Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Matrizen und Lineare Algebra

W. Gansterer, K. Schindlerova

12. Mai 2020

Wiederholung

Determinante

Jede quadratische Matrix hat eine Determinante:

Determinante

Die Determinante ist eine Funktion $\det : K^{n\times n} \to K$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(D1) $\det I = 1$

(D2) Sind die Zeilen/Spalten einer Matrix linear abhängig, so ist deren Determinante gleich 0.

(D3) $\forall\ \lambda \in K; v \in K^n; i = 1, 2, \ldots, n$ gilt (z_i Zeilenvektoren):

$$
\begin{aligned}
\det(z_1, \ldots, \lambda z_i, \ldots, z_n) &= \lambda \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \\
\det(z_1, \ldots, z_i + v, \ldots, z_n) &= \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) + \\
&\qquad \det(z_1, \ldots, v, \ldots, z_n)
\end{aligned}
$$

Determinante

Jede quadratische Matrix hat eine Determinante:

Determinante

Die Determinante ist eine Funktion $\det : K^{n \times n} \to K$
mit den folgenden Eigenschaften:

(D1) $\det I = 1$

(D2) Sind die Zeilen/Spalten einer Matrix linear abhängig, so ist deren Determinante gleich 0.

(D3) $\forall\ \lambda \in K; v \in K^n; i = 1, 2, \ldots, n$ gilt (z_i Zeilenvektoren):

$$
\begin{aligned}
\det(z_1, \ldots, \lambda z_i, \ldots, z_n) &= \lambda \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \\
\det(z_1, \ldots, z_i + v, \ldots, z_n) &= \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) + \\
&\qquad \det(z_1, \ldots, v, \ldots, z_n)
\end{aligned}
$$

Notation: $|A| := \det(A)$

Berechnung von Determinanten

Variante 1: elementare Zeilenumformungen / Gauß-Algorithmus

Wiederholung: Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Addition/Subtraktion des λ-fachen einer Zeile z_i zu einer anderen Zeile z_j ($i \neq j$)
3. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$

Berechnung von Determinanten

Variante 2: Entwicklung nach einer Zeile / Spalte

Entwicklungssatz von Laplace

Sei $A \in K^{n \times n}$ und A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht. Dann gilt:

- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ ... *Entwicklung nach der i-ten Zeile*
- $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ ... *Entwicklung nach der j-ten Spalte*

Wichtige Zusammenhänge

Satz

Sei $A : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $det\,(A) \neq 0$
- $Rang\,(A) = n$
- $ker\,(A) = 0$, *das heißt,* $dim\ ker\,(A) = 0$
- *Die Spalten (Zeilen) von A sind linear unabhängig.*

Außerdem sind folgende Aussagen äquivalent:

- $det\,(A) = 0$
- $Rang\,(A) < n$
- $dim\ ker\,(A) > 0$
- *Die Spalten (Zeilen) von A sind linear abhängig.*

Eigenwerte, Eigenvektoren

Definition

Sei $A : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $\underline{v \neq 0}$ gibt mit der Eigenschaft $Av = \lambda v$. Der Vektor $v \in K^n$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn gilt $Av = \lambda v$.

. . . oder einfacher:

Eigenvektoren sind jene Vektoren des Urbildraumes, die nach der Abbildung ihre Richtung behalten und lediglich um einen Skalierungsfaktor (Eigenwert) gestreckt werden.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $\neq 0$ gibt.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $\neq 0$ gibt.
- Der Kern von $A - \lambda I$ muss also *mehr* als den Nullvektor enthalten, seine Dimension muss ≥ 1 sein.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $\neq 0$ gibt.
- Der Kern von $A - \lambda I$ muss also *mehr* als den Nullvektor enthalten, seine Dimension muss ≥ 1 sein.
- Es muss daher gelten: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $\neq 0$ gibt.
- Der Kern von $A - \lambda I$ muss also *mehr* als den Nullvektor enthalten, seine Dimension muss ≥ 1 sein.
- Es muss daher gelten: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Es gilt allgemein:

Satz

λ *ist Eigenwert der linearen Abbildung* $A \quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0.$

Die Menge der Eigenvektoren

Definition

Ist $\lambda \in K$ Eigenwert der linearen Abbildung A, so bezeichnet man die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren

$$T_\lambda := \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

als Eigenraum zum Eigenwert λ.

