Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Matrizen und Lineare Algebra

W. Gansterer, K. Schindlerova

29. April 2020

Wiederholung

Vektorraum

Definition:
Sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** V mit Skalaren aus K besteht aus einer kommutativen Gruppe $(V, +)$ und einer skalaren Multiplikation

$$\cdot : \quad K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda{\cdot}v,$$

sodass für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

(V2) $1 \cdot v = v$ ... "1" $=$ Einselement des Körpers!

(V3) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(V4) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Lineare Abbildung

Definition:
Es seien U, V Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt **lineare Abbildung**, falls für alle $u, v \in U$ und für alle $\lambda \in K$ gilt:

(LA1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

(LA2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Matrizen und Lineare Algebra

Überblick

Lineare Gleichungssysteme

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
  - Matrix $A \in K^{m \times n}$
  - Ergebnisvektor $b \in K^m$
  - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
  - Matrix $A \in K^{m \times n}$
  - Ergebnisvektor $b \in K^m$
  - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

$\rightarrow$ $Ax = b$

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
  - Matrix $A \in K^{m \times n}$
  - Ergebnisvektor $b \in K^m$
  - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

$\rightarrow$ $Ax = b$

  - $b \neq 0 \ldots$ *inhomogenes* Gleichungssystem

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
  - Matrix $A \in K^{m \times n}$
  - Ergebnisvektor $b \in K^m$
  - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

$\rightarrow$ $Ax = b$

- $b \neq 0$ ... *inhomogenes* Gleichungssystem
- $b = 0$ ... *homogenes* Gleichungssystem

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
  - Matrix $A \in K^{m \times n}$
  - Ergebnisvektor $b \in K^m$
  - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

$\rightarrow$ $Ax = b$

  - $b \neq 0 \ldots$ *inhomogenes* Gleichungssystem
  - $b = 0 \ldots$ *homogenes* Gleichungssystem

- $\text{Lös}(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$

Problemstellung

- Gegeben: m lineare Gleichungen mit n Unbekannten.
- System von Gleichungen kann beschrieben werden durch
  - Matrix $A \in K^{m \times n}$
  - Ergebnisvektor $b \in K^m$
  - Vektor der Unbekannten $x \in K^n$

$\rightarrow$ $Ax = b$

  - $b \neq 0$ … *inhomogenes* Gleichungssystem
  - $b = 0$ … *homogenes* Gleichungssystem

- $\text{Lös}(A, b) := \{x \in K^n \mid Ax = b\}$
- Interpretation als lineare Abbildung:
  $\text{Lös}(A, b)$ ist die Menge der $x \in K^n$, die durch die lineare Abbildung A auf den Vektor b abgebildet werden.

Gauß Algorithmus

Der Gauß Algorithmus kann verwendet werden zur Bestimmung

- des Rangs der Matrix A
- der Lösbarkeit/der Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems
- der Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$
- der Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$
- der Inversen von A (in erweiterter Form)
- der Determinante von A

. . . siehe nächster Abschnitt!

Gauß Algorithmus

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von elementaren Zeilenumformungen die (erweiterte) Koeffizientenmatrix in Zeilen-/Stufenform gebracht.

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von **elementaren Zeilenumformungen** *die (erweiterte) Koeffizientenmatrix in Zeilen-/Stufenform gebracht.*

Elementare Zeilenumformungen:

- Vertauschen von Zeilen
- Addition/Subtraktion des λ-fachen einer Zeile z_i zu einer anderen Zeile z_j
- Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$

... *verändern die Lösung des linearen Gleichungssystems nicht*!

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von elementaren Zeilenumformungen die **(erweiterte) Koeffizientenmatrix** *in die Zeilen-/Stufenform gebracht.*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)}_{\text{erweiterte Koeffizientenmatrix}}$$

Beim Gauß Algorithmus wird mithilfe von elementaren Zeilenumformungen die (erweiterte) Koeffizientenmatrix in die **Zeilen-/Stufenform** *gebracht.*

Kopf/Leitkoeffizient einer Zeile = das erste Element ungleich Null

Zeilen-/Stufenform:

- Nach Nullzeilen dürfen nur Nullzeilen stehen / alle Nichtnullzeilen müssen über den Nullzeilen stehen
- Der Kopf einer Zeile muss mindestens eine Stelle weiter rechts stehen als der Kopf der Zeile darüber
- Alle Einträge unterhalb eines Kopfes müssen Null sein

