. Binomialverteilung:

Eine binomialverteilte Zufallsvariable X ist ein sehr populärer Vertreter der diskreten Verteilungen. In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{iXt}] = \sum_{x=0}^n e^{ixt} \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (e^{it} p)^x (1-p)^{n-x} \\ &= (pe^{it} + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

4. Exponentialverteilung:

Die Exponentialverteilung ist ein wichtiger Vertreter einer nichtnegativen, stetig-verteilten Zufallsvariable X . In diesem Fall gilt

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{iXt}] = \int_0^\infty e^{ixt} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{(it-\lambda)x} dx = \lambda \left[\frac{1}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x} \right]_0^\infty \\ &= \lambda \left(-\frac{1}{it-\lambda} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.\end{aligned}$$

5. Poissonverteilung:

Als Grenzwert der Binomialverteilung ergibt sich die Poissonverteilung. Hier gilt

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{ixt} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

6. Gleichverteilung:

Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[-a, a]$, d.h. X besitzt die Dichte $f(x) = \frac{1}{2a} \cdot 1_{\{-a \leq x \leq a\}}(x)$. Dann gilt

$$\phi(t) = \int_{-a}^a e^{ixt} \frac{1}{2a} dx = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{it} e^{ixt} \right]_{-a}^a = \frac{e^{ita} - e^{-ita}}{it2a} = \frac{\sin(at)}{at}.$$

Lemma 1.1.7 Für den Gauß-Kern gilt:

$$\left(e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} \right)^\wedge(t) = (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\|t\|^2}.$$

Mithin ist der Gauß-Kern eine Eigenfunktion der Fouriertransformation.

Beweis.

Man betrachte die Differentialgleichung

$$y' = -xy \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Lösungen sind $y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ mit $C \in \mathbb{R}$. Also ist $\phi_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung der Differentialgleichung. Für ihre Fouriertransformierte gilt mit den Sätzen 1.1.3 und 1.1.4:

$$(\hat{\phi}_1)'(t) = (-ix\phi_1(x))^\wedge(t) = (i\phi_1')^\wedge(t) = i(\phi_1')^\wedge(t) = i \cdot it\hat{\phi}_1(t) = -t\hat{\phi}_1(t).$$

Somit ist $\hat{\phi}_1$ eine Lösung der Gleichung. Das heißt wiederum, dass $\hat{\phi}_1$ die Form

$$\hat{\phi}_1(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

besitzt. Es gilt $\hat{\phi}_1(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}\phi(0)$. Daher ist $C = \sqrt{2\pi}$ und $\hat{\phi}(t) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

□

Satz 1.1.8 (Satz von Riemann-Lebesgue)

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f . Dann gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_X(t) = 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_X(t) = 0$$

Beweis.

Sei g eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger. Dann gilt $g \in L^1(\mathbb{R})$ und $\frac{\delta g}{\delta x} \in L^1(\mathbb{R})$.

Es gilt

$$|\hat{g}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} g(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |e^{ixt}| |g(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx = \|g\|_1$$

und somit folgt mit Satz 1.1.3

$$\left\| \frac{\delta g}{\delta x} \right\|_1 \geq \left| \left(\frac{\delta g}{\delta x} \right)^\wedge(t) \right| = |it\hat{g}(t)| = |t| |\hat{g}(t)|.$$

Umformung liefert damit den Grenzwert

$$|\hat{g}(t)| \leq \frac{1}{|t|} \left\| \frac{\delta g}{\delta x} \right\|_1 \rightarrow 0 \text{ für } |t| \rightarrow \infty.$$

Aufgrund der Tatsache, dass stetig differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^1(\mathbb{R})$ liegen folgt $|\hat{g}(t)| \rightarrow 0$. Seien nun $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert eine stetig differenzierbare Funktion g mit kompaktem Träger, so dass $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Mit der charakteristischen Funktion ϕ der Dichte f folgt wie oben

$$|\phi(t) - \hat{g}(t)| \leq \|f - g\|_1 < \epsilon.$$

Daraus können wir folgern

$$|\phi(t)| \leq |\hat{g}(t)| + \epsilon \rightarrow \epsilon \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Deshalb ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup |\phi(t)| \leq \epsilon$$

und da $\epsilon > 0$ beliebig ist gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\phi(t)| = 0.$$

□

Damit haben wir das Randverhalten der Fouriertransformation untersucht. Weiter ergibt sich, dass die Verteilungen von Summen unabhängiger Zufallsvariablen, aufgrund der dafür nötigen Faltungen, schwer zu handhaben sind. Eine weitere wichtige Eigenschaft, die die charakteristische Funktion für Anwendungen in der Stochastik so nützlich macht ist, dass sie in gewisser Art und Weise es ermöglicht Summen von Zufallsvariablen in ein Produkt umzuwandeln.

Satz 1.1.9

Seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n \phi_{X_i}(t).$$

Beweis.

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) &= \mathbb{E} \left[e^{i(\sum_{j=1}^n X_j)t} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{\sum_{j=1}^n (iX_j t)} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n e^{(iX_j t)} \right] \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left[e^{(iX_j t)} \right]. \end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt verwendet, dass der Erwartungswert des Produktes unabhängiger Zufallsvariablen gleich dem Produkt der Erwartungswerte ist. □

Den Zusammenhang zwischen der charakteristischen Funktion einer Zufallsvariable X mit stetiger Lebesgue-Dichte f wollen wir mit einem Satz von Riemann beantworten. Dieser stellt ein klassisches Resultat aus der Analysis dar.

Satz 1.1.10 (Riemann-Inversion)

Sei $\phi_X \in L^1(\mathbb{R})$. Dann hat X eine stetige Dichte f und es gilt

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \phi_X(t) dt$$

Beweis.

□

In diesem Abschnitt aufgeführte Beispiele wie die Gleichverteilung, welche als Dichte einen Indikator besitzt und somit nicht stetig ist, lassen sich mit dieser Formel jedoch nicht rücktransformieren. Der Grund liegt in dem Fakt, dass die Dichte der Gleichverteilung als Indikator nicht stetig ist. Wir zeigen, dass die charakteristische Funktion für die Gleichverteilung nicht integrierbar ist und somit die Voraussetzungen für die Riemann-Inversion nicht erfüllt sind. Aus den zu Beginn dieses Abschnittes errechneten Beispielen entnehmen wir für die charakteristische Funktion einer gleichverteilten Zufallsvariable X die Gleichung $\phi_X(t) = \frac{\sin(at)}{at}$. Es gilt

$$\phi_X \in L^1(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |\phi_X(t)| dt < \infty.$$

Dies ist nicht erfüllt, da

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &\geq \int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_{\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\
&= \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{|x|} dx \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} [-\cos x]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

und somit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Also gilt $\phi_X \notin L^1(\mathbb{R})$.

□

Eine weitere wichtige Verteilung, welche sich nicht problemlos mit Hilfe von Riemann-Inversion rücktransformieren lässt, ist die Dirac-Verteilung. Diese wird aus dem Diracmaß abgeleitet.

Definition 1.1.11 (Diracmaß)

Sei (Ω, \mathcal{A}) messbarer Raum. Zu jedem Punkt $x \in \Omega$ wird ein zugehöriges Maß δ_x definiert, für das gilt

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Zufallsvariable X heißt Dirac-verteilt zum Punkt x ($X \sim \delta_x$), wenn sie die Verteilungsfunktion

$$F_X(a) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \leq a, \\ 0, & \text{falls } a < x \end{cases}$$

besitzt. Die Verteilung von X ist also genau das Diracmaß im Punkt x . Für die charakteristische Funktion der Dirac-Verteilung gilt

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} F(dx) = e^{ixt} = \cos(xt) + i \sin(xt).$$

Wegen

$$\int_{\mathbb{R}} |\cos(xt) + i \sin(xt)| dt = \int_{\mathbb{R}} 1 dt = \infty$$

ist ϕ nicht integrierbar und somit sind die Voraussetzungen für die Riemann-Inversion nicht erfüllt.

Satz 1.1.12 (Eindeutigkeit)

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen mit $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann haben X und Y dieselbe Verteilung.

Beweis.

□

Kapitel 2

Die Edgeworth-Expansion

In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang zwischen dem zentralen Grenzwertsatz und der Edgeworth-Expansion ausführen.

Definition 2.0.1 (Gittertyp-Verteilung)

Wir sagen, dass eine Zufallsvariable X eine Gitterverteilung besitzt, wenn mit Wahrscheinlichkeit 1 Werte in einer Menge der Form $\{a + kh \mid k \in \mathbb{Z}\}$ für feste $a, h \in \mathbb{R}$ angenommen werden.

Lemma 2.0.2 Sei $\mathbb{E}X^2 < \infty$ und $t \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $\epsilon > 0$, sodass

$$\phi(t) = 1 + it \int X d\mathbb{P} - \frac{t^2}{2} \int X^2 d\mathbb{P} + R_2(t),$$

wobei

$$|R_2(t)| \leq \frac{t^2}{2} \left[\delta \mathbb{E}X^2 + 2 \int_{\{|X| \geq \epsilon\}} X^2 d\mathbb{P} \right].$$

Definition 2.0.3 (Konvergenz in Verteilung)

Sei X_1, X_2, X_3, \dots eine Folge von Zufallsvariablen mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_1, F_2, F_3, \dots . Wir sagen, dass die Folge (X_n) in Verteilung gegen eine Zufallsvariable X mit Verteilung F konvergiert genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ an denen F stetig ist gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = F(t).$$

Nachdem wir in Erinnerung gerufen haben, um welche Art von Konvergenz es sich bei dem zentralen Grenzwertsatz handelt, kommen wir nun zu dem Hauptsatz dieses Abschnittes.

Satz 2.0.4 (Zentraler Grenzwertsatz)

Es sei X_1, X_2, X_3, \dots eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[X_1] = \mu$ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ derart, dass die folgende sogenannte Lindeberg-Bedingung erfüllt ist:

Für alle $\epsilon > 0$ sei:

$$L_n(\epsilon) := \frac{\sum_{j=1}^n \int_{\{|X_j - \mathbb{E}X_j| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}\}} (X_j - \mathbb{E}X_j)^2 d\mathbb{P}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2} \rightarrow 0.$$

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n \leq x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \mathbb{E}X_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}} \leq x\right) = \Phi(x).$$

Beweis.

Wir wollen den zentralen Grenzwertsatz mit Fourier-Techniken beweisen. Dazu untersuchen wir zunächst die Fouriertransformierten der ersten n standardisierten Summen und anschließend dessen Grenzverhalten für n gegen unendlich.

Wir setzen

$$\phi_n(t) := \mathbb{E}(e^{itS_n}).$$

Nach Annahme handelt es sich bei X_1, X_2, \dots, X_n um eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Somit ist auch jede Folge messbarer Transformationen $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Für unabhängige Zufallsvariablen ist der Erwartungswert des Produktes gleich dem Produkt der Erwartungswerte und wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \mathbb{E}(e^{itS_n}) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{it \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \mathbb{E}X_j)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n e^{it \frac{X_j - \mathbb{E}X_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}}\right) \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(e^{it \frac{X_j - \mathbb{E}X_j}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\begin{aligned} e^{\frac{-t^2}{2}} &= e^{\frac{n}{n} \frac{-t^2}{2}} \\ &= e^{n \left(-\frac{t^2}{n^2}\right)} \\ &= e^{\sum_{j=1}^n \left(-\frac{t^2}{n^2}\right)} \\ &= \prod_{j=1}^n e^{\left(-\frac{t^2}{n^2}\right)} \\ &= \prod_{j=1}^n e^{\left(\frac{-\sigma_j^2 t^2}{2n\sigma_j^2}\right)} \\ &= \prod_{j=1}^n \exp\left[\frac{-\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2}\right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Wir zeigen zunächst die folgende Aussage: Für komplexe Zahlen a_1, \dots, a_n und b_1, \dots, b_n gilt die Gleichung

$$\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} a_j (a_k - b_k) \prod_{j=k+1}^n b_j.$$

Wir beweisen die Aussage per Induktion.

