Relationen und Abbildungen

Relationen

Was genau ist eine Relation?

Relationen

Was genau ist eine Relation?

Antwort: „Eine Beziehung zwischen zwei Elementen einer Menge“

Relationen

Beispiel:
Eine der bekanntesten Relationen ist $\leq$ (kleiner gleich)
Zwei Zahlen a und b stehen nun dann in Relation $\leq$, wenn $a \leq b$ gilt

So steht etwa 3 in Relation zu 5, da $3 \leq 5$ gilt.
Andererseits gilt nicht $5 \leq 3$, das heißt, 5 ist nicht in Relation zu 3.

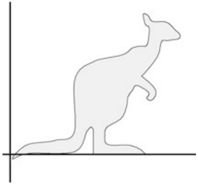
Es gibt viele Beispiele für Relationen und viele davon kennen wir schon.
Etwa: $\leq$, $\neq$, $<$, $=$

Relationen

Mathematisch definiert:

Definition:
Seien M und N Mengen und $R \subset M \times N$. Dann heißt R **Relation** auf $M \times N$. Gilt $M = N$, dann heißt R *Relation* auf M.

Das heißt, R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von M und N. R ist beliebig definierbar, d.h., man könnte auch eine Relation definieren, die so aussieht:



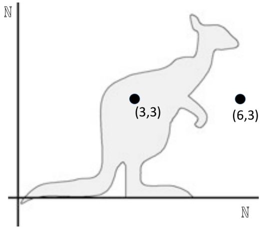
Relationen

Anmerkung: Eine Relation kann für ein Paar von Elementen nur wahr oder falsch sein! Entweder etwas steht in Relation zu etwas anderem oder nicht.

Anmerkung: Eine Relation gilt immer nur zwischen zwei Elementen!

Anmerkung: $3 \leq 5$ ist die Kurzschreibweise für $R_{\leq}(3, 5)$.
Alternativ kann man auch $3R5$ oder $(3, 5) \in R$ oder $R(3, 5)$ schreiben.

Relationen



Dieses Bild definiert eine Relation auf den Mengen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nehmen wir den eingezeichneten Punkt $(3, 3)$. Er liegt im Känguru, d.h., es gilt $(3, 3) \in R$. Die Relation von 3 zu 3 ist wahr. Dagegen gilt nicht $R(6, 3)$.

Alles was eine Relation macht, ist eine Aussagevorschrift bezüglich des Verhältnisses zweier Elemente.

Relationen

Beispiel:
Wir behaupten, dass $<$ eine Relation ist. Warum stimmt das?

Beweisskizze:

- $<$ auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert
- für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ kann man entscheiden, ob $R_<(a, b)$ wahr oder falsch ist. Wir wissen, dass $2 < 5$ gilt, also ist $R_<(2, 5)$ wahr. Da wir dies für absolut alle Zahlen a, b entscheiden können, ist $R_< \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Daher können wir behaupten, dass $<$ eine Relation ist.

Relationen

Wir haben bis jetzt 2-stellige Relationen gehabt, aber man kann auch n-stellige Relationen betrachten.

Definition:
Seien $N_1, N_2, \ldots, N_k$ Mengen und $R \subset N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$.
Dann heißt R Relation auf $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$.

Relationen

Im Prinzip funktioniert eine n-stellige Relation genau gleich, wie eine 2-stellige.

Beispiel:
Wir haben $R_{<<}(a, b, c)$, also die Relation, die bestimmt, ob $a < b < c$ wahr ist. $R_{<<}$(1,2,3) etwa ist wahr. Hingegen ist $R_{<<}(3, 1, 2)$ falsch. Wir sehen, dass n-stellige Relationen so funktionieren, wie wir es erwarten.

Anwendung: Relationales Datenmodell

Relationales Datenmodell

In relationalen Datenbanken werden Datenmengen durch die Relationen charakterisiert, die zwischen ihnen bestehen.
Moderne Datenbanken repräsentieren Relationen in *Tabellen*.

