Vektorräume

Vektorräume

Letzte Vorlesung:

- grundlegende Definition,
- Untervektorraum.

Heute:

- lineare Abbildungen,
- Homomorphismen zwischen algebraischen Strukturen und lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen,
- lineare Unabhängigkeit,
- Basis und Dimension.

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Definition:
Es seien U, V Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt **lineare Abbildung**, falls für alle $u, v \in U$ und für alle $\lambda \in K$ gilt:

(LA1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

(LA2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Lineare Abbildungen

Beispiel:

Betrachten wir: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu zeigen: 1) Ist dies eine lineare Abbildung?

(LA1) $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

(LA2) $f\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\lambda \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$.

Lineare Abbildungen

Beispiel:

Betrachten wir: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zu zeigen: 2) Ist diese Abbildung injektiv/surjektiv/bijektiv?
a) injektiv: D.h. jeder Punkt hat maximal ein Urbild.

$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. nicht injektiv.

b) surjektiv: Gibt es z.B. in $\mathbb{R}^2$ ein Element, das auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ abgebildet wird?

D.h. $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Nein, da $1 \neq 0$ ist.

Lineare Abbildungen

Übungsaufgabe:

Betrachten wir: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Fragen: 1) Ist dies eine lineare Abbildung?
2) Ist f injektiv?
3) Ist f surjektiv?
4) Ist f bijektiv?

Lineare Abbildungen

Lösung:

1) Ja. (LA1) $f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x_2+y_2\\x_1+y_1\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_2\\y_1\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right)$

(LA2) $f\left(\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix}\lambda x_1\\\lambda x_2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\lambda x_2\\\lambda x_1\end{pmatrix}=$
$\lambda\begin{pmatrix}x_2\\x_1\end{pmatrix}=\lambda f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)$

Lineare Abbildungen

Lösung:

2) injektiv: Angenommen $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ wird auf $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ abgebildet.

Dann gilt $f(x) = f(y) = z$, und damit dann $x_2 = z_1 = y_2$ und $x_1 = z_2 = y_1$, daraus folgt dann $x = y$ und die Abbildung ist injektiv.

3) surjektiv: Wir suchen ein $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, dass auf $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ abgebildet wird. Suche dir x aus, sodass $x_1 = y_2$ und $x_2 = y_1$ gilt und wir haben es gefunden. Alle Elemente werden getroffen, d.h. f ist surjektiv.

4) Ist f bijektiv? Natürlich.

Lineare Abbildungen

Wichtige Anmerkungen:
Wenn wir eine lineare Abbildung $f : U \to V$ haben, die bijektiv ist, dann kann man auch die Umkehrabbildung g definieren.
Es gilt dann $g = f^{-1}$ und g ist eine lineare Abbildung, die bijektiv ist.

Wenn wir zwei lineare Abbildungen f und g haben, dann ist auch die Verknüpfung $f(g)$ wieder eine lineare Abbildung. Man schreibt dafür $f \circ g$.
Man kann zeigen, dass wenn f und g bijektiv sind, dann auch $f \circ g$.

$\Rightarrow$ Beweise dafür in den Repetitorien.

Zusammenfassung der Eigenschaften

Gruppe $(G, *)$

- Verknüpfung $*$ auf Menge G assoziativ,
- neutrales Element e bzgl. $*$ vorhanden,
- $\forall a \in G$: inverses Element a^{-1} bzgl. $*$ vorhanden.
- optional: $*$ kommutativ (*abelsche Gruppe*)

Ring $(R, \oplus, \odot)$

- $(R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe,
- Verknüpfung $\odot$ assoziativ,
- Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ distributiv,
- optional: $\odot$ kommutativ (*kommutativer Ring*), neutrales Element für $\odot$ (*Ring mit 1*)

Körper $(K, \oplus, \odot)$

- $(K, \oplus, \odot)$ ist kommutativer Ring,
- $(K, \oplus)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element 0,
- $(K/\{0\}, \odot)$ ist abelsche Gruppe mit neutralem Element 1.

