Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. CSc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2020

Übungsblatt 5: Matrizen und Lineare Algebra I

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 7 und 8

Aufgabe 5-1 6P

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6r - 2s + 2t + 4w &= 16 \\ 12r - 8s + 6t + 10w &= 26 \\ 3r - 13s + 9t + 3w &= -19 \\ -6r + 4s + t - 18w &= -34 \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie die Matrix A sowie den Ergebnisvektor b, damit $Ax = b$ dieses Gleichungssystem repräsentiert.

(b) Lösen Sie dieses System mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren.

(c) Welchen Rang hat die Matrix bzw. die erweiterte Matrix dieses Systems? Welche Dimension hat der Lösungsraum?

Aufgabe 5-2 6P

Gegeben sei folgende lineare Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2 \cdot x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Kern dieser Abbildung. Welche Dimension hat $\ker(f)$?

(b) Welchen Rang hat die Abbildung f?

(c) Hat f eine Umkehrabbildung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5-3 8P

Für welche Werten von a wäre die folgende Matrix singulär (nicht invertierbar):

$$J = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5-4 8P

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$.

A ist eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass die Einträge der Diagonale die Eigenwerte von A sind.

Aufgabe 5-5 8P

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von t:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 2t & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5-6 10P

Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sind durch folgende Rekursion definiert:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Lösen Sie folgende Aufgaben:

(a) Berechnen Sie die ersten 15 Fibonacci-Zahlen.

(b) Finden Sie eine Matrix A, sodass gilt

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix}$$

(c) Finden Sie für jedes $n \geq 2$ eine Matrix B_n, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = B_n \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Hinweis: Folgende Definition ist hilfreich. Sei C eine $n \times n$ Matrix. Wir definieren C^k als die k-te Potenz von C, d. h. C^k ist rekursiv definiert als $C^1 = C$ und $C^k = C \cdot C^{k-1}$. Zum Beispiel, $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

(d) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass die Matrix B_n aus Punkt 3 tatsächlich Gleichung (1) erfüllt.

Aufgabe 5-7 10P

Zeigen Sie: Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn A keinen Eigenwert gleich 0 hat (keiner der Eigenwerte $\lambda_i = 0$).

Hinweis 1: Die Eigenwerte λ_i sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms
det$(A - \lambda I) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$.