Relationen und Abbildungen

Relationen

Was genau ist eine Relation?

Relationen

Was genau ist eine Relation?

Antwort: „Eine Beziehung zwischen zwei Elementen einer Menge“

Relationen

Beispiel:
Eine der bekanntesten Relationen ist $\leq$ (kleiner gleich)
Zwei Zahlen a und b stehen nun dann in Relation $\leq$, wenn $a \leq b$ gilt

So steht etwa 3 in Relation zu 5, da $3 \leq 5$ gilt.
Andererseits gilt nicht $5 \leq 3$, das heißt, 5 ist nicht in Relation zu 3.

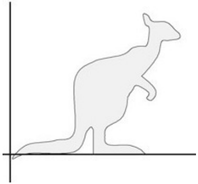
Es gibt viele Beispiele für Relationen und viele davon kennen wir schon.
Etwa: $\leq$, $\neq$, $<$, $=$

Relationen

Mathematisch definiert:

Definition:
Seien M und N Mengen und $R \subset M \times N$. Dann heißt R **Relation** auf $M \times N$. Gilt $M = N$, dann heißt R *Relation* auf M.

Das heißt, R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von M und N. R ist beliebig definierbar, d.h., man könnte auch eine Relation definieren, die so aussieht:



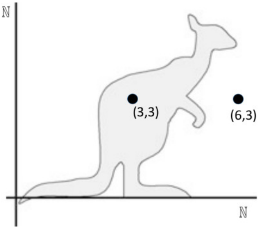
Relationen

Anmerkung: Eine Relation kann für ein Paar von Elementen nur wahr oder falsch sein! Entweder etwas steht in Relation zu etwas anderem oder nicht.

Anmerkung: Eine Relation gilt immer nur zwischen zwei Elementen!

Anmerkung: $3 \leq 5$ ist die Kurzschreibweise für $R_{\leq}(3,5)$.
Alternativ kann man auch $3R5$ oder $(3,5) \in R$ oder $R(3,5)$ schreiben.

Relationen



Dieses Bild definiert eine Relation auf den Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nehmen wir den eingezeichneten Punkt $(3,3)$. Er liegt im Känguru, d.h., es gilt $(3,3) \in R$. Die Relation von 3 zu 3 ist wahr. Dagegen gilt nicht $R(6,3)$.

Alles was eine Relation macht, ist eine Aussagevorschrift bezüglich des Verhältnisses zweier Elemente.

Relationen

Beispiel:
Wir behaupten, dass $<$ eine Relation ist. Warum stimmt das?

Beweisskizze:

- $<$ auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert
- für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ kann man entscheiden, ob $R_<(a, b)$ wahr oder falsch ist. Wir wissen, dass $2 < 5$ gilt, also ist $R_<(2, 5)$ wahr. Da wir dies für absolut alle Zahlen a, b entscheiden können, ist $R_< \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Daher können wir behaupten, dass $<$ eine Relation ist.

Relationen

Wir haben bis jetzt 2-stellige Relationen gehabt, aber man kann auch n-stellige Relationen betrachten.

Definition:
Seien $N_1, N_2, \ldots, N_k$ Mengen und $R \subset N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$.
Dann heißt R Relation auf $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$.

Relationen

Im Prinzip funktioniert eine n-stellige Relation genau gleich, wie eine 2-stellige.

Beispiel:
Wir haben $R_{<<}(a, b, c)$, also die Relation, die bestimmt, ob $a < b < c$ wahr ist. $R_{<<}$(1,2,3) etwa ist wahr. Hingegen ist $R_{<<}(3, 1, 2)$ falsch. Wir sehen, dass n-stellige Relationen so funktionieren, wie wir es erwarten.

Anwendung: Relationales Datenmodell

Relationales Datenmodell

In relationalen Datenbanken werden Datenmengen durch die Relationen charakterisiert, die zwischen ihnen bestehen.
Moderne Datenbanken repräsentieren Relationen in *Tabellen*.

- **Zeile** = ein *Tupel* (Element) aus der n-stelligen Relation
- **Spalte**: *Attribut*, d.h. Stelle (Dimension) der n-stelligen Relation

Beispiel: Tabelle für die Relation **Produkte** eine Computerhändlers:

PNr	Typ	Preis	HNr
1	Laptop	990	1
2	PC	200	2
3	Server	100	3

Relationales Datenmodell

- Jede Zeile in der Tabelle **Produkt** ist ein Element (auch n-Tupel genannt) der n-stelligen Relation auf dem kartesischen Produkt aus den Mengen $\mathbb{N} \times$ char(20) $\times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- Die Tabelle ist daher eine Relation $R_p \subset \mathbb{N} \times$ char(20) $\times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
- Die Tabelle **Hersteller** auf der folgenden Seite ist eine Relation $R_H \subset \mathbb{N} \times$ char(20) $\times$ char(20).

