Εργαστηριακή Αναφορά
Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου ΙΙ

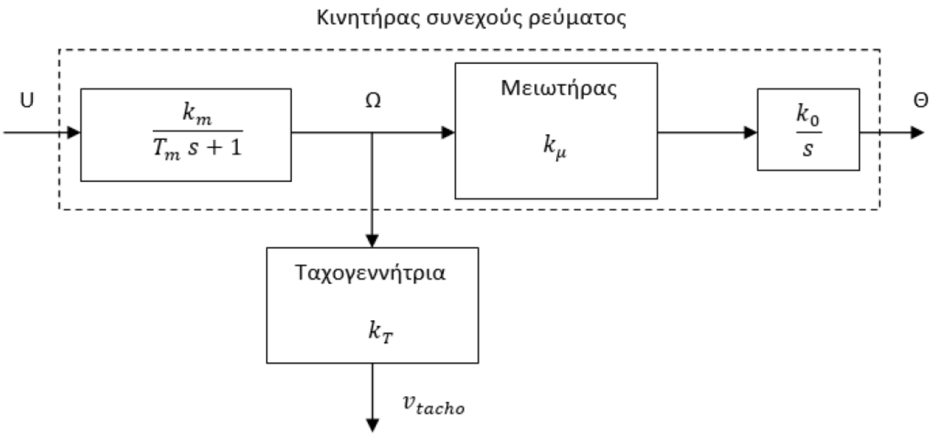
Μαυρογεωργιάδη Χριστίνα 10439

Μάιος 2023

Περιεχόμενα

1 Εργαστηριακή άσκηση 1: Μοντελοποίηση Συστήματος

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος ηλεκτρικός κινητήρας συνεχούς ρεύματος-ταχογεννήτρια δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχήμα 1: Το δομικό διάγραμμα του συστήματος

U: τάση εισόδου
Ω: ταχύτητα περιστροφής κινητήρα σε rpm
Θ: θέση-τάση του άξονα του κινητήρα
V_{tacho}: τάση στην ταχογεννήτρια

Ο προσδιορισμός των παραμέτρων k_m, T_m, k_T, k_μ, k_0 του μοντέλου πραγματοποιείται μέσω πειραματικών μετρήσεων.

Η συνάρτηση μεταφοράς τάσης εισόδου-τάσης ταχογεννήτριας προσεγγίζεται με μια απλή συνάρτηση μεταφοράς πρώτης τάξης

$$\frac{V_{tacho}}{U}(s) = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m s + 1}.$$

Η συνάρτηση μεταφορά τάσης εισόδου-θέσης δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\Theta}{U}(s) = \frac{k_m}{T_m s + 1} \cdot k_\mu \cdot \frac{k_0}{s}.$$

- Προσδιορισμός $k_m \cdot k_T, T_m, k_\mu$

Για τον υπολογισμό των $k_m \cdot k_T, T_m$ παρακολουθούμε στον παλμογράφο την βηματική απόκριση της τάσης ταχογεννήτριας V_{tacho} σε βηματική είσοδο πλάτους 9.95V.
Η απόκριση εξόδου της τάσης ταχογεννήτριας δίνεται από την σχέση

$$V_{tacho}(s) = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m s + 1} \cdot U(s) = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m s + 1} \cdot \frac{9.95}{s}$$

Η τάση της ταχογεννήτριας στη μόνιμη κατάσταση υπολογίζεται από την σχέση

$$V_{ss} = \lim_{t \to +\infty} V_{tacho}(t) = \lim_{s \to 0} s \cdot V_{tacho}(s) = 9.95 \cdot k_m \cdot k_T$$

Από την πειραματική μέτρηση προκύπτει $V_{ss} = 8.4V$. Επομένως, το γινόμενο $k_m \cdot k_T$ προσδιορίζεται

$$9.95 \cdot k_m \cdot k_T = 8.4 \Rightarrow k_m \cdot k_T = 0.844 \tag{1}$$

Η απόκριση εξόδου στο πεδίο του χρόνου δίνεται από την σχέση

$$V_{tacho}(t) = V_{ss} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_m}}), t \geq 0$$

Την χρονική στιγμή $t = T_m$,
$V_{tacho}(T_m) = V_{ss} \cdot (1 - e^{-1}) = 8.4 \cdot 0.63 = 5.292V$.
Υπολογίζουμε μέσω του παλμογράφου σε ποια χρονική στιγμή η τάση V_{tacho} ισούται με 5.292V και προκύπτει

$$T_m = 480ms \tag{2}$$

Τέλος, η παράμετρος k_μ αντιστοιχεί στον λόγο της γωνίας στροφής του άξονα εξόδου προς την γωνία στροφής του άξονα του κινητήρα και προκύπτει

$$k_\mu = \frac{10°}{360°} \Rightarrow k_\mu = \frac{1}{36} \tag{3}$$

- Προσδιορισμός k_m, k_T, k_0

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων k_m, k_T, k_0 θέτουμε τον κινητήρα σε κίνηση και παρακολουθούμε την θέση του στον παλμογράφο.
Ο χρόνος που απαιτείται για μία πλήρη περιστροφή του άξονα εξόδου υπολογίζεται $T = 950ms$. Οπότε, η ταχύτητα περιστροφής του άξονα εξόδου προκύπτει $\omega_{\varepsilon\xi} = 63.16rpm$.
Η ταχύτητα περιστροφής του άξονα του κινητήρα είναι $\omega = \frac{\omega_{\varepsilon\xi}}{k_\mu} = 2,273rpm$.
Επειδή $V_{tacho} = k_T \cdot \omega$, προκύπτει

$$k_T = \frac{V_{tacho}}{\omega} \Rightarrow k_T = 0.00369 \tag{4}$$

Από τις (1), (4) ακολουθεί ότι

$$k_m = 228.73 \tag{5}$$

Υπολογίζουμε τώρα την κλίση της ευθείας που απεικονίζει την θέση του κινητήρα στον παλμογράφο $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = 14.526$.
Η συνάρτηση μεταφοράς ταχύτητας περιστροφής-θέσης δίνεται από την σχέση

$$\frac{\Theta}{\Omega}(s) = k_\mu \cdot \frac{k_0}{s}$$

Ακολουθεί ότι $\dot{\theta} = k_\mu \cdot k_0 \cdot \omega$. Επομένως,

$$k_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot \frac{1}{k_\mu \cdot \omega} \Rightarrow k_0 = 0.229 \tag{6}$$

2 Εργαστηριακή Άσκηση 2: Σχεδίαση ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων

2.1 Θεωρητική ανάλυση

Στόχος της δεύτερης εργαστηριακής άσκησης αποτελεί η σύγκλιση της θέσης του κινητήρα σε μια επιθυμητή τιμή μέσω γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων. Για την θεωρητική σχεδίαση κατάλληλου ελεγκτή που προσδοκά να επιτύχει τον παραπάνω στόχο ελέγχου, θα καταφύγουμε αρχικά στην περιγραφή του συστήματος του κινητήρα μέσω του μοντέλου εξισώσεων κατάστασης και εξόδου. Το μοντέλο αυτό θα εξαχθεί από το μοντέλο συνάρτησης μεταφοράς που παρουσιάστηκε στην ενότητα 1.
Ως μεταβλητές κατάστασης επιλέγονται η θέση του κινητήρα, όπως αυτή δηλώνεται από την τάση στο ποτενσιόμετρο εξόδου, καθώς και η ταχύτητα περιστροφής του, όπως αυτή δηλώνεται από την τάση στην ταχογεννήτρια.
$x_1 = \theta$
$x_2 = k_T \cdot \omega = V_{tacho}$
Σημειώνεται πως οι δύο αυτές μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες στο φυσικό σύστημα.

Από την συνάρτηση μεταφοράς τάσης εισόδου-τάσης ταχογεννήτριας προκύπτει:

$$\frac{V_{tacho}}{U}(s) = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m s+1} \Rightarrow$$

$$(T_m s + 1)V_{tacho}(s) = k_m \cdot k_T U(s) \Rightarrow$$

$$sV_{tacho}(s) + \frac{1}{T_m}V_{tacho}(s) = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m}U(s) \Rightarrow$$

$$\dot{x_2} + \frac{1}{T_m}x_2 = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m}u \Rightarrow$$

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{T_m}x_2 + \frac{k_m \cdot k_T}{T_m}u \tag{1}$$

Από την συνάρτηση μεταφοράς ταχύτητας περιστροφής-θέσης προκύπτει:

$$\frac{\Theta}{\Omega}(s) = k_\mu \cdot \frac{k_0}{s} \Rightarrow$$

$$s\Theta(s) = k_\mu \cdot k_0 \Omega(s) \Rightarrow$$

$$s\Theta(s) = \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T}V_{tacho}(s) \Rightarrow$$

$$\dot{x_1} = \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T}x_2 \tag{2}$$

Ως έξοδος του συστήματος θεωρείται η θέση του κινητήρα.

$$y = x_1 \tag{3}$$

Από τις εξισώσεις (1), (2), (3) προκύπτουν οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου του συστήματος σε μορφή πινάκων:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} \end{bmatrix} u \tag{4}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \tag{5}$$

Το σύστημα ανοικτού βρόχου είναι της μορφής:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

όπου $x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ και οι πίνακες A, B, C ορίζονται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πριν προχωρήσουμε στη σχεδίαση ελεγκτή, πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι το σύστημα ανοικτού βρόχου είναι ελέγξιμο σύστημα. Υπολογίζουμε τον πίνακα ελεγξιμότητας του συστήματος:

$$M = \begin{bmatrix} B & A \cdot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m} \\ \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} & -\frac{k_m \cdot k_T}{T_m^2} \end{bmatrix}$$

Ισχύει $det(M) = -\frac{k_m^2 \cdot k_\mu \cdot k_0 \cdot k_T}{T_m^2} \neq 0$, επομένως $rank(M) = n = 2$, όπου n η τάξη του συστήματος, και το σύστημα είναι ελέγξιμο. Επιλέγουμε ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων της μορφής:

$$u = -Kx + k_r r$$

$$u = -k_1 \cdot x_1 - k_2 \cdot x_2 + k_r \cdot r$$

με $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$, $k_r \in \mathbb{R}$ και $r \in \mathbb{R}$.
Το σύστημα κλειστού βρόχου γίνεται:

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_r r$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} \\ -\frac{k_m \cdot k_T}{T_m} k_1 & -\frac{(1 + k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} k_r \end{bmatrix} r \tag{6}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου υπολογίζεται:

$$p_C(s) = det(sI - A + BK) = s^2 + \frac{(1 + k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m} s + \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m} k_1$$

Για να είναι το γραμμικό σύστημα κλειστού βρόχου ασυμπτωτικά ευστάθες θα πρέπει όλες οι ιδιοτιμές του να έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος. Σύμφωνα με το κριτήριο Routh-Hurwitz, οι ρίζες ενός πολυωνύμου 2ου βαθμού κείνται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο εάν όλοι οι συντελεστές του είναι ομόσημοι. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

$$\frac{(1 + k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m} > 0$$

$$\frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m} k_1 > 0$$

Επειδή οι $k_m, k_T, k_\mu, k_0, T_m$ είναι θετικές σταθερές ακολουθεί ότι:

$$k_2 > -\frac{1}{k_m \cdot k_T} \tag{7}$$

$$k_1 > 0 \tag{8}$$

Το κέρδος k_r υπολογίζεται από την σχέση:

$$k_r = -\frac{1}{C(A - BK)^{-1} B}$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι:

$$k_r = k_1 \tag{9}$$

Οι αρχικές τιμές των μεταβλητών κατάστασης είναι:

$$x_1(0) = 2V, x_2(0) = 0V$$

Ο στόχος ελέγχου συνίσταται, όπως αναφέραμε παραπάνω, στη σύγκλιση της θέσης του κινητήρα σε μια επιθυμητή τιμή, η οποία είναι ίση με $r = 5V$. Η σχεδίαση του ελεγκτή πρέπει να είναι τέτοια ώστε η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου να μην παρουσιάζει υπερύψωση και ο χρόνος αποκατάστασης να είναι ο ελάχιστος δυνατός.
Για να επιλέξουμε τα κέρδη k_1, k_2 του ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων ικανοποιώντας τις παραπάνω προδιαγραφές, θα καταφύγουμε στη χάραξη του γεωμετρικού τόπου των ριζών.
Δηλώνοντας την είσοδο αναφοράς με $v = k_r r$, ο ελεγκτής γράφεται στο πεδίο του Laplace στη μορφή:

$$u = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + v \Rightarrow$$

$$U(s) = -k_1 \Theta(s) - k_2 V_{tacho}(s) + V(s) \Rightarrow$$

$$U(s) = -k_1 \Theta(s) - k_2 \tfrac{k_T}{k_\mu \cdot k_0} s\Theta(s) + V(s) \Rightarrow$$

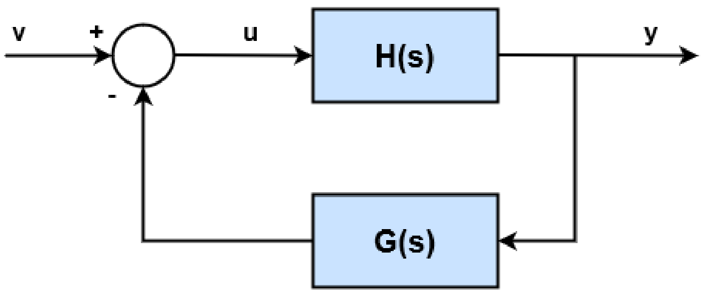
$$U(s) = -k_1 Y(s) - k_2 \tfrac{k_T}{k_\mu \cdot k_0} sY(s) + V(s) \Rightarrow$$

$$U(s) = -k_2 \tfrac{k_T}{k_\mu \cdot k_0} (s + \alpha) Y(s) + V(s)$$

όπου

$$\alpha = \frac{k_1 \cdot k_\mu \cdot k_0}{k_T \cdot k_2} \tag{10}$$

Θεωρούμε λοιπόν το σύστημα κλειστού βρόχου του παρακάτω σχήματος:



Σχήμα 2: Το δομικό διάγραμμα του συστήματος κλειστού βρόχου

όπου

$$H(s) = \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{s(T_m s + 1)}$$

$$G(s) = k_2 \frac{k_T}{k_\mu \cdot k_0}(s + \alpha)$$

y: η έξοδος του συστήματος
u: η είσοδος ελέγχου
v: η είσοδος αναφοράς $k_r r$

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου είναι:

$$A(s) = H(s)G(s) = k_2 \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} \frac{(s + \alpha)}{s(s + \frac{1}{T_m})}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου προκύπτει:

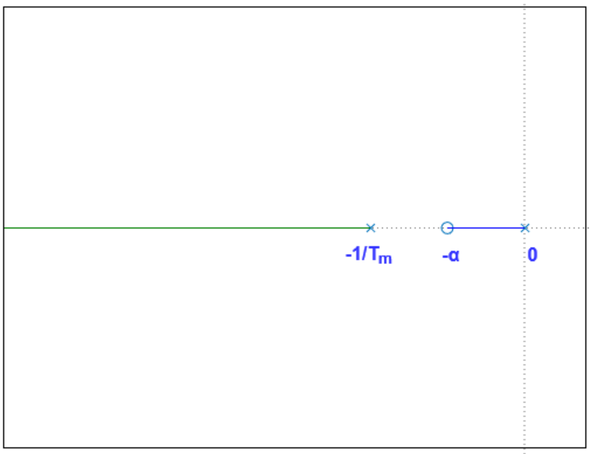
$$1 + A(s) = 0$$

$$1 + k_2 L(s) = 0$$

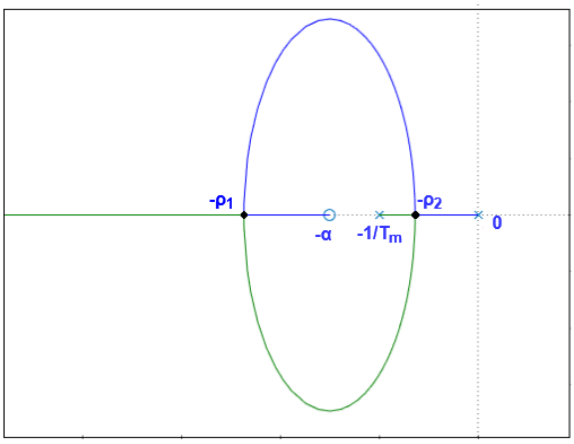
όπου

$$L(s) = \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} \frac{(s+\alpha)}{s(s+\frac{1}{T_m})}$$

Θεωρώ $k_2 > 0$, το οποίο ικανοποιεί την ανίσωση (7). Άρα, όπως προκύπτει από την ανίσωση (8) και την εξίσωση (10), $\alpha > 0$. Συνεπώς, μπορώ να χαράξω τον γεωμετρικό τόπο των ριζών ως προς την παράμετρο k_2, θεωρώντας το μηδενικό α σταθερό, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Σχήμα 3: Γεωμετρικός τόπος των ριζών για $\alpha < \frac{1}{T_m}$



Σχήμα 4: Γεωμετρικός τόπος των ριζών για $\alpha > \frac{1}{T_m}$

Προκειμένου η απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου να παρουσιάζει μηδενική υπερύψωση, πρέπει οι πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου να βρίσκονται πάνω στον αρνητικό πραγματικό άξονα. Ο χρόνος αποκατάστασης του συστήματος καθορίζεται από τον κυρίαρχο πόλο του συστήματος, δηλαδή αυτόν που βρίσκεται πιο κοντά στον φανταστικό άξονα. Επομένως, για να επιτύχω τον ελάχιστο χρόνο αποκατάστασης, θα πρέπει να επιλέξω κατάλληλα το κέρδος k_2 έτσι ώστε ο κυρίαρχος πόλος του συστήματος να είναι όσο το δυνατόν πιο απομακρυσμένος από τον φανταστικό άξονα. Μελετώντας τα δύο παραπάνω σχήματα, αυτό επιτυγχάνεται για $\alpha > \frac{1}{T_m}$ όταν η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου έχει διπλό πόλο στο σημείο απόσχισης $-\rho_1$.