Induktionsanfang: $n = 1$. Es gilt

$$a_1 - b_1 = (a_1 - b_1) \cdot 1 \cdot 1$$

Induktionsvoraussetzung: Die Aussage gilt für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n + 1$

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{n+1} a_j - \prod_{j=1}^{n+1} b_j &= a_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j - b_{n+1} \prod_{j=1}^n b_j \\ &= a_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j - b_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j + b_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j - b_{n+1} \prod_{j=1}^n b_j \\ &= \left(\prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j \right) b_{n+1} + a_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j - b_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} a_j (a_k - b_k) \prod_{j=k+1}^n b_j \right) b_{n+1} + a_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j - b_{n+1} \prod_{j=1}^n a_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} a_j (a_k - b_k) \prod_{j=k+1}^n b_j \right) b_{n+1} + (a_{n+1} - b_{n+1}) \prod_{j=1}^n a_j \cdot 1 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} a_j (a_k - b_k) \prod_{j=k+1}^{n+1} b_j \right) + (a_{n+1} - b_{n+1}) \prod_{j=1}^n a_j \prod_{n+1+1}^{n+1} b_j \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \prod_{j=1}^{k-1} a_j (a_k - b_k) \prod_{j=k+1}^{n+1} b_j \right). \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Nehmen wir zusätzlich an, dass die a'_n s und b'_n s betraglich kleiner als 1 sind, so erhalten wir mit der eben hergeleiteten Formel und der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} &\left| \prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} a_j (a_k - b_k) \prod_{j=k+1}^n b_j \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n (a_k - b_k) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j - b_j|. \end{aligned}$$

Wir haben bereits die Darstellung der charakteristischen Funktion mittels Sinus- und Kosinusfunktion in Proposition 1.1.2 hergeleitet. Daraus folgt unmittelbar $|\phi_n(t)| \leq 1$.

Offensichtlich ist zudem $e^{-\frac{t^2}{2}}$ betragslich kleiner 1. Wir setzen

$$a_j := \mathbb{E} \left(e^{it \frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}} \right)$$

$$b_j := \exp \left[\frac{-\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2} \right]$$

und erhalten mit den in (1) und (2) hergeleiteten Gleichungen

$$\begin{aligned} |\phi_n(t) - \exp[-t^2/2]| &= \left| \prod_{j=1}^n \mathbb{E} \left(e^{it \frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}} \right) - \prod_{j=1}^n \exp \left[\frac{-\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2} \right] \right| \\ &= \left| \prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |a_j - b_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left| \mathbb{E} \left(e^{it \frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}} \right) - e^{-\frac{\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2}} \right|. \end{aligned}$$

An dieser Stelle verwenden wir die Taylor-Entwicklung einer Fouriertransformierten aus Lemma 2.0.2 und beachten dazu, dass $X_j - \mathbb{E}[X_j]$ zentriert ist, d.h. $it \cdot \int Z d\mathbb{P} = it \cdot 0 = 0$. Zusammen mit der bekannten Reihenentwicklung $e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + R_2(x)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(e^{it \frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}}} \right) - e^{-\frac{\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2}} &= \left[1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2} + R_2^j(t) \right] - \left[1 - \frac{\sigma_j^2 t^2}{2 \sum_{k=1}^n \sigma_k^2} + \tilde{R}_2^j(t) \right] \\ &= R_2^j(t) - \tilde{R}_2^j(t). \end{aligned}$$

Daraus folgt also

$$|\phi_n(t) - \exp(-t^2/2)| \leq \sum_{j=1}^n |R_2^j(t) - \tilde{R}_2^j(t)|. \quad (3)$$

Wir setzen uns als Ziel, die punktweise Konvergenz der charakteristischen Funktion ϕ_n gegen die Funktion $\exp(t^2/2)$ für n gegen unendlich zu beweisen. Dazu ist zu zeigen, dass die aufsummierten Restterme in (3) gegen null konvergieren.

Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}} \right)^2 \right] &= \mathbb{E}[(X_j - \mathbb{E}[X_j])^2] \frac{1}{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2} \\ &= \frac{\sigma_j^2}{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}. \end{aligned}$$

Sei nun $\delta > 0$ beliebig vorgegeben. Mit Lemma 2.0.2 gibt es ein $\epsilon > 0$, das nur von δ

abhängt, sodass

$$|R_t^j(t)| \leq \frac{t^2}{2} \left[\delta \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_k \sigma_k^2}} \right)^2 \right] + 0 + 2 \int_{\{|X_j - \mathbb{E}X_j| \geq \epsilon \sqrt{\sum_k \sigma_k^2}\}} \left(\frac{X_j - \mathbb{E}[X_j]}{\sqrt{\sum_k \sigma_k^2}} \right)^2 d\mathbb{P} \right]$$

$$= \frac{t^2}{2} \left[\delta \frac{\sigma_j^2}{\sum_k \sigma_k^2} + 2 \int_{\{|X_j - \mathbb{E}X_j| \geq \epsilon \sqrt{\sum_k \sigma_k^2}\}} (X_j - \mathbb{E}X_j)^2 d\mathbb{P} / (\sum_k \sigma_k^2) \right].$$

Mit der Lindeberg-Bedingung folgt:

$$\sum_{j=1}^n |R_2^j(t)| \leq \frac{t^2}{2} [\delta + 2L_n(\epsilon)] \rightarrow \frac{\delta t^2}{2}.$$

Da $\delta > 0$ beliebig gewählt war, ist dies bereits die gewünschte Behauptung für die erste Restsumme. Die zweite Restsumme \tilde{R}_2^j ist aber ein Spezialfall der ersten, wenn man $X_j = \sigma_j Y_j$ und $Y_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$ setzt.

□

Die Folge der Zufallsvariablen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also in Verteilung gegen die einer Standardnormalverteilung. Eine Aussage darüber, mit welcher Geschwindigkeit dies stattfindet, wird in diesem Theorem nicht getroffen. Mit Hilfe der Edgeworth-Expansion wollen wir diesen Zusammenhang weiter verstehen. Wir unterscheiden dabei die folgenden drei Fälle:

1. Fall: Die charakteristische Funktion ϕ_X erfüllt die sogenannte Cramér-Bedingung, d.h.

$$\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\phi_X(\xi)| < 1. \quad (C)$$

In diesem Fall besitzt die Verteilungsfunktion F_n von S_n die Darstellung

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{j=1}^s \frac{p_j(x)}{n^{j/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{s+1}{2}}}\right), \quad s \geq 1,$$

wobei p_j Polynome sind.

2. Fall: Bedingung (C) ist nicht erfüllt und die Verteilung von X ist nicht vom Gittertyp. In diesem Fall finden wir die Darstellung

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\alpha_3}{6\sigma^3 \sqrt{2\pi n}} (1 - x^2) e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

wobei α_3 das dritte Moment von X_i darstellt.

3. Fall: $F_n(x)$ ist eine Gittertyp Verteilungsfunktion. Dieser Fall wird zum Ende des Abschnittes besprochen.

Im 1. und 2. Fall sehen wir schon jetzt, dass die Edgeworth-Expansion eine Brücke zum zentralen Grenzsatz baut: Wir wissen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable darstellt und für ein endliches n erhalten wir mit Edgeworth die Darstellung

$$F_n(x) = \Phi(x) + \epsilon_n(x) \quad \text{mit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n(x) = 0.$$

Offensichtlich entspricht dies also der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung plus einen Fehlerterm ϵ , der im Limes verschwindet. Wir können den Ausdruck $\epsilon_n(x)$ auch als den Abstand von $F_n(x)$ zu $\Phi(x)$ ansehen.

2.1 Der erste Fall

Im Folgenden beweisen wir den ersten der drei möglichen Fälle. Hierzu benötigen wir eine weitere Darstellung der charakteristischen Funktion, welche sich aus dem Zusammenhang mit der kumulantenenerzeugenden Funktion ergibt.

Definition 2.1.1 (kumulantenenerzeugende Funktion)

Die kumulantenenerzeugende Funktion ψ einer Zufallsvariable X ist definiert als der Logarithmus der charakteristischen Funktion:

$$\psi_X(t) = \log \phi_X(t).$$

Die Kumulanten k_j mit $j \in \mathbb{N}$ sind definiert als die eindeutig bestimmten Faktoren der Reihenentwicklung

$$\psi_X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j(it)^j}{j!}.$$

Unser erstes Ziel besteht darin, dass wir die Kumulanten im Fall einer Summe von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ bestimmen möchten. Aus der Definition folgt unmittelbar

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j(it)^j}{j!}\right) = \exp(\log(\phi_X(t))) = \phi_X(t)$$

oder in ausgeschriebener Form

$$\phi_X(t) = \exp\left(k_1 it + \frac{1}{2!} k_2 (it)^2 + \dots + \frac{1}{j!} k_j (it)^j + \dots\right). \quad (4)$$

Auf der anderen Seite gilt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(itX)^j}{j!}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{(it)^j X^j}{j!}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!} \\ &= 1 + \mathbb{E}[X]it + \frac{1}{2} \mathbb{E}[X^2](it)^2 + \dots + \frac{1}{j!} \mathbb{E}[X^j](it)^j + \dots \end{aligned}$$

Wir erhalten somit als weitere Darstellung

$$\phi_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!} = 1 + \mathbb{E}[X]it + \frac{1}{2} \mathbb{E}[X^2](it)^2 + \dots + \frac{1}{j!} \mathbb{E}[X^j](it)^j + \dots$$

und zusammen mit Definition 2.1.1 durch Einsetzen, dass $\psi_X(t) = \log(\phi_X(t)) = \log(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!})$.

Die Taylorentwicklung des Logarithmus an der Stelle 1 ist bekanntlich

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n.$$

Durch Einsetzen erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} k_j (it)^j &= \psi_X(t) \\ &= \log \left(\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!} \right) \\ &= \log \left(1 + \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!}}_{=:x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!} \right)^n. \end{aligned}$$

Daraus folgt insgesamt die Gleichung

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} k_j (it)^j = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}[X^j] \frac{(it)^j}{j!} \right)^n. \quad (5)$$

Aus (5) lassen sich nun die Kumulanten durch einen Koeffizientenvergleich ableiten:

Wir erhalten den Leitkoeffizienten $(it)^1$ auf der rechten Seite genau dann wenn $j = 1 = n$ und auf der linken Seite wenn $j = 1$. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{1!} k_1 &= \frac{(-1)^{1+1}}{1} \left(\mathbb{E}[X^1] \frac{1}{1!} \right)^1 = \mathbb{E}[X^1] \\ &\Rightarrow k_1 = \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

Mit dieser Vorgehensweise erhalten wir für die anderen Kumulanten

$$\begin{aligned} k_2 &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \text{Var}(X) \\ k_3 &= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X] + 2\mathbb{E}[X]^3 = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^3 \\ k_4 &= \mathbb{E}[X^4] - 4\mathbb{E}[X^3]\mathbb{E}[X] - 3\mathbb{E}[X^2]^2 + 12\mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[X]^2 - 6\mathbb{E}[X]^4 = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^4 - 3(\text{Var}(X))^2. \end{aligned}$$

Besonders interessant sind hierbei die ersten beiden Koeffizienten, da $k_1 = \mu$ dem Erwartungswert und $k_2 = \sigma^2$ der Varianz entspricht.

