Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Matrizen und Lineare Algebra

W. Gansterer, K. Schindlerová

3. Mai 2020

Überblick

- Eigenwerte, Eigenvektoren, Basistransformation
  - Determinante
  - Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte, Eigenvektoren, Basistransformation

Determinante

Charakteristikum von *quadratischen* Matrizen, das einer Matrix einen Skalar zuordnet.

- Ein Gleichungssystem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante ihrer Koeffizientenmatrix ungleich 0 ist.
- Ist die Determinante gleich 0, dann ist das Gleichungssystem entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

Beispiel

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ hat formal die Lösungen $x = \frac{ed-bf}{ad-bc}$, $y = \frac{af-ce}{ad-bc}$

- $ad - bc \neq 0 \Leftrightarrow$ eindeutige Lösung
- $ad - bc = 0 \Leftrightarrow$ keine eindeutige Lösung, Rang der Koeffizientenmatrix < 2

Determinante

Jede quadratische Matrix hat eine Determinante:

Determinante

Die Determinante ist eine Funktion $\det : K^{n\times n} \to K$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(D1) $\det I = 1$

(D2) Sind die Zeilen/Spalten einer Matrix linear abhängig, so ist deren Determinante gleich 0.

(D3) $\forall\ \lambda \in K; v \in K^n; i = 1, 2, \ldots, n$ gilt (z_i Zeilenvektoren):

$$\begin{aligned} \det(z_1, \ldots, \lambda z_i, \ldots, z_n) &= \lambda \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) \\ \det(z_1, \ldots, z_i + v, \ldots, z_n) &= \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n) + \\ &\qquad \det(z_1, \ldots, v, \ldots, z_n) \end{aligned}$$

Notation: $|A| := \det(A)$

Wichtige Eigenschaften

- Eine Matrix (und somit auch eine lineare Abbildung) ist nur dann invertierbar, wenn ihre Determinante ungleich null ist.
- Anschauliche Interpretation für Matrizen aus $K^{2\times 2}$ und aus $K^{3\times 3}$ (bis auf das Vorzeichen):
  - Im $K^{2\times 2}$ gibt die Determinante die Fläche des von den Zeilen-/Spaltenvektoren aufgespannten Parallelogramms an
  - Im $K^{3\times 3}$ das Volumen des von den Zeilen-/Spaltenvektoren aufgespannten Körpers (Parallelepiped/Spat)
  - Analog im $K^{n\times n}$ $\ldots \rightarrow$ *n-dimensionales Volumen*
- *Eindeutigkeit*: Es gibt genau eine Determinantenfunktion $\det : K^{n\times n} \rightarrow K$ mit den Eigenschaften (D1), (D2), (D3).

Wichtige Eigenschaften

- Die Determinante einer Matrix ist gleich der Determinante der transponierten Matrix

$$\det(A) = \det(A^T)$$

- Für Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

- Für invertierbare Matrizen $A \in K^{n \times n}$ gilt daher:

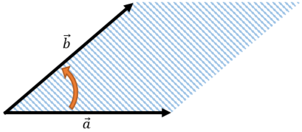
$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$$

Berechnung von Determinanten

Spezialfall: 2×2 **Matrix** $\rightarrow$ „Hauptachse minus Nebenachse“

$$det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Flächeninhalt/Volumen: $A_{Parallelogramm} = |det(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix})|$



Ist der Winkel zwischen den beiden linear unabhängigen Vektoren (gegen den UZS gemessen) kleiner als 180°, so ist det positiv, ansonsten negativ. Bei linear abhängigen Vektoren (Winkel $= 0^\circ, 180^\circ$) ist det $= 0$.