Vektorraum über einem Körper

K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$

- abelsche Gruppe $(V, +)$
- skalare Multiplikation $\cdot : K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, sodass für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

(V2) $1 \cdot v = v$

(V3) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(V4) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Homomorphismen

Homomorphismen

Definition:
Sind G und H Gruppen und $\varphi : G \to H$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

1) $\varphi(a * b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ für alle $a, b \in G$

dann heißt φ **(Gruppen-)Homomorphismus**.

Ein Homomorphismus zwischen algebraischen Strukturen ist eine Abbildung, die verknüpfungsverträglich ist, also die Eigenschaften der Verknüpfung bewahrt. Man verwendet Homomorphismen, wenn man von einer Struktur in eine andere wechseln möchte, z.B. weil man dort einfacher rechnen kann. Da beide Strukturen dieselben Eigenschaften haben, sind alle Ergebnisse übertragbar.

Homomorphismen

Definition:
Sind R und S Ringe und $\varphi : R \to S$ eine Abbildung mit den Eigenschaften

1) $\varphi(a \oplus b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$ für alle $a, b \in R$
2) $\varphi(a \odot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$ für alle $a, b \in R$,

dann heißt φ **(Ring-)Homomorphismus**.

Homomorphismen

Beispiele:
Betrachten wir die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, d.h. $z \mapsto z \bmod n$.
Wenn wir etwa $n = 5$ haben, dann: $\varphi(18) = 3$, $\varphi(35) = 0$.

Satz:
φ ist ein Homomorphismus:

Beweis:
Sei $a = q_a n + r_a$ und $b = q_b n + r_b$:

$$\varphi(a)\varphi(b) = (a \bmod n)(b \bmod n) = r_a r_b$$
$$\varphi(ab) = \varphi((q_a n + r_a)(q_b n + r_b)) =$$
$$\varphi(q_a q_b n^2 + (r_a q_b + r_b q_a)n + r_a r_b) = r_a r_b \bmod n$$

Da wir uns in Restklassen bewegen, müssten wir noch zeigen $[r_a r_b] = [r_a r_b \bmod n]$, aber das ist quasi die Definition.
Für Addition funktioniert der Beweis analog ($[r_a + r_b] = [(r_a + r_b) \bmod n]$).

Homomorphismen

Satz:
Für einen Homomorphismus $\varphi : G \to H$ gilt immer

a) $\varphi(e_G) = e_H$

Das neutrale Element wird immer auf das neutrale Element abgebildet.

b) $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

Der Homomorphismus bewahrt die Inversen-Eigenschaft.

Homomorphismen

Beweis:

a) Zu zeigen: $e_H = \varphi(e_G)$

$e_H = \varphi(e_G) * \varphi(e_G)^{-1}$ // Def. inverses Elt. in H

$= \varphi(e_G * e_G) * \varphi(e_G)^{-1}$ // Def. neutrales Elt. e_G

$= (\varphi(e_G) * \varphi(e_G)) * \varphi(e_G)^{-1}$ // Homomorphismus

$= \varphi(e_G) * (\varphi(e_G) * \varphi(e_G)^{-1})$ // Homomorphismus

$= \varphi(e_G) * e_H$ // Def. inverses Elt. in H

$= \varphi(e_G)$

Homomorphismen

Beweis:

b) Zu zeigen: $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$

Für $a \in G$ gilt:

$e_H = \varphi(e_G) = \varphi(a * a^{-1})$ //Def. inverses Elt. in G

$e_H = \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$ //Homomorphismus, also:

$\varphi(a) * \varphi(a)^{-1} = \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$ //neutrales Elt. in H

$\varphi(a)^{-1} * \varphi(a) * \varphi(a)^{-1} = \varphi(a)^{-1} * \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$ // $*\varphi(a)^{-1}$

$\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ // neutrales Elt. in H

Homomorphismen

Definition:
Seien $(G,+)$ und $(H,+)$ Gruppen oder Ringe und $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus. Dann heißt

$$\begin{aligned}&\text{Ker } \varphi := \{x \in G | \varphi(x) = 0\} \textbf{ Kern} \text{ von } \varphi,\\ &\text{Im } \varphi := \{y \in H | \text{existiert } x \in G : \varphi(x) = y\} \textbf{ Bild} \text{ von } \varphi.\end{aligned}$$

Anmerkung: Ker ist die Abkürzung von Kernel und Im von Image.