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$
\begin{array}{rrcr}
i: & x_1 - 2x_2 + x_4 & = & 0 \\
ii: & -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 10 \\
iii: & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -13 \\
iv: & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -6
\end{array}
$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$\begin{array}{rrcr}
i: & x_1 - 2x_2 + x_4 & = & 0 \\
ii: & -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 10 \\
iii: & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -13 \\
iv: & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -6
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\
2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\
1 & 1 & -2 & 1 & -6
\end{array}\right)
\begin{array}{|l}
\\
\\
-2i \\
-i
\end{array}$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$\begin{array}{rrcr} i: & x_1 - 2x_2 + x_4 & = & 0 \\ ii: & -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 10 \\ iii: & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -13 \\ iv: & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ -2i \\ -i \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ \mathbf{0} & 7 & -5 & -2 & -13 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ +7ii \\ +3ii \end{array}$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$\begin{array}{rrcr}
i: & x_1 - 2x_2 + x_4 & = & 0 \\
ii: & -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 10 \\
iii: & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -13 \\
iv: & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -6
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ -2i \\ -i \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ \mathbf{0} & 7 & -5 & -2 & -13 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ +7ii \\ +3ii \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & \mathbf{0} & 16 & -9 & 57 \\ 0 & \mathbf{0} & 7 & -3 & 24 \end{array}\right) \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\frac{7}{16}iii \end{array}\right.$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$\begin{aligned} i: &\quad x_1 - 2x_2 + x_4 &= 0 \\ ii: &\quad -x_2 + 3x_3 - x_4 &= 10 \\ iii: &\quad 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= -13 \\ iv: &\quad x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ -2i \\ -i \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ \mathbf{0} & 7 & -5 & -2 & -13 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ +7ii \\ +3ii \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & \mathbf{0} & 16 & -9 & 57 \\ 0 & \mathbf{0} & 7 & -3 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ \\ -\frac{7}{16}iii \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ \\ \cdot\left(\frac{16}{15}\right) \end{array}$$

Beispiel: Anwendung Gauß Algorithmus

$$\begin{array}{rrcr} i: & x_1 - 2x_2 + x_4 & = & 0 \\ ii: & -x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 10 \\ iii: & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 & = & -13 \\ iv: & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 & = & -6 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 2 & 3 & -5 & 0 & -13 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ -2i \\ -i \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ \mathbf{0} & 7 & -5 & -2 & -13 \\ \mathbf{0} & 3 & -2 & 0 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ +7ii \\ +3ii \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & \mathbf{0} & 16 & -9 & 57 \\ 0 & \mathbf{0} & 7 & -3 & 24 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ \\ -\frac{7}{16}iii \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \frac{15}{16} & -\frac{15}{16} \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ \\ \\ \cdot(\frac{16}{15}) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \end{array}\right)$$

Gauß Algorithmus: Rangbestimmung

$$\begin{aligned} \text{Rang der Matrix} &= \text{Anzahl der Zeilen ungleich Null} \\ &= \text{Anzahl der Leitkoeffizienten} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Rang(A) =$$

Gauß Algorithmus: Rangbestimmung

$$\begin{aligned} \text{Rang der Matrix} &= \text{Anzahl der Zeilen ungleich Null} \\ &= \text{Anzahl der Leitkoeffizienten} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Rang(A) = 4$$

Gauß Algorithmus: Lösbarkeit/Anzahl Lösungen

A . . . Koeffizientenmatrix
E . . . erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(E) = \text{voller Rang} \qquad \Leftrightarrow \textit{eindeutige Lösung}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & g \\ 0 & d & e & h \\ 0 & 0 & f & i \end{array}\right)$$

Gauß Algorithmus: Lösbarkeit/Anzahl Lösungen

A . . . Koeffizientenmatrix
E . . . erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(E) = \text{voller Rang} \quad &\Leftrightarrow \textit{eindeutige Lösung} \\ \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(E) < \text{voller Rang} \quad &\Leftrightarrow \textit{unendlich viele Lösungen} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & g \\ 0 & d & e & h \\ 0 & 0 & f & i \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & f \\ 0 & d & e & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Gauß Algorithmus: Lösbarkeit/Anzahl Lösungen