Για να βρω τα σημεία απόσχισης λύνω την εξίσωση

$$\frac{dL(s)}{ds} = 0 \Rightarrow$$

$$s^2 + 2\alpha s + \frac{\alpha}{T_m} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις για $\alpha > \frac{1}{T_m}$:

$$s_1 = -\alpha - \alpha\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha \cdot T_m}}$$

και

$$s_2 = -\alpha + \alpha\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha \cdot T_m}}$$

Το κέρδος k_2 υπολογίζεται από την σχέση:

$$k_2 = -\frac{1}{L(-\rho_1)} \tag{11}$$

όπου

$$\rho_1 = -s_1 = \alpha + \alpha\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha \cdot T_m}} \tag{12}$$

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, η επιλογή των κερδών k_1, k_2, k_r του ελεγκτή βασίζεται στην κατάλληλη επιλογή του μηδενικού α της συνάρτησης ανοικτού βρόχου του συστήματος σε επιθυμητή θέση $\alpha > \frac{1}{T_m} = 2.083$ με σκοπό την ελαχιστοποίηση του χρόνου αποκατάστασης του συστήματος κλειστού βρόχου. Όσο απομακρύνεται το α από τον φανταστικό άξονα τόσο απομακρύνεται ο διπλός πόλος στη θέση $-\rho_1$ του συστήματος κλειστού βρόχου, και κατ΄ επέκταση τόσο γρηγορότερη θα είναι η απόκριση του συστήματος.
Ακολουθούμε λοιπόν τα εξής βήματα:

- Επιλέγουμε την τιμή του μηδενικού α.
- Υπολογίζουμε την τιμή ρ_1 μέσω της σχέσης (12).
- Υπολογίζουμε την τιμή k_2 μέσω της σχέσης (11).
- Γνωρίζοντας τα α, k_2, υπολογίζουμε την τιμή k_1 μέσω της σχέσης (10).
- Τέλος, υπολογίζουμε την τιμή k_r μέσω της σχέσης (9).

2.2 Πειραματικά αποτελέσματα

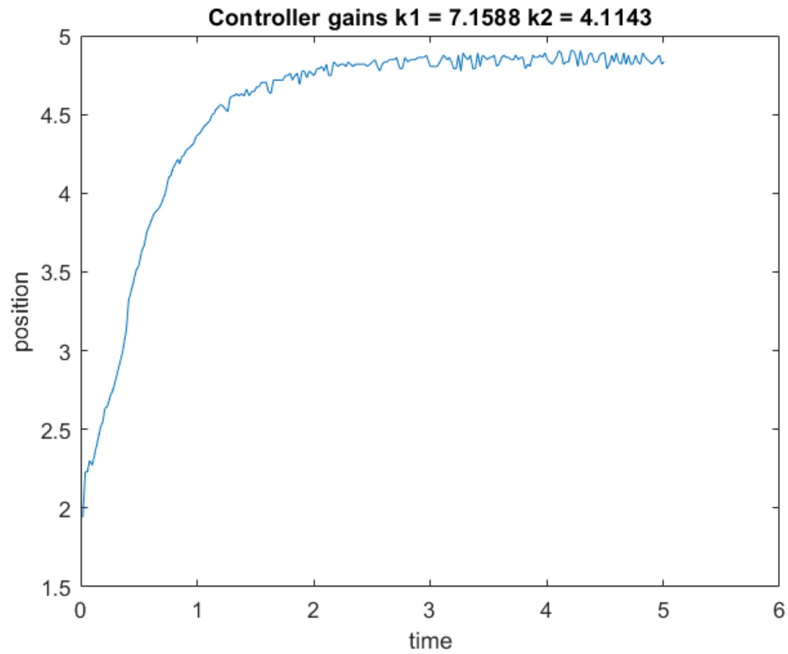
Ακολουθώντας τα βήματα που παρουσιάστηκαν στο τέλος της προηγούμενης υποενότητας, κατά την διεξαγωγή του εργαστηρίου επιλέχθηκε τιμή μηδενικού α = 3. Από την σχέση (12) υπολογίζεται $\rho_1 = 4.65$. Από τις σχέσεις (11), (10), (9) ακολουθεί:

$$k_2 = 4.1143$$

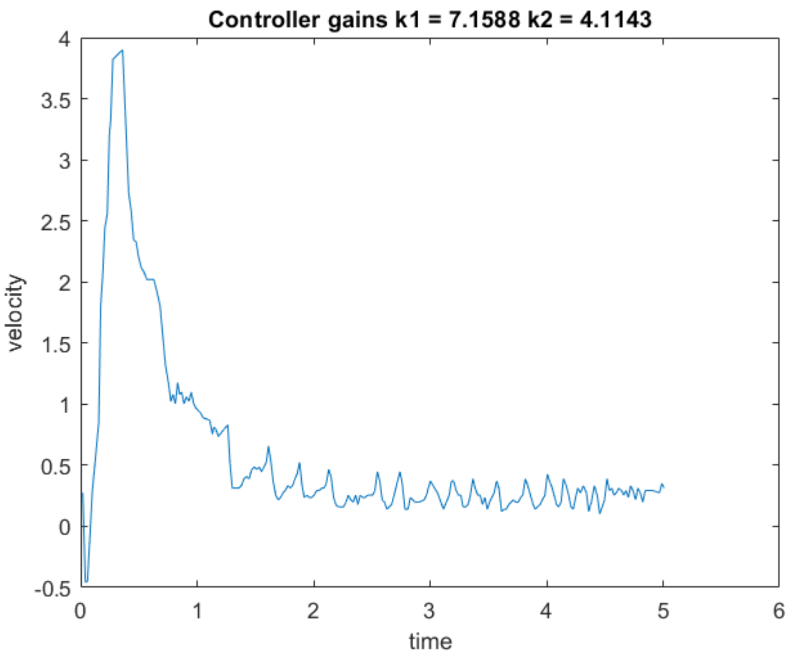
$$k_1 = 7.1588$$

$$k_r = 7.1588$$

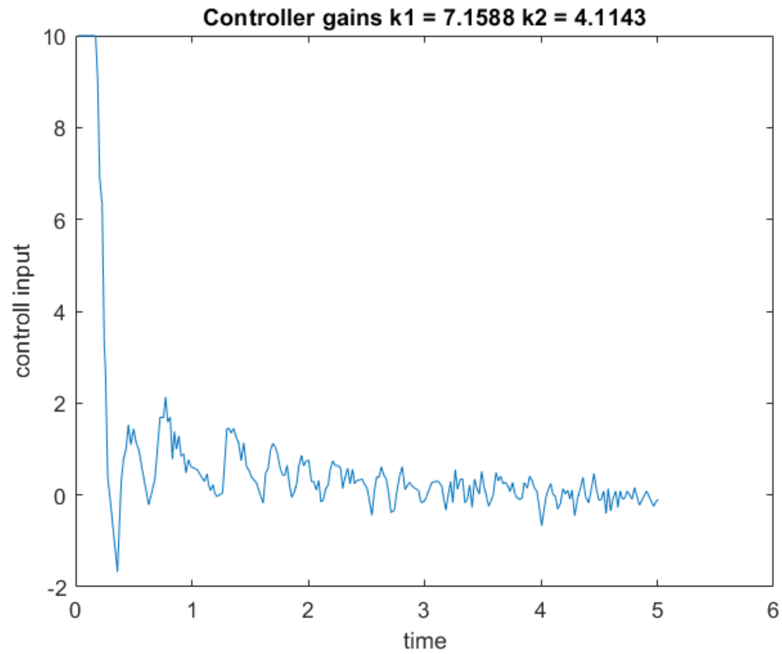
Παρακάτω παρατίθενται διαγράμματα των καταστάσεων του συστήματος, της εισόδου ελέγχου και κοινό διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 5: Διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου

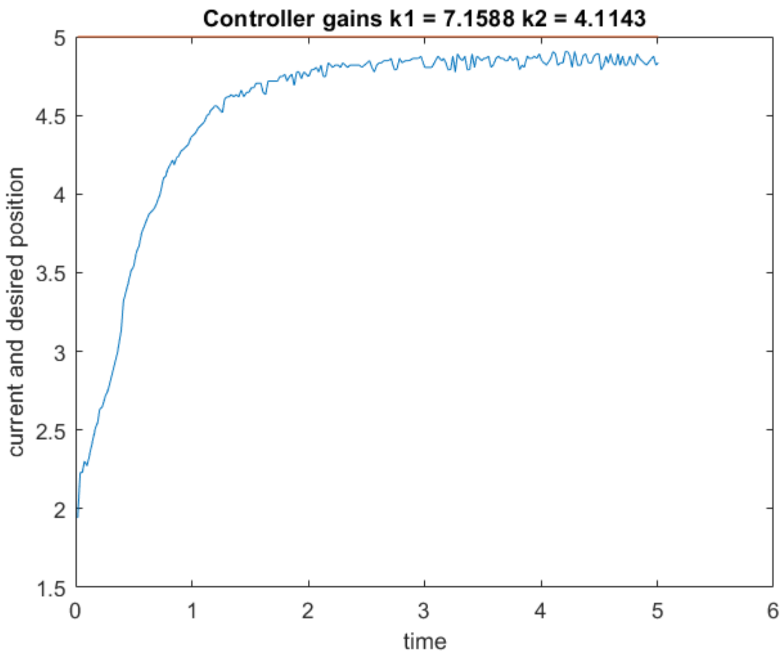


Σχήμα 6: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



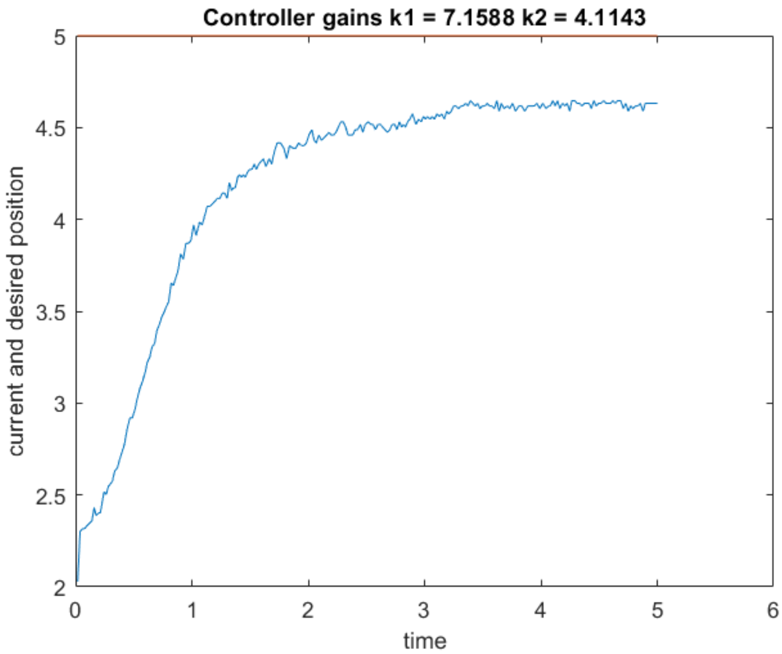
Σχήμα 7: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

Μελετώντας το διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης που απεικονίζεται παρακάτω (Σχήμα 8), διαπιστώνουμε ότι υπάρχει σφάλμα θέσης της εξόδου στη μόνιμη κατάσταση. Το σφάλμα αυτό μπορεί να οφείλεται στην παρουσία αβεβαιοτήτων και σφαλμάτων μοντελοποίησης. Ειδικότερα, η σχεδίαση του παραπάνω ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων στηρίζεται στην κατάλληλη επιλογή των κερδών k_1, k_2 με στόχο την ασυμπτωτική ευστάθεια του γραμμικού συστήματος αλλά και στην αυστηρή επιλογή του κέρδους αναφοράς k_r ώστε να επιτευχθεί η σύγκλιση της εξόδου στην είσοδο αναφοράς. Τα παραπάνω προϋποθέτουν την ακριβή γνώση των πινάκων A, B και C, η οποία ωστόσο είναι αδύνατη, καθώς αναπόφευκτα παρουσιάζονται κάποια σφάλματα κατά την πειραματική αναγνώριση του δυναμικού μοντέλου του συστήματος. Το μόνιμο σφάλμα θέσης ενδέχεται ακόμη να οφείλεται στην παρουσία διαταραχών, όπως τριβές, υπό τις οποίες λειτουργεί το σύστημα και οι οποίες δεν έχουν ληφθεί υπόψη στην μοντελοποίησή του. Το σφάλμα αυτό θα μπορούσε να μειωθεί μέσω της απόσβεσης των διαταραχών, η οποία επιτυγχάνεται με την υλοποίηση ενός ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης και παρουσιάζεται αναλυτικότερα στην εργαστηριακή άσκηση 3.



Σχήμα 8: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

Για να διαπιστώσουμε εμφανέστερα την επίδραση των εξωτερικών διαταραχών στην απόκριση του συστήματος, κατεβάζουμε το μαγνητικό φρένο του κινητήρα κα επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο με τα κέρδη που υπολογίστηκαν παραπάνω. Δίνεται το διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου.



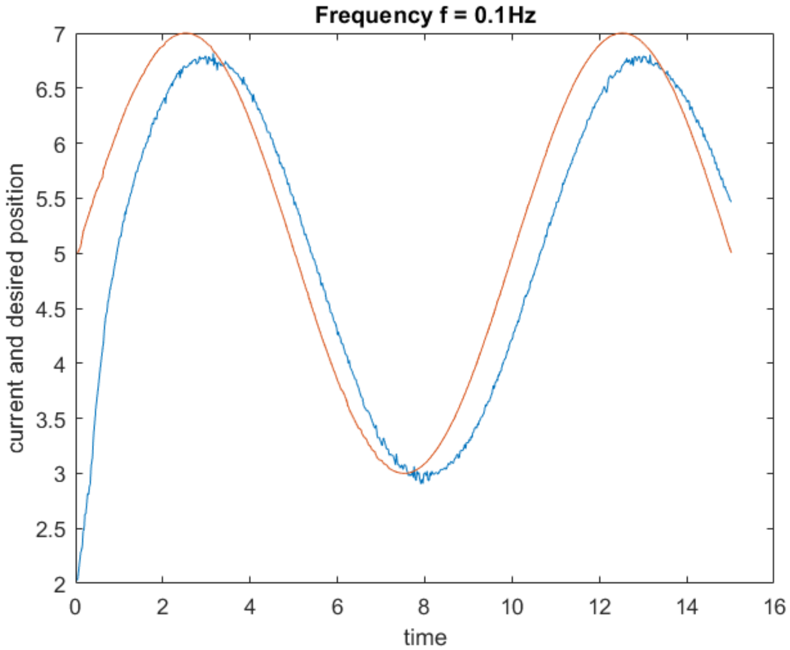
Σχήμα 9: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου παρουσία εξωτερικών διαταραχών

Παρατηρούμε ότι παρουσία των εξωτερικών διαταραχών που εφαρμόζουμε με το μαγνητικό φρένο το σφάλμα θέσης στη μόνιμη κατάσταση αυξάνεται αισθητά, ενώ ταυτόχρονα αυξάνεται και ο χρόνος αποκατάστασης του συστήματος.

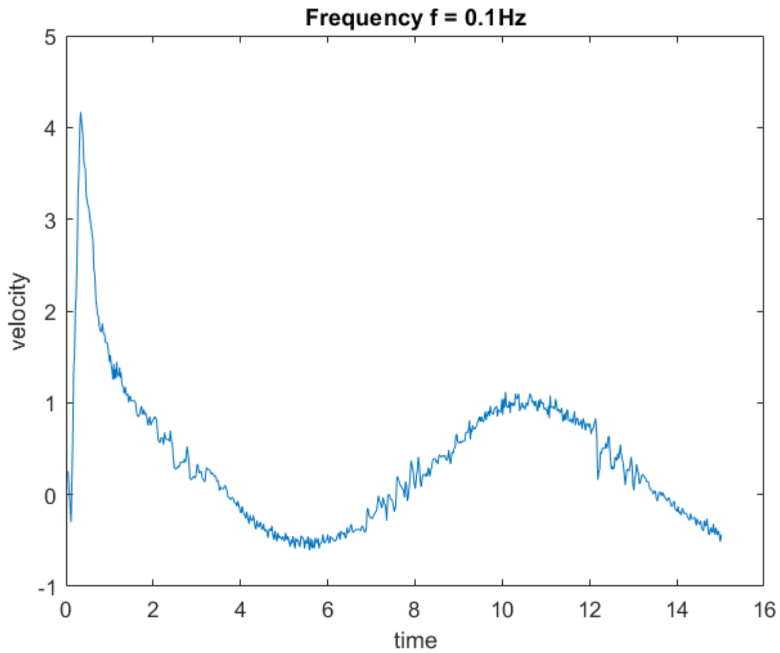
Σημείωση: Η επιλογή του μηδενικού στη θέση $\alpha = 3$ και όχι αριστερότερα στον αρνητικό πραγματικό άξονα έγινε με σκοπό την αποφυγή πολύ μεγάλων κερδών του ελεγκτή, τα οποία θα προκαλούσαν ανώφελη αύξηση στο πλάτος της εισόδου ελέγχου και θα επιβάρυναν το σύστημα, δεδομένου του άνω ορίου των 10V στην τάση εισόδου που μπορεί να εφαρμοστεί στον κινητήρα. Οι υποθέσεις αυτές επιβεβαιώθηκαν πειραματικά καθώς με περαιτέρω αύξηση της τιμής του μηδενικού παρατηρήθηκε μεγάλη αύξηση στο πλάτος της εισόδου ελέγχου, ενώ ωστόσο ο χρόνος αποκατάστασης δεν μειώθηκε αισθητά.