Als nächstes betrachten wir die charakteristische Funktion ϕ_n der Folge der Zufallsvariablen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, um eine Brücke zum zentralen Grenzwertsatz zu bauen. Dabei hatten

wir S_n als Summe unabhängiger Zufallsvariablen definiert. Da X_1, X_2, \dots, X_n voneinander unabhängig sind, ist der Erwartungswert des Produktes jeder messbaren Transformation gleich dem Produkt des Erwartungswertes, dass heißt

$$\mathbb{E}[f_1(X_1) \cdot f_2(X_2) \cdots f_n(X_n)] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X_i)].$$

Mit dieser Argumentation im Hinterkopf erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi_{S_n}(t) &= \mathbb{E} \left[e^{itS_n} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{it \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^n e^{it \frac{X_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{it/\sqrt{n} \frac{X_1 - \mu}{\sigma}} \right] \mathbb{E} \left[e^{it/\sqrt{n} \frac{X_2 - \mu}{\sigma}} \right] \cdots \mathbb{E} \left[e^{it/\sqrt{n} \frac{X_n - \mu}{\sigma}} \right] \\ &= \left(\mathbb{E} \left[e^{it/\sqrt{n} \frac{X_1 - \mu}{\sigma}} \right] \right)^n = \left(\mathbb{E} \left[e^{it/\sqrt{n} Y} \right] \right)^n \\ &= (\phi_Y(t/\sqrt{n}))^n. \end{aligned}$$

Hierbei ist $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Einfügen in (4) liefert

$$\begin{aligned} \phi_Y(t/\sqrt{n}) &= \exp \left(k_1 \frac{it}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2!} k_2 \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^2 + \dots + \frac{1}{j!} k_j \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right)^j + \dots \right) \\ &= \exp \left(k_1 \frac{it}{\sqrt{n}} + \frac{k_2}{2!} \frac{(it)^2}{n} + \dots + \frac{k_j}{j!} \frac{(it)^j}{n^{j/2}} + \dots \right) \end{aligned}$$

und somit folgt

$$\phi_{S_n}(t) = \left(e^{k_1 \frac{it}{\sqrt{n}}} e^{\frac{k_2}{2!} \frac{(it)^2}{n}} \dots e^{\frac{k_j}{j!} \frac{(it)^j}{n^{j/2}}} \dots \right)^n.$$

Betrachten wir nun eine standardnormalverteilte Zufallsvariable $Y \sim N(0, 1)$, also gilt $k_1 = \mathbb{E}[Y] = 0$ und $k_2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = 1$, so erhalten wir für die Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \phi_{S_n}(t) &= \exp \left(\frac{-t^2}{2} + n^{-1/2} \frac{k_3(it)^3}{3!} + \dots + n^{\frac{-(j-2)}{2}} \frac{k_j(it)^j}{j!} + \dots \right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{n^{-1/2} \frac{k_3(it)^3}{3!} + \dots + n^{\frac{-(j-2)}{2}} \frac{k_j(it)^j}{j!} + \dots} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(n^{-1/2} \frac{k_3(it)^3}{3!} + \dots + n^{\frac{-(j-2)}{2}} \frac{k_j(it)^j}{j!} + \dots \right)^k \frac{1}{k!} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \left(n^{-1/2} \frac{k_3(it)^3}{3!} \right) + \left(n^{-1} \frac{k_4(it)^4}{4!} + n^{-1} \left(\frac{k_3(it)^3}{3!} \right)^2 \frac{1}{2!} \right) + \dots \right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \left(n^{-1/2} \frac{k_3(it)^3}{6} \right) + n^{-1} \left(\frac{k_4(it)^4}{24} + \frac{k_3^2(it)^6}{72} \right) + \dots \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Sei $j \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir definieren uns das Polynom r_j über die in (6) gegebenen Summanden (im Treppmuster angeordnet) und erhalten

$$\begin{aligned}
r_1(u) &:= \frac{1}{6}k_3u^3 \\
r_2(u) &:= \frac{1}{24}k_4u^4 + \frac{1}{72}k_3^2u^6 \\
&\vdots \\
r_j(u) &= \sum \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!} \right)^{c_i} u^s \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Summation bei r_j ist dabei über alle natürlichen Partitionen von j , sodass $\sum_{i=1}^j ic_i = j$ und $l_i := i + 2$ und $s := \sum_{i=1}^j c_i l_i$. Eine genaue Erläuterung hierzu findet sich in Kapitel 5 im Abschnitt 5.0.3. Dort werden diese in R implementiert.

Hierbei lässt sich leicht erkennen, dass es sich bei der Funktion r_j um ein Polynom vom Grad $3 \cdot j$ handelt.

Nun lässt sich (6) umschreiben in

$$\begin{aligned}
\phi_{S_n}(t) &= e^{-t^2/2} (1 + n^{-1/2}r_1(it) + n^{-1}r_2(it) + \dots + n^{-j/2}r_j(it) + \dots) \\
&= e^{-t^2/2} + n^{-1/2}r_1(it)e^{-t^2/2} + n^{-1}r_2(it)e^{-t^2/2} + \dots + n^{-j/2}r_j(it)e^{-t^2/2} + \dots \quad (7)
\end{aligned}$$

Sei $F(n, x)$ die Verteilungsfunktion von S_n . Wir wollen die charakteristische Funktion

$$\phi_{S_n}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} F(n, dx)$$

verwenden, um die Verteilungsfunktion $F(n, x)$ zu approximieren. In Beispiel 1.1.6 haben wir bereits die charakteristische Funktion der Standardnormalverteilung, als Eigenfunktion bezüglich des Fourier-Operators kennengelernt:

$$e^{-t^2/2} = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\Phi(x). \quad (8)$$

Durch Anwendung der Inversen Fourier-Stieltjes Transformation auf die einzelnen Summanden lässt sich für das charakteristische Polynom aus (7) die Verteilung

$$F(n, x) = \Phi(x) + n^{-1/2}R_1(x) + n^{-1}R_2(x) + \dots + n^{-j/2}R_j(x) + \dots \quad (9)$$

bestimmen. Hierbei ist es sehr wichtig zu erwähnen, dass genau an dieser Stelle die Cramér-Bedingung an die Verteilung von S_n dringend vorausgesetzt werden muss, damit die Annahmen an die klassische Fourier-Inversion überhaupt erfüllt sind.

In Gleichung (9) können wir den Zusammenhang zum zentralen Grenzwertsatz bereits

erkennen. Wir haben die Verteilung von S_n in Form der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gegeben, plus Terme die verschwinden wenn n gegen unendlich geht.

Hierbei definiert $R_j(x)$ eine Funktion, deren Fourier-Stieltjes Transformation $r_j(it)e^{-t^2/2}$ entspricht. Es gilt also für die charakteristische Funktion

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixt} dR_j(x) = r_j(it)e^{-t^2/2}. \quad (10)$$

Unser nächstes Ziel besteht darin die $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ zu bestimmen. Wir suchen also für alle beliebigen $j \in \mathbb{N}$ eine Funktion, welche die Gleichung (10) löst. Bevor wir uns mit einer Lösung dieser Gleichung befassen, machen wir an dieser Stelle folgende Beobachtung. Es sei $f(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ ein beliebiges Polynom mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wir haben mit f also eine Funktion gegeben, die eine Zahl auf eine Zahl abbildet. Dies lässt sich leicht zu einem Operator modifizieren, bei dem eine Funktion, nennen wir sie g , auf eine andere Funktion \tilde{g} abgebildet wird. Wir erhalten also die Form $f_M(g) = \tilde{g}$. Eine Möglichkeit dies zu erreichen besteht darin, dass wir unser modifiziertes Polynom f_M definieren durch

$$f_M(g) = a_1(-1)^1 \frac{\partial g}{\partial x} + a_2(-1)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dots + a_m(-1)^m \frac{\partial^m g}{\partial x^m}.$$

Diese spezielle Modifizierung mit Hilfe von Ableitungen schreiben wir von nun an in der Kurzform

$$f(-D)(g).$$

$f(-D)(g)$ stellt nun eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} dar. Wollen wir unsere neu erhaltene Funktion $f(-D)(g)$ an einer beliebigen Stelle s auswerten, so berechnen wir

$$f(-D)(g)(s) = a_1(-1)^1 \frac{\partial g}{\partial x}(s) + a_2(-1)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s) + \dots + a_m(-1)^m \frac{\partial^m g}{\partial x^m}(s).$$

Kommen wir nun zurück zu der zu lösenden Gleichung (10). Es wird sich herausstellen, dass für $j \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$r_j(-D)(\Phi) \quad (11)$$

die Gleichung aus (10) löst.

In Kapitel eins wurde bewiesen, dass die Dichte der Normalverteilung eine Eigenfunktion bezüglich des Fourier-Operators ist. Zusammen mit Satz 1.1.4 erhält man für die Ableitungen der charakteristischen Funktionen von $\Phi^{(j)}(x) = (d/dx)^j \Phi(x)$ folgendes:

$$\begin{aligned} (-it)^1 e^{-t^2/2} &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\Phi^{(1)}(x) \\ (-it)^2 e^{-t^2/2} &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\Phi^{(2)}(x) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (-it)^j e^{-t^2/2} &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\Phi^{(j)}(x). \end{aligned}$$

An dieser Stelle sieht man die Ähnlichkeit zu unserer zu lösenden Gleichung $r_j(it)e^{-\frac{t^2}{2}} = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} dR_j(x)$. Wir berechnen die Inverse-Fouriertransformation von $r_j(-D)(\Phi)$ aus (11) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d(r_j(-D)(\Phi)(x)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\left(\sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!}\right)^{c_i} \frac{\partial^s \Phi}{\partial x}(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!}\right)^{c_i} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\left(\frac{\partial^s \Phi}{\partial x}(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!}\right)^{c_i} (-1)^s (-it)^s e^{-\frac{t^2}{2}} \\
&= \sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!}\right)^{c_i} (it)^{j+3-i} e^{-\frac{t^2}{2}} \\
&= r_j(it) e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Lösung für (11) gefunden. Es gilt also

$$R_j(x) = r_j(-D)(\Phi)(x).$$

Zusammenfassend folgt mit (9) die Darstellung

$$\begin{aligned}
F(n, x) &= \Phi(x) + n^{1/2} r_1(-D)(\Phi)(x) + n^{-1} r_2(-D)(\Phi)(x) + \\
&\quad \dots + n^{-j/2} r_j(-D)(\Phi)(x) + \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

Definition 2.1.2 (Chebyshev-Hermite Polynome)

Wir definieren für $k \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2/2}.$$

Die Menge der Polynome (H_k) bezeichnen wir als Chebyshev-Hermite Polynome.

Nach obiger Definition erhalten wir beispielsweise für die ersten vier Chebyshev-Hermite Polynome

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= e^{x^2/2} e^{-x^2/2} = 1, \\
H_1(x) &= (-1) e^{x^2/2} e^{-x^2/2} (-x) = x, \\
H_2(x) &= 1 e^{x^2/2} [e^{-x^2/2} (-1) + e^{-x^2/2} x^2] = x^2 - 1, \\
H_3(x) &= (-1) e^{x^2/2} [e^{-x^2/2} x + e^{-x^2/2} - (x)^3 + e^{-x^2/2} 2x] = x^3 - 3x.
\end{aligned}$$

Wir wollen die Gleichung

$$\Phi^{(j)}(x) = -H_{j-1}(x)\Phi(x) \tag{13}$$

beweisen.

Induktionsanfang: $j=1$.

Es gilt

$$\begin{aligned} -\Phi^{(1)}(x) &= 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= -H_0 \Phi^{(1)}(x). \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\Phi^{(n)}(x) = -H_{n-1}(x)\Phi^{(1)}(x)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$.