A . . . Koeffizientenmatrix
E . . . erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{lr}
\text{Rang}(A) = \text{Rang}(E) = \text{voller Rang} & \Leftrightarrow \textit{eindeutige Lösung} \\
\text{Rang}(A) = \text{Rang}(E) < \text{voller Rang} & \Leftrightarrow \textit{unendlich viele Lösungen} \\
\text{Rang}(A) < \text{Rang}(E) & \Leftrightarrow \textit{keine Lösung}
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & g \\ 0 & d & e & h \\ 0 & 0 & f & i \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & f \\ 0 & d & e & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & f \\ 0 & d & e & g \\ 0 & 0 & 0 & h \end{array}\right)$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 =$ $x_3 =$ $x_2 =$ $x_1 =$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 =$ $x_3 =$ $x_2 =$ $x_1 =$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -1, \; x_3 = \quad x_2 = \quad x_1 =$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = \quad x_3 = \quad x_2 = \quad x_1 =$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -1, \; x_3 = 3, \; x_2 = \quad x_1 =$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = \quad x_3 = \quad x_2 = \quad x_1 =$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 = -1,\ x_3 = 3,\ x_2 = 0,\ x_1 =$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 = \quad x_3 = \quad x_2 = \quad x_1 =$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -1,\ x_3 = 3,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = \quad x_3 = \quad x_2 = \quad x_1 =$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -1,\ x_3 = 3,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = 0,\ x_3 = \quad x_2 = \quad x_1 =$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -1,\ x_3 = 3,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = \quad x_1 =$$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_4 = -1,\ x_3 = 3,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 =$

Gauß Algorithmus: Lösungen

Inhomogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 57 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$x_4 = -1,\ x_3 = 3,\ x_2 = 0,\ x_1 = 1$$

Homogenes Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_4 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0$$

Ein weiteres Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rang
- Lösbarkeit
- Lösungen

Ein weiteres Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rang
  - 3 Köpfe

  $\Rightarrow$ **Rang(A) = 3**
- Lösbarkeit
- Lösungen

Ein weiteres Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rang
  - 3 Köpfe

  $\Rightarrow$ **Rang(A) = 3**
- Lösbarkeit
  - Rang (A) $= 3$
  - Rang (E) $= 3$
  - voller Rang $= 4$

  $\Rightarrow$ **unendlich viele Lösungen**
- Lösungen

Ein weiteres Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rang
  - 3 Köpfe

  $\Rightarrow$ **Rang(A) = 3**
- Lösbarkeit
  - Rang (A) $= 3$
  - Rang (E) $= 3$
  - voller Rang $= 4$

  $\Rightarrow$ **unendlich viele Lösungen**

- Lösungen
  - $x_4 = 1$
  - $x_3 = \lambda$ ... beliebiger Parameter
  - $x_2 = 5 - 3\lambda$
  - $x_1 = 9 - 6\lambda$
  - Darstellung in Parameterform:

Ein weiteres Beispiel

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Rang
  - 3 Köpfe
  - $\Rightarrow$ **Rang(A) = 3**
- Lösbarkeit
  - Rang (A) $= 3$
  - Rang (E) $= 3$
  - voller Rang $= 4$
  - $\Rightarrow$ **unendlich viele Lösungen**

- Lösungen
  - $x_4 = 1$
  - $x_3 = \lambda$ . . . beliebiger Parameter
  - $x_2 = 5 - 3\lambda$
  - $x_1 = 9 - 6\lambda$
  - Darstellung in Parameterform:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Elementare Zeilenumformungen

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Addition/Subtraktion des λ-fachen einer Zeile z_i zu einer anderen Zeile z_j $(i \neq j)$
3. Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \neq 0$

Anmerkungen zum Gauß'schen Algorithmus

- In der Literatur werden häufig die Leitkoeffizienten noch auf 1 normiert
- Erleichtert potentiell das Rechnen per Hand, bedeutet aber mehr Multiplikationen
- Lineare Gleichungssysteme werden heute nicht (mehr) per Hand gelöst $\Rightarrow$ numerische Effizienz ist wichtiger, keine Normierung der Leitkoeffizienten

Rekursive Formulierung

Gauss(i,j)

Falls $i =$ Anzahl Zeilen oder $j >$ Anzahl Spalten:
Ende.

Falls $a_{ij} = 0$:
suche $a_{kj} \neq 0$, $k > i$; wenn es keines gibt: **Gauss(i,j+1)**, Ende.
vertausche Zeile k mit Zeile i

subtrahiere $\forall k > i$ von der k-ten Zeile das (a_{kj}/a_{ij})-fache der i-ten Zeile.