Τέλος, κατεβάζουμε ξανά το μαγνητικό φρένο και επαναλαμβάνουμε τον έλεγχο με τα κέρδη που έχουν υπολογιστεί για χρονικά μεταβαλλόμενη είσοδο αναφοράς $\theta(t) = 5 + 2sin(\omega t)$. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα για διαφορετικές τιμές συχνότητας του ημιτόνου. Παρατίθενται τα διαγράμματα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης, ταχύτητας και εισόδου ελέγχου του συστήματος. Η επιθυμητή θέση απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα ενώ η τρέχουσα θέση με μπλε χρώμα.

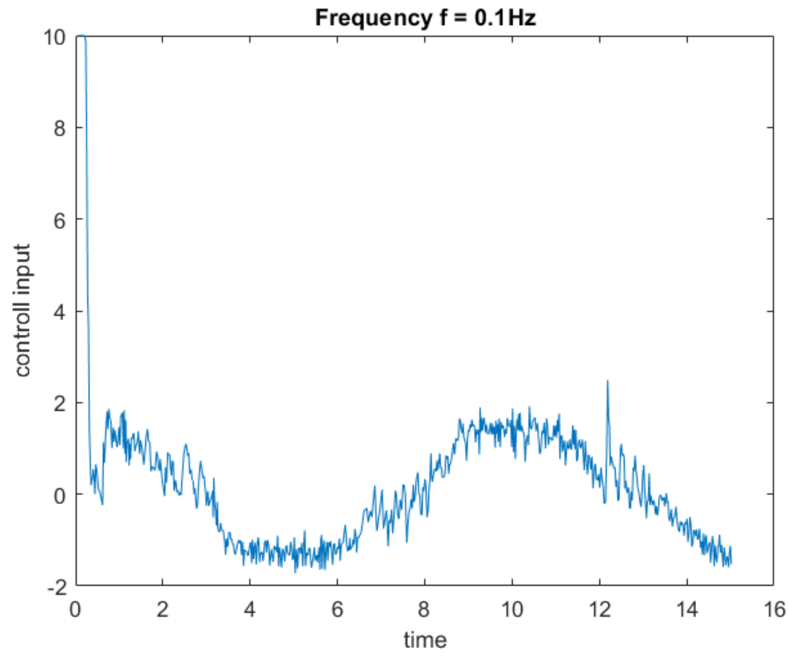
- $f = 0.1Hz$



Σχήμα 10: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

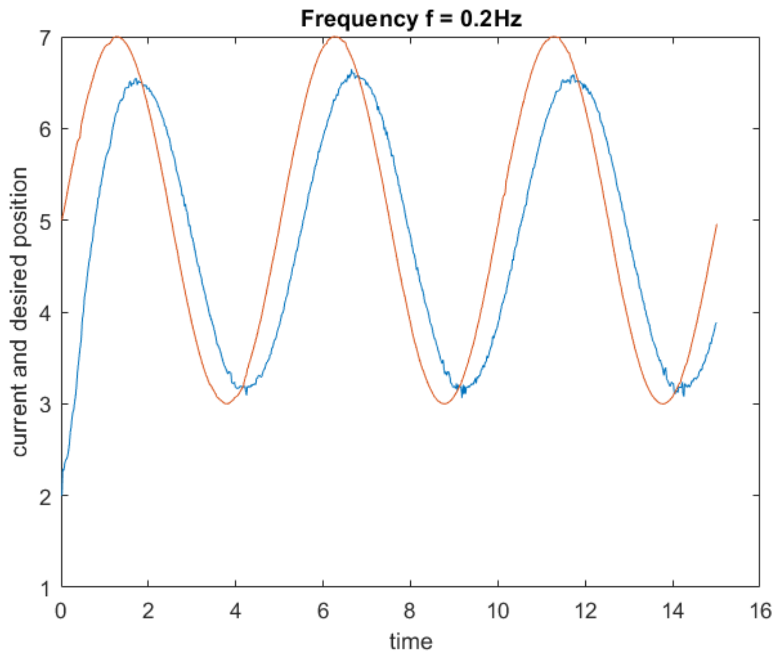


Σχήμα 11: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

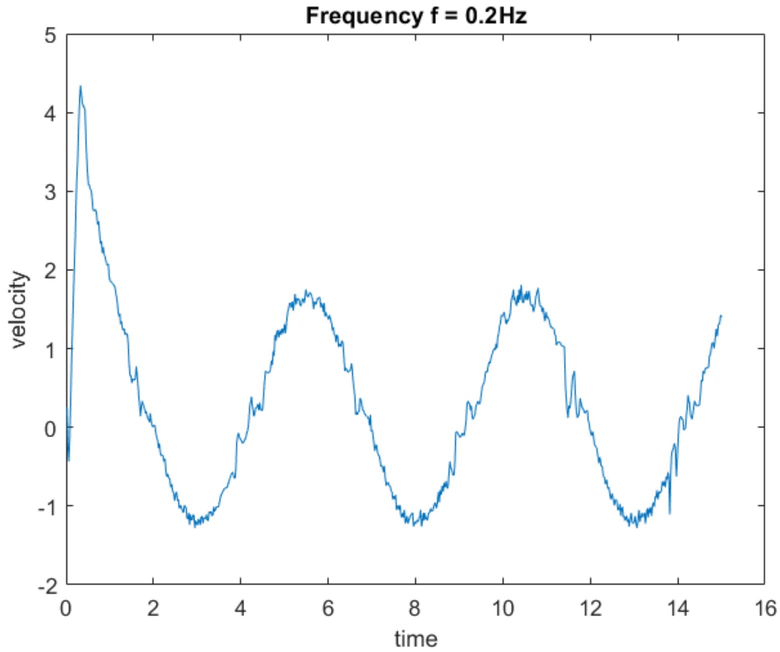


Σχήμα 12: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

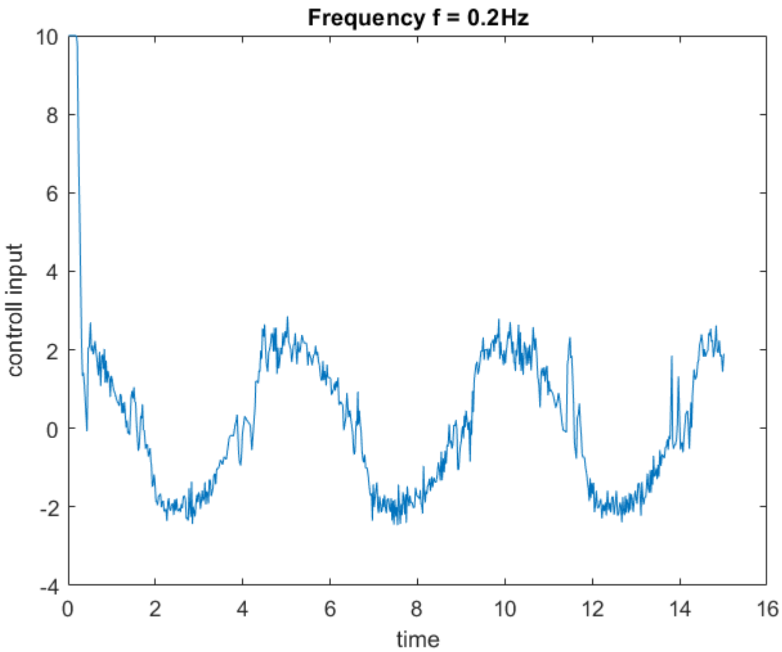
- $f = 0.2Hz$



Σχήμα 13: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

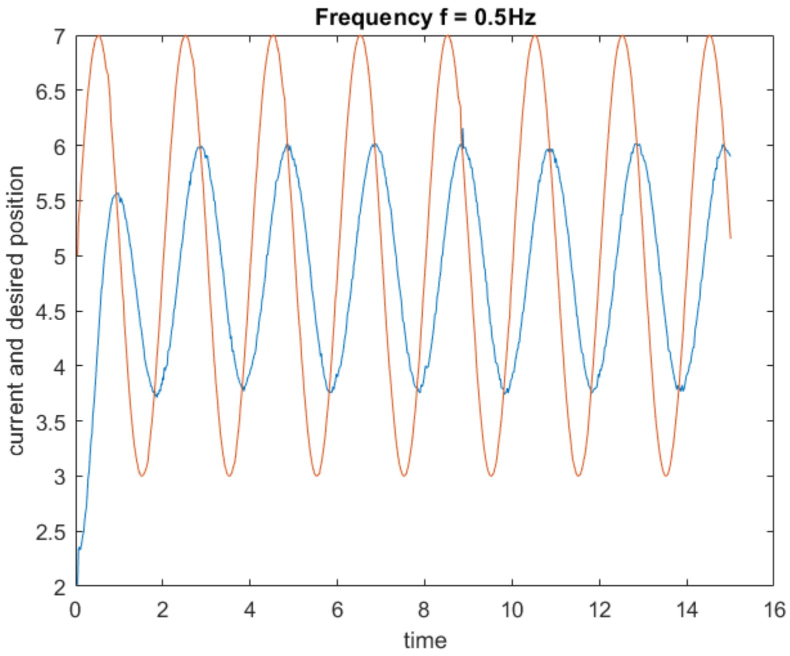


Σχήμα 14: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

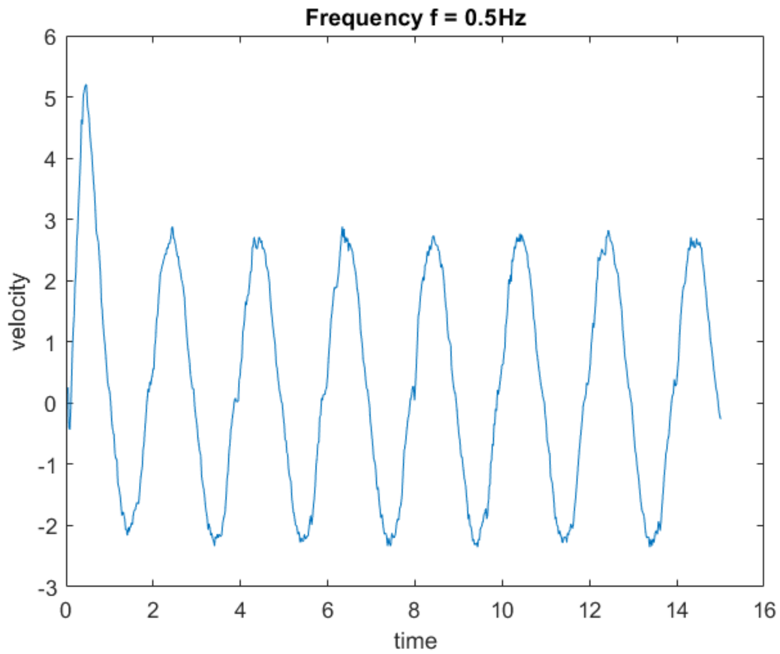


Σχήμα 15: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

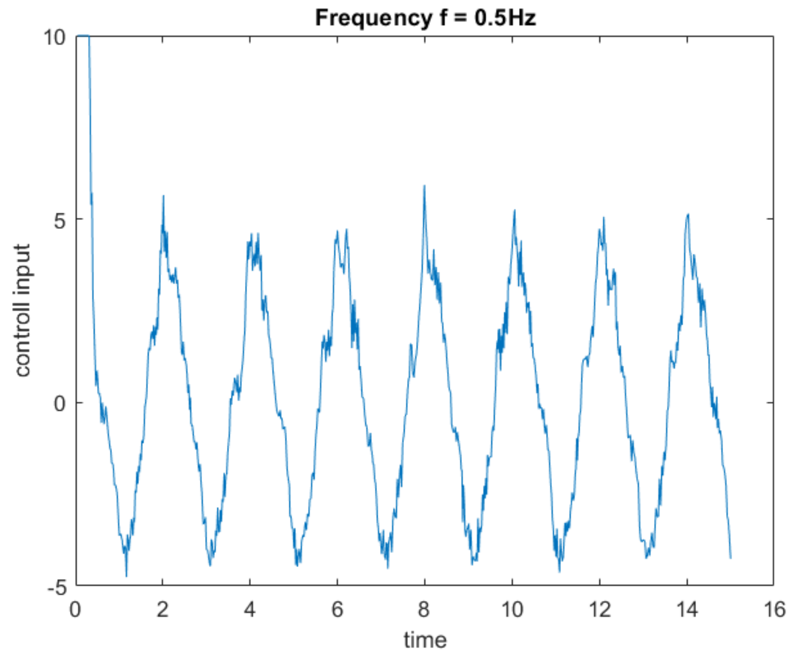
- $f = 0.5Hz$



Σχήμα 16: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

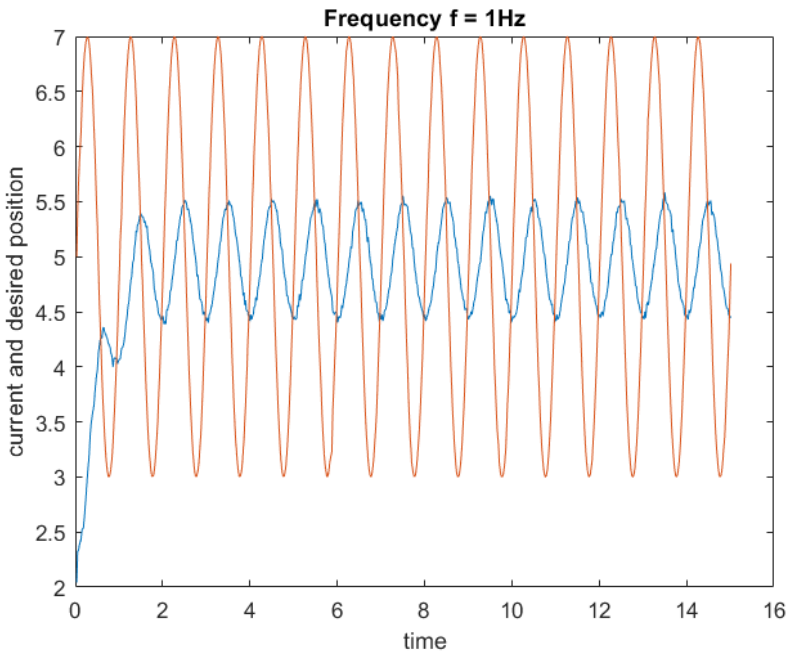


Σχήμα 17: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

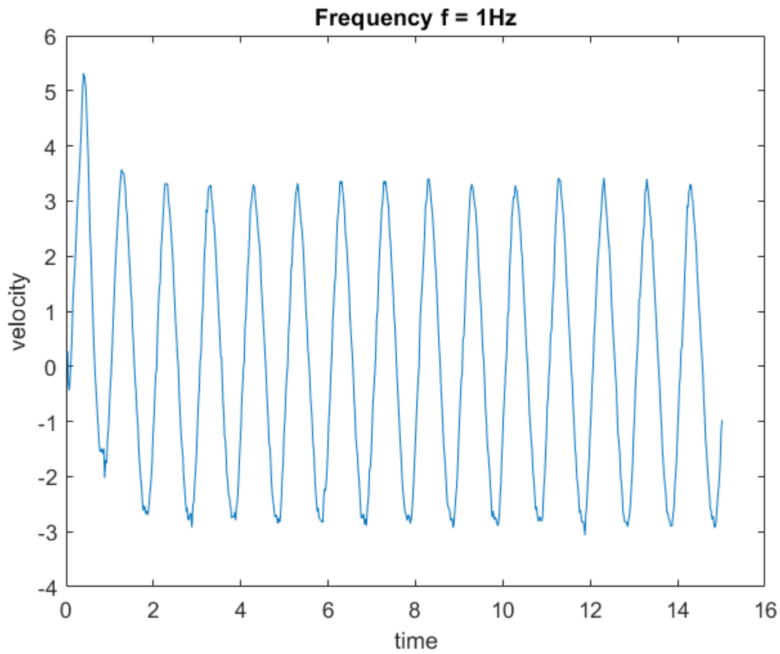


Σχήμα 18: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

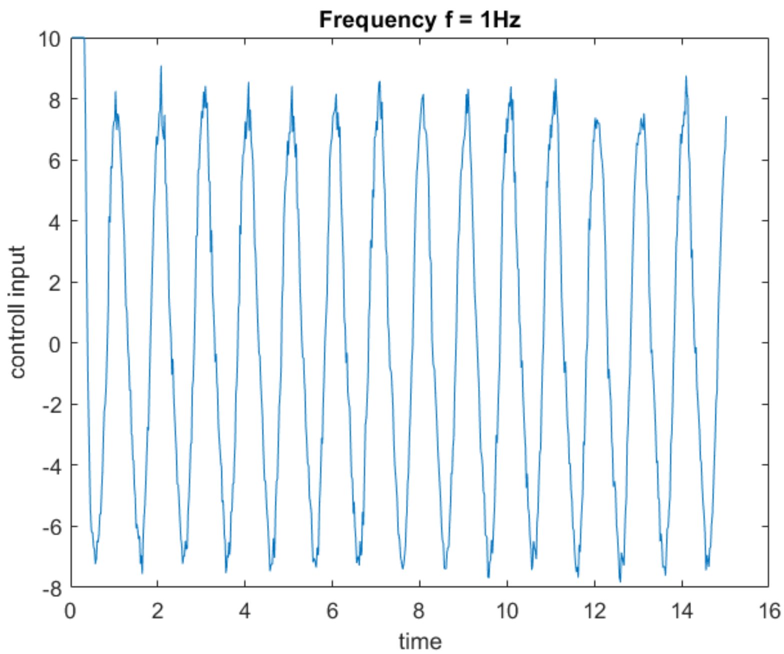
- $f = 1Hz$



Σχήμα 19: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

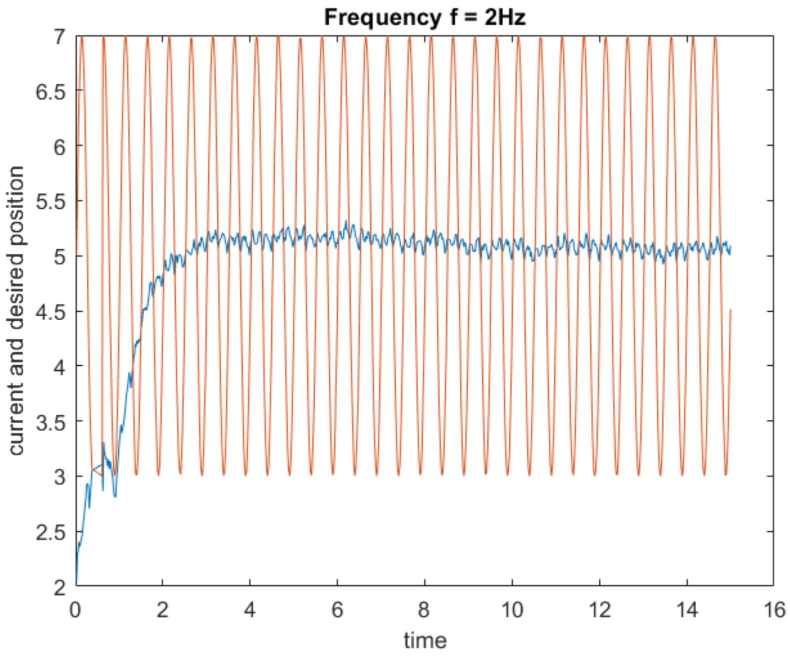


Σχήμα 20: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

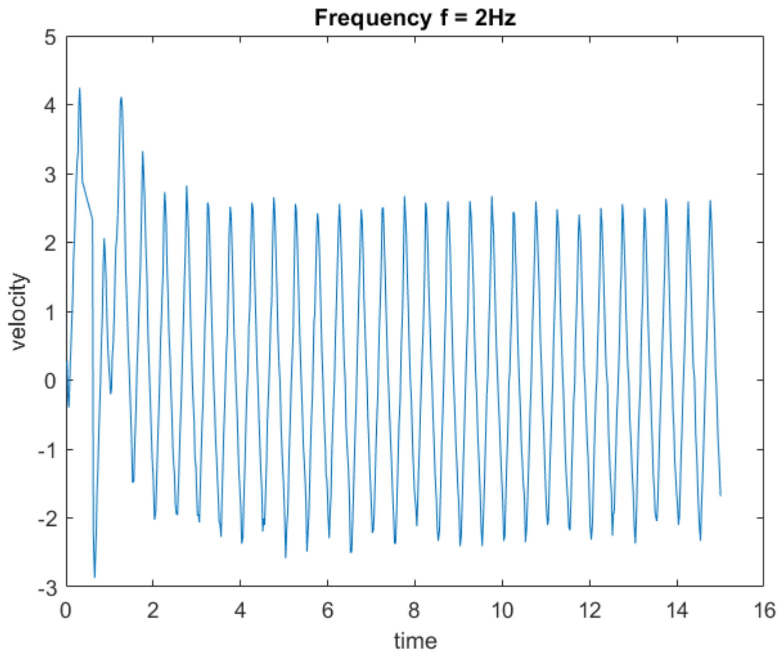


Σχήμα 21: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

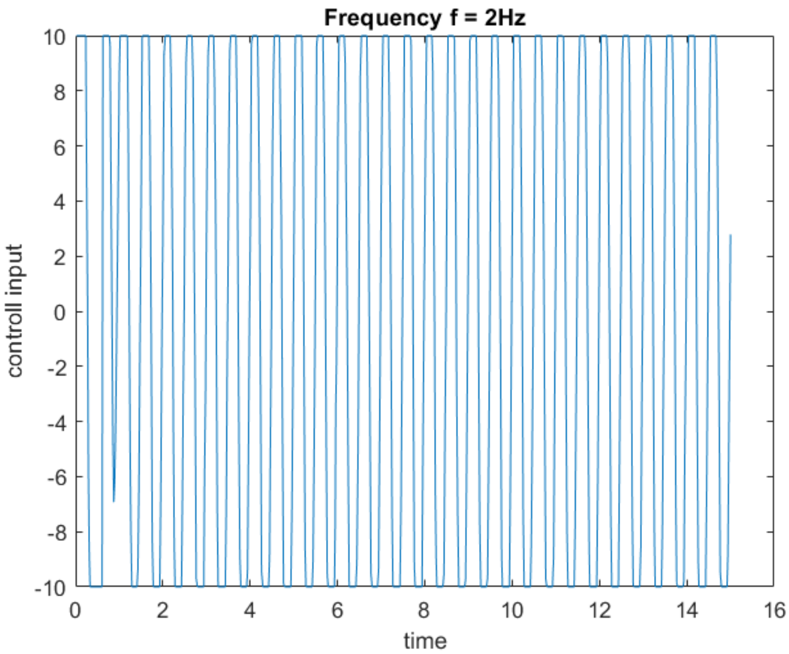
■ $f = 2Hz$



Σχήμα 22: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 23: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 24: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

Μελετώντας τα παραπάνω διαγράμματα, παρατηρούμε αρχικά ότι όσο αυξάνεται η συχνότητα του σήματος αναφοράς, τόσο αυξάνεται το πλάτος της απαιτούμενης εισόδου ελέγχου. Στις χαμηλές συχνότητες 0.1Hz, 0.2Hz η έξοδος του συστήματος παρακολουθεί την είσοδο αναφοράς σε αρκούντα βαθμό, ωστόσο με μία χρονική καθυστέρηση περίπου της τάξης του 0.5sec και μια μικρή μείωση στο επιθυμητό πλάτος του ημιτόνου. Στις υψηλότερες συχνότητες 0.5Hz, 1Hz, η χρονική καθυστέρηση παραμένει ιδίας τάξης, ενώ το πλάτος του σήματος εξόδου παρουσιάζει σημαντική μείωση σε σύγκριση με το πλάτος του σήματος αναφοράς. Αυτό συμβαίνει καθώς λόγω φυσικών περιορισμών ο κινητήρας δε μπορεί να αποκριθεί τόσο γρήγορα στις μεγάλες αλλαγές του πλάτους της εισόδου ελέγχου με αποτέλεσμα η έξοδος να μην 'προλαβαίνει' να παρακολουθήσει τις αλλαγές στο πλάτος του σήματος αναφοράς. Παρατηρούμε, τέλος, ότι στην συχνότητα 2Hz το πλάτος της απαιτούμενης εισόδου ελέγχου φθάνει στον κορεσμό και η έξοδος παύει εντελώς να παρακολουθεί την είσοδο αναφοράς.

3 Εργαστηριακή άσκηση 3: Σχεδίαση ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων

3.1 Θεωρητική ανάλυση

Στόχος της τρίτης εργαστηριακής άσκησης αποτελεί, όμοια με την δεύτερη εργαστηριακή άσκηση, η σύγκλιση της θέσης του κινητήρα σε μια επιθυμητή τιμή. Κατά την διεξαγωγή του δεύτερου εργαστηρίου παρατηρήθηκε ότι η εξωτερική διαταραχή που εφήρμοζε το μαγνητικό φρένο αλλοίωνε την αποτελεσματικότητα του ελεγκτή. Συγκεκριμένα, η απόκριση εξόδου του συστήματος ελέγχου παρουσίαζε σφάλμα θέσης e_{ssp} περίπου της τάξης του $0.4V$. Με σκοπό να επιτύχουμε την απόσβεση των διαταραχών και να μηδενίσουμε το σφάλμα θέσης, σε αυτήν την άσκηση θα σχεδιάσουμε έναν νέο ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης. Η σχεδίαση θα γίνει στο μοντέλο εξισώσεων κατάστασης που παρουσιάστηκε στην πρώτη ενότητα και με προδιαγραφές την απουσία υπερύψωσης και την ελαχιστοποίηση του χρόνου αποκατάστασης της απόκρισης εξόδου.