Es gilt mit der Induktionsvoraussetzung und der Produktregel der Differentiation

$$\begin{aligned} \Phi^{(n+1)}(x) &= \frac{\partial \Phi^{(n)}}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(-H_{n-1} \cdot \Phi^{(1)})}{\partial x}(x) \\ &= -\Phi^{(1)}(x) \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x}(x) + x\Phi^{(1)}(x)H_{n-1}(x) \\ &= \Phi^{(1)}(x) \left(xH_{n-1}(x) - \frac{H_{n-1}(x)}{\partial x} \right) \\ &= \Phi^{(1)}(x) (xH_{n-1}(x) - (n-1)H_{n-2}(x)) \\ &= \Phi^{(1)}(x)H_n(x). \end{aligned}$$

Dabei wurden im letzten und vorletzten Schritt die beiden Eigenschaften der Chebyshev-Hermite Polynome verwendet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_n}{\partial x}(x) &= nH_{n-1}(x) \\ H_n(x) &= xH_{n-1}(x) - (n-1)H_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Mit Gleichung (13) und der expliziten Formel

$$r_j(-D) = \sum \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!} \right)^{c_i} (-1)^s D^s$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= -\frac{1}{6}k_3(x^2 - 1)\Phi^{(1)}(x) = -\frac{1}{6}k_3H_2(x)\Phi^{(1)}(x) \\
R_2(x) &= -x \left(\frac{1}{24}k_4(x^2 - 3) + \frac{1}{72}k_3^2(x^4 - 10x^2 + 15) \right) \Phi^{(1)}(x) \\
&= - \left(\frac{1}{24}k_4H_3(x) + \frac{1}{72}k_3^2H_5(x) \right) \Phi^{(1)}(x) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
R_j(x) &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!} \right)^{c_i} (-1)^s H_{s-1}(x) \right)}_{:=p_j(x)} \Phi^{(1)}(x) \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot
\end{aligned} \tag{14}$$

Zur Vereinfachung definieren wir uns den Faktor vor dem $\Phi^{(1)}(x)$ als Polynom p_j und erhalten damit

$$R_j(x) = p_j(x)\Phi(x).$$

Schließlich können wir (12) umschreiben und erhalten die Edgeworth-Expansion der Verteilung $F(n, x)$:

$$F(n, x) = \Phi(x) + n^{-1/2}p_1(x)\Phi(x) + n^{-1}p_2(x)\Phi(x) \dots + n^{-j/2}p_j(x)\Phi(x) + \dots$$

2.2 Der zweite Fall

Der zweite Fall erfüllt nicht die Cramér-Bedingung und die Verteilung ist nicht vom Gittertyp. Da mit dem Satz von Riemann-Lebesgue die charakteristische Funktion die Cramér-Bedingung erfüllt, wenn die Verteilung eine Dichte besitzt, handelt es sich bei diesem Fall um Verteilungen mit diskretem und stetigem Anteil. Bevor wir in der Lage sind, die zugehörige Expansion zu beweisen, benötigen wir zwei Hilfssätze aus der Analysis.

Satz 2.2.1 Seien A, T , und $\epsilon > 0$ Konstanten, $F(x)$ eine nicht fallende Funktion und $G(x)$ eine Funktion von beschränkter Variation. Wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $F(-\infty) = G(-\infty), \quad F(+\infty) = G(+\infty),$
2. $\int |F(x) - G(x)|dx < \infty,$
3. $G'(x)$ existiert für alle x und $|G'(x)| \leq A,$
4. $\int_{-T}^T \left| \frac{f(t) - g(t)}{t} \right| dt = \epsilon,$

dann gibt es zu jedem $k > 1$ eine endliche positive Zahl $c(k)$ die nur von k abhängt, sodass

$$|F(x) - G(x)| \leq k \frac{\epsilon}{2\pi} + c(k) \frac{A}{T}.$$

Satz 2.2.2 Wenn die X_i in S_n endliche Momente der Ordnung s mit $s \geq 3$ besitzen, dann gilt für $|t| \leq T_{sn} = \frac{\sqrt{n}}{8s\rho_s^{3/s}}$ die Ungleichung

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-3} r_j(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \right) \right| \leq \frac{c_1(s)}{T_{sn}^{s-2}} (|t|^s + |t|^{3(s-2)} e^{-\frac{t^2}{4}}),$$

wobei $c_1(s)$ nur von s abhängt. Des Weiteren wird die Ungleichung

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \left(1 + \sum_{j=1}^{s-3} r_j(it) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^j \right) \right| \leq \frac{\delta(n)}{n^{\frac{s-2}{2}}} (|t|^s + |t|^{3(s-1)} e^{-\frac{t^2}{4}}) \quad (15)$$

erfüllt, wobei $\delta(n)$ nur von n abhängt und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = 0.$$

Nun sind wir in der Lage den eigentlichen Hauptsatz dieses Abschnittes zu beweisen.

Lemma 2.2.3 (Hauptsatz)

Wenn die unabhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n identisch verteilt sind und deren Verteilung nicht vom Gittertyp ist und ein endliches drittes Moment besitzen, dann ist

$$F_n(x) = \Phi(x) + \phi(x) \frac{p_1(x)}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gleichmäßig in x , mit $p_1(x) = \frac{k_3}{6}(1 - x^2)$.

Beweis.

Wir setzen $s = 3$ bei Satz 2.2.2 in die Formel (15) ein. Daraus folgt

$$\left| f_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} - \frac{r_1(it)}{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq \frac{\delta(n)}{\sqrt{n}} (|t|^3 + |t|^6) e^{-\frac{t^2}{4}}. \quad (16)$$

Die charakteristische Funktion von

$$R_1(-\Phi) = -\frac{k_3}{6} \Phi^{(3)}(x) = \frac{k_3}{6\sqrt{2\pi}} (1 - x^2) e^{-t^2/2}$$

lautet

$$\frac{k_3}{6} (it)^3 e^{-t^2/2} = r_1(it) 3e^{-t^2/2}.$$

Wir wenden Satz 2.2.1 an mit

$$F(x) = F_n(x), \quad G(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{n}} R_1(-\Phi)$$

$$A = \max |G'(x)| < +\infty, \quad T = \lambda(n) \sqrt{n}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $T \geq T_{3n}$ und spalten dann das Integral auf:

$$\epsilon = \int_{-T}^T \left| \frac{f_n(t) - g(t)}{t} \right| dt = \int_{-T}^{-T_{3n}} + \int_{-T_{3n}}^{T_{3n}} + \int_{T_{3n}}^T.$$

Aus (16) bekommen wir

$$\int_{-T_{3n}}^{T_{3n}} \left| \frac{f_n(t) - g(t)}{t} \right| dt \leq \frac{\delta(n)}{\sqrt{n}} \int (t^2 + |t|^5) e^{-t^2/4} dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

und erhalten

$$\int_{T_{3n}}^T \left| \frac{f_n(t) - g(t)}{t} \right| dt \leq \int_{T_{3n}}^T \left| f\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|^n \frac{dt}{t} + \int_{T_{3n}}^T |g(t)| \frac{dt}{t}.$$

mit $B_n = \sqrt{n\beta_2} = \sqrt{n\sigma}$.

Allerdings gilt

$$\int_{T_{3n}}^T |g(t)| \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}T_{3n}} \int_{T_{3n}}^T e^{-t^2/2} \left(1 + \frac{k_3|t|^3}{6\sqrt{n}}\right) dt = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

und mit dem vorherigen Satz erhalten wir

$$\int_{T_{3n}}^T \left| f\left(\frac{t}{B_n}\right) \right|^n \frac{dt}{t} = \int_w^{\lambda(n)} |f(t)|^n \frac{dt}{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Wir können das Integral $\int_{-T}^{-T_{3n}}$ auf die selbe Weise abschätzen. Somit ist $\epsilon = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ und mit anwenden von Satz 2.2.1 ergibt sich die Ungleichung

$$\left| f_n(t) - \Phi(x) - \frac{R_1(-\Phi)}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{a}{2\pi}\epsilon + \frac{c(a)A}{\lambda(n)\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

welche den Satz beweist.

□

2.3 Der dritte Fall

Der dritte Fall behandelt den sogenannten Gittertyp. Hierbei werden also diskrete Verteilungen genauer in Betracht gezogen.

Satz 2.3.1 (Gittertyp Edgeworth-Expansion)

Seien X_1, X_2, \dots, X_n unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichen dritten Moment. Dann gilt

$$F(x, n) = \Phi(x) + \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{P_1(x)}{\sqrt{n}} + \frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}} \right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

gleichmäßig in x , mit

$$P_1(x) = -\frac{k_3}{6}(x^2 - 1),$$

$$Q_1(x) = \frac{h}{\sigma} Q\left(\frac{(x - \frac{a\sqrt{n}}{\sigma})\sqrt{n}}{h/\sigma}\right).$$

Einen möglichen Ansatz die drei diskutierten Fälle in einer Theorie zu vereinen, wird im letzten Kapitel angegeben, bei der die von Herr Kaftan erarbeitete Fourier-Inversion angewendet wird.

Kapitel 3

Simulationen

3.1 Eine Simulationsstudie zum zentralen Grenzwertsatz

Zunächst wollen wir die Konvergenzgeschwindigkeit der Bernoulli-Verteilung gegen die Normalverteilung untersuchen. Dies ist eine diskrete Zufallsvariable X , die ihre Werte in der Menge $\{0, 1\}$ annimmt. Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt in Verteilung

$$S_n := \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)}{\sqrt{\sigma^2 n}} \sim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1).$$

Für eine Bernoulli-Variable mit

$$\mathbb{P}[X = 1] = p = 1 - \mathbb{P}[X = 0]$$

gilt

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

und

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) - p^2 = p - p^2.$$

Also haben wir im Bernoulli Fall für die standardisierten Partialsummen

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - p)}{\sqrt{(p - p^2) \sqrt{n}}}.$$

Betrachten wir zunächst den Fall $n = 2$. In diesem Fall kann die Zufallsvariable S_2 drei Werte annehmen:

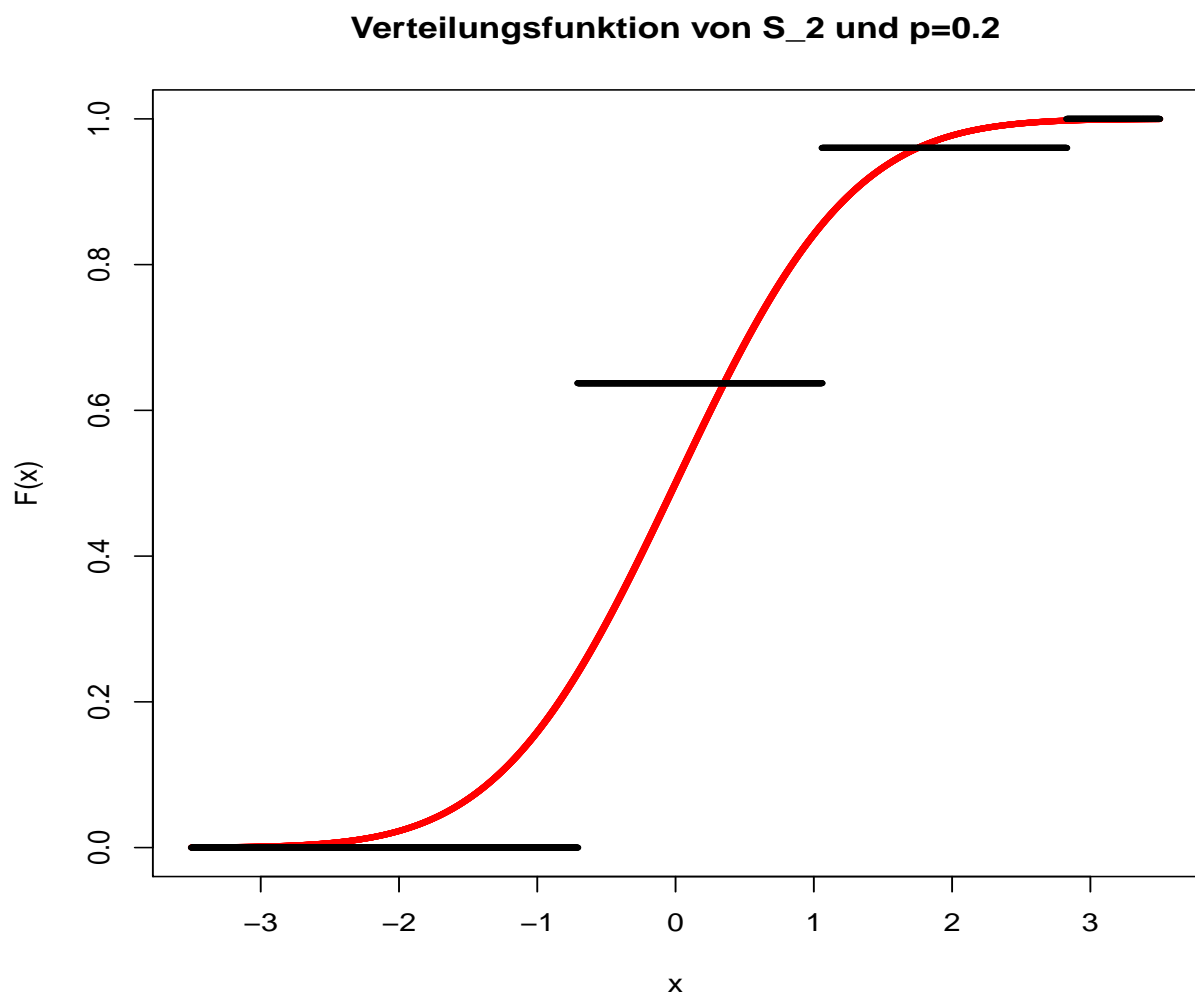
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[S_2 = -\frac{p}{\sqrt{(p - p^2) \sqrt{2}}}] &= \mathbb{P}[X_1 = 0, X_2 = 0] = \mathbb{P}[X_1 = 0] \mathbb{P}[X_2 = 0] = (1 - p)^2 \\ \mathbb{P}[S_2 = \frac{(1 - p)}{\sqrt{(p - p^2) \sqrt{2}}} + \frac{0 - p}{p \sqrt{2}}] &= 2 \cdot \mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 0] = 2(p(1 - p)) \\ \mathbb{P}[S_2 = 2 \frac{(1 - p)}{\sqrt{(p - p^2) \sqrt{2}}}] &= \mathbb{P}[X_1 = 1, X_2 = 1] = p^2. \end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion von S_2 ist somit

