Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. CSc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2020

Übungsblatt 4: Vektorräume

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 6

Aufgabe 4-1 5P

Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Berechne A^2, die Determinante von A und den Rang von A.

Aufgabe 4-2 6P

Es seien H und K zwei Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Wir definieren $H + K$ wie folgt:

$H + K = \{w | w = u + v, u \in H, v \in K\}$.

Man beweise, dass $H + K$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 4-3 8P

Man untersuche für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 4-4 8P

Sind die folgenden Vektoren v_1, v_2, v_3 jeweils linear unabhängig?

(a) $v_1 = (1, 1, -1, 0)^T$, $v_2 = (0, -1, 1, -2)^T$ und $v_3 = (3, 1, -1, -4)^T$

(b) $v_1 = (1, -1)^T$, $v_2 = (2, 0)^T$ und $v_3 = (1, 1)^T$

(c) $v_1 = (1, 0, -2)^T$, $v_2 = (2, 1, 0)$ und $v_3 = (1, 1, 1)^T$

Anmerkung: Das hochgestellte T bedeutet „transponiert“, dh. die Zahlenreihen sind Vektoren, wurden aus Platzgründen aber horizontal angeschrieben.
Eine Übersicht: `https://de.wikipedia.org/wiki/Transponierte_Matrix`

Aufgabe 4-5 9P

Die Matrix A ist invertierbar. Beweisen Sie:

a) A^{-1} ist invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$.

b) A^n ist invertierbar und $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ für $n = 1, 2, \ldots$.

c) Sei $k \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$. Dann ist kA invertierbar und $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

Aufgabe 4-6 9P

Die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_i \in \mathbb{R}^3$ seien linear unabhängig.

(a) Ist $\{3v_1, 3v_2, 3v_3\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{v_1, 2v_2, 3v_3\}$ linear unabhängig?

(c) Können wir etwas über $\{av_1, bv_2, cv_3\}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ bzgl. linear unabhängig sagen?

Aufgabe 4-7 10P

Sei $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung von zwei K-Vektorräumen X und Y. Man zeige: ist f injektiv, so ist das Bild einer linear unabhängigen Teilmenge $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ von X auch linear unabhängig.