Gauss(i+1,j+1), Ende.

Initialer Aufruf: **Gauss(1,1)**

Rangbestimmung

Satz

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

Rangbestimmung

Satz

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Umformung 1: Klar, weil sich der Zeilenraum nicht ändert.

■

Rangbestimmung

Satz

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Umformung 1: Klar, weil sich der Zeilenraum nicht ändert.
- Umformung 2: Wir zeigen, dass $\mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m) = \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)$ gilt, indem wir zeigen, dass sowohl "$\subset$" als auch "$\supset$" gilt.

■

Rangbestimmung

Satz

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Umformung 1: Klar, weil sich der Zeilenraum nicht ändert.
- Umformung 2: Wir zeigen, dass $\mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m) = \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)$ gilt, indem wir zeigen, dass sowohl "$\subset$" als auch "$\supset$" gilt.

"$\subset$": Betrachte $u \in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i z_i + \cdots + \lambda_j z_j + \cdots + \lambda_m z_m \\ &= \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i (z_i + \lambda z_j) + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) z_j + \cdots + \lambda_m z_m \\ &\in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)! \end{aligned}$$

■

Rangbestimmung

Satz

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Umformung 1: Klar, weil sich der Zeilenraum nicht ändert.
- Umformung 2: Wir zeigen, dass $\mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m) = \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)$ gilt, indem wir zeigen, dass sowohl "$\subset$" als auch "$\supset$" gilt.

"$\subset$": Betrachte $u \in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i z_i + \cdots + \lambda_j z_j + \cdots + \lambda_m z_m \\ &= \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i (z_i + \lambda z_j) + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) z_j + \cdots + \lambda_m z_m \\ &\in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)! \end{aligned}$$

"$\supset$": $u = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i (z_i + \lambda z_j) + \cdots + \lambda_m z_m \in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m)$.

■

Rangbestimmung

Satz

Elementare Zeilenumformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.

- Umformung 1: Klar, weil sich der Zeilenraum nicht ändert.
- Umformung 2: Wir zeigen, dass $\mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m) = \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)$ gilt, indem wir zeigen, dass sowohl "$\subset$" als auch "$\supset$" gilt.

"$\subset$": Betrachte $u \in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m)$. Daher gilt

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i z_i + \cdots + \lambda_j z_j + \cdots + \lambda_m z_m \\ &= \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i (z_i + \lambda z_j) + \cdots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) z_j + \cdots + \lambda_m z_m \\ &\in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i + \lambda z_j, \ldots, z_m)! \end{aligned}$$

"$\supset$": $u = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_i (z_i + \lambda z_j) + \cdots + \lambda_m z_m \in \mathrm{Span}(z_1, z_2, \ldots, z_i, \ldots, z_m)$.

- Umformung 3: Ähnlich $\rightarrow$ probieren Sie es selber!

$\blacksquare$

Elementare Zeilenumformungen als Matrizenmultiplikationen

Satz

Eine elementare Zeilenumformung der Matrix $A \in K^{m \times n}$ entspricht der Multiplikation mit einer bestimmten invertierbaren Matrix von links.

Elementare Zeilenumformungen als Matrizenmultiplikationen

Satz

Eine elementare Zeilenumformung der Matrix $A \in K^{m \times n}$ entspricht der Multiplikation mit einer bestimmten invertierbaren Matrix von links.

Wir können die entsprechenden Matrizen explizit angeben – rechnen Sie bitte nach, dass diese wirklich den gewünschten Effekt haben!

- Umformung 1: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix P, die dadurch entsteht, dass Sie in I_m die i-te und j-te Zeile vertauschen ($\rightarrow$ Zeilenpermutation!)

■

Elementare Zeilenumformungen als Matrizenmultiplikationen

Satz

Eine elementare Zeilenumformung der Matrix $A \in K^{m \times n}$ entspricht der Multiplikation mit einer bestimmten invertierbaren Matrix von links.

Wir können die entsprechenden Matrizen explizit angeben – rechnen Sie bitte nach, dass diese wirklich den gewünschten Effekt haben!