Berechnung von Determinanten

Variante 1: elementare Zeilenumformungen / Gauß-Algorithmus

Wiederholung: Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Addition/Subtraktion des λ-fachen einer Zeile z_i zu einer anderen Zeile z_j $(i \neq j)$
3. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$

Berechnung von Determinanten

Variante 1: elementare Zeilenumformungen / Gauß-Algorithmus

- Das Vertauschen zweier Zeilen kehrt das Vorzeichen der Determinante um.
- Die Addition des λ-fachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante nicht.
- Multipliziert man eine Zeile mit einem Skalar $\lambda \in K$, so gilt:

$$\det(z_1, \ldots, \lambda z_i, \ldots, z_n) = \lambda \det(z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n)$$

Beweise siehe Hartmann ...

Berechnung der Determinante mit Gauß-Algorithmus

- Erzeuge "obere Dreiecksform" mit elementaren Zeilenumformungen

$\Rightarrow$ Determinante = Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonale

- Viele Operationen ändern die Determinante nicht; manche Operationen muss man sich merken:
  - Zeilenvertauschung $\rightarrow$ det mit -1 multiplizieren
  - Multiplikation mit Skalar λ $\rightarrow$ det mit dem Kehrwert $1/\lambda$ multiplizieren

A			I			
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	0	-i
0	1	3	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	
0	1	3	0	0	1	-3 ii
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	$\downarrow$
0	1	**0**	3	-3	1	$\uparrow$
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	3	-3	1	
0	0	1	-1	1	0	
I			A^{-1}			

Zeilenvertauschungen: 1

keine Multiplikation mit Skalaren

$\rightarrow \quad det(A) = -1 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1) = -1$

Auf A^{-1} wurden genau die gleichen Operationen angewandt (nur in umgekehrter Reihenfolge)

$\Rightarrow \quad det(A^{-1}) = -1$

Berechnung der Determinante mit Gauß Algorithmus

$$\begin{array}{rrcr} i: & x_1 - 2x_2 + x_4 & = & 0 \\ ii: & -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 10 \\ iii: & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -13 \\ iv: & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ -2i \\ -i \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ \mathbf{0} & 7 & -5 & -2 & -13 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ +7ii \\ +3ii \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & \mathbf{0} & 16 & -9 & 57 \\ 0 & \mathbf{0} & 7 & -3 & 24 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{7}{16}\,iii \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot(\frac{16}{15}) \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

keine Zeilenvertauschungen, skalare Multiplikation nur mit $\frac{16}{15}$

$$\Rightarrow \qquad det(A) = \frac{15}{16} \cdot (1 \cdot -1 \cdot 16 \cdot 1) = -15$$

Berechnung von Determinanten

Variante 2: Entwicklung nach einer Zeile / Spalte

Entwicklungssatz von Laplace

Sei $A \in K^{n \times n}$ und A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A entsteht, wenn man die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht. Dann gilt:

- $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ . . . *Entwicklung nach der i-ten Zeile*
- $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$ . . . *Entwicklung nach der j-ten Spalte*

Entwicklungssatz von Laplace

1. Auswählen einer beliebigen Zeile oder Spalte als Pivot-Zeile/Spalte
2. Für jedes Element in der Pivot-Zeile/Spalte: die korrespondierende Spalte/Zeile, in der das Element steht (sowie die Pivot-Zeile/Spalte selbst) streichen und die Determinante der übrigen Matrix mit dem Element multiplizieren, wobei sich das Vorzeichen aus folgendem Schachbrettmuster ergibt: $\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix}$
3. Summation dieser Produkte

...kann rekursiv so lange fortgesetzt werden, bis nur noch die Determinanten von 2×2 Matrizen zu berechnen sind

Beispiele: Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\, a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\, b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\, c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix} =$$

$$= a \left(-g \begin{vmatrix} j & l \\ n & p \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} f & h \\ n & p \end{vmatrix} - o \begin{vmatrix} f & h \\ j & l \end{vmatrix} \right) - b(\dots) + c(\dots) - d(\dots)$$

Beachten Sie:

Als Pivot-Zeilen/Spalten eignen sich vor allem jene mit möglichst vielen Nullen!