$$F_{S_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < -\frac{p}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}}, \\ (1-p)^2, & \text{falls } -\frac{p}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}} \leq x < \frac{(1-p)}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}} + \frac{-p}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}}, \\ (1-p)^2 + 2(p(1-p)), & \text{falls } \frac{(1-p)}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}} + \frac{-p}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}} \leq x < 2\frac{(1-p)}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}}, \\ 1, & \text{falls } x \geq 2\frac{(1-p)}{\sqrt{(p-p^2)}\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Nehmen wir die Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.2$, erhalten wir für einen Plot der Verteilungsfunktion von S_2 (schwarz) und der Verteilungsfunktion von Φ :

Grafik 1



Wollen wir den Abstand von F_{S_2} und Φ untersuchen, bietet sich die aus der Analysis bekannte Metrik

$$\int (\Phi(x) - F_{S_2}(x))^2 dx$$

an. Mit einem numerischen Programm erhalten wir für $p = 0.2$ den Wert

$$M(\Phi, F_{S_2}) := \int (\Phi(x) - F_{S_2}(x))^2 dx \approx 0.01330647. \quad (1)$$

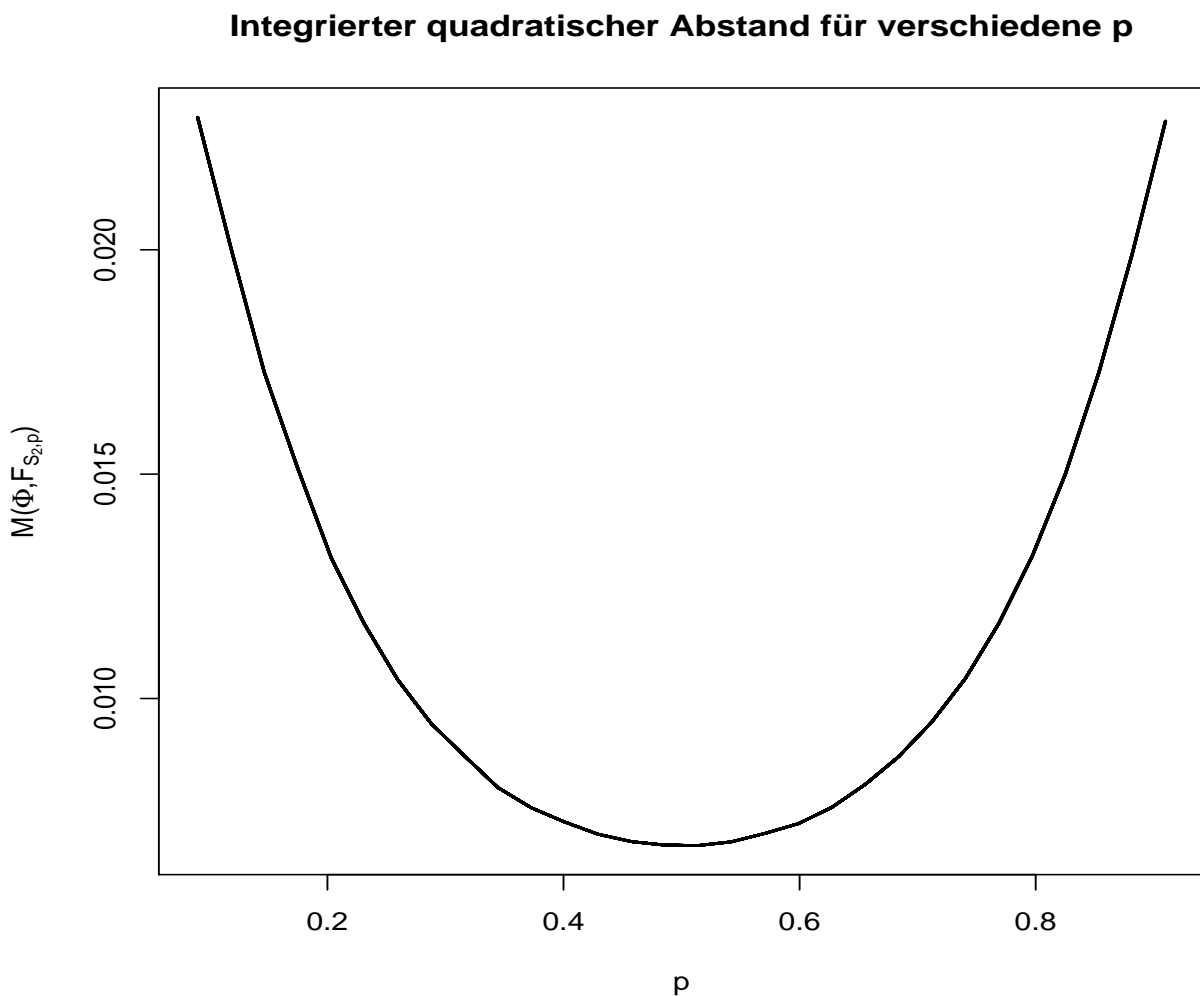
Bevor wir größere Werte für n verwenden, betrachten wir den Abstand zur Normalverteilung in (1) für verschiedene Werte von p . $F_{S_{n,p}}$ sei die Verteilungsfunktion für n standardisierte Bernoulli-Variablen mit Parameter p . Es ergibt sich mit einem numerischen Programm

$$\begin{aligned} M(\Phi, F_{S_{2,0.1}}) &= \int (\Phi(x) - F_{S_{2,0.1}}(x))^2 dx \approx 0.02174401 \\ M(\Phi, F_{S_{2,0.5}}) &= \int (\Phi(x) - F_{S_{2,0.5}}(x))^2 dx \approx 0.006728192 \\ M(\Phi, F_{S_{2,0.99}}) &= \int (\Phi(x) - F_{S_{2,0.99}}(x))^2 dx \approx 0.03207146. \end{aligned}$$

Hier lässt sich schon erkennen, dass die Annäherung der Verteilung von $S_{2,p}$ an die Normalverteilung auch von dem Parameter p abhängt. Je symmetrischer die Variable X_1 verteilt ist (also p nah bei 0.5), desto besser funktioniert die Annäherung schon für ein endliches n .

Der nächste Plot bestätigt diese Beobachtung.

Grafik 2



An dieser Stelle lässt sich klar erkennen, dass der Abstand für $p = 0.5$ am geringsten ist.

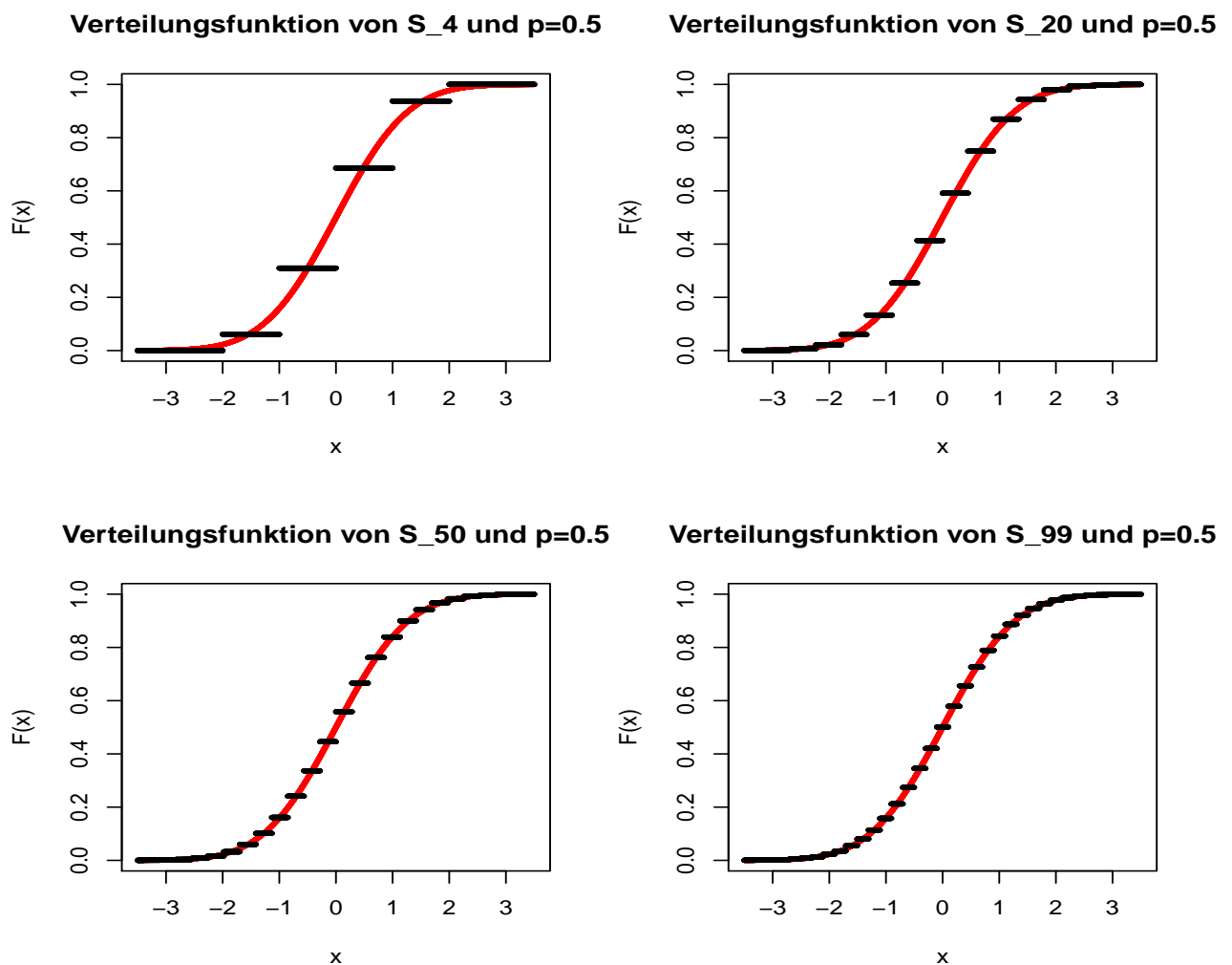
Eine Wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der Abstände über die in (1) gegebene Metrik ist schwierig. Jedoch bietet sie den Vorteil die beiden Funktionen global zu vergleichen. Eine andere sehr bekannte Metrik aus der Analysis ist die Supremumsnorm, definiert durch

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi(x) - F(S_{2,p})|.$$

Hier wird der Ort betrachtet an dem die Funktionswerte der beiden Verteilungsfunktionen betragsmäßig am größten sind. Es handelt sich demzufolge um einen lokalen Vergleich.