- Umformung 1: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix P, die dadurch entsteht, dass Sie in I_m die i-te und j-te Zeile vertauschen ($\rightarrow$ Zeilenpermutation!)
- Umformung 2: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix E', die dadurch entsteht, dass Sie in I_m zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile addieren (Ersetzen des Elementes $I_m(i, j)$, welches vorher 0 ist, durch λ)

■

Elementare Zeilenumformungen als Matrizenmultiplikationen

Satz

Eine elementare Zeilenumformung der Matrix $A \in K^{m \times n}$ entspricht der Multiplikation mit einer bestimmten invertierbaren Matrix von links.

Wir können die entsprechenden Matrizen explizit angeben – rechnen Sie bitte nach, dass diese wirklich den gewünschten Effekt haben!

- Umformung 1: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix P, die dadurch entsteht, dass Sie in I_m die i-te und j-te Zeile vertauschen ($\rightarrow$ Zeilenpermutation!)
- Umformung 2: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix E', die dadurch entsteht, dass Sie in I_m zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile addieren (Ersetzen des Elementes $I_m(i,j)$, welches vorher 0 ist, durch λ)
- Umformung 3: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix E'', die dadurch entsteht, dass Sie in I_m die i-te Zeile mit λ multiplizieren

■

Elementare Zeilenumformungen als Matrizenmultiplikationen

Satz

Eine elementare Zeilenumformung der Matrix $A \in K^{m \times n}$ entspricht der Multiplikation mit einer bestimmten invertierbaren Matrix von links.

Wir können die entsprechenden Matrizen explizit angeben – rechnen Sie bitte nach, dass diese wirklich den gewünschten Effekt haben!

- Umformung 1: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix P, die dadurch entsteht, dass Sie in I_m die i-te und j-te Zeile vertauschen ($\rightarrow$ Zeilenpermutation!)
- Umformung 2: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix E', die dadurch entsteht, dass Sie in I_m zur i-ten Zeile das λ-fache der j-ten Zeile addieren (Ersetzen des Elementes $I_m(i, j)$, welches vorher 0 ist, durch λ)
- Umformung 3: Multiplizieren Sie A von links mit der Matrix E'', die dadurch entsteht, dass Sie in I_m die i-te Zeile mit λ multiplizieren

Beachten Sie: Die $m \times m$-Matrizen P, E' und E'' sind selbst aus I_m durch elementare Zeilenumformungen entstanden. Da diese den Rang (m) nicht ändern, sind alle diese drei Matrizen invertierbar! ■

Berechnung der Inversen Matrix

Betrachten wir nun, wie wir mithilfe des Gauss-Algorithmus die Inverse einer Matrix berechnen können.

Grundidee:

1. Wenn eine quadratische $n \times n$-Matrix invertierbar ist, dann transformiert sie der Gauss-Algorithmus auf eine Zeilen-Stufen-Form, in der alle Diagonalelemente ungleich 0 sind.
2. Mit skalaren Multiplikationen können alle diese Diagonalelemente auf 1 transformiert werden.
3. Nun kann von rechts beginnend der Gauss-Algorithmus angewendet werden, um die Zeilen-Stufen-Form mittels elementarer Zeilenumformungen auf I_n umzuwandeln.

Gauß Jordan Inversion

Gauß Jordan Inversion

Wandelt man eine invertierbare $n \times n$-Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix um, so entsteht die zu A inverse Matrix A^{-1}, wenn man diese Umformungen in der gleichen Reihenfolge auf die Einheitsmatrix I_n anwendet.

Gauß Jordan Inversion

Gauß Jordan Inversion

Wandelt man eine invertierbare $n \times n$-Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix um, so entsteht die zu A inverse Matrix A^{-1}, wenn man diese Umformungen in der gleichen Reihenfolge auf die Einheitsmatrix I_n anwendet.

Bezeichnen wir mit $D_1, \ldots, D_k$ die Matrizen, die die an A vorgenommenen Zeilenumformungen darstellen (vgl. voriger Satz!). Dann gilt:

$$D_k D_{k-1} \cdots D_1 A = I_n = (D_k D_{k-1} \cdots D_1)\, A.$$

■

Gauß Jordan Inversion

Gauß Jordan Inversion

Wandelt man eine invertierbare $n \times n$-Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix um, so entsteht die zu A inverse Matrix A^{-1}, wenn man diese Umformungen in der gleichen Reihenfolge auf die Einheitsmatrix I_n anwendet.