Ο ελεγκτής δυναμικής ανάδρασης περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$u = -Kx - k_i z \tag{1}$$

$$\dot{z} = Cx - r \tag{2}$$

Το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ένα γραμμικό σύστημα $3^{ης}$ τάξης, το οποίο περιγράφεται από τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης και εξόδου:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} & 0 \\ -\frac{k_m \cdot k_T}{T_m} k_1 & -\frac{(1+k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m} & -\frac{k_m \cdot k_T}{T_m} k_i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} r \tag{3}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \tag{4}$$

Είναι δηλαδή της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \tilde{B}r$$

$$y = \tilde{C} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Τα κέρδη k_1, k_2, k_i του ελεγκτή απαιτείται να επιλεχθούν με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε το σύστημα να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή οι ιδιοτιμές του πίνακα $\tilde{A}$ να έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος. Επιπλέον, προκειμένου η απόκριση εξόδου να μην παρουσιάζει υπερύψωση, απαιτείται οι ιδιοτιμές του συστήματος να είναι καθαρά πραγματικές.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου δίνεται από την σχέση:

$$p_C(s) = det(sI - \tilde{A}) = \begin{vmatrix} s & -\frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} & 0 \\ \frac{k_m \cdot k_T}{T_m}k_1 & s + \frac{(1+k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m} & \frac{k_m \cdot k_T}{T_m}k_i \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$p_C(s) = s^3 + \frac{(1 + k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m}s^2 + \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m}k_1 s + \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m}k_i \tag{5}$$

Έστω $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ οι επιθυμητές ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}_{>0}$.
Το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου γράφεται:

$$p_d(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2)(s + \lambda_3) = s^3 + p_1 s^2 + p_2 s + p_3 \tag{6}$$

όπου

$$p_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{7}$$

$$p_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 + \lambda_1 \cdot \lambda_3 + \lambda_2 \cdot \lambda_3 \tag{8}$$

$$p_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \tag{9}$$

Συγκρίνοντας τα πολυώνυμα (5) και (6) προκύπτει:

$$p_1 = \frac{(1 + k_m \cdot k_T \cdot k_2)}{T_m}$$

$$p_2 = \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m}k_1$$

$$p_3 = \frac{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0}{T_m}k_i$$

Οπότε τα κέρδη k_1, k_2, k_i υπολογίζονται ως εξής:

$$k_1 = \frac{T_m \cdot p_2}{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0} \tag{10}$$

$$k_2 = \frac{T_m \cdot p_1 - 1}{k_m \cdot k_T} \tag{11}$$

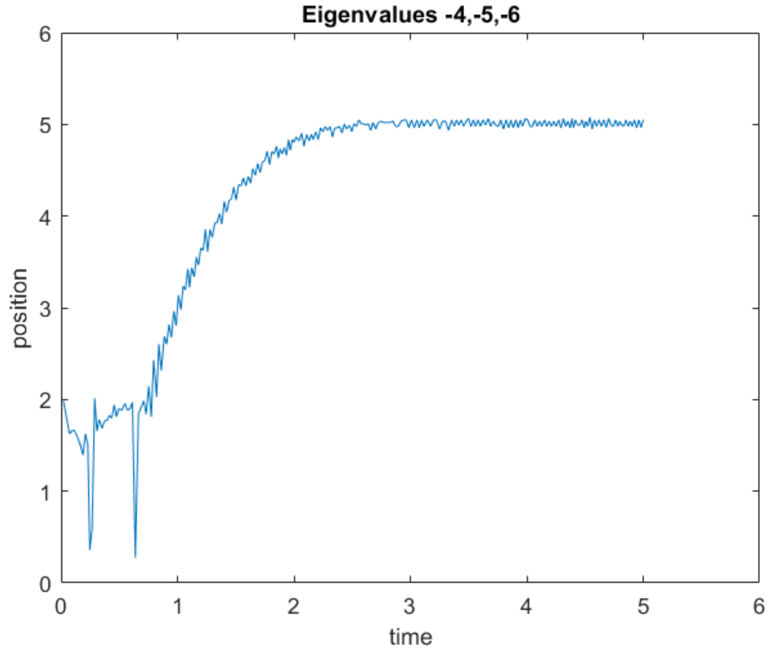
$$k_i = \frac{T_m \cdot p_3}{k_m \cdot k_\mu \cdot k_0} \tag{12}$$

Ο χρόνος αποκατάστασης του συστήματος καθορίζεται από την πιο αργή ιδιοτιμή του πίνακα $\tilde{A}$, $\lambda_{min}(-\tilde{A})$. Επομένως, επιλέγοντας κατάλληλα τις θέσεις των ιδιοτιμών του συστήματος κλειστού βρόχου όσο το δυνατόν πιο αριστερά στον αρνητικό πραγματικό άξονα μπορούμε να επιτύχουμε μηδενική υπερύψωση και μείωση του χρόνου αποκατάστασης του ελεγχόμενου συστήματος.

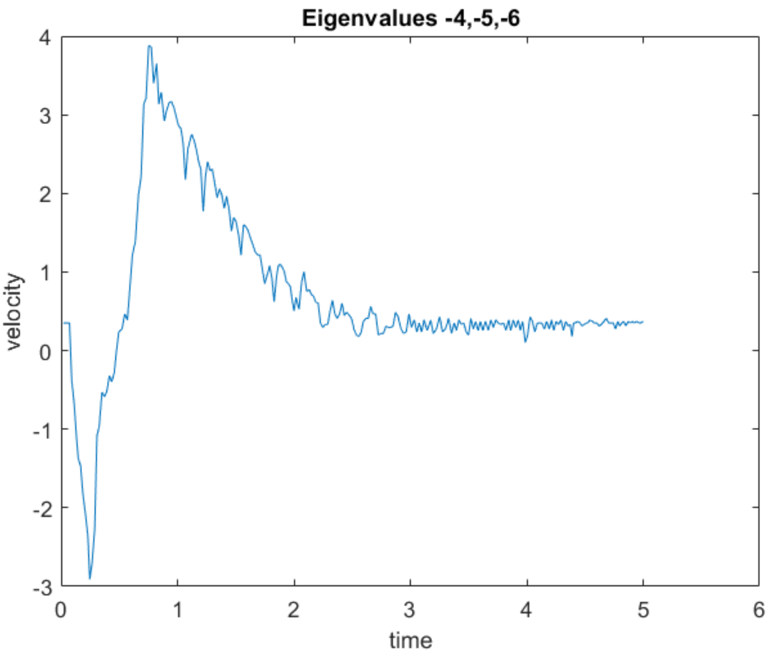
3.2 Πειραματικά αποτελέσματα

Κατά την διεξαγωγή της τρίτης εργαστηριακής άσκησης πραγματοποιήθηκαν πειραματικές δοκιμές με την τοποθέτηση των ιδιοτιμών σε επιλεγμένες θέσεις στον αρνητικό πραγματικό άξονα, όπως παρουσιάστηκε στην παραπάνω θεωρητική ανάλυση. Παρατίθενται τα διαγράμματα των μεταβλητών κατάστασης, της εισόδου ελέγχου και κοινό διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου.