Nachdem wir die Annäherung für ein kleines n an die Normalverteilung ausführlich diskutiert haben, werden in der nächsten Grafik größere Werte von n betrachtet.

Grafik 3



Es ergibt sich für den integrierten Quadratabstand für die unterschiedlichen Werte von n aus der obigen Grafik

$$M(\Phi, F_{S_4,0.5}) \approx 0.003369969$$

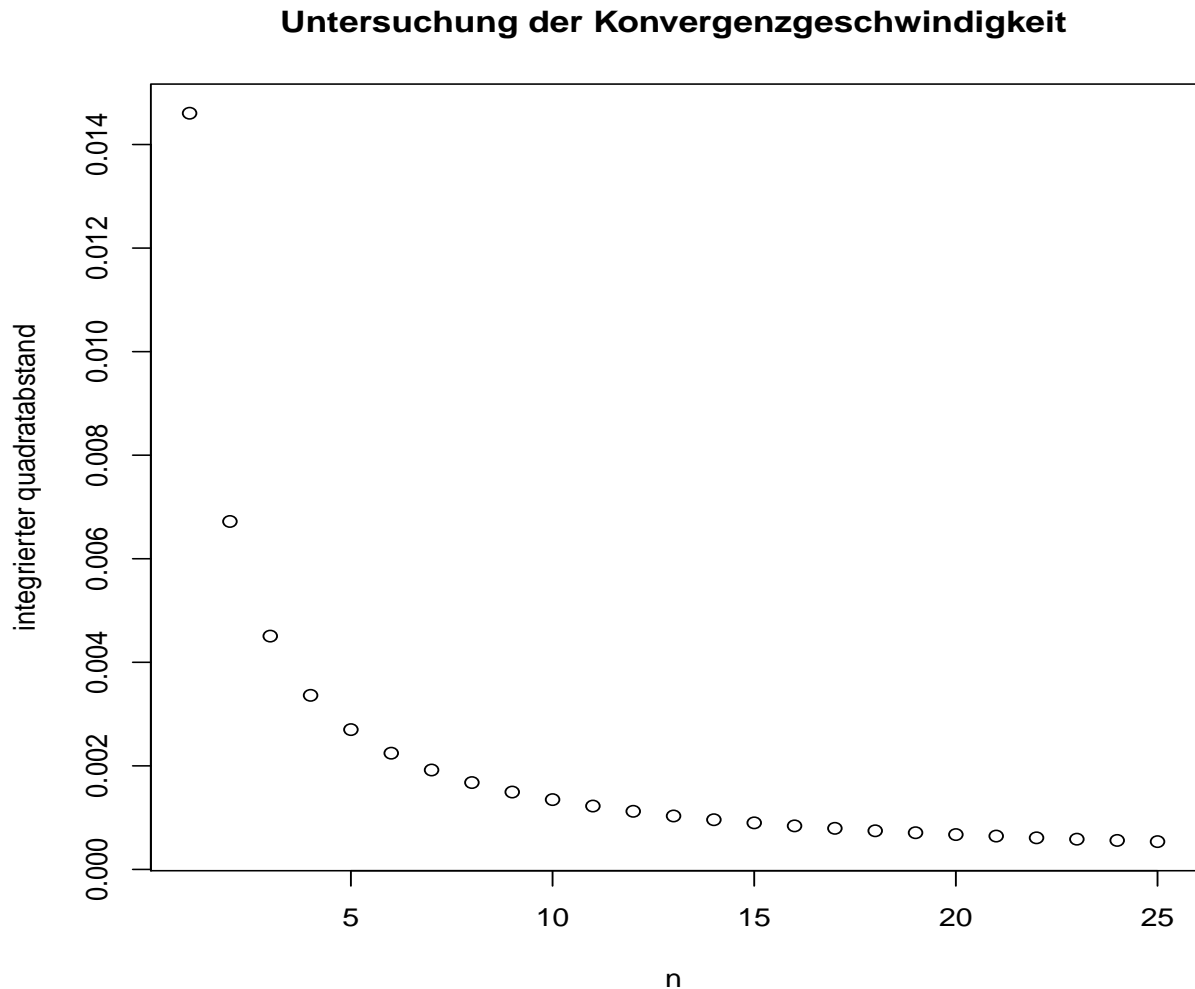
$$M(\Phi, F_{S_{20},0.5}) \approx 0.0006727513$$

$$M(\Phi, F_{S_{50},0.5}) \approx 0.0002696814$$

$$M(\Phi, F_{S_{99},0.5}) \approx 0.0001358576.$$

Hier lässt sich der zentrale Grenzwertsatz wiedererkennen. Mit steigendem n ergibt sich ein monoton abfallender Wert des Abstands von F_{S_n} und Φ . Die folgende Grafik verdeutlicht diesen Zusammenhang noch einmal.

Grafik 4



3.2 Die Edgeworth-Expansion der Exponentialverteilung

Aus Satz 1.1.8 (Satz von Riemann-Lebesgue) folgt, dass die Cramér-Bedingung erfüllt ist, wenn die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariablen X eine Lebesgue-Dichte f besitzt. Im Fall einer Exponentialverteilung mit Parameter λ ist diese gegeben durch

$$f_{\lambda}(x) = 1_{\{x \geq 0\}} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

Die Kumulanten dieser Verteilung sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{0!}{\lambda^0} = 1 \\
k_2 &= \frac{1!}{\lambda} \\
k_3 &= \frac{2!}{\lambda^2} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
k_j &= \frac{(j-1)!}{\lambda^{j-1}}.
\end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Mit unseren erarbeiteten Resultaten wissen wir, dass die Edgeworth-Expansion der Verteilungsfunktion $F(n, \cdot)$ von der Zufallsvariable S_n aus unabhängigen und exponentialverteilten Zufallsvariablen X_j mit Parameter λ :

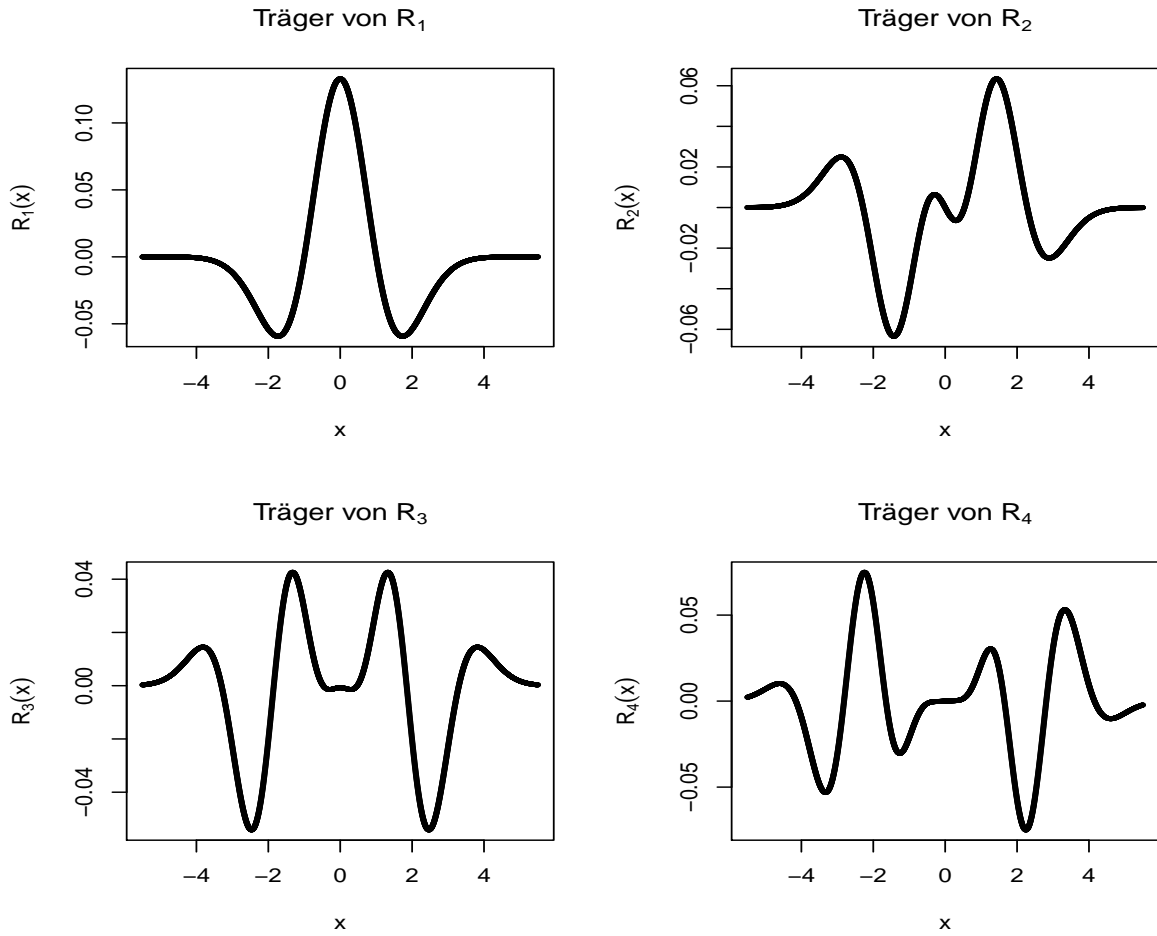
$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \mathbb{E}X_j)}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \frac{1}{\lambda})}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda^2}}} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^n X_j - n \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}}
\end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned}
F(n, x) &= \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x) \phi(x) + n^{-1} p_2(x) \phi(x) \dots + n^{-j/2} p_j(x) \phi(x) + \dots \\
&= \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} n^{-j/2} R_j(x) \\
&= \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} n^{-j/2} \left(\sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!} \right)^{c_i} (-1)^s H_{s-1}(x) \right) \Phi^{(1)}(x)
\end{aligned}$$

gegeben ist. Betrachten wir zunächst die aus den Kumulanten und Hermite-Polynomen bestehenden Funktionen R_j mit $j = 1, 2, 3, 4$.

Grafik 5



Betrachten wir zunächst die Zufallsvariable S_2 . Wir erhalten die Verteilungsfunktion F von S_1 durch einsetzen von $n = 2$ in die Edgeworth-Expansion

$$\begin{aligned} F(x) &= \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} n^{-j/2} R_j(x) \\ &= \Phi(x) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j/2} R_j(x). \end{aligned}$$

Sei

$$y := \frac{x - \frac{2}{\lambda}}{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}}. \quad (2)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} F_{X_1+X_2}(x) &= \mathbb{P}[X_1 + X_2 \leq x] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{X_1 - \frac{1}{\lambda} + X_2 - \frac{1}{\lambda}}{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}} \leq \frac{x - \frac{2}{\lambda}}{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}}\right] \\ &= \mathbb{P}[S_2 \leq y] \\ &= \Phi(y) + \sum_{j=1}^{\infty} n^{-j/2} R_j(y). \end{aligned} \quad (3)$$

Aus der Literatur ist bekannt, dass die Summe aus zwei unabhängigen und exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter λ eine erlangverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $n = 2$ und λ ist. Es gilt also