Ein bijektiver Homomorphismus heißt **Isomorphismus**.

Homomorphismen

Beispiel:
$5\mathbb{Z} := 0, 5, 10, 15, \ldots.$
Wir betrachten $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (5\mathbb{Z}, +)$, $z \mapsto 5z$

Es gilt:
1) φ ist ein Homomorphismus:
$\varphi(a+b) = 5(a+b) = 5a + 5b = \varphi(a) + \varphi(b)$

2) injektiv: Für alle $c \in 5\mathbb{Z}$ gilt: Es gibt höchstens ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass gilt $a \cdot 5 = c$.

3) surjektiv: Für alle $c \in 5\mathbb{Z}$ gilt: Es gibt ein $a \in \mathbb{Z}$, sodass gilt $a \cdot 5 = c$.

4) $\Rightarrow$ Im $\varphi = 5\mathbb{Z}$

5) Ker $\varphi = 0$

Lineare Abbildungen

Definition:
Seien U, V Vektorräume. Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung.
Dann heißt:

$$\mathrm{Ker}(f) := \{u \in U | f(u) = 0\} \textbf{ Kern} \text{ von } f,$$
$$\mathrm{Im}(f) := \{v \in V | \exists u \in U \text{ mit } f(u) = v\} \textbf{ Bild} \text{ von } f.$$

Analog wie bei Homomorphismen.

Lineare Abbildungen

Ist jede lineare Abbildung ein Homomorphismus?

Lineare Abbildungen

Anmerkung:
Diese Definitionen wirken im ersten Moment nicht sehr nützlich, aber man kann damit einiges anfangen, wie wir im Laufe dieses Kapitels feststellen werden.

Außerdem:
Man kann zeigen, dass gilt: $f : U \to V$, U, V Vektorräume, ist genau dann injektiv, wenn Ker(f)$= \{0\}$.

Es gilt auch noch, dass Ker(f) bzw. Im(f) Untervektorräume von U bzw. von V sind.

Diese zwei Sätze sollten wir uns merken, wir werden sie noch in der Zukunft brauchen.

Lineare Unabhängigkeit

Lineare Unabhängigkeit

Wir wollen uns mit Untervektorräumen beschäftigen.
Insbesondere was man alles braucht um diese Teilräume vollständig zu beschreiben:

Um das zu erreichen, brauchen wir das Konzept der **linearen Abhängigkeit** bzw. **linearen Unabhängigkeit** von Vektoren.

Lineare Unabhängigkeit

Nehmen wir an, wir haben 4 Vektoren u_1, u_2, u_3 und u_4. Wenn wir z.B. u_4 folgendermaßen darstellen können:

$$u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

mit $\lambda_i \in K$ und zumindest eine $\lambda_i \neq 0$, dann sagen wir, dass u_4 **linear abhängig** ist von u_1, u_2, u_3.
Man kann u_4 als **Linearkombination** von u_1, u_2, u_3 darstellen.

Wenn wir keine solchen λ_i finden können, dann sagen wir, dass u_4 **linear unabhängig** ist von u_1, u_2, u_3 ist.

Es gilt also immer, dass ein Vektor entweder linear abhängig oder unabhängig von einer Menge von Vektoren ist.

Lineare Unabhängigkeit

Wie schaut es umgekehrt aus?
Wir haben $u_4 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$.
Das kann man aber (unter Annahme $\lambda_1 \neq 0$) umformen zu

$$u_1 = -\frac{1}{\lambda_1} u_4 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} u_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} u_3$$

D.h. auch u_1 ist linear abhängig und zwar von u_2, u_3, u_4.