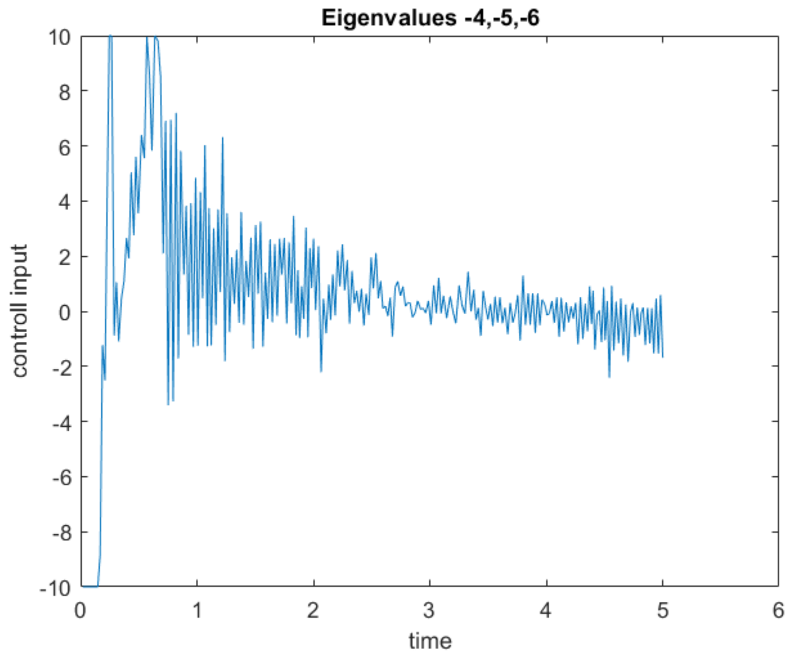
- $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 5, \lambda_3 = 6$
  Τα κέρδη του ελεγκτή προκύπτουν: $k_1 = 24.4128, k_2 = 7.3459, k_i = 39.5883$



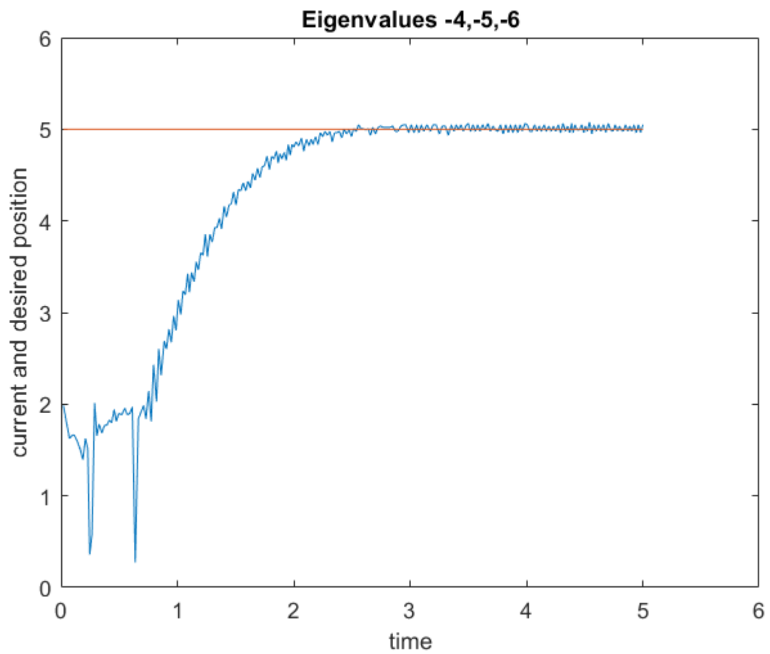
Σχήμα 25: Διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 26: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

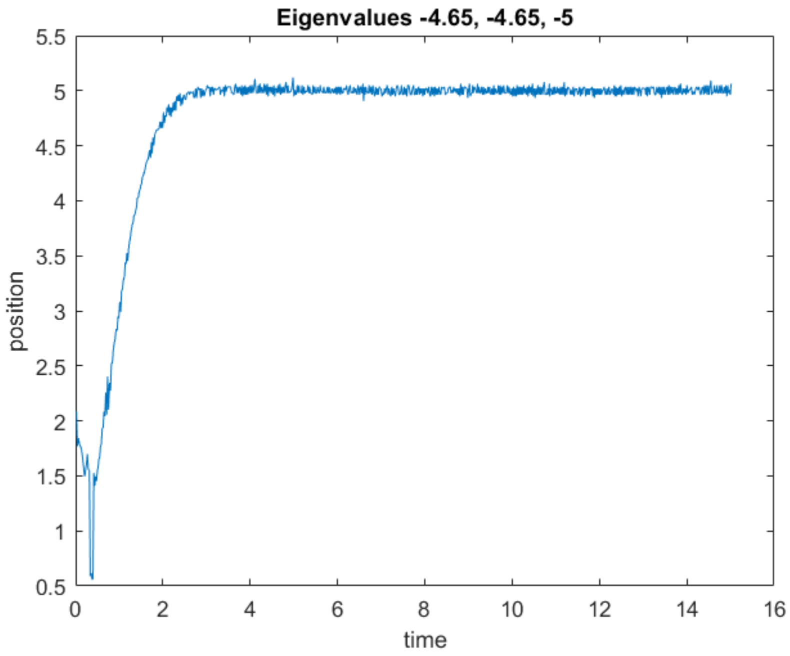


Σχήμα 27: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

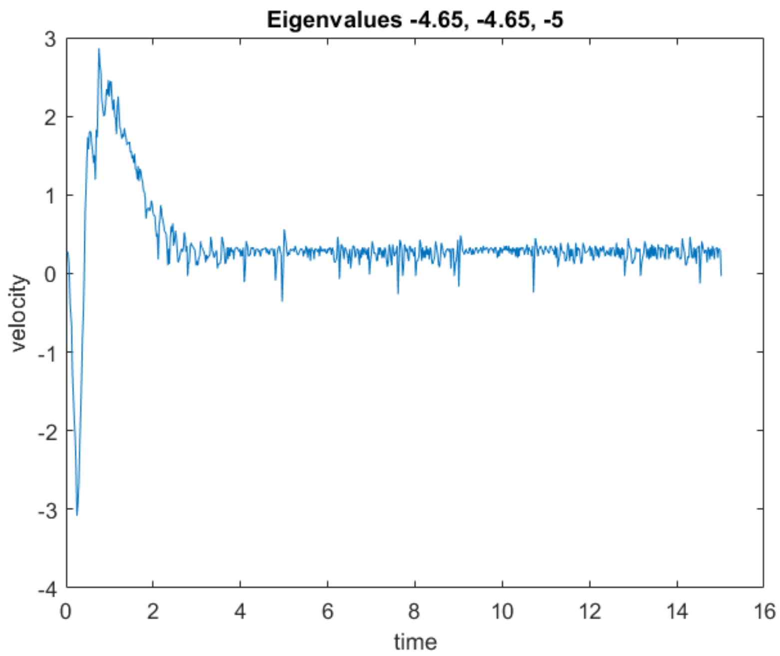


Σχήμα 28: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

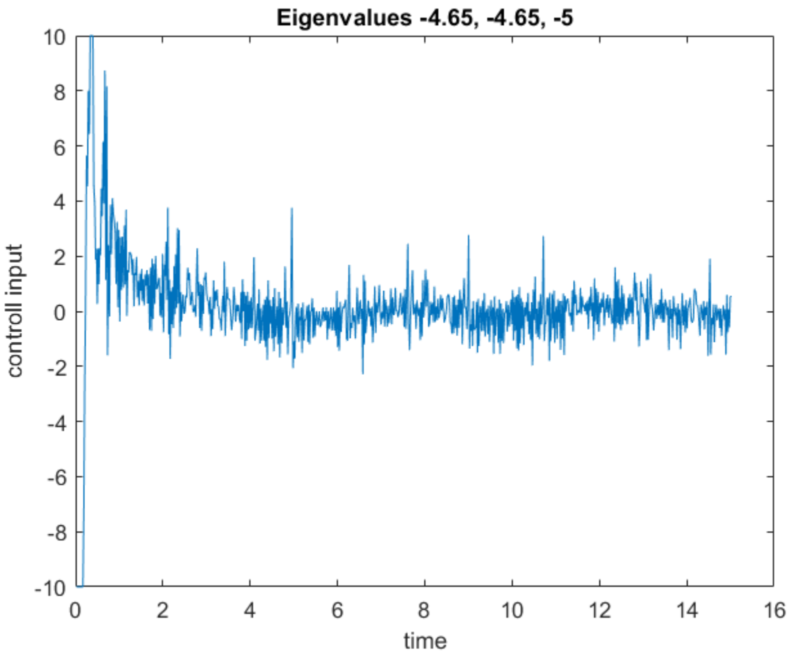
- $\lambda_1 = 4.65, \lambda_2 = 4.65, \lambda_3 = 5$
  Τα κέρδη του ελεγκτή προκύπτουν: $k_1 = 22.4738, k_2 = 6.9478, k_i = 35.6665$



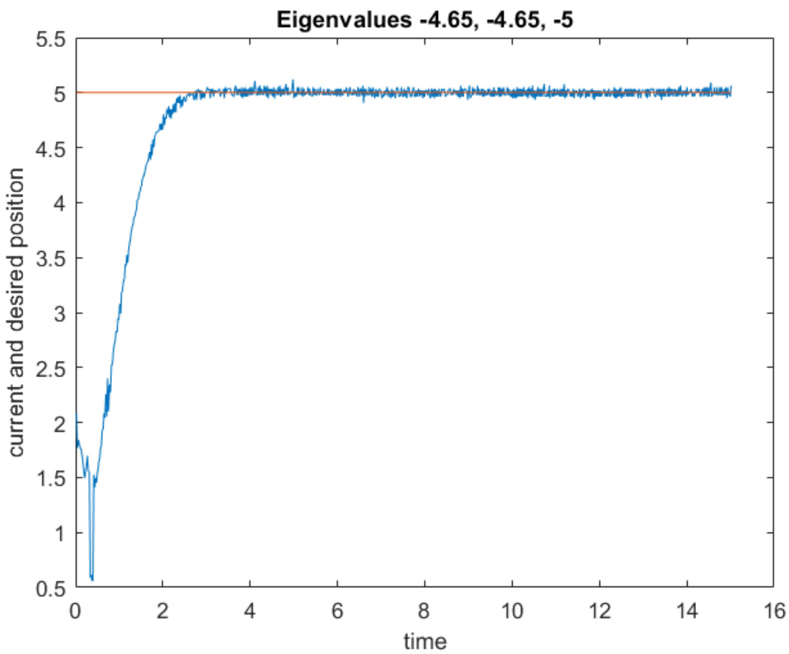
Σχήμα 29: Διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 30: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

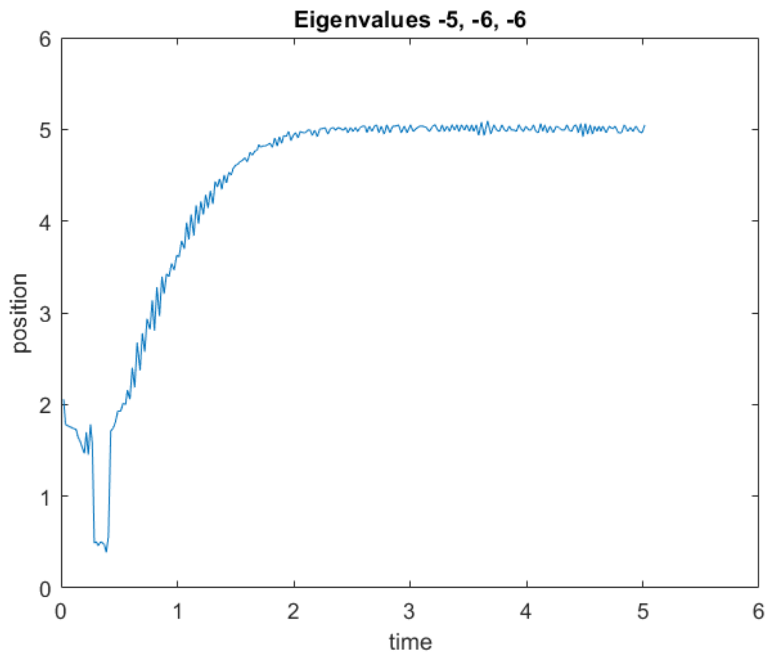


Σχήμα 31: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

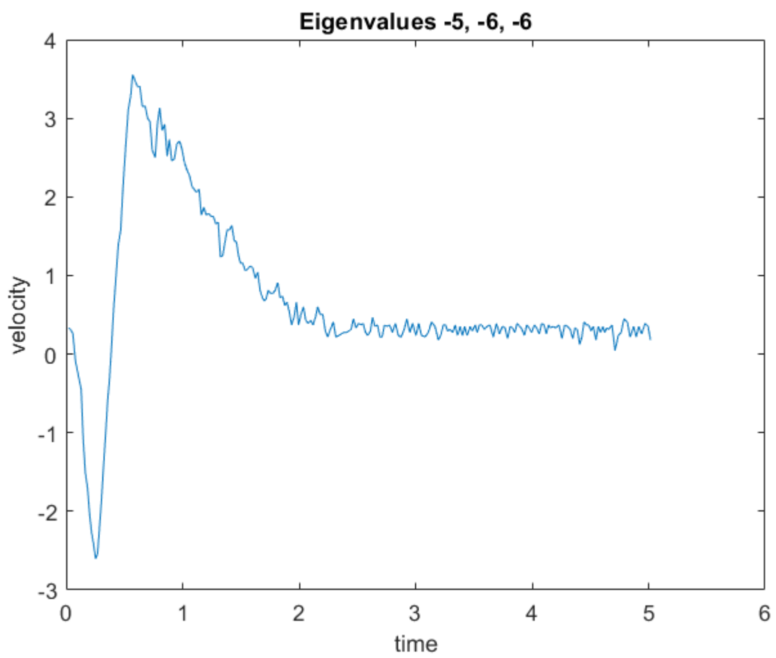


Σχήμα 32: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

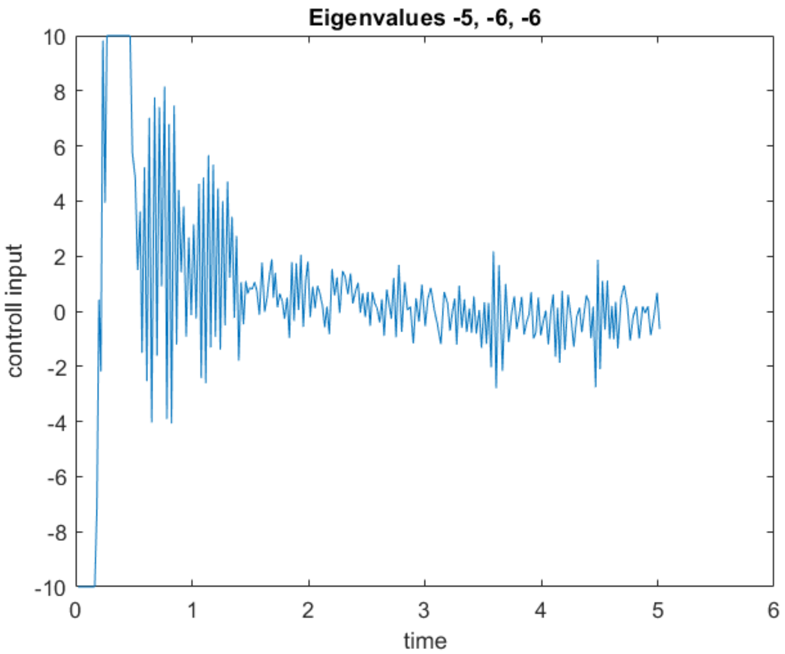
- $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 6$
  Τα κέρδη του ελεγκτή προκύπτουν: $k_1 = 31.6709, k_2 = 8.4833, k_i = 59.3824$



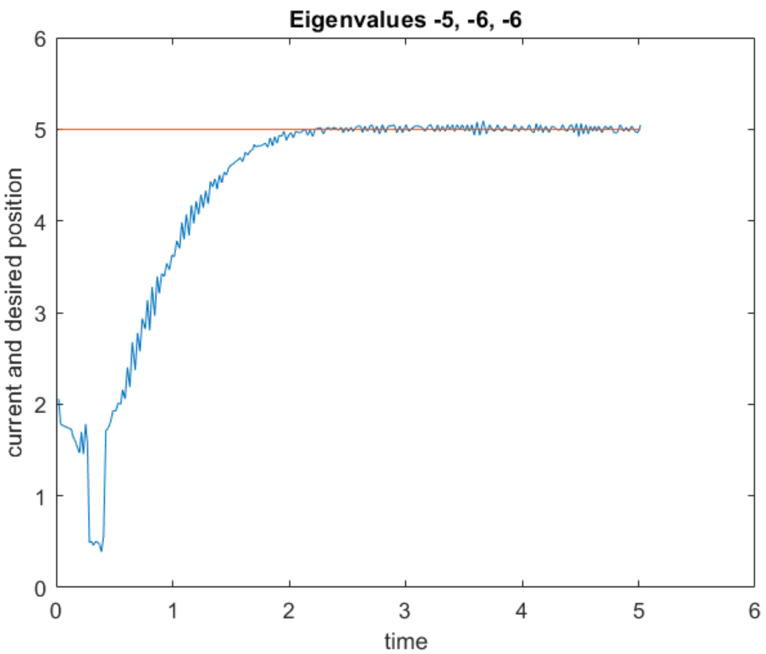
Σχήμα 33: Διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 34: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



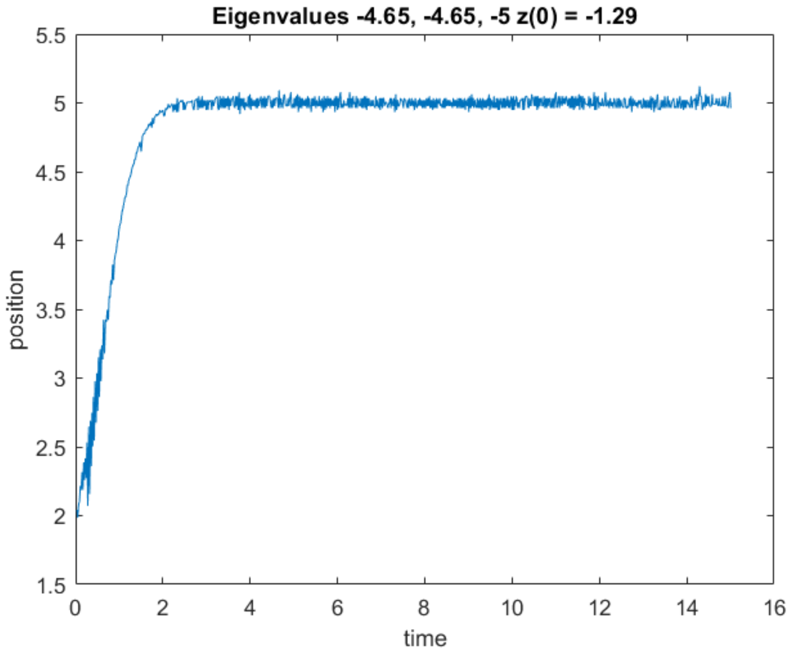
Σχήμα 35: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου



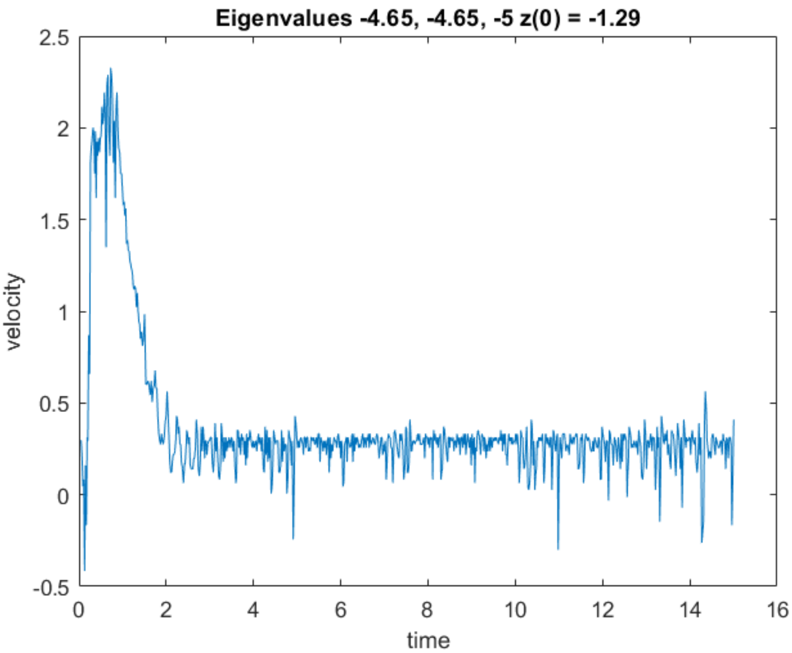
Σχήμα 36: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

Με βάση τα διάγραμματα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης σε κάθε περίπτωση, διαπιστώνουμε ότι με την υλοποίηση ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης το σφάλμα θέσης στη μόνιμη κατάσταση, το οποίο παρατηρήθηκε στην προηγούμενη εργαστηριακή άσκηση, πρακτικά εξαλείφεται.
Ο ελάχιστος χρόνος αποκατάστασης επιτυγχάνεται για ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου $-\lambda_1 = -5, -\lambda_2 = -6, -\lambda_3 = -6$ και είναι περίπου 1.85sec. Η τοποθέτηση των ιδιοτιμών αριστερότερα στον αρνητικό πραγματικό άξονα παρατηρήθηκε ότι προκαλεί μεγάλες ταλαντώσεις στις τιμές της εισόδου ελέγχου, η οποία λαμβάνει ιδιαίτερα μεγάλες τιμές επιβαρύνοντας το σύστημα χωρίς να επιτυγχάνεται μικρότερος χρόνος αποκατάστασης.
Τέλος, με βάση τα διαγράμματα θέσης και ταχύτητας, διαπιστώνεται ότι ο κινητήρας στρέφεται αρχικά για ένα μικρό χρονικό διάστημα προς την αντίθετη φορά από την επιθυμητή, οπότε και παρατηρείται αρνητική τάση ταχογεννήτριας και μείωση της τάσης-θέσης. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αρνητική είσοδο ελέγχου που εφαρμόζεται αρχικά στο σύστημα, όπως φαίνεται από την σχέση (1) με θετικά κέρδη και αρχικές τιμές μεταβλητών κατάστασης

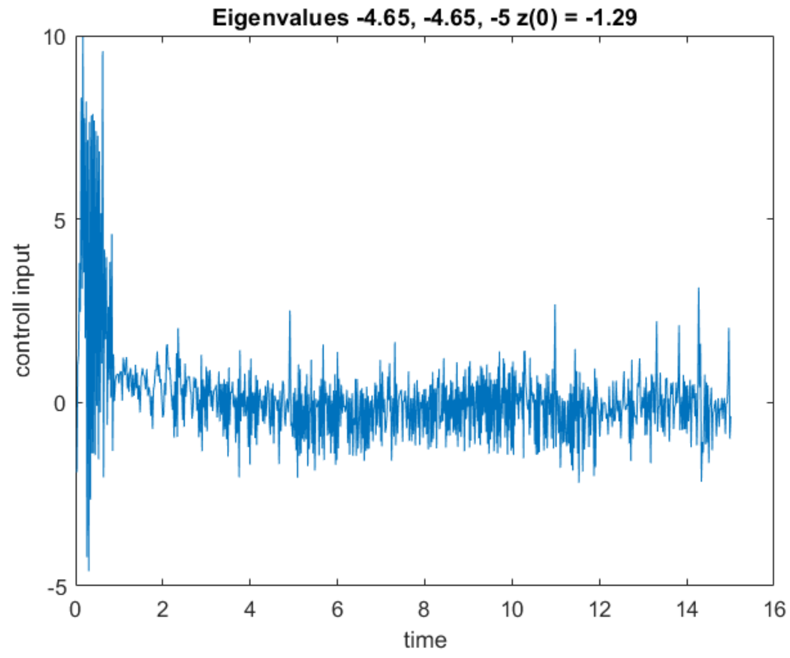
$x_1(0) = 2, x_2(0) = 0, z(0) = 0$. Όταν οι μεταβλητές κατάστασης λάβουν τέτοιες τιμές ώστε η είσοδος ελέγχου να γίνει θετική, ο κινητήρας θα αρχίσει να στρέφεται προς την αντίθετη φορά με θετική τάση ταχογεννήτριας προκαλώντας αύξηση της τάσης-θέσης και σύγκλιση αυτής στην επιθυμητή τιμή 5V. Το φαινόμενο αυτό είναι δυνατόν να αποφευχθεί επιλέγοντας κατάλληλη αρνητική αρχική τιμή $z(0)$ ώστε η είσοδος ελέγχου να είναι εξαρχής θετική και να στρέψει τον κινητήρα προς την επιθυμητή φορά. Μια τέτοια λύση φαίνεται παρακάτω, όπου επιλέχθηκε $z(0) = -1.29V$. Πρέπει, ωστόσο, να τονιστεί εδώ ότι η λύση αυτή δεν είναι γενική αλλά έχει εφαρμογή μόνο στο δεδομένο πρόβλημα ελέγχου ρύθμισης της θέσης σε $\theta_{ref} = 5V$ με $\theta_0 = 2V$ και μπορεί να εφαρμοστεί με ενδεχόμενες τροποποιήσεις αν το ζητούμενο αλλάξει.



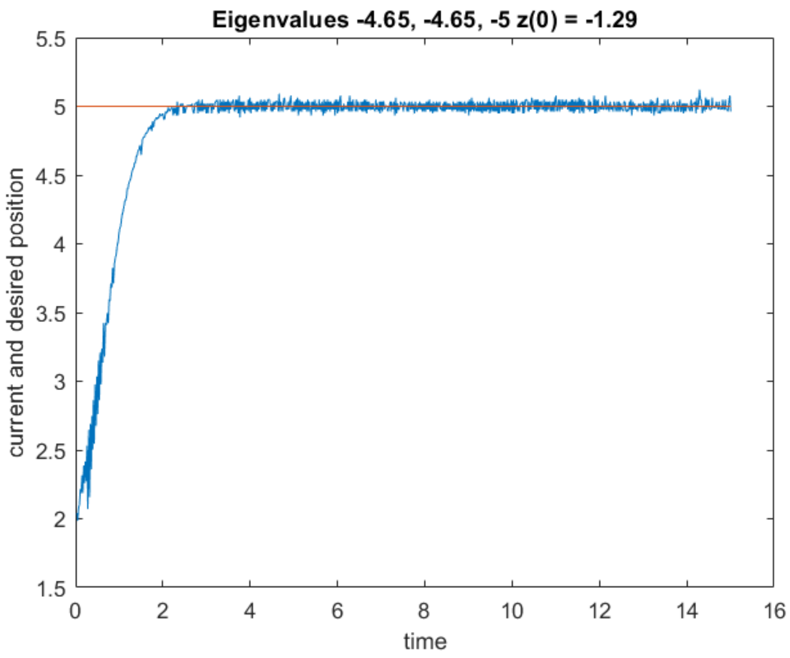
Σχήμα 37: Διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 38: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 39: Διάγραμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 40: Διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

Παρατηρούμε ότι με την επιλογή $z(0) = -1.29V$ ο χρόνος αποκατάστασης μειώνεται περαιτέρω.

4 Εργαστηριακή άσκηση 4: Σχεδίαση παρατηρητή

4.1 Θεωρητική ανάλυση

Στην τελευταία εργαστηριακή άσκηση, υποθέτουμε ότι η μεταβλητή κατάστασης x_2, δηλαδή η τάση της ταχογεννήτριας, δεν είναι μετρήσιμη. Συνεπώς, μετρήσιμη είναι μόνο η έξοδος του συστήματος, δηλαδή η θέση του κινητήρα. Για τον λόγο αυτό, θα σχεδιάσουμε ένα σύστημα παρατηρητή με σκοπό να εκτιμήσουμε το άγνωστο διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης μέσω μετρήσεων εισόδου-εξόδου. Πρέπει να σημειωθεί ότι για να είναι εφικτή η σχεδίαση του παρατηρητή είναι απαραίτητο το μελετώμενο σύστημα να είναι παρατηρήσιμο. Εργαζόμαστε στο μοντέλο εξισώσεων κατάστασης και εξόδου που έχει εξαχθεί στην ενότητα 2 και υπενθυμίζεται εδώ:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

όπου $x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ και οι πίνακες A, B, C ορίζονται ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} \\ 0 & -\frac{1}{T_m} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m \cdot k_T}{T_m} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να προσδιορίσουμε την παρατηρησιμότητα του συστήματος, κατασκευάζουμε τον πίνακα παρατηρησιμότητας W:

$$W = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Ισχύει $det(W) = \frac{k_\mu \cdot k_0}{k_T} \neq 0$, οπότε $rank(W) = n = 2$, όπου n η τάξη του συστήματος. Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι παρατηρήσιμο και μπορούμε εφεξής να προχωρήσουμε στην σχεδίαση του παρατηρητή.
Το σύστημα του παρατηρητή δέχεται ως εισόδους τα διανύσματα $u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ και αποκρίνεται με το εκτιμώμενο διάνυσμα κατάστασης $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε τον παρατηρητή ως εξής:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}) \tag{2}$$

Ορίζουμε ακόμη το σφάλμα εκτίμησης:

$$\tilde{x} = x - \hat{x} \tag{3}$$

Η διαφορική εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης προκύπτει:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x} \tag{4}$$

Αν επιλέξουμε τον πίνακα L έτσι ώστε οι ιδιοτιμές του πίνακα $(A - LC)$ να κείνται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο, τότε το σύστημα (3) θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και το σφάλμα εκτίμησης θα συγκλίνει εκθετικά στο 0. Είναι σημαντικό να διασφαλίσουμε ότι οι ιδιοτιμές του $(A-LC)$ θα τοποθετηθούν αρκούντως μακριά από τον φανταστικό άξονα, έτσι ώστε η ταχύτητα σύγκλισης της εκτίμησης $\hat{x}$ στο διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης x να είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα απόκρισης του παρατηρούμενου συστήματος και ότι ο παρατηρητής να αποτυπώσει το μεταβατικό φαινόμενο του x.
Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος ανοικτού βρόχου είναι:

$$p(s) = det(sI - A) = s^2 + \frac{1}{T_m}s = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

όπου $\alpha_1 = \frac{1}{T_m}$ και $\alpha_2 = 0$.
Ο πίνακας παρατηρησιμότητας της παρατηρήσιμης κανονικής μορφής βρίσκεται:

$$\tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{T_m} & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Έστω ότι το παρακάτω είναι το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος σφάλματος εκτίμησης:

$$p_d(s) = s^2 + p_1 s + p_2$$

Ο πίνακας L υπολογίζεται ως εξής:

$$L = W^{-1}\tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - \alpha_1 \\ p_2 - \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Από τις (1), (5) και επειδή $\alpha_1 = \frac{1}{T_m}$ και $\alpha_2 = 0$ υπολογίζεται:

$$L = \begin{bmatrix} p_1 - \frac{1}{T_m} \\ -(p_1 - \frac{1}{T_m})\frac{k_T}{k_\mu \cdot k_0 \cdot T_m} + p_2 \frac{k_T}{k_\mu \cdot k_0} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Συνοψίζοντας, τα p_1, p_2 υπολογίζονται με βάση τις επιθυμητές ιδιοτιμές του πίνακα $(A - LC)$ και στη συνέχεια υπολογίζεται δεδομένων αυτών ο πίνακας L. Η εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης κάθε χρονική στιγμή είναι η λύση του συστήματος (2), η οποία γράφεται:

$$\hat{x}(t) = e^{(A-LC)t}\hat{x}(0) + \int_0^t e^{(A-LC)(t-\tau)}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau \tag{7}$$

Για να υλοποιήσουμε τον παρατηρητή στην πράξη θα χρειαστεί να μετατρέψουμε το παραπάνω σύστημα συνεχούς χρόνου σε σύστημα διακριτού χρόνου. Για τον σκοπό αυτό εργαζόμαστε ως εξής:
Ορίζουμε $\hat{x}[k] \triangleq \hat{x}(k\Delta t)$, όπου Δt είναι η περίοδος δειγματοληψίας του σήματος. Με βάση τον ορισμό αυτό και την εξίσωση (7) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\hat{x}[k+1] = \hat{x}((k+1)\Delta t) = e^{(A-LC)(k+1)\Delta t}\hat{x}(0) + \int_0^{(k+1)\Delta t} & e^{(A-LC)((k+1)\Delta t-\tau)}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau \\
\hat{x}[k+1] = e^{(A-LC)(k+1)\Delta t}\hat{x}(0) + \int_0^{k\Delta t} & e^{(A-LC)((k+1)\Delta t-\tau)}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau \\
+ \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} & e^{(A-LC)((k+1)\Delta t-\tau)}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau \\
\hat{x}[k+1] = e^{(A-LC)\Delta t} & \left[e^{(A-LC)k\Delta t}\hat{x}(0) + \int_0^{k\Delta t} e^{(A-LC)(k\Delta t-\tau)}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau \right] \\
+ \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} & e^{(A-LC)((k+1)\Delta t-\tau)}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau \\
\hat{x}[k+1] = e^{(A-LC)\Delta t}\hat{x}[k] + e^{(A-LC)(k+1)\Delta t} & \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-(A-LC)\tau}(Bu(\tau) + Ly(\tau))\, d\tau
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι τα σήματα u, y στο χρονικό διάστημα $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ διάρκειας Δt είναι σταθερά και ίσα με $u(k\Delta t), y(k\Delta t)$ αντίστοιχα. Οπότε η σχέση γίνεται:

$$\hat{x}[k+1] = e^{(A-LC)\Delta t}\hat{x}[k] + e^{(A-LC)(k+1)\Delta t}\left(\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{-(A-LC)\tau}\, d\tau\right)(Bu[k] + Ly[k])$$

Προκύπτει έτσι η λύση του συστήματος του παρατηρητή σε διακριτή μορφή:

$$\hat{x}[k+1] = e^{(A-LC)\Delta t}\hat{x}[k] + (A-LC)^{-1}(e^{(A-LC)\Delta t} - I)(Bu[k] + Ly[k]) \tag{8}$$

Πρόβλημα ελέγχου συνιστά, ομοίως με τις παραπάνω ασκήσεις, η σύγκλιση της θέσης του κινητήρα σε επιθυμητή τιμή και θα επιτευχθεί με την υλοποίηση ενός ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης εξόδου:

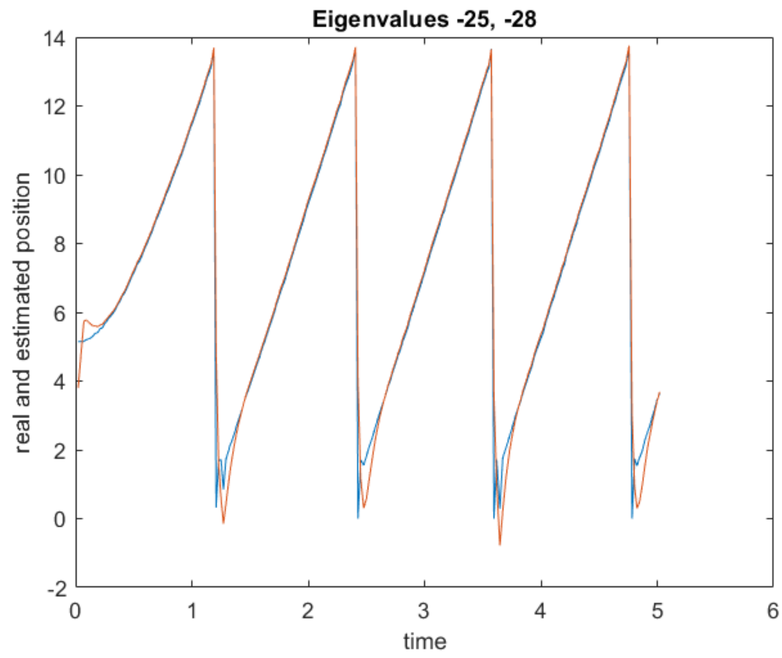
$$u = -K\hat{x} + k_r r \tag{9}$$

όπου $\hat{x}$ είναι η εκτίμηση του άγνωστου διανύσματος μεταβλητών κατάστασης όπως αυτή παράγεται από τον παρατηρητή.
Ο πίνακας κερδών K του ελεγκτή και ο πίνακας κερδών L του παρατηρητή υπολογίζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, σύμφωνα με την αρχή του διαχωρισμού. Συγκεκριμένα, ο πίνακας K και το κέρδος k_r υπολογίζονται όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 2, όμοια με την δεύτερη εργαστηριακή άσκηση, ενώ ο πίνακας L υπολογίζεται όπως αναλύθηκε παραπάνω. Υπενθυμίζεται ότι ο πίνακας L επιλέγεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι ιδιοτιμές του παρατηρητή να είναι αρκούντως μεγαλύτερες από τις ιδιοτιμές του ελεγχόμενου συστήματος κλειστού βρόχου (τουλάχιστον 2-6 φορές).