- **Zeile** = ein *Tupel* (Element) aus der n-stelligen Relation
- **Spalte**: *Attribut*, d.h. Stelle (Dimension) der n-stelligen Relation

Beispiel: Tabelle für die Relation **Produkte** eine Computerhändlers:

PNr	Typ	Preis	HNr
1	Laptop	990	1
2	PC	200	2
3	Server	100	3

Relationales Datenmodell

- Jede Zeile in der Tabelle **Produkt** ist ein Element (auch n-Tupel genannt) der n-stelligen Relation auf dem kartesischen Produkt aus den Mengen $\mathbb{N}\times$ char(20) $\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$
- Die Tabelle ist daher eine Relation $R_p \subset \mathbb{N}\times$ char(20) $\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

- Die Tabelle **Hersteller** auf der folgenden Seite ist eine Relation $R_H \subset \mathbb{N}\times$ char(20) $\times$ char(20).

Relationales Datenmodell

Hersteller:

HNr	Name	Ort
1	IBM	New York
2	Apple	Cupertino
3	HP	Paolo Alto

Relationales Datenmodell

- Relationale Datenbanken bestehen oft aus sehr vielen Tabellen (tausende).
- Relationen repräsentiert durch Tabellen bieten die Möglichkeit, die reale Welt flexibel zu modellieren.
- Die *relationale Algebra* bietet Operationen, die allgemeine Anfragen auf Tabellen unterstützen
  - In den meisten Datenbanken implementiert in der *Structured Query Language* (SQL).

Wichtige Operationen

Selektion: eine Teilmenge der vorhandenen Zeilen wird ausgewählt

z. B. ein bestimmter Hersteller aus der Tabelle der Hersteller:
SQL: SELECT * FROM Hersteller WHERE Name = 'IBM'

Hersteller

HNr	Name	Ort
1	IBM	New York
2	Apple	Cupertino
3	HP	Paolo Alto

Selektionsergebnis

HNr	Name	Ort
1	IBM	New York

Wichtige Operationen

Projektion: eine Teilmenge der vorhandenen Spalten wird ausgewählt.

z.B. die Spalten Typ und Preis der Tabelle Produkt.
SQL: SELECT Typ, Preis FROM Produkt

Produkt

PNr	Typ	Preis	HNr
1	Laptop	990	1
2	PC	200	2
3	Server	100	3

Projektionsergebnis

Typ	Preis
Laptop	990
PC	200
Server	100

Wichtige Operationen

Join: Verbund/Verkettung von Relationen; dies geschieht unter Heranziehung gemeinsamer Attribute (Spalten). Zeilen der neuen Relation entstehen durch Aneinanderfügung von je einer Zeile der ersten und zweiten Relation, wenn Werte der gemeinsamen Attribute übereinstimmen

z. B.: Zeilen von **Hersteller** und **Produkt** werden anhand von Attribut HNr aneinandergefügt.
SQL: SELECT * FROM Produkt JOIN Hersteller ON Produkt.HNr = Hersteller.HNr

PNr	Typ	Preis	HNr	Name	Ort
1	Laptop	900	1	IBM	New York
2	PC	200	2	Apple	Cupertino
3	Server	100	3	HP	Palo Alto

Mehr dazu in der VU Datenbanksysteme (3. Semester Bachelor Informatik)

Äquivalenzrelationen

Äquivalenzrelationen

Definition:
Äquivalenzrelationen sind Relationen auf einer Menge M mit den folgenden Eigenschaften:

1. **Reflexivität:** $\forall x \in M$ gilt $R(x, x)$.
2. **Symmetrie:** $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ gilt $R(y, x)$
3. **Transitivität:** $\forall x, y, z \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, z)$ gilt $R(x, z)$.

Was bedeutet das genau?

Äquivalenzrelationen

Reflexivität: $\forall x \in M$ gilt $R(x, x)$.

Gelesen wird der Satz folgendermaßen: „Für alle x aus M gilt, dass x in Relation zu x ist."

Dies bedeutet, dass ein Element immer in Relation zu sich selbst steht. Nehmen wir als Relation $\leq$. Die Behauptung ist, dass jede Zahl immer in Relation zu sich selbst steht, also $x \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. $3 \leq 3$ gilt genauso wie $5 \leq 5$ und dies gilt auch für alle anderen Zahlen. $\leq$ ist reflexiv.