Warnung:
Es gibt einen kleinen Unterschied zwischen der linearen (Un)abhängigkeit eines Vektors von einer Menge von Vektoren und der linearen (Un)abhängigkeit einer Menge von Vektoren.

Lineare Unabhängigkeit

Anmerkung:
Wir hatten die lineare (Un)abhängigkeit von einem Vektor von einer Menge von Vektoren und nun kommt die lineare (Un)abhängigkeit einer Menge von Vektoren.

Definition:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des K-Vektorraums V heißen **linear unabhängig**, wenn für jede Linearkombination der Vektoren gilt:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Die Vektoren heißen **linear abhängig**, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Lineare Unabhängigkeit

Anmerkung:
Eine Menge von Vektoren ist dann linear abhängig, wenn ein Vektor daraus linear abhängig von den restlichen Vektoren ist.

Lineare Unabhängigkeit der Vektoren

Beispiel:

Wir haben $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir wollen wissen, ob diese linear abhängig oder unabhängig sind.

Ansatz: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Das ist ident zu $1 = \lambda_2 + \lambda_3$ und $0 = \lambda_2 + 2\lambda_3$.
Wir formen um zu $\lambda_2 = 1 - \lambda_3$ und setzen ein. Dann bekommen wir $\lambda_3 = -1$ und $\lambda_2 = 2$.
Es gilt also $1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir konnten also zeigen, dass es eine abhängige Linearkombination gibt, sodass $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig ist.

Lineare Unabhängigkeit der Menge

Allerdings:

Wir haben $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und wollen wissen, ob diese linear abhängig oder unabhängig sind.

Es ist klar, dass v_1 linear abhängig von v_2, v_3 ist (schließlich ist $v_1 = v_2$), aber v_3 ist linear unabhängig von v_1, v_2. Man kann v_3 schlicht nicht durch eine Linearkombination von v_1 und v_2 darstellen.
Damit die gesamte Menge linear abhängig ist, genügt es aber, wenn ein einzelner Vektor linear abhängig ist von den anderen. D.h. $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit der Menge

Beispiel:

Ist die Menge mit $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h. $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig oder unabhängig?

Das dürft ihr nun ausrechnen!

Lineare Unabhängigkeit

Beispiel-Lösung:

Ansatz: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
D.h. $3 = \lambda_1 + \lambda_2$ und $2 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow 3 - \lambda_1 = 2 - 3\lambda_1$
$\Rightarrow 1 = -2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{7}{2}$

Probe: $\frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wir sehen, die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear abhängig.

Lineare Unabhängigkeit

Anmerkung:
Wir sehen, dass das Konzept der Linearen (Un)abhängigkeit sehr stark damit zusammenhängt, ob man einen Vektor als Linearkombination darstellen kann.
Anders ausgedrückt: v_1 ist linear abhängig von $v_2, v_3, \dots, v_n$, wenn gilt $v_1 \in \text{Span}(v_2, v_3, \dots, v_n)$.

$\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ ist die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, v_2, \dots, v_n$. Wenn nun aber v_1 selber eine Linearkombination von $v_2, \dots, v_n$ ist, dann führt das dazu, dass die Menge der Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_n$ dieselben sind wie von $v_2, \dots, v_n$.

Also: $v_1 \in \text{Span}(v_2, v_3, \dots, v_n) \Rightarrow$
$\text{Span}(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n) = \text{Span}(v_2, v_3, \dots, v_n)$.

Lineare Unabhängigkeit

Beweis:
Wir haben v_1, v_2 und v_3, wobei $v_3 \in \text{Span}(v_1, v_2)$ liegt, also $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Es ist klar, dass $\text{Span}(v_1, v_2) \subset \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$ ist, aber gilt dies auch umgekehrt?

Wir haben $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, dies können wir umformen zu
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$
$\Rightarrow u = (\lambda_1 + \lambda_3 \lambda_1) v_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 \lambda_2) v_2$

Also $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) \subset \text{Span}(v_1, v_2)$ und damit $\text{Span}(v_1, v_2, v_3) = \text{Span}(v_1, v_2)$.