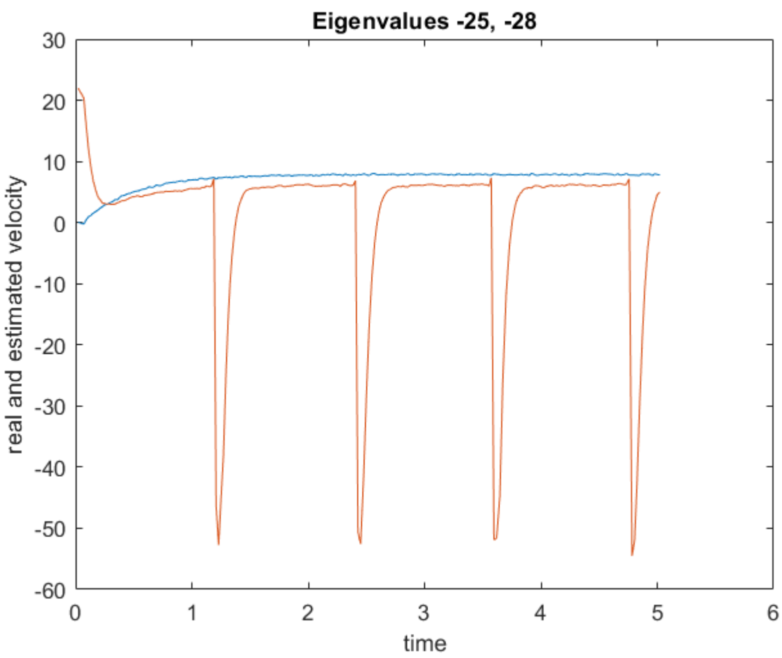
4.2 Πειραματικά αποτελέσματα

Πρώτη ενέργεια κατά την διεξαγωγή της τέταρτης εργαστηριακής άσκησης αποτελεί να ελέγξουμε αν οι εκτιμήσεις των καταστάσεων στην έξοδο του παρατηρητή ταυτίζονται με τις πραγματικές τους τιμές οι οποίες μετρώνται από το σύστημα. Διεγείρουμε το σύστημα με μια βηματική είσοδο $u = 7V$. Παρακάτω δίνονται κοινά διαγράμματα των πραγματικών και εκτιμώμενων καταστάσεων του συστήματος για διαφορετικές επιλογές των ιδιοτιμών του παρατηρητή.
Οι εκτιμώμενες καταστάσεις απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα, ενώ οι πραγματικές με μπλε.

- $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 28$

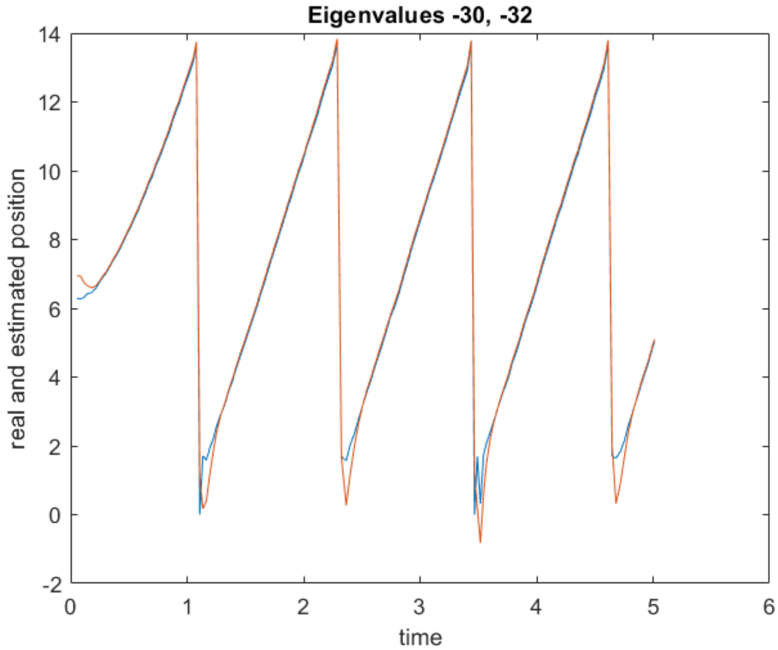


Σχήμα 41: Διάγραμμα πραγματικής και εκτιμώμενης θέσης συναρτήσει του χρόνου

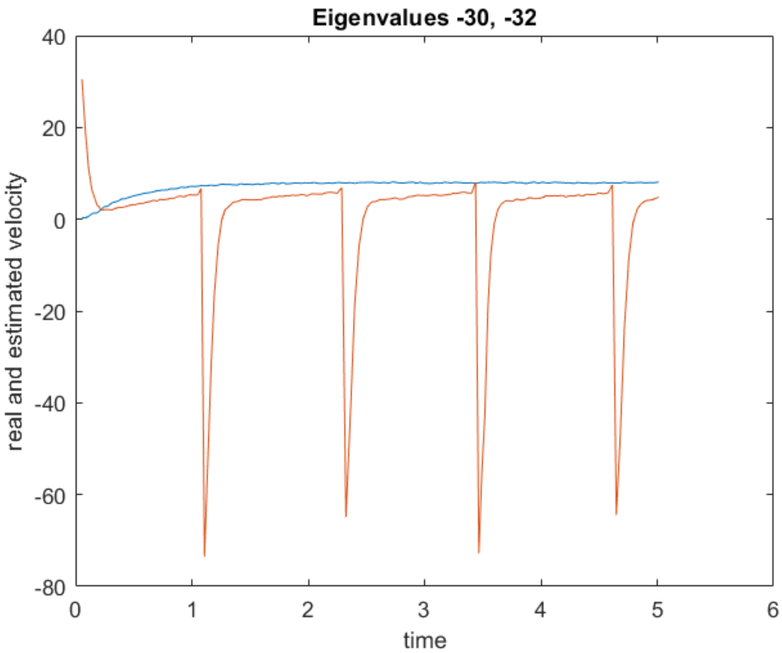


Σχήμα 42: Διάγραμμα πραγματικής και εκτιμώμενης ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

- $\lambda_1 = 30, \lambda_2 = 32$

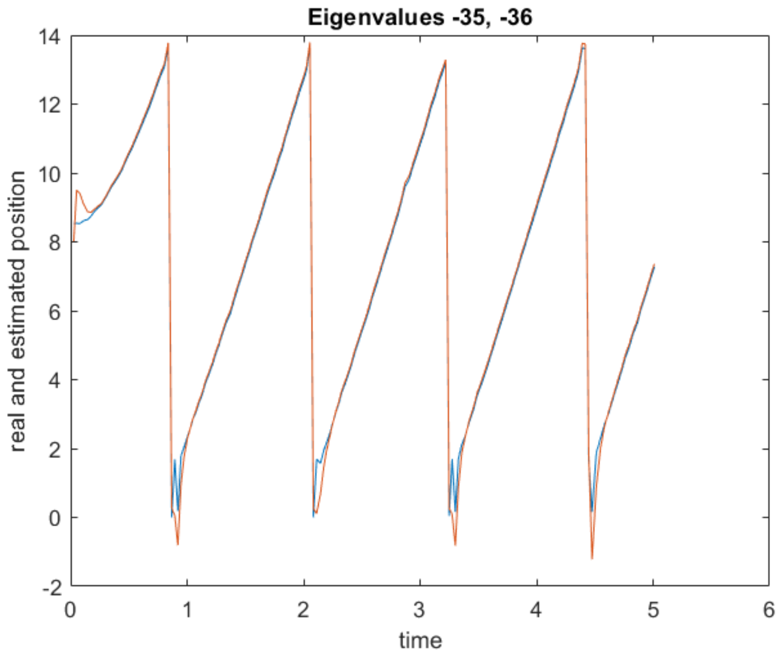


Σχήμα 43: Διάγραμμα πραγματικής και εκτιμώμενης θέσης συναρτήσει του χρόνου

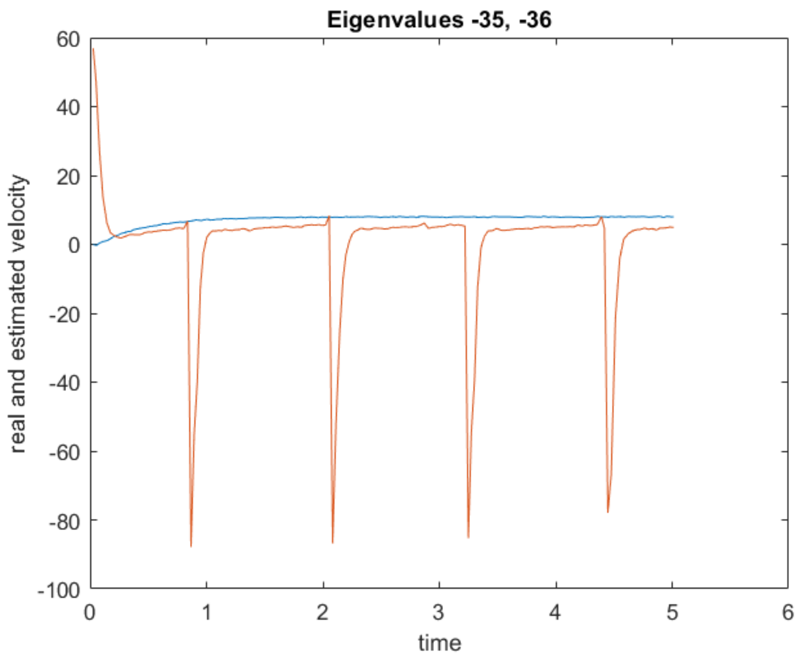


Σχήμα 44: Διάγραμμα πραγματικής και εκτιμώμενης ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

■ $\lambda_1 = 35, \lambda_2 = 36$



Σχήμα 45: Διάγραμμα πραγματικής και εκτιμώμενης θέσης συναρτήσει του χρόνου

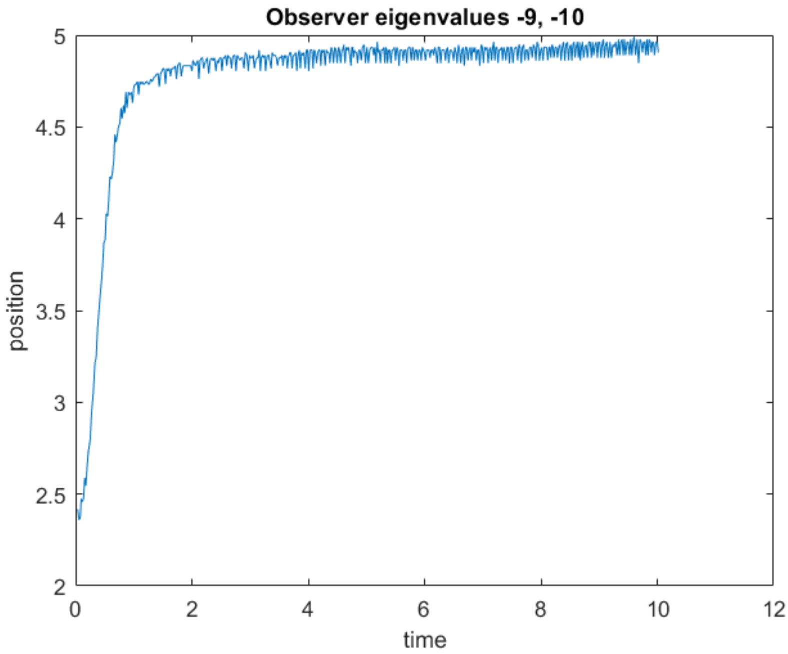


Σχήμα 46: Διάγραμμα πραγματικής και εκτιμώμενης ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

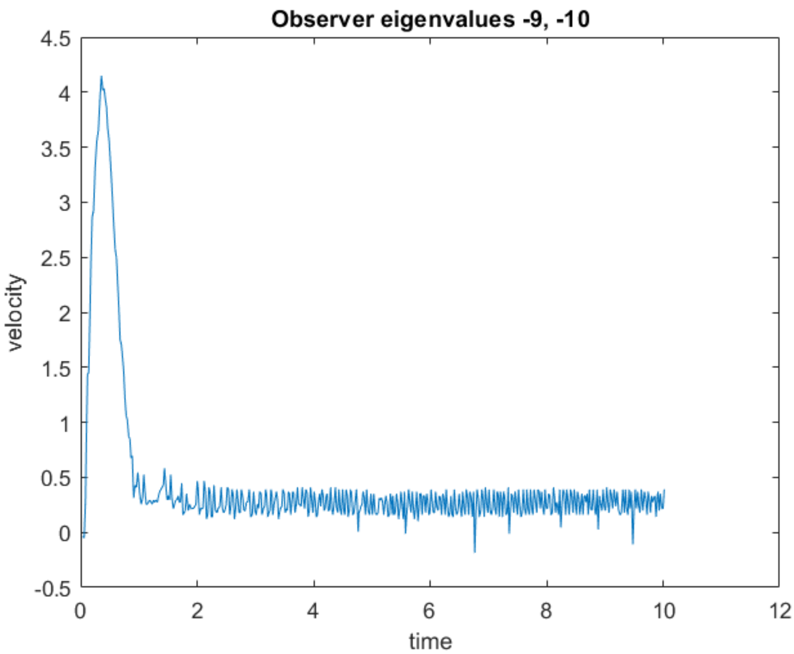
Παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της θέσης ταυτίζεται με την πραγματική της τιμή. Ωστόσο, η εκτίμηση της ταχύτητας αποκλίνει από την πραγματική της τιμή σε δεδομένες χρονικές στιγμές, οι οποίες παρατηρούμε ότι είναι ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου περιστροφής του κινητήρα και συμπίπτουν με τις ασυνέχειες στην μέτρηση της εξόδου του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα, ως παράγωγος της θέσης, ισούται αυτές τις χρονικές στιγμές με μία συνάρτηση δέλτα Dirac. Οι ασυνέχειες στη θέση οφείλονται στον τρόπο με τον οποίο απεικονίζεται η θέση του άξονα εξόδου σε τάση από το ποτενσιόμετρο εξόδου. Μετά την απότομη απόκλιση η εκτιμώμενη ταχύτητα συγκλίνει και πάλι στην πραγματική της τιμή. Αυξάνοντας τις απόλυτες τιμές των ιδιοτιμών του παρατηρητή, η απόκρισή του γίνεται ταχύτερη και η εκτίμηση της ταχύτητας συγκλίνει πιο σύντομα στην πραγματική της τιμή μετά από κάθε απόκλιση.

Επόμενο βήμα αποτελεί η υλοποίηση του ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης εξόδου σε συνδυασμό με τον παρατηρητή προκειμένου να επιτύχουμε τον στόχο ελέγχου. Τα κέρδη K, k_r του ελεγκτή προσδιορίζονται $k_1 = 15.1153, k_2 = 6.5143, k_r = 15.1153$, επιλέγοντας α = 4. Το σύστημα κλειστού βρόχου έχει διπλή ιδιοτιμή στη θέση -6.7691. Στη συνέχεια, παρατίθενται τα διαγράμματα των πραγματικών καταστάσεων του συστήματος, κοινά διαγραμμάτα των πραγματικών και εκτιμώμενων καταστάσεων, της εισόδου ελέγχου και κοινό διάγραμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου για διαφορετικές επιλογές των ιδιοτιμών του παρατηρητή. Οι εκτιμώμενες καταστάσεις απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα, ενώ οι πραγματικές με μπλε χρώμα.

