Universität Wien
Fakultät für Informatik
Prof. Wilfried Gansterer, RNDr. CSc. Katerina Schindlerova

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2020

Übungsblatt 1: Beweistechniken, Mengen, Relationen und Abbildungen

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 1 und 3

Aufgabe 1-1 5P

Man beweise die folgenden Mengenrechenregeln ($\overline{M}$ bedeutet Komplement von M):

(a) $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$

(b) $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Aufgabe 1-2 5P

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^3$

(b) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (4y - 1, 5x)$

Man berechne, falls möglich, die Umkehrabbildungen.

Aufgabe 1-3 6P

Prüfen Sie, ob die folgende Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv oder antisymmetrisch ist.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ | x \cdot y \leq 1 + x + y\}.$$

Aufgabe 1-4 6P

Beweisen Sie:

(a) $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Aufgabe 1-5 7P

Die Zahlen $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \ldots$ sind von folgender rekursiver Formel gegeben:

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Man beweise durch Induktion, dass $F_{3k},\ k \in \mathbb{N}$ gerade Zahlen sind.

Aufgabe 1-6 10P

Man untersuche die Folge:

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2},\ \ a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3},\ \ a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}, \cdots, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Man stelle eine Vermutung über den Ausdruck für a_n an, und beweise es durch Induktion, dass er für die natürlichen Zahlen gilt.

Aufgabe 1-7 10P

Man beweise: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.