Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. CSc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2020

Übungsblatt 3: Algebraische Strukturen II und Vektorräume I

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 5, 6

Aufgabe 3-1 6P

Berechnen Sie mit Hilfe des Euklid'schen bzw. erweiteren Euklid'schen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler (ggt):

(a) $ggt(168, 74)$,

(b) $ggt(1723, 532)$ und gleichzeitig die $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ für welche gilt $ggt = 1723\lambda + 532\mu$.
Hinweis: Setzen Sie zunächst $(\lambda_0, \mu_0) = (1, 0)$ und $(\lambda_1, \mu_1) = (0, 1)$. Dann berechnen Sie jeweils: $(\lambda_{k+1}, \mu_{k+1}) = (\lambda_{k-1}, \mu_{k-1}) - q_k(\lambda_k, \mu_k)$.

Aufgabe 3-2 6P

Zeigen Sie, dass die Menge $V = \mathbb{R}^n$ gemeinsam mit der Vektoraddition

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

eine abelsche (d. h. kommutative) Gruppe bildet!

Aufgabe 3-3 7P

Sind die folgenden Abbildungen linear? Untersuchen Sie, ob sie injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind!

(a)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3-4 8P

Gegeben sei $M = \{a, b, c\}$ sowie die Verknüpfung $*$ definiert als:

$*$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	c
c	c	b	a

Ist $(M, *)$ eine Gruppe? Beweisen oder widerlegen Sie jedes einzelne Gruppengesetz!

Aufgabe 3-5 8P

Beweisen bzw. widerlegen Sie, dass die folgenden Mengen Teilräume des $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$ sind.

(a) $V = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3 : 6x - 2y + z = [0]\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3 : 2x - 7y + 3z - [7] = [0]\}$

Aufgabe 3-6 9P

Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bildet die Menge u, v, w eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 10 \end{pmatrix}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Für welche Werte von a und $b \in \mathbb{R}$ kann x als Linearkombination von u, v und w dargestellt werden?

c) Stellen sie den Vektor $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von u, v und w dar.

Aufgabe 3-7 10P

Für einen Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ sei der Kern Ker(ϕ) definiert durch

$$\text{Ker}(\phi) := \{x \in G : \phi(x) = e_H\}.$$

Zeigen Sie: Genau dann ist ϕ injektiv, wenn $\text{Ker}(\phi) = \{e_G\}$ gilt.