Überblick

Eigenwerte, Eigenvektoren, Basistransformation

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v$$

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v$$

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda Iv \Leftrightarrow Av - \lambda Iv = 0$$

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Daraus können wir folgende Schlüsse ziehen:

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Daraus können wir folgende Schlüsse ziehen:

$\Rightarrow$ Der Eigenraum T_λ zum Eigenwert λ ist der Kern der Abbildung $(A - \lambda I)$

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Daraus können wir folgende Schlüsse ziehen:

$\Rightarrow$ Der Eigenraum T_λ zum Eigenwert λ ist der Kern der Abbildung $(A - \lambda I)$

$\Rightarrow$ Der Eigenraum T_λ zu einem Eigenwert λ ist ein Untervektorraum (da der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist!)

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Erinnern wir uns: λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $v \neq 0$ gibt.

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Erinnern wir uns: λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $v \neq 0$ gibt.

$\Rightarrow$ Der Kern von $(A - \lambda I)$ muss mehr als den Nullvektor enthalten, er muss Dimension ≥ 1 haben

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Erinnern wir uns: λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $v \neq 0$ gibt.

$\Rightarrow$ Der Kern von $(A - \lambda I)$ muss mehr als den Nullvektor enthalten, er muss Dimension ≥ 1 haben

$\Rightarrow$ λ ist Eigenwert der linearen Abbildung A genau dann, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Eine mögliche Vorgehensweise, um Eigenwerte und -vektoren zu berechnen:

1. Aufstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$
2. Berechnen der Eigenwerte λ_i durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Berechnung der Eigenvektoren v_i für jeden Eigenwert λ_i durch $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aufstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$:

$$det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$$

Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aufstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$:

$$det\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)$$

- Berechnen der Eigenwerte λ_i durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$$

Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

- Berechnung der Eigenvektoren v_i für jeden Eigenwert λ_i aus $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

- Berechnung der Eigenvektoren v_i für jeden Eigenwert λ_i aus $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} 2-2 & 2 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i: $2x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$

ii: $-1x_2 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel Eigenwerte, Eigenvektoren

- Berechnung der Eigenvektoren v_i für jeden Eigenwert λ_i aus $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

$$\lambda_1 : \begin{pmatrix} 2-2 & 2 \\ 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i: $2x_2 = 0 \qquad x_2 = 0$

ii: $-1x_2 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 : \begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i: $1x_1 + 2x_2 = 0 \qquad 2x_2 = -x_1$

ii: $0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Zusammenhang Eigenwerte – Polynome

Das charakteristische Polynom

Für $A \in K^{n \times n}$ ist $\det(A - \lambda I)$ ein Polynom in λ vom Grad n. Dieses Polynom heisst charakteristisches Polynom von A.
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A.

Beweisidee:

Zum Beispiel aus der Darstellung der Determinante mittels vollständiger Induktion. ∎

Wieviele Eigenwerte hat eine Matrix?

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt:

Jede Matrix aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ hat mindestens einen Eigenwert.

Und weil ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, gilt:

Eine $n \times n$-Matrix hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Wieviele Eigenwerte hat eine Matrix?

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt:

Jede Matrix aus $\mathbb{C}^{n\times n}$ hat mindestens einen Eigenwert.

Und weil ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, gilt:

Eine $n \times n$-Matrix hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Achtung: Nicht jede komplexe $n \times n$-Matrix hat n (verschiedene) Eigenwerte. Nullstellen können mehrfach auftreten; nur unterschiedliche Nullstellen liefern verschiedene Eigenwerte!

Weitere Schlussfolgerungen

Satz

Für ungerades n hat jede Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mindestens einen reellen Eigenwert.

Beweisidee:

Aus dem Nullstellensatz der Analysis ($\rightarrow$ später!) folgt, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle hat. ∎

Daraus ergibt sich z.B. dass es im $\mathbb{R}^3$ zu jeder beliebigen linearen Abbildung mindestens einen Vektor gibt, der unter dieser Abbildung seine Richtung beibehält!

Aussagen über Eigenvektoren

Mittels Induktion kann man beweisen:

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Daraus folgt:

Hat die Matrix $A \in K^{n \times n}$ n verschiedene Eigenwerte, so besitzt sie eine Basis aus Eigenvektoren.

...das kann aber auch der Fall sein, wenn die Matrix weniger als n verschiedene Eigenwerte hat!

Basistransformationen

- **Wiederholung:** Vektoren haben bezüglich verschiedener Basen verschiedene Koordinaten.
- Die Matrix einer Abbildung hängt von den Basisvektoren ab.

Basistransformationen

- **Wiederholung:** Vektoren haben bezüglich verschiedener Basen verschiedene Koordinaten.
- Die Matrix einer Abbildung hängt von den Basisvektoren ab.
- Mithilfe der Eigenvektoren kann man eine Basis finden, bezüglich derer die Matrix einer linearen Abbildung *so einfach wie möglich* (*diagonal*) ist.