Basis, Dimension

Basis, Dimension

Einleitung:
Wir haben den Begriff der linearen (Un)abhängigkeit von Vektoren kennengelernt.
Und wir haben gesehen, wie lineare Abhängigkeit mit dem Span von Vektoren zusammenhängt.

Jetzt wollen wir - wie vorher angekündigt - den Zusammenhang zu Teilräumen herstellen.
Genauer gesagt wir wollen wissen, was wir brauchen um einen Teilraum aufzuspannen. Was erzeugt ein Teilraum?

Basis, Dimension

Einleitung:
Wir suchen etwas, dass z.B. den $\mathbb{R}^2$ aufspannt. Nehmen wir etwa $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wenn wir einen beliebigen Vektor $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ haben, dann sehen wir sofort, dass wir u darstellen können, als $u = \lambda v_1 + \mu v_2$.

Wir können jeden beliebigen Vektor aus $\mathbb{R}^2$ darstellen, d.h. Span(v_1, v_2)=$\mathbb{R}^2$.
Andererseits ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig (trivial nachzuprüfen), d.h. wir können auch keinen Vektor rausschmeissen ohne dass der Span kleiner wird. $\{v_1, v_2\}$ ist die kleinstmögliche Menge, die $\mathbb{R}^2$ aufspannt.
Wir nennen $\{v_1, v_2\}$ eine **Basis** von $\mathbb{R}^2$.

Basis, Dimension

Definition:
Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt **Basis** von V, wenn gilt:

(B1) Span$(B) = V$,

(B2) B ist eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

Bedingung (B1) würden wir ausdrücken als: B erzeugt V.

Basis, Dimension

Beispiele:

1) Für $\mathbb{R}^2$ kennen wir schon eine Basis und zwar $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Diese Basis nennt man Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

2) Für $\mathbb{R}^n$ ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ die Standardbasis.

3) Für $\mathbb{R}^2$ gibt es aber mehr als eine Basis, so ist auch

$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ etwa eine Basis.

Zeige, dass es tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist!

Basis, Dimension

Lösung:

(B1) Sei $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Wir suchen λ_1 und λ_2, sodass $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ ist. D.h. $x = 3\lambda_1 + \lambda_2$ und $y = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$.
Das können wir umformen zu $\lambda_1 = \frac{x}{2} - \frac{y}{4}$ und $\lambda_2 = \frac{3y}{4} - \frac{x}{2}$.
Wir können also alle Vektoren als Linearkombination von v_1 und v_2 darstellen.

(B2) $\{v_1, v_2\}$ ist linear unabhängig, denn angenommen $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 = 0$, also $3\mu_1 + \mu_2 = 0$ und $2\mu_1 + 2\mu_2 = 0 \Rightarrow \mu_1 = -\mu_2$.
Wir setzen das in die erste Formel ein:
$3\mu_1 - \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = 0 \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = 0$

$\{v_1, v_2\}$ ist damit eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Basis, Dimension

Wichtig:
Wir haben gesehen, dass es nicht nur eine Basis des $\mathbb{R}^2$ gibt.
Fast alle Vektorräume haben mehrere mögliche Basen.
Die Frage ist: Was haben diese Basen gemeinsam?

Antwort:
Die Anzahl der Vektoren.
Man kann zeigen:

Satz: Hat der Vektorraum V eine endliche Basis B mit n Elementen, so hat jede andere Basis von V ebenfalls n Elemente.

Basis, Dimension

Definition:
Sei $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Dann heißt die Zahl n **Dimension** von V. Wir schreiben hierfür $n = dim(V)$. Dem Nullraum $\{0\}$ wird die Dimension 0 zugeordnet.

Basis, Dimension

Anmerkungen:
Jede Basis hat n Vektoren. D.h. finden wir in $\mathbb{R}^n$ eine Menge von n linear unabhängigen Vektoren, dann wissen wir, dass diese eine Basis darstellen.