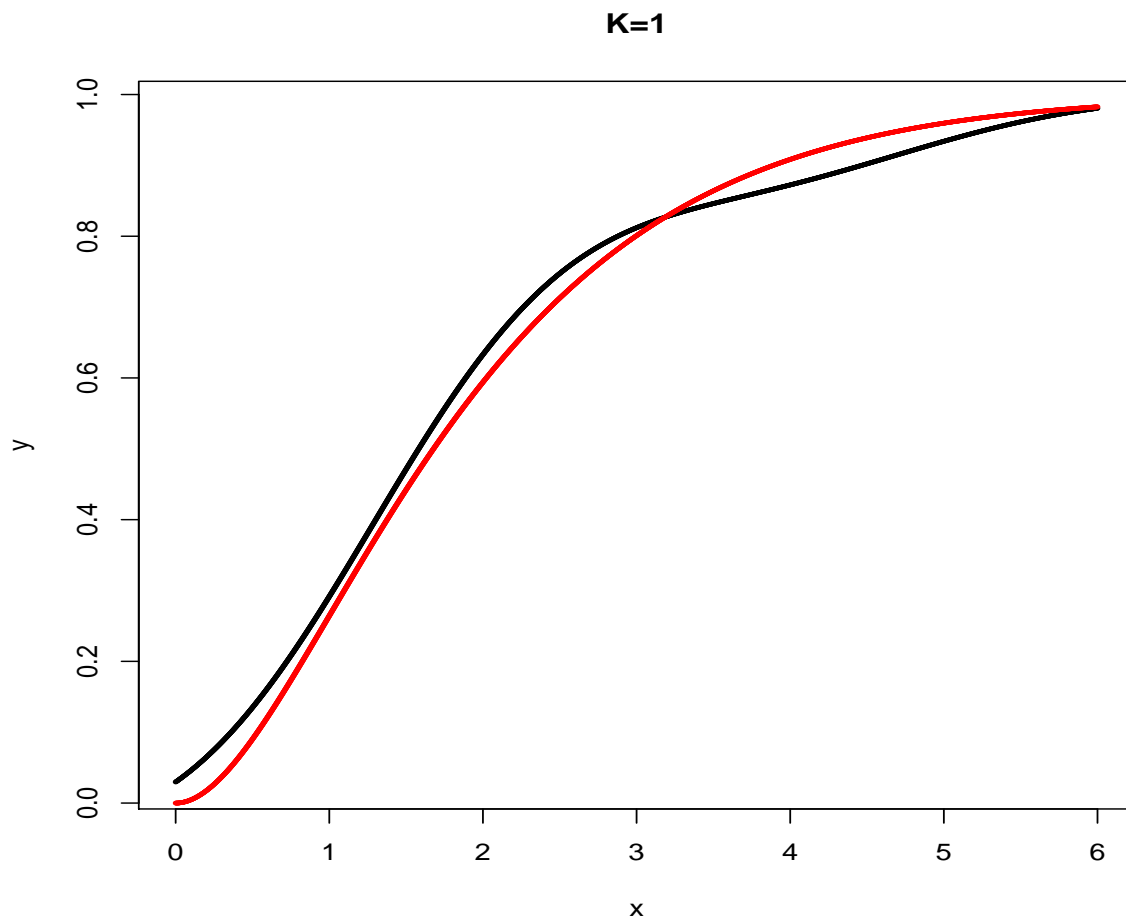
$$X_1 + X_2 \sim \text{Erl}(\lambda, 2).$$

In Computeranwendungen müssen wir die Reihendarstellung unserer Verteilung $F_{X_1+X_2}$ in (3) abschneiden. Wir erhalten für hinreichend große Werte von $k \in \mathbb{N}$, unter der Berücksichtigung der Substitution in (2), die Gleichung

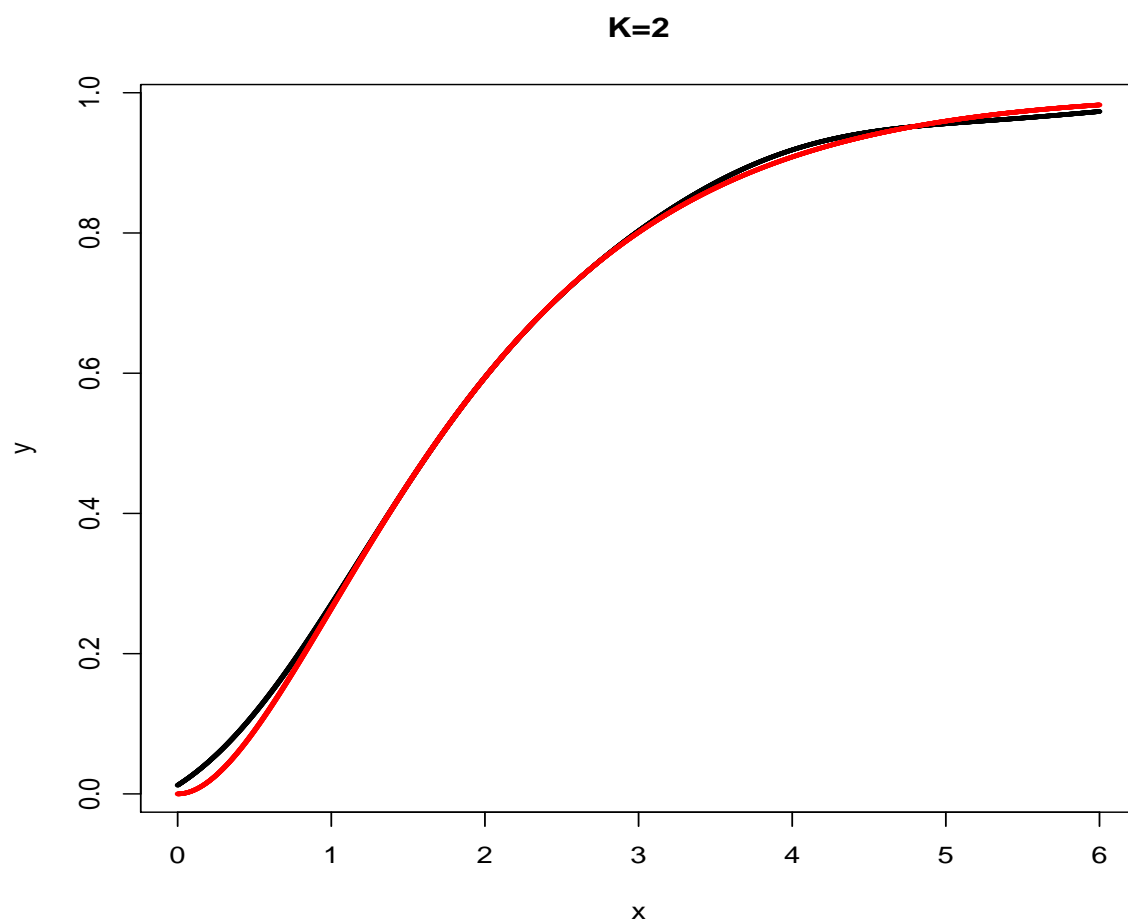
$$F_{X_1+X_2}(x) \approx \Phi(y) + \sum_{j=1}^K n^{-j/2} R_j(y) =: \tilde{F}^K(y).$$

Wir setzen uns das Ziel den integrierten Quadratabstand von $\tilde{F}^K(y)$ und der Erlang-Verteilung zu untersuchen.

Grafik 6



Grafik 7



Kapitel 4

Alternative Inversionsformel

Wie wir bereits im ersten Abschnitt festgestellt haben, lässt sich die Riemannsche Inversionsformel aus Satz 1.1.10 nicht problemlos für jede Verteilung anwenden. In der Mastertesis “Fourier Inversion und ihre Anwendungen in der Stochastik“ von Herr Kaftan wurde deshalb eine Alternative Inversionsformel mit schwächeren Voraussetzungen hergeleitet. Diese neu gewonnene Darstellung wollen wir in diesem Abschnitt auf die Edgeworth-Expansion anwenden.

Bevor wir die neue Inversionsformel einführen, erinnern wir uns zunächst an den folgenden Zusammenhang von Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten:

Satz 4.0.1 Es sei $T(x) := 1_{\{y \leq x\}}(y)$. Dann gilt für eine beliebige Zufallsvariable Y die Gleichung

$$\mathbb{E}[T(Y)] = \mathbb{P}[Y \leq x].$$

Beweis.

Es gilt $T(Y) = 1_{\{Y \leq x\}}$. Diese Zufallsvariable kann die beiden Werte 0 und 1 annehmen. Somit ist das Integral einer Elementarfunktion zu berechnen. Es gilt also

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(Y)] &= \int T(Y) d\mathbb{P} \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}[T(Y) = 1] + 0 \cdot \mathbb{P}[T(Y) = 0] \\ &= 1 \cdot \mathbb{P}[Y \leq x] + 0 \cdot \mathbb{P}[Y > x] \\ &= \mathbb{P}[Y \leq x].\end{aligned}$$

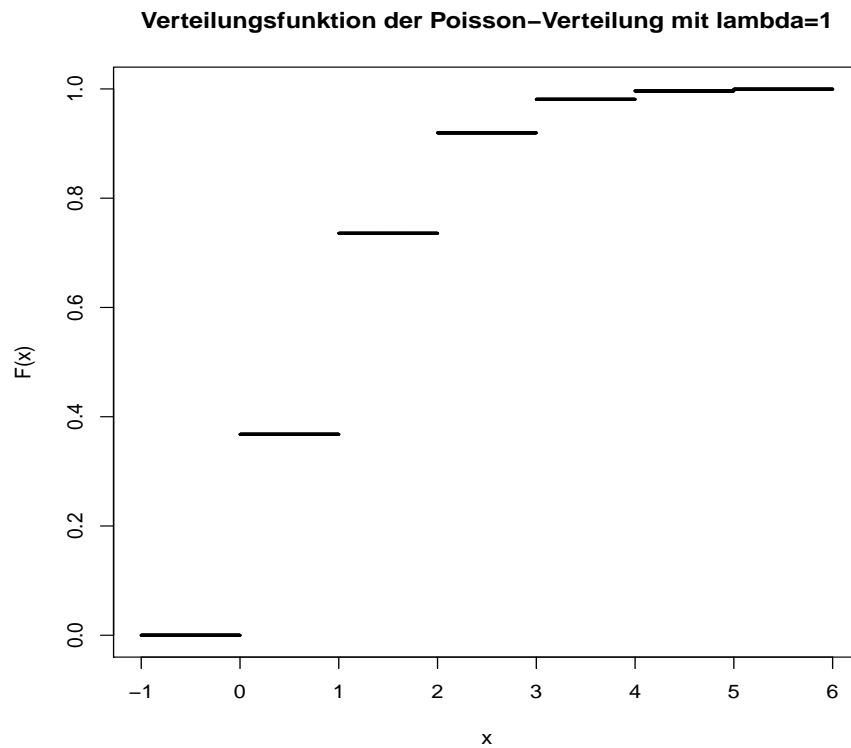
□

Satz 4.0.1 liefert also die Möglichkeit Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Erwartungswerten auszudrücken. Unser Ziel besteht darin diese Erwartungswerte durch deren Fouriertransformationen darzustellen. Wir betrachten zunächst die Zufallsvariable

$$X + hN. \tag{1}$$

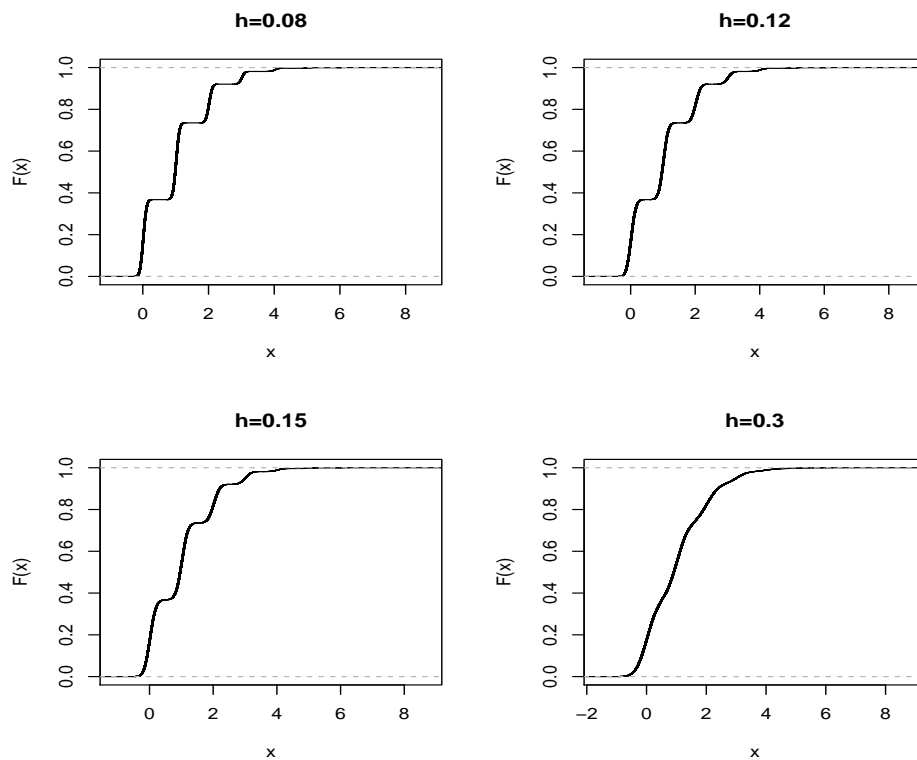
Dabei ist N standardnormalverteilt und unabhängig von X und h ein beliebiger Parameter größer 0. Der Vorteil bei der Betrachtung der Zufallsvariable aus (1) ist, dass diese eine Lebesgue-Dichte besitzt.