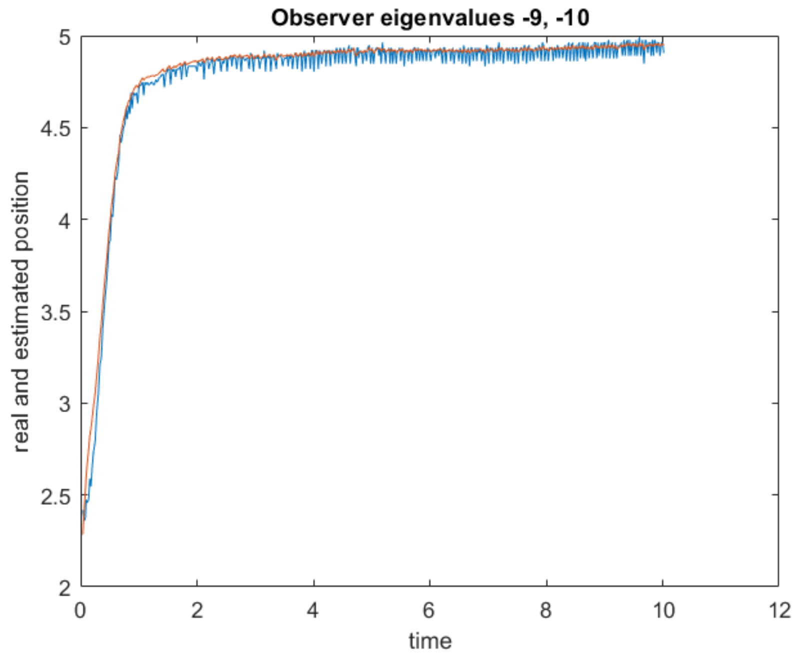
- $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 10$



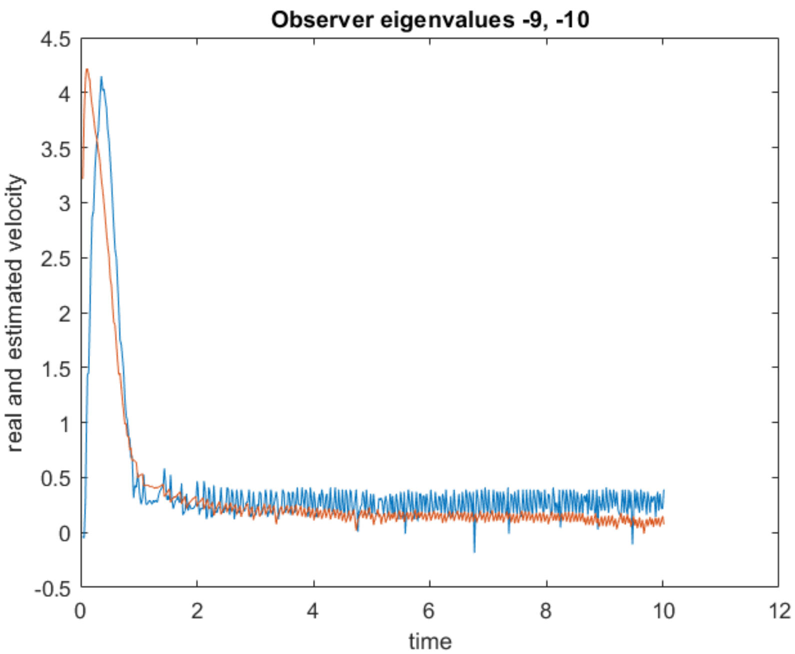
Σχήμα 47: Διάγραμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου



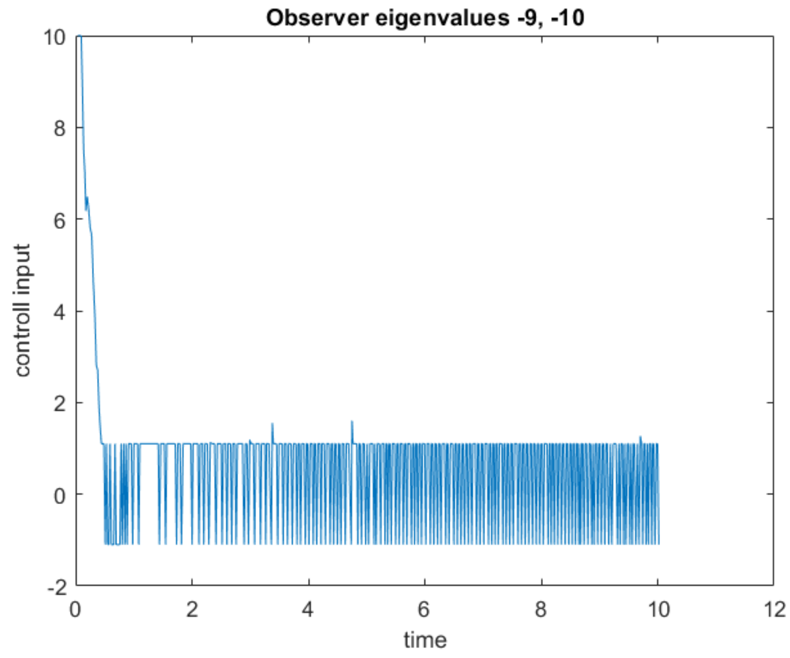
Σχήμα 48: Διάγραμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



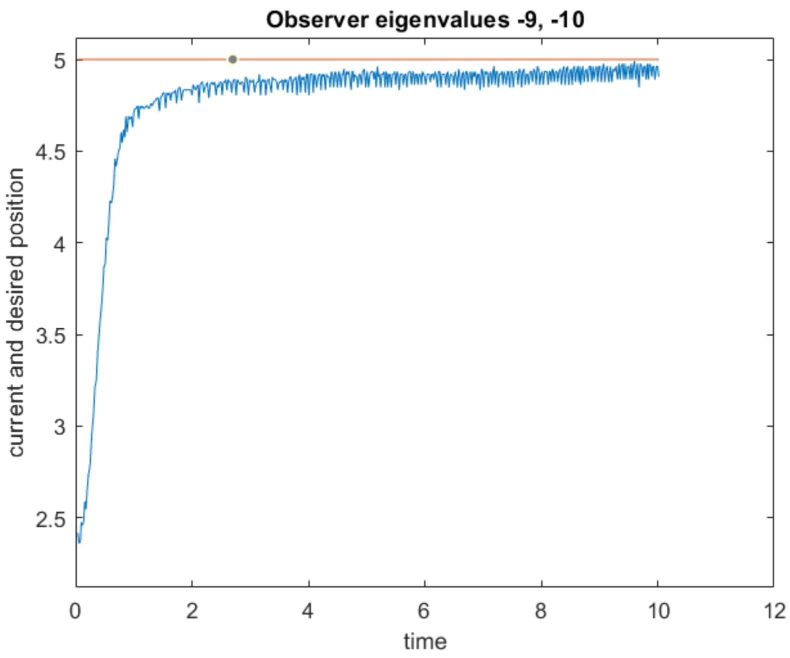
Σχήμα 49: Διαγράμμα πραγματικής και εκτιμώμενης θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 50: Διαγράμμα πραγματικής και εκτιμώμενης ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου

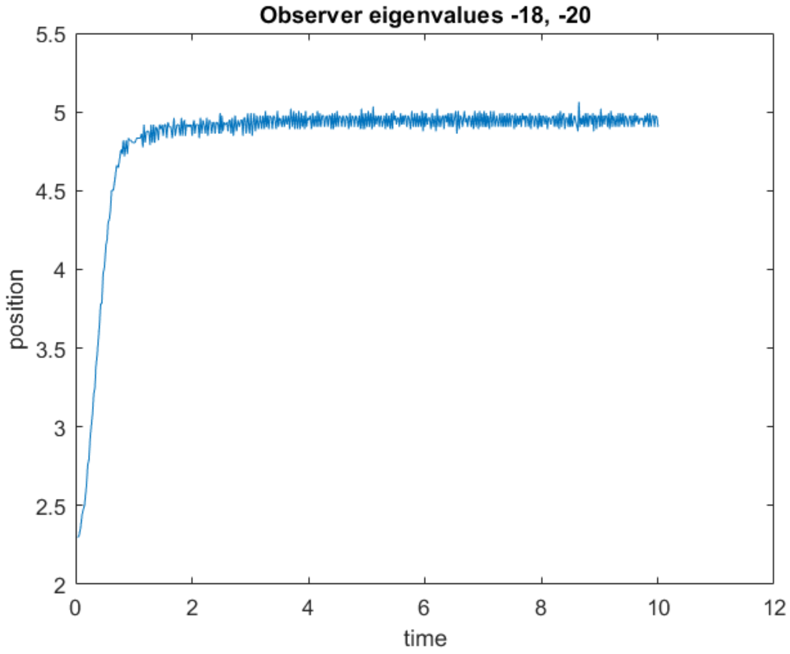


Σχήμα 51: Διαγράμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου

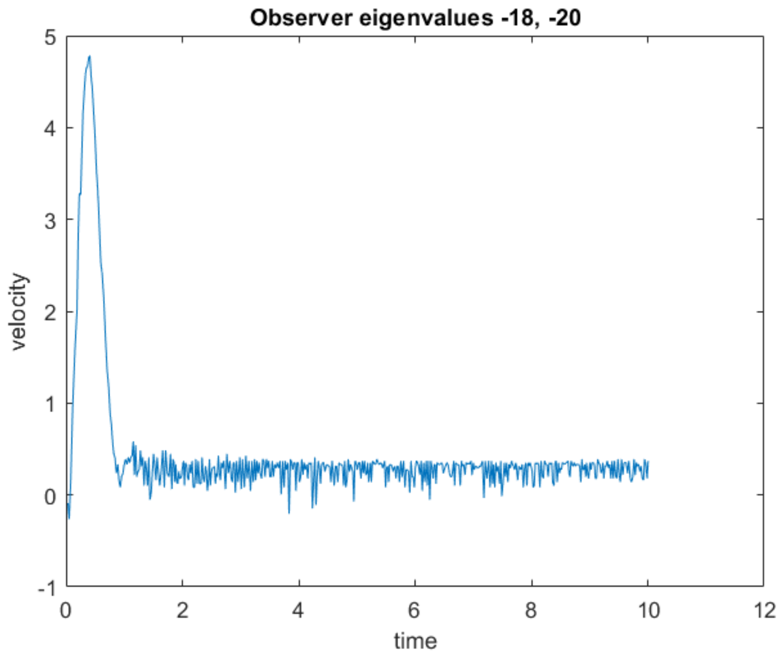


Σχήμα 52: Διαγράμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

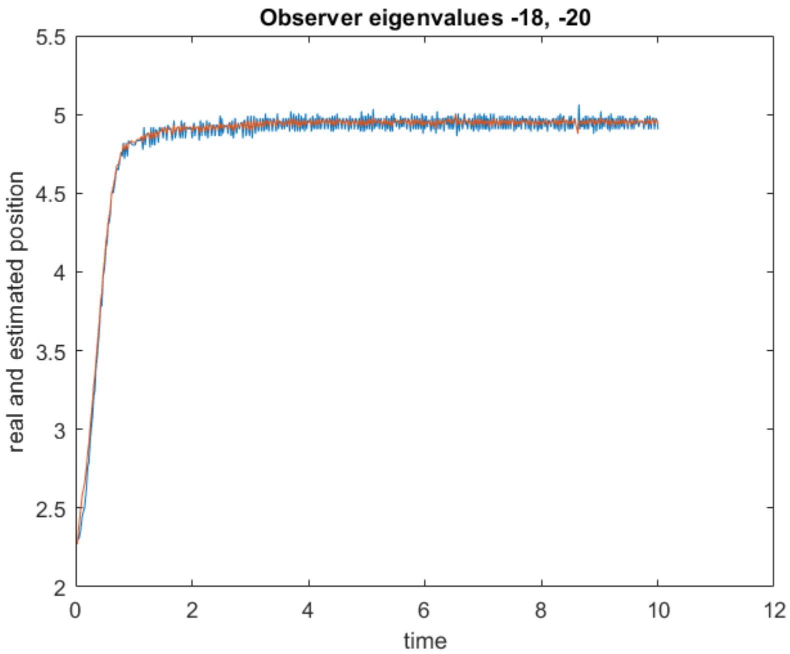
- $\lambda_1 = 18, \lambda_2 = 20$



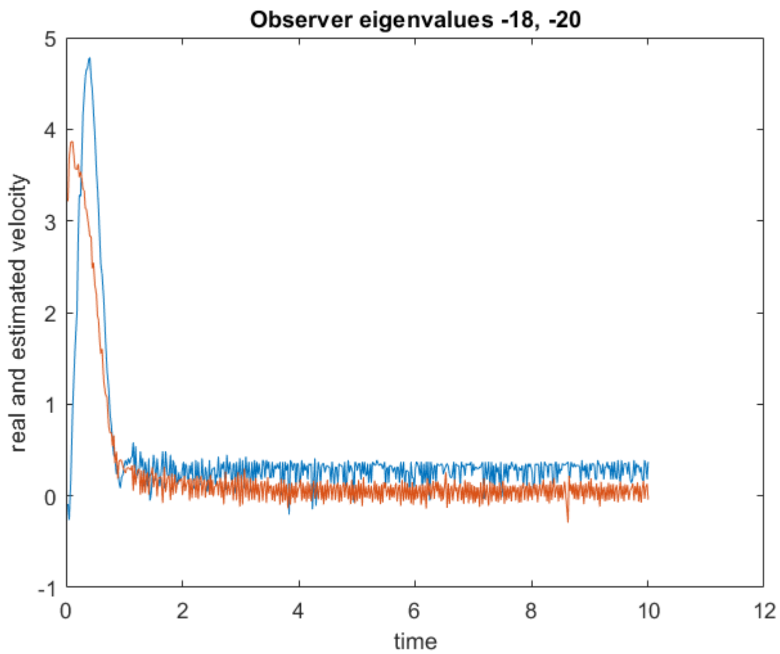
Σχήμα 53: Διαγράμμα θέσης συναρτήσει του χρόνου



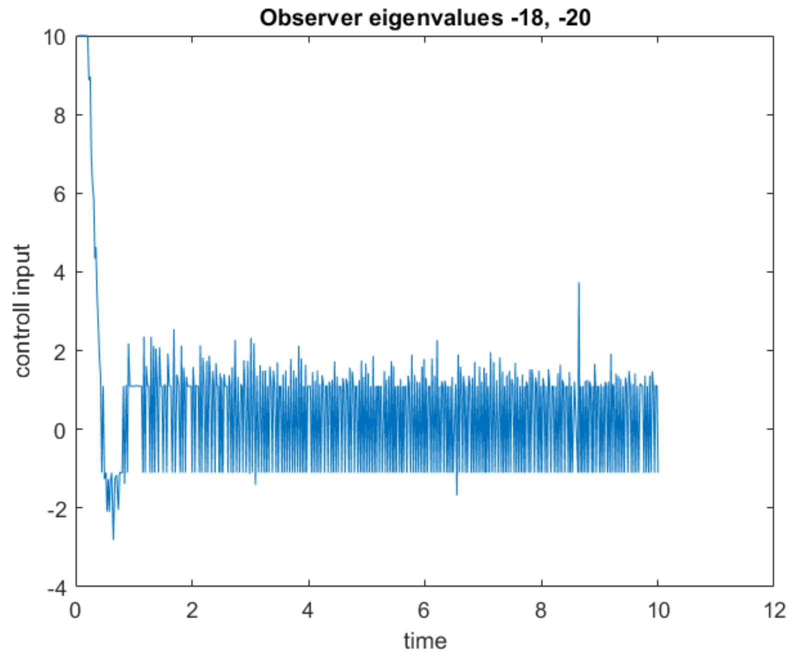
Σχήμα 54: Διαγράμμα ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



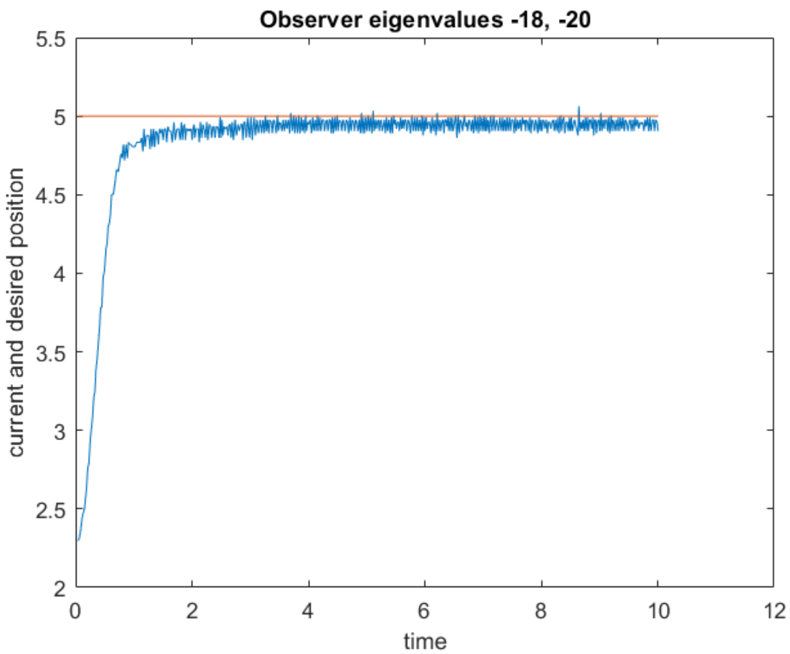
Σχήμα 55: Διαγράμμα πραγματικής και εκτιμώμενης θέσης συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 56: Διαγράμμα πραγματικής και εκτιμώμενης ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 57: Διαγράμμα εισόδου ελέγχου συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 58: Διαγράμμα τρέχουσας και επιθυμητής θέσης συναρτήσει του χρόνου

Αυξάνοντας την απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών του παρατηρητή, διαπιστώνουμε ότι ο χρόνος αποκάτασταση καθώς και το σφάλμα θέσης στη μόνιμη κατάσταση μειώνονται. Και στις δύο παραπάνω πειραματικές δοκιμές, οι εκτιμήσεις των μεταβλητών κατάστασης συμπίπτουν σε μεγάλο βαθμό με τις πραγματικές τους τιμές. Η απόκλιση της εκτίμησης της ταχύτητας από την πραγματική της τιμή, που παρατηρείται όπως εξηγήθηκε παραπάνω σε δεδομένες χρονικές στιγμές, εδώ δεν εμφανίζεται διότι λόγω της αρχικής τιμής και της επιθυμητής τελικής τιμής της θέσης αποφεύγεται η παρουσία ασυνέχειας στην έξοδο. Τέλος, παρατηρούμε ότι υπάρχει μια ταλάντωση πολύ μικρού πλάτους στην έξοδο του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση, η οποία εξηγείται βλέποντας την είσοδο ελέγχου που εφαρμόζεται.