Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. CSc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2020

Übungsblatt 6: Matrizen und Lineare Algebra II und III und Graphentheorie I

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 8 und 9

Aufgabe 6-1 5P

Gegeben sei folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte von C.

Aufgabe 6-2 7P

(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt für die folgenden zwei Vektoren:
$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) Welche Vektoren sind orthogonal zu $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(c) Für welche Werte von a, b und c ist die Abbildung gegeben durch $\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : u \mapsto Au$ mit
$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Abbildung?

Aufgabe 6-3 7P

Eine $n \times n$ Matrix A ist über dem Körper R diagonalisierbar
$\Leftrightarrow$ wenn es eine Basis für R^n gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht.
$\Leftrightarrow$ das charakteristische Polynom von A in Linearfaktoren zerfällt, und für alle Eigenwerte λ_i gilt, dass die geometrische Vielfachheit ($= dim(ker(A - \lambda_i * I))$) gleich der algebraischen Vielfachheit (= Vielfachheit der Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms) ist.

Gegeben ist folgende 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob A uber dem Koerper R diagonalisierbar ist:

Aufgabe 6-4 7P

Gegeben ist die folgende Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_9\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Versuchen Sie, ein überschneidungsfreies Bild von G zu zeichnen.

(b) Geben Sie alle Wege von x_1 nach x_2 an, die Länge höchstens 3 haben.

(c) Ist G zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6-5 7P

Gegeben ist folgende Matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

D hat die Eigenwerte 0, 1 und 2. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Aufgabe 6-6 8P

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter Graph und $K = \binom{V}{2}$ die zwei-elemntigen Teilmengen von V. Der *Komplementgraph* $G^c = (V, K \setminus E)$ von G hat eine Kante zwischen alle Paaren von Knoten, die nicht in G mit einer Kante verbunden sind. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

- Der Komplementgraph G^c ist zusammenhängend, falls G nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 6-7 9P

(a) Für welche Werte von m gilt $|A| = |A^{-1}|$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ m & 0 & m \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Gegeben sei die folgende Matrix:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Ermitteln Sie U^{-1}.