Grafik 8



Grafik 9

Für unterschiedliche Werte von h lässt sich nun die Verteilungsfunktion von $X + hN$ angeben. Zu erkennen ist nun, wie die Verteilung immer glatter wird mit größer werden- den Parameter h .



Wollen wir den Erwartungswert von $T(X + hN)$ untersuchen, so müssen wir die Faltung der beiden Verteilungen hernehmen und erhalten somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(X + hN)] &= \int \int T(x + hy) \Phi(dy) F(dx) \\ &= \int \int T(x + hy) \Phi^{(1)}(y) dy F(dx).\end{aligned}\tag{2}$$

In Lemma 1.1.7 haben wir bereits gesehen, dass die Dichte der Normalverteilung $\phi^{(1)}$ eine Eigenfunktion bezüglich des Fourier-Operators ist. Es gilt also

$$\sqrt{2\pi} \Phi^{(1)}(t) = \int e^{itx} \Phi^{(1)}(x) dx.$$

Wir erhalten durch einsetzen in (2)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T(X + hN)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int T(x + hy) \int e^{iyz} \Phi^{(1)}(z) dz dy F(dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int \int T(x + hy) e^{iyz} \Phi^{(1)}(z) dz dy F(dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \int \int T(w) e^{i(w-x)u} \Phi^{(1)}(hu) du dw F(dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(u) \phi_X(-u) e^{-\frac{h^2 u^2}{2}} du.\end{aligned}$$

Wenn nun die Funktion $\phi_T \phi_X$ integrierbar ist, lassen wir h mit Hilfe des Satzes von der dominierten Konvergenz gegen null gehen und erhalten somit

$$\mathbb{E}[T(X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(u) \phi_X(-u) du.$$

In der Arbeit von Herr Kaftan findet sich diese hergeleitete Aussage in der folgenden verallgemeinerten Form:

Satz 4.0.2 (Kaftan)

Sei $T \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ eine Regelfunktion, X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , $N \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $h > 0$. Dann gilt

$$\frac{1}{2} \left[\mathbb{E}[T_+(X)] + \mathbb{E}[T_-(X)] \right] = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(z) \phi_F(-z) e^{-\frac{h^2 z^2}{2}} dz$$

und im Falle der Stetigkeit von T erhalten wir:

$$\mathbb{E}[T(X)] = \frac{1}{2\pi} \lim_{h \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(z) \phi_F(-z) e^{-\frac{h^2 z^2}{2}} dz.$$

Sei nun auch $\phi_T \phi_F(-\cdot) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\frac{1}{2} \left[\mathbb{E}[T_+(X)] + \mathbb{E}[T_-(X)] \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(z) \phi_F(-z) dz$$

bzw. im Falle der Stetigkeiten von T :

$$\mathbb{E}[T(X)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_T(z) \phi_F(-z) dz.$$

Für den Kern $T(t) = 1_{\{-a \leq t < a\}}$ haben wir bereits im Beispiel 1.1.6 die Fouriertransformierte hergeleitet. Hier ergab sich

$$\phi_T(t) = \frac{\sin(at)}{at}.$$

Somit erhalten wir für eine Zufallsvariable X die Formel

$$\mathbb{P}[|X| \leq a] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(-u) \frac{2\sin(au)}{au} du.$$

Im ersten Fall der Edgeworth-Expansion haben wir im Falle der Existenz der Kumulanten die folgende Gleichung für die charakteristische Funktion von S_n hergeleitet:

$$\begin{aligned} \phi_{S_n}(t) &= e^{-t^2/2} (1 + n^{-1/2}r_1(it) + n^{-1}r_2(it) + \dots + n^{-j/2}r_j(it) + \dots) \\ &= e^{-t^2/2} + n^{-1/2}r_1(it)e^{-t^2/2} + n^{-1}r_2(it)e^{-t^2/2} + \dots + n^{-j/2}r_j(it)e^{-t^2/2} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

mit den Polynomen

$$\begin{aligned} r_1(u) &:= \frac{1}{6}k_3u^3 \\ r_2(u) &:= \frac{1}{24}k_4u^4 + \frac{1}{72}k_3^2u^6 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ r_j(u) &= \sum_{i=1}^j \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!} \right)^{c_i} u^s. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit insgesamt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|S_n| \leq a] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{S_n}(-u) \frac{2\sin(au)}{au} du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} (1 + n^{-1/2}r_1(-iu) + n^{-1}r_2(-iu) + \dots + n^{-j/2}r_j(-iu) + \dots) \frac{2\sin(au)}{au} du. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die Darstellung über die r_j 's gleichmäßig gegen ϕ_{S_n} konvergiert erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[|S_n| \leq a] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{2\sin(au)}{au} du + n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} r_1(-iu) \frac{2\sin(au)}{au} du + \dots \\ &= \mathbb{P}[|N| \leq a] + n^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} r_1(-iu) \frac{2\sin(au)}{au} du + \dots, \end{aligned}$$

wodurch sich erneut der Zusammenhang zum zentralen Grenzwertsatz erkennen lässt.

Kapitel 5

R Codes

In diesem Kapitel wollen wir eine Zusammenstellung der wichtigsten R-Codes geben.

Programm 5.0.1 (Hermite-Polynom)

Die R-Funktion `Hermite.Pol(n,x)` hat zwei Argumente $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Zurückgegeben wird der Wert des n -ten Hermite-Polynoms an der Stelle x . Also ist `Hermite.Pol(n,x)` = $H_n(x)$.

```
Hermite.Pol<- function(n,x){
  Hilf1 <- 1
  Hilf2 <- x
  for(ii in 2:n){
    hilf <- Hilf2
    Hilf2<-x*Hilf2-(ii-1)*Hilf1
    Hilf1<-hilf
  }

  return(Hilf2)
}
```

Im nächsten Schritt wollen wir dieses Polynom auf einem beliebigen und von dem Benutzer vorgegebenen Intervall $[-x, x]$ plotten lassen. Diese Aufgabe erledigt der folgende R-Code:

```
plot.Hermit <- function(n,x){

xwerte <- seq(from=-xx, to=xx, length=3000)

plot(xwerte, Hermite.Pol(n,xwerte), cex=0.3 )
}
```

Programm 5.0.2 (Kumulanten der Exponentialverteilung)

Das Programm `kappa(k, lambda)` hat die Argumente $k \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Zurückgegeben wird die k -te Kumulante einer exponentialverteilten Zufallsvariable mit Parameter λ .

```
kappa <- function(k,lambda){
  y<-factorial(k-1)/(lambda^k)
  return(y)
}
```

Programm 5.0.3 (Die Polynome R_j)

Ein Programm um für $j \in \mathbb{N}$ das Polynom R_j zu berechnen. Der Algorithmus lässt sich in die folgenden Schritte unterteilen:

1. Bestimme alle Vektoren $(c_1, c_2, \dots, c_j) = c \in \mathbb{N}^j$ mit

$$\sum_{i=1}^j i c_i = j.$$

Wir erhalten die Menge $M = \{c \in \mathbb{N}^j \mid \sum_{i=1}^j i c_i = j\}$.

2. Für jede Lösung $\tilde{k} \in M$ berechnen wir den Vektor $l = (l_1, l_2, \dots, l_j) \in \mathbb{N}^j$ mit $l_i = i+2$ und $\tilde{s} = \langle \tilde{c}, \tilde{l} \rangle = \sum_{i=1}^j c_i l_i$. Wir erhalten somit für jedes $\tilde{c} \in M$ ein Tupel $(\tilde{c}, \tilde{l}, \tilde{s})$.
3. Das Polynom R_j an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ berechnet sich dann durch

$$\sum_{c \in M} \prod_{i=1}^j \frac{1}{c_i!} \left(\frac{k_{l_i}}{l_i!} \right)^{c_i} H^{s-1}(x) \Phi^{(1)}(x).$$

Hier bezeichnet k_m die m -te Kumulante.

```
install.packages('gtools')

Rn <- function(n,x){

Ergebnis <- NULL

vektor<- 0:n

Pos.Loegung <-permutations(n=n+1,r=n,
                           v=vektor,repeats.allowed=T)

multiplikation <- matrix(1:n, nrow= length(Pos.Loegung[,1]),
                        ncol=n, byrow=TRUE)

summe <- apply(Pos.Loegung*multiplikation, 1,
               function(x) sum(x))

var1 <- which( summe==n )
```

```

Ki.matrix <- Pos.Loesung[var1,]

# Berechnung der Li's

Li.matrix <- matrix(1:n+2, nrow = length(Ki.matrix[,1]) ,
                    ncol=n      , byrow=TRUE)

# Berechnung der s'

s.vektor <- apply(Ki.matrix*Li.matrix, 1,function(x) sum(x))

Ergebnis <-0

for(jj in 1:length(Ki.matrix[,1])){

var3<-1

  for(ii in 1:n){

    var3<- var3* (1/factorial(Ki.matrix[jj,ii])*
                  (kappa(Li.matrix[jj,ii],lambda)/factorial
                    (Li.matrix[jj,ii] ) )^(Ki.matrix[jj,ii]) )

  }
  Ergebnis <- Ergebnis+var3*Hn(s.vektor[jj]-1,x)
  var3<- 1

}

return(Ergebnis*dnorm(x))
}

```

Programm 5.0.4 (Edgeworth-Expansion)

Die Funktion Edgeworth.Expansion(k,x,n) hat drei Argumente $k, n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Zurückgegeben wird

$$F_{S_2}(x) \approx \Phi(x) + \sum_{j=1}^K n^{-j/2} R_j(y) =: \tilde{F}^K(x),$$

für den Fall, dass X_1 und X_2 exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda = 1$ sind.

```

Edgeworth.Expansion <- function(k,x,n){

  Ergebnis<-pnorm(x)

```

```
for(ii in 1:k){  
  Ergebnis <- Ergebnis + (1/(n^(ii/2) ) )*Rn(ii,x)  
}  
return(Ergebnis)  
}
```

Kapitel 6

Literatur

- Basna R. (2010): Edgeworth Expansion and Saddle Point Approximation for Discrete Data with Application to Chance Games
- Balachandran P. (2009): The Edgeworth Expansion and Convergence in the Central Limit Theorem
- Stute W. (2015): Skript zur Stochastik 1, JLU Gießen
- Berdysheva E. (2018): Skript zu Integraltransformationen, JLU Gießen
- Kaftan R. (2018): Masterthesis “Fourier Inversion und ihre Anwendungen in der Stochastik“
- Blinnikov S. und Moessner R. (1998): Expansions for nearly Gaussian distributions

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, die vorgelegte Thesis selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt zu haben, die ich in der Thesis angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Thesis erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der ‚Satzung der Justus-Liebig-Universität zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis‘ niedergelegt sind, eingehalten. Gemäß § 25 Abs. 6 der Allgemeinen Bestimmungen für modularisierte Studiengänge dulde ich eine Überprüfung der Thesis mittels Anti-Plagiatssoftware.

Datum

Unterschrift