Bezeichnen wir mit $D_1, \ldots, D_k$ die Matrizen, die die an A vorgenommenen Zeilenumformungen darstellen (vgl. voriger Satz!). Dann gilt:

$$D_k D_{k-1} \cdots D_1 A = I_n = (D_k D_{k-1} \cdots D_1)\, A.$$

Aus $A^{-1} A = I_n$ folgt dann:

$$A^{-1} = D_k D_{k-1} \cdots D_1 = (D_k D_{k-1} \cdots D_1)\, I_n.$$

■

Beispiel: Gauß Jordan Inversion

A			I			
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	0	1	0	-i
0	1	3	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	
0	1	3	0	0	1	-3 ii
1	0	0	1	0	0	
0	0	1	-1	1	0	$\downarrow$
0	1	**0**	3	-3	1	$\uparrow$
1	0	0	1	0	0	
0	1	0	3	-3	1	
0	0	1	-1	1	0	
I			A^{-1}			

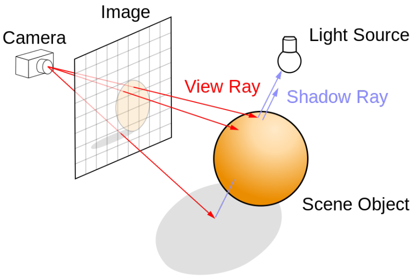
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Ray Tracing, Teil 1

Strahlenverfolgung für die Darstellung von räumlichen Objekten auf dem Bildschirm; jeder Objektpunkt wird durch eine Zentralprojektion (Zentrum = Auge des Beobachters) auf die Darstellungsebene projiziert

Vorgangsweise: Aus dem Zentrum werden Strahlen in Richtung des Objekts geschossen und der erste Schnittpunkt mit dem Objekt bestimmt. Dessen Farbe und Helligkeit ergeben die Darstellung des Objektes auf der Projektionsebene.



Anwendung: Ray Tracing, Teil 1

Häufig auftretende Aufgabe:

Erster Schnittpunkt einer Geraden mit einem Objekt

- Komplexe Objekte werden oft durch ebene Polygone approximiert

$\Rightarrow$ Bestimme den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Ebenengleichung: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

Parameterdarstellung einer Geraden:

$$g = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Projektions-} \\ \text{zentrum}}} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Richtung des} \\ \text{Projektionsstrahls}}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

Anwendung: Ray Tracing, Teil 1

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrcl} i: & x_1 & = & u_1 + \lambda v_1 \\ ii: & x_2 & = & u_2 + \lambda v_2 \\ iii: & x_3 & = & u_3 + \lambda v_3 \\ iv: & ax_1 + bx_2 + cx_3 & = & d \end{array}$$

Alternativ: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -v_1 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & -v_2 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & -v_3 & u_3 \\ a & b & c & 0 & d \end{array}\right)$

$\Rightarrow \lambda = \frac{d - au_1 - bu_2 - cu_3}{av_1 + bv_2 + cv_3}$

(Nenner nur dann 0, wenn kein Schnittpunkt mit der Ebene!)

Wurde ein Schnittpunkt gefunden, muss noch ermittelt werden, ob dieser innerhalb oder außerhalb des Polygons liegt, welches das Objekt begrenzt $\rightarrow$ *siehe Teil 2 (später)*

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

- Lösung eines *homogenen* Gleichungssystems ist ein Vektorraum (Unterraum)
  - Der Nullpunkt (0-dimensional)
  - Eine Ursprungsgerade (1-dimensional)
  - Eine Ursprungsebene (2-dimensional)
  - ...

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

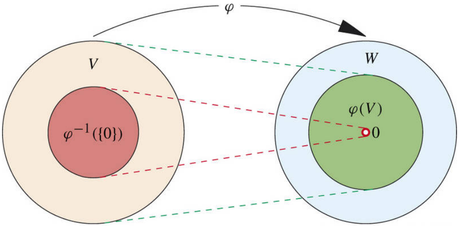
- Lösung eines *homogenen* Gleichungssystems ist ein Vektorraum (Unterraum)
  - Der Nullpunkt (0-dimensional)
  - Eine Ursprungsgerade (1-dimensional)
  - Eine Ursprungsebene (2-dimensional)
  - ...
- Lösung eines *inhomogenen* Gleichungssystems ist im allgemeinen *kein* Unterraum
  - Aus dem Nullpunkt verschobene Punkte, Geraden, Ebenen oder Räume höherer Dimension

Wiederholung Kern und Bild

Jede lineare Abbildung $\phi : V \to W$ hat einen **Kern**. Er ergibt sich aus der Lösung des homogenen Gleichungssystems und ist dadurch ein Untervektorraum des Urbildes V. Der Kern einer Abbildung ist die Urbildmenge des Nullvektors aus W, d. h., die Menge aller Vektoren aus V, die auf $0 \in W$ abgebildet werden.

