Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. CSc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2020

Übungsblatt 7: Matrizen und Lineare Algebra III, Graphentheorie II

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 7 und 8

Aufgabe 7-1 6P

Berechnen Sie die Transformationsmatrix, die eine Szene im zweidimensionalen Raum zuerst um 60 Grad gegen den Uhrzeigersinn dreht und anschließend in $x-$Richtung um den Faktor 0.5 und in $y-$Richtung um den Faktor 0.8 skaliert. Geben Sie die ausmultiplizierte Transformationsmatrix explizit an.

Aufgabe 7-2 6P

Gegeben ist der ungerichtete Graph G:

$$G(V, E)$$

$$\begin{aligned} V = & \quad \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\} \\ E = & \quad \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels der Summe von Potenzen der Adjazenzmatrix, dass G nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 7-3 7P

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, schlichter Graph mit $n = |V|$ Knoten und $m = |E|$ Kanten. Der Grad eines Knotens v in G ist die Anzahl $\deg_G(v)$ seiner Nachbarn. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sum_{v \in V} \deg_G^2(v) \leq 2 \cdot mn.$$

Aufgabe 7-4 7P

Sei $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum und $v \in V$ ein Knoten. Die Höhe von v ist die maximale Länge eines Pfades in T mit Anfangsknoten v. Die *Höhe* von T ist die Höhe der Wurzel von T.

Ein *vollständiger* Trinärbaum ist ein Trinärbaum mit mindestens vier Knoten, in dem

(a) jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau drei unmittelbare Nachfolger hat,

(b) alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Zeigen Sie, dass ein vollständiger Trinärbaum der Höhe h, 3^h Blätter hat.

Hinweis: Vollständige Induktion ist für diese Aufgabe ein guter Ansatz.

Aufgabe 7-5 7P

Ermitteln Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix in Abhängigkeit von a, b und $c \in \mathbb{R}$:

$$G = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7-6 10P

Bestimmung der Basistransformationsmatrix:

Es seien die Basen $B : b_1 = (1 \quad 2)^T$ und $b_2 = (2 \quad 1)^T$ und $A : a_1 = (1 \quad 2)^T, a_2 = (2 \quad 7)^T$ gegeben. Beschreiben Sie die Transformationsmatrix T von der Basis B in die Basis A.

Aufgabe 7-7 10P

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis 1: Die Regel von Sarrus ist sehr hilfreich für das schnelle Berechnen der Determinante einer 3x3-Matrix (`https://de.wikipedia.org/wiki/Regel_von_Sarrus`). Die Determinante der Matrix $A = (a_{ij})$ ist gegeben durch $Det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Natürlich kann man die Determinante auch ohne diese Technik berechnen, zB über Spaltenentwicklung.

Hinweis 2: Wenn es Probleme gibt die Nullstellen des charakteristischen Polynom zu finden, versuchen Sie beim Polynom die Nullstelle 1 abzuspalten.

b) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Falls die Antwort “ja” ist, dann geben Sie die dazugehörende Diagonal-Matrix an.