Relationales Datenmodell

Hersteller:

HNr	Name	Ort
1	IBM	New York
2	Apple	Cupertino
3	HP	Paolo Alto

Relationales Datenmodell

- Relationale Datenbanken bestehen oft aus sehr vielen Tabellen (tausende).
- Relationen repräsentiert durch Tabellen bieten die Möglichkeit, die reale Welt flexibel zu modellieren.
- Die *relationale Algebra* bietet Operationen, die allgemeine Anfragen auf Tabellen unterstützen
    - In den meisten Datenbanken implementiert in der *Structured Query Language* (SQL).

Wichtige Operationen

Selektion: eine Teilmenge der vorhandenen Zeilen wird ausgewählt

z. B. ein bestimmter Hersteller aus der Tabelle der Hersteller:
SQL: SELECT * FROM Hersteller WHERE Name = 'IBM'

Hersteller

HNr	Name	Ort
1	IBM	New York
2	Apple	Cupertino
3	HP	Paolo Alto

Selektionsergebnis

HNr	Name	Ort
1	IBM	New York

Wichtige Operationen

Projektion: eine Teilmenge der vorhandenen Spalten wird ausgewählt.

z.B. die Spalten Typ und Preis der Tabelle Produkt.
SQL: SELECT Typ, Preis FROM Produkt

Produkt

PNr	Typ	Preis	HNr
1	Laptop	990	1
2	PC	200	2
3	Server	100	3

Projektionsergebnis

Typ	Preis
Laptop	990
PC	200
Server	100

Wichtige Operationen

Join: Verbund/Verkettung von Relationen; dies geschieht unter Heranziehung gemeinsamer Attribute (Spalten). Zeilen der neuen Relation entstehen durch Aneinanderfügung von je einer Zeile der ersten und zweiten Relation, wenn Werte der gemeinsamen Attribute übereinstimmen

z. B.: Zeilen von **Hersteller** und **Produkt** werden anhand von Attribut HNr aneinandergefügt.
SQL: SELECT * FROM Produkt JOIN Hersteller ON Produkt.HNr = Hersteller.HNr

PNr	Typ	Preis	HNr	Name	Ort
1	Laptop	900	1	IBM	New York
2	PC	200	2	Apple	Cupertino
3	Server	100	3	HP	Palo Alto

Mehr dazu in der VU Datenbanksysteme (3. Semester Bachelor Informatik)

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen

Definition:
Äquivalenzrelationen sind Relationen auf einer Menge M mit den folgenden Eigenschaften:

1. **Reflexivität:** $\forall x \in M$ gilt $R(x, x)$.
2. **Symmetrie:** $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ gilt $R(y, x)$
3. **Transitivität:** $\forall x, y, z \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, z)$ gilt $R(x, z)$.

Was bedeutet das genau?

Äquivalenzrelationen

Reflexivität: $\forall x \in M$ gilt $R(x,x)$.

Gelesen wird der Satz folgendermaßen: „Für alle x aus M gilt, dass x in Relation zu x ist.“

Dies bedeutet, dass ein Element immer in Relation zu sich selbst steht. Nehmen wir als Relation $\leq$. Die Behauptung ist, dass jede Zahl immer in Relation zu sich selbst steht, also $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. $3 \leq 3$ gilt genauso wie $5 \leq 5$ und dies gilt auch für alle anderen Zahlen. $\leq$ ist reflexiv.

Äquivalenzrelationen

Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ gilt $R(y, x)$.

Gelesen wird der Satz folgendermaßen: „Für alle x und y aus M gilt, dass wenn x in Relation zu y ist, dann ist auch y in Relation zu x."

Wenn ein Element in Relation zu einem anderen Element steht, dann gilt das auch umgekehrt. Nehmen wir als Relation etwa $\neq$ her. So gilt natürlich wenn $x \neq y$ stimmt, dass auch $y \neq x$ stimmt.

Äquivalenzrelationen

Transitivität: $\forall x, y, z \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, z)$ gilt $R(x, z)$.

Gelesen wird der Satz folgendermaßen: „Für alle x, y und z aus M gilt, dass wenn x in Relation zu y ist und y zu z dann ist auch x in Relation zu z."

Nehmen wir als Relation $=$. Wenn wir wissen, dass $x = y$ ist und $y = z$, dann ist auch klar, dass $x = z$ gilt.

Äquivalenzrelationen

Beispiele:
Ist $R_<$ eine Äquivalenzrelation?

Wir wissen schon, dass $<$ eine Relation ist. Nun müssen wir nur noch die drei Äquivalenz-Eigenschaften überprüfen:

1) Gilt Reflexivität?

Nein, $x < x$ gilt nicht! Das heißt $R_<$ ist keine Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelationen

Beispiele:
Was ist mit $R_=$?

$x = x$ gilt natürlich für alle Zahlen $\Rightarrow$ reflexiv
Wenn $x = y$ gilt, dann gilt auch $y = x$ $\Rightarrow$ symmetrisch
Transitivität haben wir schon gezeigt

$\Rightarrow$ $R_=$ ist eine Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelationen

Betrachten wir
$R_5 := \{(m,n) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | m - n \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar } \} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Dass R_5 eine Relation ist, ergibt sich aus der Definition: Wir betrachten eine Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ist es auch eine Äquivalenzrelation?