Das **Bild** der linearen Abbildung ist die Gesamtheit der Vektoren aus W, die durch die Abbildung ϕ getroffen werden.

Achtung: Da bei jeder linearen Abbildung gelten muss $\phi(0) = 0$, ist ihr Kern (und somit auch ihr Bild) niemals leer.



Aus: Arens et al., *Mathematik*, ISBN: 978-3-8274-2347-4

Wiederholung Rangsatz

Rangsatz

Seien U, V Vektorräume, dim $U = n$ und $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$$

Beweisskizze.

$\blacksquare$

Wiederholung Rangsatz

Rangsatz

Seien U, V Vektorräume, dim $U = n$ und $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$dim(U) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$$

Beweisskizze.

Man wählt eine Basis des Kerns, diese kann man zu einer Basis von U ergänzen. Dann zeigt man, dass die Bilder dieser Ergänzung gerade eine Basis des Bildraums darstellen. ■

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Satz

dim(Lös(A,0)) $=$ *Anzahl der Unbekannten - Rang (A)*

Beweis.

∎

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Satz

dim(Lös(A,0)) = Anzahl der Unbekannten - Rang (A)

Beweis.

Wir wissen schon:

Rang der Matrix A	$=$	Dimension von Im(A)
Anzahl der Unbekannten	$=$	Dimension des Urbildraums
Dimension des Lösungsraums	$=$	Dimension von Ker(A)

$\blacksquare$

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Satz

dim(Lös(A,0)) = Anzahl der Unbekannten - Rang (A)

Beweis.

Wir wissen schon:

Rang der Matrix A	$=$	Dimension von $\mathrm{Im}(A)$
Anzahl der Unbekannten	$=$	Dimension des Urbildraums
Dimension des Lösungsraums	$=$	Dimension von $\mathrm{Ker}(A)$

Wegen des Rangsatzes gilt:

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\text{Urbildraum}).$$

■

Geometrische Interpretation linearer Gleichungssysteme

Satz

dim(Lös(A,0)) = Anzahl der Unbekannten - Rang (A)

Beweis.

Wir wissen schon:

Rang der Matrix A	$=$	Dimension von $\mathrm{Im}(A)$
Anzahl der Unbekannten	$=$	Dimension des Urbildraums
Dimension des Lösungsraums	$=$	Dimension von $\mathrm{Ker}(A)$

Wegen des Rangsatzes gilt:

$$\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\text{Urbildraum}).$$

Daraus folgt direkt die Aussage. ∎

Ein Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $Rang(A) = 2$
- 3 Unbekannte $\Rightarrow dim(Ker(A)) = 1 \qquad \Rightarrow$ Lös$(A, 0)$ ist eine Gerade

Ein Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

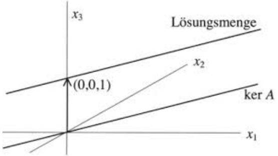
- $Rang(A) = 2$
- 3 Unbekannte $\Rightarrow dim(Ker(A)) = 1 \qquad \Rightarrow$ Lös$(A, 0)$ ist eine Gerade
- $(1, 1, 0)^\top \in$ Lös$(A, 0) \Rightarrow \quad$ Ker$(A) = \{\lambda(1, 1, 0)^\top \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

Ein Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $Rang(A) = 2$
- 3 Unbekannte $\Rightarrow dim(Ker(A)) = 1 \qquad \Rightarrow$ Lös$(A, 0)$ ist eine Gerade
- $(1, 1, 0)^\top \in$ Lös$(A, 0) \Rightarrow \quad$ Ker$(A) = \{\lambda(1, 1, 0)^\top \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $(0, 0, 1)^\top \in$ Lös$(A, b) \Rightarrow \quad$ Lös(A, b) ist die Gerade

$$g = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$



Zusammenfassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Matrix A ist invertierbar
- Die Matrix A hat vollen Rang
- Die Matrix A ist regulär
- Die Determinante der Matrix A ist ungleich null
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat einen nulldimensionalen Lösungsraum
- Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
- Der Kern der linearen Abbildung $f(x) = Ax$ hat die Dimension 0
- Die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ ist bijektiv