Die Aufgabenstellung

Gegeben:

- 2 Basen, B_1 und B_2; $B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Koordinaten der Basisvektoren b_i bezüglich B_1: $b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}_{B_1}$
- Vektor v: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}$

Die Aufgabenstellung

Gegeben:

- 2 Basen, B_1 und B_2; $B_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$
- Koordinaten der Basisvektoren b_i bezüglich B_1: $b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}_{B_1}$
- Vektor v: $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}$

Gesucht:

- Koordinaten von v in der Basis B_2?
- Ist A die Matrix einer linearen Abbildung bezüglich B_1, wie sieht die Matrix dieser Abbildung bezüglich B_2 aus?

Beispiel Basistransformation

Häufiges Ziel der Berechnung von Eigenvektoren ist es, eine Basis zu finden, für die die anzuwendende lineare Abbildung möglichst einfach ist.

in der Basis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ lineare Abbildung: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren der Abbildung: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Beispiel Basistransformation

Häufiges Ziel der Berechnung von Eigenvektoren ist es, eine Basis zu finden, für die die anzuwendende lineare Abbildung möglichst einfach ist.

in der Basis $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ lineare Abbildung: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Eigenvektoren der Abbildung: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

in der Basis $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ lineare Abbildung: $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Basistransformation: Vektoren

Wie transferieren wir einen Vektor von Basis B_1 in Basis B_2 ?

$$\begin{aligned} v = & \quad \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \\ = & \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 + \cdots b_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ b_{n1}\lambda_1 + \cdots b_{nn}\lambda_n \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} \end{aligned}$$

$$T := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, weil die Spalten linear unabhängig sind.

...Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_2.

Basistransformation: Vektoren

Wie transferieren wir einen Vektor von Basis B_1 in Basis B_2 ?

$$\begin{aligned} v &= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \\ &= \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 + \cdots b_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ b_{n1}\lambda_1 + \cdots b_{nn}\lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = T^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$T := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, weil die Spalten linear unabhängig sind.

... Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_2.

Basistransformation: Vektoren

Wie transferieren wir einen Vektor von Basis B_1 in Basis B_2 ?

$$
\begin{aligned}
v &= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \\
&= \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 + \cdots b_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ b_{n1}\lambda_1 + \cdots b_{nn}\lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} \cdots b_{1n} \\ \vdots \\ b_{n1} \cdots b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = T^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1}
$$

$$
T := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}
$$

ist invertierbar, weil die Spalten linear unabhängig sind.

... Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_2.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$

Bestimmung der Basistransformationsmatrix

Die Spalte i der Basistransformationsmatrix T enthält die Koordinaten des Basisvektors b_i von B_2 bezüglich der Basis B_1.

Daher gilt $\forall i = 1, \ldots, n$: $\quad b_i = B_1 \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = B_1\, T(:, i)$

Bestimmung der Basistransformationsmatrix

Die Spalte i der Basistransformationsmatrix T enthält die Koordinaten des Basisvektors b_i von B_2 bezüglich der Basis B_1.

Daher gilt $\forall i = 1, \ldots, n$: $$b_i = B_1 \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = B_1 \, T(:, i)$$

$$\Rightarrow \quad T(:, i) = B_1^{-1} b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Bestimmung der Basistransformationsmatrix

Die Spalte i der Basistransformationsmatrix T enthält die Koordinaten des Basisvektors b_i von B_2 bezüglich der Basis B_1.

Daher gilt $\forall i = 1, \ldots, n$: $$b_i = B_1 \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = B_1 \, T(:, i)$$

$$\Rightarrow \quad T(:, i) = B_1^{-1} b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \Rightarrow \quad T = B_1^{-1} B_2$$

Basistransformationsmatrizen

Satz

Ist T die Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_2 und S die Basistransformationsmatrix von B_2 nach B_3, so ist $T \times S$ die Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_3.

Basistransformation: Abbildungen

Wie bestimmen wir die Matrix einer linearen Abbildung bez. der Basis B_2?

Gegeben: lineare Abbildung $f : K^n \to K^n$; $v, w \in K^n$ mit $f(v) = w$
A ... Abbildungsmatrix bezüglich B_1
S ... Abbildungsmatrix bezüglich B_2

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}, \; w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2}$$

Dann gilt: $A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}_{B_1}$ und $S \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2}$

Basistransformation: Abbildungen

Mithilfe der Transformationsmatrix T erhalten wir:

$$T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}_{B_1}, \qquad T\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}_{B_1}$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen auf der vorigen Folie erhalten wir:

$$AT\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}_{B_2} = T\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}_{B_2} \quad \text{bzw.} \quad T^{-1}AT\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}_{B_2}$$

und damit

$$S = T^{-1}AT$$

Basistransformation: Abbildungen

Satz

Ist T die Basistransformationsmatrix von der Basis B_1 in die Basis B_2 und ist f eine lineare Abbildung, zu der bezüglich B_1 die Matrix A gehört, so gehört zu f bezüglich B_2 die Matrix $T^{-1}AT$.