Anmerkung: $n \in \mathbb{Z}$ ist ohne Rest durch 5 teilbar bedeutet:
$\exists k \in \mathbb{Z} : 5 \cdot k = n$

Äquivalenzrelationen

Reflexivität: $R_5(n, n)$ gilt, denn:

- $n - n = 0$
- und 0 ist durch 5 teilbar $(0 \cdot 5 = 0) \Rightarrow$ **Reflexivität**

Symmetrie: Zu zeigen: $R_5(n, m) \Rightarrow R_5(m, n)$

- Es gelte $R_5(n, m) \Rightarrow \exists k : n - m = 5 \cdot k$ */mit -1 multiplizieren*
- $\Rightarrow -n + m = -5 \cdot k$ */Kommutativgesetz, mehr dazu bald*
- $\Rightarrow m - n = 5 \cdot (-k)$
- $\Rightarrow \exists k : m - n = 5 \cdot k \Rightarrow R_5(m, n) \Rightarrow$ **Symmetrie**

Äquivalenzrelationen

Transitivität: Zu zeigen: $R_5(n, m)$ und $R_5(m, s) \Rightarrow R_5(n, s)$

- Es gelte $R_5(n, m)$ und $R_5(m, s)$ */Definition von R_5 anwenden*
- $\Rightarrow \exists k : n - m = 5 \cdot k$ und $\exists l : m - s = 5 \cdot l$
- Zu zeigen: $n - s$ ist auch durch 5 teilbar */Definition von R_5 anwenden*
- $\Rightarrow n - s = (n - m) + (m - s) = 5 \cdot k + 5 \cdot l = 5 \cdot (k + l)$
- $\Rightarrow n - s$ ist durch 5 teilbar, d.h $R_5(n, s)$ ist wahr $\Rightarrow$ **Transitivität**

Äquivalenzrelationen

Transitivität: Warum gilt
$n - s = (n - m) + (m - s) = 5 \cdot k + 5 \cdot l = 5 \cdot (k + l)$?

- Wir können mit $+m - m$ erweitern
- $n - s = n - s + m - m$ */Kommutativgesetz anwenden*
- $= (n - m) + (m - s) = 5 \cdot k + 5 \cdot l = 5 \cdot (k + l)$

Äquivalenzrelationen

Definition:
Sei R eine Äquivalenzrelation auf M und $a \in M$. Dann heißt die Menge
$[a] := \{x \in M | R(x, a)\}$
Äquivalenzklasse von a.

D.h alle jene Elemente, die in Relation zu a stehen. Man nennt sie auch *die zu a äquivalenten Elemente*.

Äquivalenzrelationen

Beispiel:
Wir haben R_5 als Äquivalenzrelation. Dann sind die Äquivalenzklassen, diejenigen Zahlen die bei der Division durch 5 den gleichen Rest haben.
z. B $[1] = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$
Denn für jede dieser Zahlen x gilt $R(x, 1)$.

Beweis: Zahlen $x \in \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$ kann man darstellen als $\exists k : x = 5 \cdot k + 1$. Das können wir umformen zu $\exists k : 5 \cdot k = x - 1$ und das ist die Definition von $R(x, 1)$.

Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen sind eine bestimmte Klasse von Relationen.

Die (für uns) wichtigen Ordnungsrelationen kennen wir alle schon:
Es sind: $\leq$, $<$.

Anmerkung: $\geq$ und $>$ sind eigentlich die gleichen Relationen wie $\leq$ und $<$. Sie sind nur umgekehrt definiert.

Ordnungsrelationen

Definition:
Ordnungsrelationen sind diejenigen Relationen, die die folgenden Eigenschaften haben:

Reflexivität: $\forall x \in M$ gilt $R(x, x)$.
Anti-Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, x)$ gilt $x = y$.
Transitivität: $\forall x, y, z \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, z)$ gilt $R(x, z)$.

Genau genommen ist $<$ keine Ordnungsrelation, warum? Nicht reflexiv! Häufig bezeichnet als *strikte Ordnungsrelation* oder *Halbordnung*. Aber eine Sache der Definition. Man sollte sich immer bewusst sein, welche Definitionen zugrunde liegen.

Die Eigenschaften Symmetrie und Anti-Symmetrie

Definition:
Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ gilt $R(y, x)$
Anti-Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, x)$ gilt $x = y$.

Beispiele für Relationen

- die symmetrisch und anti-symmetrisch sind: $=$ Das ist die einzige Relation, die beides gleichzeitig ist
- die symmetrisch sind aber nicht anti-symmetrisch: Personen a und b am gleichen Tag geboren
- die anti-symmetrisch sind aber nicht symmetrisch: $<$ aber streng genommen nicht reflexiv!