Wichtige Zusammenhänge

Satz

Sei $A : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $det\,(A) \neq 0$
- $Rang\,(A) = n$
- $ker\,(A) = 0$, *das heißt,* $dim\ ker\,(A) = 0$
- *Die Spalten (Zeilen) von A sind linear unabhängig.*

Außerdem sind folgende Aussagen äquivalent:

- $det\,(A) = 0$
- $Rang\,(A) < n$
- $dim\ ker\,(A) > 0$
- *Die Spalten (Zeilen) von A sind linear abhängig.*

Eigenwerte, Eigenvektoren

Definition

Sei $A : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von A, wenn es einen Vektor $\underline{v \neq 0}$ gibt mit der Eigenschaft $Av = \lambda v$. Der Vektor $v \in K^n$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn gilt $Av = \lambda v$.

. . . oder einfacher:

Eigenvektoren sind jene Vektoren des Urbildraumes, die nach der Abbildung ihre Richtung behalten und lediglich um einen Skalierungsfaktor (Eigenwert) gestreckt werden.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eine Richtungsänderung ist möglich: $\lambda < 0 \Rightarrow$ der Eigenvektor dreht sein Vorzeichen um

Beispiel: Drehung um den Ursprung

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

- Außer dem Nullpunkt wird jeder Punkt gedreht, kein Vektor $v \neq 0$ bleibt also fest, und damit gibt es keine reellen Eigenwerte und Eigenvektoren.
- **Ausnahmen:**
  - $\alpha = 0°, k \cdot 360°$: jeder Vektor ist Eigenvektor zu $\lambda = 1$
  - $\alpha = (2k-1) \cdot 180°$: jeder Vektor ist Eigenvektor zu $\lambda = -1$

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Beispiel: Spiegelung

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

- $S_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcrcl} (\cos\alpha - \lambda)x & + & \sin\alpha \qquad y & = & 0 \\ \sin\alpha \qquad x & + & (-\cos\alpha - \lambda)y & = & 0 \end{array}$
- Hat nicht-triviale Lösung $\Leftrightarrow$ Determinante $= 0$ ... Eigenwerte von S_α
- Für jeden Eigenwert erhalten wir ein Gleichungssystem in den beiden Unbekannten x und y
- Lösen dieser Gleichungssysteme liefert die Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

- Eine Zahl λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $\neq 0$ gibt.
- Der Kern von $A - \lambda I$ muss also *mehr* als den Nullvektor enthalten, seine Dimension muss ≥ 1 sein.
- Es muss daher gelten: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Es gilt allgemein:

Satz

λ ist Eigenwert der linearen Abbildung A $\quad \Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I) = 0.$

Die Menge der Eigenvektoren

Definition

Ist $\lambda \in K$ Eigenwert der linearen Abbildung A, so bezeichnet man die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren

$$T_\lambda := \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

als Eigenraum zum Eigenwert λ.

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Daraus können wir folgende Schlüsse ziehen:

$\Rightarrow$ Der Eigenraum T_λ zum Eigenwert λ ist der Kern der Abbildung $(A - \lambda I)$

$\Rightarrow$ Der Eigenraum T_λ zu einem Eigenwert λ ist ein Untervektorraum (da der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist!)

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Erinnern wir uns: λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $v \neq 0$ gibt.

$\Rightarrow$ Der Kern von $(A - \lambda I)$ muss mehr als den Nullvektor enthalten, er muss Dimension ≥ 1 haben

$\Rightarrow$ λ ist Eigenwert der linearen Abbildung A genau dann, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Eine mögliche Vorgehensweise, um Eigenwerte und -vektoren zu berechnen:

1. Aufstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I)$
2. Berechnen der Eigenwerte λ_i durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$
3. Berechnung der Eigenvektoren v_i für jeden Eigenwert λ_i durch $(A - \lambda I)v = \vec{0}$

Zusammenfassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Matrix A ist invertierbar
- Die Matrix A hat vollen Rang
- Die Matrix A ist regulär
- Die Determinante der Matrix A ist ungleich null
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat einen nulldimensionalen Lösungsraum
- Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
- Der Kern der linearen Abbildung $f(x) = Ax$ hat die Dimension 0
- Die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ ist bijektiv