Beispiel Basistransformation: Abbildungen

Basis B_1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Lineare Abbildung A: $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Basis B_2: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Lineare Abbildung S: ?

$$T = B_1^{-1} B_2$$

$$S = T^{-1} A T$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ähnliche Matrizen

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n\times n}$ gibt für die gilt $A = T^{-1}BT$.

...oder einfacher: Ähnliche Matrizen beschreiben bezüglich verschiedener Basen die gleiche Abbildung. Sie haben also die gleichen Eigenwerte und dieselbe Determinante!

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihre Eigenvektoren eine Basis bilden. Die zur Matrix ähnliche Diagonalmatrix hat als Einträge ihre Eigenwerte.

Anwendung: Ray Tracing, Teil 2

Ray Tracing enthält die Aufgabenstellung, den Schnittpunkt einer Geraden (eines Strahls) mit einem Objekt zu bestimmen, welches durch eine Reihe von Polygonen begrenzt wird.

Ray Tracing, Teil 1:

Bestimmung des *Schnittpunktes einer Geraden mit der Ebene*, in der das Polygon liegt.

Anwendung: Ray Tracing, Teil 2

Ray Tracing enthält die Aufgabenstellung, den Schnittpunkt einer Geraden (eines Strahls) mit einem Objekt zu bestimmen, welches durch eine Reihe von Polygonen begrenzt wird.

Ray Tracing, Teil 1:

Bestimmung des *Schnittpunktes einer Geraden mit der Ebene*, in der das Polygon liegt.

Ray Tracing, Teil 2:

Überprüfung, ob der Schnittpunkt P der Geraden mit der Ebene (in der das Polygon liegt) *innerhalb oder außerhalb des Polygons* liegt.

Ray Tracing, Teil 2

Problemverlagerung in den $\mathbb{R}^2$: Ein Punkt liegt genau dann im Polygon, wenn dies für die Projektion des Polygons auf eine der Koordinatenebenen gilt.
$\Rightarrow$ Projektion des Polygons auf eine Koordinatenebene (zu der es nicht parallel ist) durch Nullsetzen einer der drei Koordinaten.

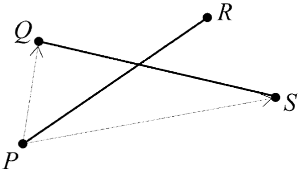
Annahmen:

- Konvexes Polygon $\Leftrightarrow$ mit zwei Punkten aus dem Polygon liegt auch die ganze Verbindungsstrecke zwischen den Punkten im Polygon
- Gegeben sind ein Referenzpunkt R innerhalb des Polygons und alle Kanten den Polygons $\overline{Q_n S_n}$

Anwendung: Ray Tracing Teil 2

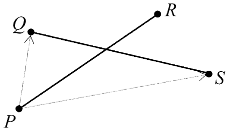
$\Rightarrow$ Schneidet die Strecke PR den Rand des Polygons oder nicht?
Rand des Polygons besteht aus mehreren Strecken $\Rightarrow$ wir brauchen schnellen Algorithmus für die Frage:

Schneiden sich zwei Streckenstücke PR und QS?



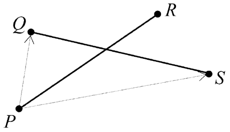
…diese Frage können wir mithilfe von Determinanten beantworten!

Anwendung: Ray Tracing Teil 2



Antwort: Schnittpunkt P innerhalb des Polygons, wenn für *alle* Kanten gilt:
$det(\vec{PR} \quad \vec{PQ}) \cdot det(\vec{PR} \quad \vec{PS}) \leq 0$ und $det(\vec{QS} \quad \vec{QR}) \cdot det(\vec{QS} \quad \vec{QP}) \leq 0$
... benötigt nur 8 Multiplikationen!

Anwendung: Ray Tracing Teil 2



Antwort: Schnittpunkt P innerhalb des Polygons, wenn für *alle* Kanten gilt:
$det(\vec{PR} \quad \vec{PQ}) \cdot det(\vec{PR} \quad \vec{PS}) \leq 0$ und $det(\vec{QS} \quad \vec{QR}) \cdot det(\vec{QS} \quad \vec{QP}) \leq 0$
. . . benötigt nur 8 Multiplikationen!

Erweiterung für nicht konvexe Polygone: P liegt im Polygon, wenn die Anzahl der Schnittpunkte von PR mit dem Rand des Polygons gerade ist, sonst außerhalb.