Wir haben zwei Vektoren v_1 und $v_2 \in \mathbb{R}^2$, die linear unabhängig sind. $\mathbb{R}^2$ hat die Dimension 2, d.h. die Menge $\{v_1, v_2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$ und Span(v_1, v_2)=$\mathbb{R}^2$.

In einem Vektorraum der Dimension n ist es nicht möglich $n+1$ linear unabhängige Vektoren zu finden.

Basis, Dimension

Satz:
Sei V ein Vektorraum und $S \subseteq V$. Dann sind die folgende Behauptungen equivalent:

- S ist eine Basis von V.
- S ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V (also ist $T \subseteq V$ linear unabhängig mit $S \subseteq T$, dann gilt $S = T$).
- S ist eine minimale Spannmenge von V (also ist $T \subseteq V$ so dass $span(T) = V$ und $T \subseteq S$, dann gilt $S = T$).

Basis, Dimension

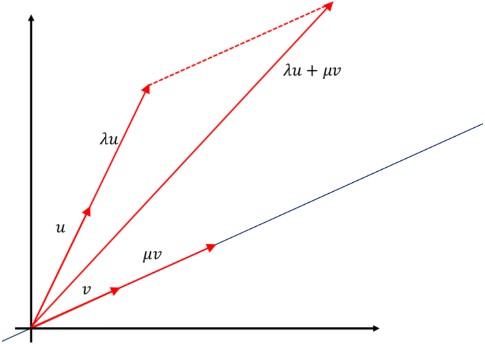
Ausführungen:
Nehmen wir an wir haben in $\mathbb{R}^n$ eine Menge von k linear unabhängigen Vektoren ($k < n$) und betrachten Span($v_1, v_2, \ldots, v_k$)=U. Wir wissen, dass $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Teilraum ist, also selbst ein Vektorraum ist.
Da U ein Vektorraum ist, hat U auch eine Basis und wir sehen sofort ein, dass $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ eine solche ist, d.h. U hat Dimension k.

Wir haben bei der Einleitung zur Linearen (Un)abhängigkeit gefragt, was man alles braucht um einen Teilraum vollständig zu beschreiben. Nun wissen wir, dass wir für ein Teilraum der Dimension k genau k linear unabhängige Vektoren brauchen um ihn vollständig zu beschreiben.

Welche Basis genau verwendet wird ist nicht so wichtig, denn man kann mit Hilfe eines Isomorphismus zwischen Basen hin und her wechseln.

Vektorraum

Beispiel von der vorigen Vorlesung: Der Span(u_i) bildet immer einen Teilraum von V Man nennt den Span auch oft **Lineare Hülle**.



Formen diese zwei Vektoren u und v eine Basis? Jetzt können wie die Frage beantworten, wie groß der Raum ist, den diese zwei Vektoren spannen.

Basis, Dimension

Beispiel:

Wir haben eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Diese Abbildung heißt Projektion.
Wir haben viel über lineare Abbildungen gelernt und vieles gehört. Schauen wir mal, was wir davon auch anwenden können.

1) Beweise, dass φ eine lineare Abbildung ist!

Basis, Dimension

Beweis 1) :

(LA1) $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

(LA2) $\varphi\left(\lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$

Basis, Dimension

Wir haben zuvor den Satz erwähnt, dass für $\varphi : U \to V$, $\varphi(U)$ ein Vektorraum ist.

Wir haben immer noch $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Beweise, dass $\varphi(\mathbb{R}^2)$ ein Vektorraum ist.

Basis, Dimension

Beweis 2) :

Wir müssten zuerst zeigen, dass $(\mathbb{R}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, aber das haben wir schon früher gezeigt.

