Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. Csc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

WS 2019-20

Übungsblatt 2: Gruppen, Permutationen, Ringe, Restklassen, Hashing

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 4 und 5

Aufgabe 2-1 5P

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Kürzungsregeln:

(a) Für alle $x, a, b \in G$ gilt $x * a = x * b$ wenn und nur wenn $a = b$.

(b) Für alle $x, a, b \in G$ gilt $a * x = b * x$ wenn und nur wenn $a = b$.

Aufgabe 2-2 5P

Es sei $\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \ldots\}$. Welche der folgenden Mengen sind Gruppen? Geben Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, mindestens eine Gruppeneigenschaft an, die verletzt ist. Zeigen Sie bei den Gruppen, dass alle Gruppeneigenschaften gelten.

(a) $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \oplus)$, wobei $\oplus$ die gewöhnliche Addition von ganzen Zahlen bezeichnet.

(b) $(\mathbb{Z}^+, \odot)$, wobei $\odot$ die gewöhnliche Multiplikation von ganzen Zahlen bezeichnet.

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \otimes)$ mit $a \otimes b = a/b$, wobei $/$ die gewöhnliche Division von rationalen Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q} \setminus \{0\} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$.

(d) $(\mathbb{Q}^+, \oplus)$, wobei $\oplus$ die gewöhnliche Multiplikation rationaler Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Aufgabe 2-3 5P

a) Wir definieren auf der Menge S die Verknüpfung durch

$$a \odot b := a.$$

Überprüfen Sie, ob das Assoziativgesetz erfüllt ist.

b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und 1 das neutrale Element. Angenommen, die Gleichung $x * y * z = 1$ gilt in der Gruppe G. Folgt daraus, dass $y * z * x = 1$ ist?

Aufgabe 2-4 6P

Es sei $G = \{f_{a,b} | a, b \in \mathbb{R} \quad und \quad a \neq 0\}$ wo

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{a,b}(x) = ax + b$$

Ist G mit o, Verkettung von Abbildungen, eine Gruppe?

Aufgabe 2-5 6P

Quadratisches Sondieren: Es sei $t(i,j) := j + (-1)^{i+1} \cdot \lfloor \frac{i+1}{2} \rfloor^2 \mod m$. Die Sondierungsfolge ist wie folgt definiert:

$$j, j+1^2, j-1^2, j+2^2, j-2^2, \ldots, j + \left(\frac{m-1}{2}\right)^2, j - \left(\frac{m-1}{2}\right)^2.$$

(a) Schreiben Sie eine Sondierungsfolge für $m = 19$ und $j = 7$.

(b) Wann würde ein quadratisches Sondieren gut funktioneren? Funktioniert das im Beispiel gegebenes quadratisches Sondieren gut?

Aufgabe 2-6 10P

Es bezeichne $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge der ganzen Zahlen und $\mathbb{R}_+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Betrachten Sie die folgenden Relationen

(a) $R_1 := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : y = x^2\}$,

(b) $R_2 := \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : x = y^2\}$,

(c) $R_3 := \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : y = x^2\}$,

(d) $R_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : y = x^2\}$.

Welche dieser Relationen $R_i, i = 1, 2, 3, 4$ sind Abbildungen? Wenn es sich bei $R_i, i = 1, 2, 3, 4$ um eine Abbildung handelt, ist diese injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Aufgabe 2-7 10P

Es sei π eine Permutation. Jedes Paar $(i, j) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $i < j$, für das $\pi(i) > \pi(j)$ gilt, nennen wir einen *Fehlstand* oder auch eine *Inversion* von π. Z.B. wären für $n = 4$ und die Permutation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

genau die Paare $(1, 2), (1, 4), (3, 4)$ die Fehlstände von π.

(a) Bestimmen Sie alle Fehlstände von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die Fehlstände aller Elemente von S_3. S_n ist die Menge der Permutationen, die sich auf n Elemente auswirken.