Äquivalenzrelationen

Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ gilt $R(y, x)$.

Gelesen wird der Satz folgendermaßen: „Für alle x und y aus M gilt, dass wenn x in Relation zu y ist, dann ist auch y in Relation zu x.“

Wenn ein Element in Relation zu einem anderen Element steht, dann gilt das auch umgekehrt. Nehmen wir als Relation etwa $\neq$ her. So gilt natürlich wenn $x \neq y$ stimmt, dass auch $y \neq x$ stimmt.

Äquivalenzrelationen

Transitivität: $\forall x, y, z \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, z)$ gilt $R(x, z)$.

Gelesen wird der Satz folgendermaßen: „Für alle x, y und z aus M gilt, dass wenn x in Relation zu y ist und y zu z dann ist auch x in Relation zu z."

Nehmen wir als Relation $=$. Wenn wir wissen, dass $x = y$ ist und $y = z$, dann ist auch klar, dass $x = z$ gilt.

Äquivalenzrelationen

Beispiele:
Ist $R_<$ eine Äquivalenzrelation?

Wir wissen schon, dass $<$ eine Relation ist. Nun müssen wir nur noch die drei Äquivalenz-Eigenschaften überprüfen:

1) Gilt Reflexivität?

Nein, $x < x$ gilt nicht! Das heißt $R_<$ ist keine Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelationen

Beispiele:
Was ist mit $R_=$?

$x = x$ gilt natürlich für alle Zahlen $\Rightarrow$ reflexiv
Wenn $x = y$ gilt, dann gilt auch $y = x \Rightarrow$ symmetrisch
Transitivität haben wir schon gezeigt

$\Rightarrow R_=$ ist eine Äquivalenzrelation

Äquivalenzrelationen

Betrachten wir
$R_5 := \{(m, n) \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | m - n \text{ ist ohne Rest durch 5 teilbar } \} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Dass R_5 eine Relation ist, ergibt sich aus der Definition: Wir betrachten eine Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Ist es auch eine Äquivalenzrelation?

Anmerkung: $n \in \mathbb{Z}$ ist ohne Rest durch 5 teilbar bedeutet:
$\exists k \in \mathbb{Z} : 5 \cdot k = n$

Äquivalenzrelationen

Reflexivität: $R_5(n, n)$ gilt, denn:

- $n - n = 0$
- und 0 ist durch 5 teilbar $(0 \cdot 5 = 0) \Rightarrow$ **Reflexivität**

Symmetrie: Zu zeigen: $R_5(n, m) \Rightarrow R_5(m, n)$

- Es gelte $R_5(n, m) \Rightarrow \exists k : n - m = 5 \cdot k$ */mit -1 multiplizieren*
- $\Rightarrow -n + m = -5 \cdot k$ */Kommutativgesetz, mehr dazu bald*
- $\Rightarrow m - n = 5 \cdot (-k)$
- $\Rightarrow \exists k : m - n = 5 \cdot k \Rightarrow R_5(m, n) \Rightarrow$ **Symmetrie**

Äquivalenzrelationen

Transitivität: Zu zeigen: $R_5(n,m)$ und $R_5(m,s) \Rightarrow R_5(n,s)$

- Es gelte $R_5(n,m)$ und $R_5(m,s)$ */Definition von R_5 anwenden*
- $\Rightarrow \exists k : n-m = 5 \cdot k$ und $\exists l : m-s = 5 \cdot l$
- Zu zeigen: $n-s$ ist auch durch 5 teilbar */Definition von R_5 anwenden*
- $\Rightarrow n-s = (n-m)+(m-s) = 5 \cdot k + 5 \cdot l = 5 \cdot (k+l)$
- $\Rightarrow n-s$ ist durch 5 teilbar, d.h $R_5(n,s)$ ist wahr $\Rightarrow$ **Transitivität**

Äquivalenzrelationen

Transitivität: Warum gilt
$n - s = (n - m) + (m - s) = 5 \cdot k + 5 \cdot l = 5 \cdot (k + l)$?