(V1) $\lambda\left(\mu\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}\right) = \lambda\begin{pmatrix}\mu x_1\\\mu x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\mu x_1\\\lambda\mu x_2\\0\end{pmatrix} = (\lambda\mu)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$

(V2) Das Einserelement in $(\mathbb{R}, +)$ ist 1

$$1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot x_1\\1\cdot x_2\\1\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix}$$

Basis, Dimension

Beweis 2) :

$$\text{(V3)} \quad \lambda\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) \\ \lambda(x_2 + y_2) \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \lambda x_2 + \lambda y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{(V4)} \quad (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ (\lambda + \mu)x_2 \\ (\lambda + \mu)0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \lambda x_2 + \mu x_2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi(\mathbb{R}^2)$ ist ein Vektorraum

Basis, Dimension

Wir haben früher den Satz erwähnt, dass für $\varphi : U \to V$ φ injektiv ist, wenn und nur wenn Ker $\varphi = \{0\}$ ist.

3) Beweise, dass für unser $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ Ker $\varphi = \{0\}$ gilt und φ injektiv ist.

Basis, Dimension

Beweis 3) :

a) Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker } \varphi = \{x \in \mathbb{R}^2 | \varphi(x) = 0\} = \{(0,0)\}$$

b) Angenommen wir haben $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ mit $x \neq y$,

sodass gilt $\varphi(x) = \varphi(y)$.

D.h. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, daraus folgt $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2$.

Also $x = y$. **Widerspruch!**

φ **ist injektiv**

Basis, Dimension

Wir wissen nun, dass φ injektiv ist.
4) Ist es auch surjektiv?

Basis, Dimension

Beweis 4) :

Es ist $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Wir behaupten, dass es kein $x \in \mathbb{R}^2$ gibt, sodass $\varphi(x) = y$ gelten kann.

Es wäre sonst $\varphi(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $x_1 = 0, x_2 = 0$ und $0 = 1$. **Widerspruch!**

φ ist nicht surjektiv.

Basis, Dimension

Es gibt in der Linearen Algebra den wichtigen Satz:

$$\mathrm{Dim}(U)=\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\varphi)+\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\varphi) \text{ für } \varphi : U \to V,\ U, V \text{ Vektorräume.}$$

Allgemein, werden wir diesen Satz nicht beweisen, aber:

5) Zeige, dass dies für unser φ gilt.

Basis, Dimension

Beweis 5) :
Wir wissen, dass Dim($\mathbb{R}^2$)=2 gilt. Außerdem, dass Kerφ=$\{0\}$ ist und damit gilt Dim(Kerφ)=0.

Damit der Satz für dieses Beispiel stimmt, müssen wir also noch zeigen, dass Dim(Imφ)=2 gilt.

Wir müssen also eine Menge von linear unabhängigen Vektoren finden, die Imφ aufspannt.

Basis, Dimension

Beweis 5) :

Ansatz: Wir probieren, ob $B = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ das kann.

Wir haben $v \in \mathrm{Im}\varphi$ beliebig, also $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir können nun v darstellen als $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, d.h. B spannt $\mathrm{Im}\varphi$ vollständig auf.

Sind v_1, v_2 linear unabhängig?
Ja, den es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$, für das gilt $\lambda v_1 = v_2$.

$\Rightarrow B$ ist eine Basis von $\mathrm{Im}\varphi$

Basis, Dimension

Beweis 5) :
Da $|B| = 2$ ist, gilt also Dim(Imφ)=2 und damit haben wir also:

$$\text{Dim}(U)=2=0+2=\text{Dim}(\text{Ker}\varphi)+\text{Dim}(\text{Im}\varphi).$$

Basis, Dimension

Wir haben nun einige kleinere Beweise gesehen und durchgeführt.
In der allerersten Einheit haben wir über die verschiedenen Varianten von möglichen Beweisen in der Mathematik gelernt und haben manche davon nun auch selber angewandt, d.h. *direkter Beweis*, *Beweis durch Widerspruch* und *Beweis durch Gegenbeispiel*.

Der Beweis durch Gegenbeispiel ist immer gut möglich, wenn die zu beweisende Aussage entweder wahr oder falsch ist.
Eine Aussage über eine Menge von Objekten ist falsch, wenn wir ein einziges Objekt finden, für das diese Aussage nicht gilt.

Literatur

Kapitel 5.5. (Homomorphismen), Kapitel 6 (Vektorräume) in
P. Hartmann. Mathematik für Informatiker.