- Wir können mit $+m - m$ erweitern
- $n - s = n - s + m - m$ */Kommutativgesetz anwenden*
- $= (n - m) + (m - s) = 5 \cdot k + 5 \cdot l = 5 \cdot (k + l)$

Äquivalenzrelationen

Definition:
Sei R eine Äquivalenzrelation auf M und $a \in M$. Dann heißt die Menge
$[a] := \{x \in M | R(x, a)\}$
Äquivalenzklasse von a.

D.h alle jene Elemente, die in Relation zu a stehen. Man nennt sie auch *die zu a äquivalenten Elemente*.

Äquivalenzrelationen

Beispiel:
Wir haben R_5 als Äquivalenzrelation. Dann sind die Äquivalenzklassen, diejenigen Zahlen die bei der Division durch 5 den gleichen Rest haben.
z. B $[1] = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$
Denn für jede dieser Zahlen x gilt $R(x, 1)$.

Beweis: Zahlen $x \in \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$ kann man darstellen als $\exists k : x = 5 \cdot k + 1$. Das können wir umformen zu $\exists k : 5 \cdot k = x - 1$ und das ist die Definition von $R(x, 1)$.

Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen sind eine bestimmte Klasse von Relationen.

Die (für uns) wichtigen Ordnungsrelationen kennen wir alle schon:
Es sind: $\leq$, $<$.

Anmerkung: $\geq$ und $>$ sind eigentlich die gleichen Relationen wie $\leq$ und $<$. Sie sind nur umgekehrt definiert.

Ordnungsrelationen

Definition:
Ordnungsrelationen sind diejenigen Relationen, die die folgenden Eigenschaften haben:

Reflexivität: $\forall x \in M$ gilt $R(x,x)$.
Anti-Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x,y)$ und $R(y,x)$ gilt $x = y$.
Transitivität: $\forall x, y, z \in M$ mit $R(x,y)$ und $R(y,z)$ gilt $R(x,z)$.

Genau genommen ist $<$ keine Ordnungsrelation, warum? Nicht reflexiv! Häufig bezeichnet als *strikte Ordnungsrelation* oder *Halbordnung*. Aber eine Sache der Definition. Man sollte sich immer bewusst sein, welche Definitionen zugrunde liegen.

Die Eigenschaften Symmetrie und Anti-Symmetrie

Definition:
Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ gilt $R(y, x)$
Anti-Symmetrie: $\forall x, y \in M$ mit $R(x, y)$ und $R(y, x)$ gilt $x = y$.

Beispiele für Relationen

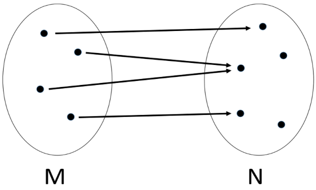
- die symmetrisch und anti-symmetrisch sind: $=$ Das ist die einzige Relation, die beides gleichzeitig ist
- die symmetrisch sind aber nicht anti-symmetrisch: Personen a und b am gleichen Tag geboren
- die anti-symmetrisch sind aber nicht symmetrisch: $<$ aber streng genommen nicht reflexiv!

Abbildungen

Abbildungen

Definition:
Seien M und N Mengen. Jedem $x \in M$ wird genau ein $y \in N$ zugeordnet. Diese Zuordnung definiert eine **Abbildung** von M nach N.

Im Grunde genommen ist das ganz einfach. Man sagt jedem Element aus einer Menge, welches andere Element zu ihm dazugehört.



Abbildungen

Schreibweise:
Meistens wird eine Abbildung mit einem Kleinbuchstaben wie f oder g bezeichnet.
Das Element auf das ein $x \in M$ abgebildet wird, wird dann als $f(x)$ bezeichnet.

Insgesamt wird das dann folgendermaßen bezeichnet:
$f : M \to N, x \mapsto f(x)$
Der Pfeil $\to$ wird für Mengen verwendet, $\mapsto$ für die einzelnen Elemente.

Abbildungen

Definitionen:
$D(f) := M$ ist die **Definitionsmenge** von f

$x \in M$ ist das **Argument** von f

$f(M) = \{y \in N |$ es gibt ein $x \in M : y = f(x)\}$ ist die **Bildmenge** von f

Sei $x \in M, y \in N$ und $y = f(x)$,
dann ist y **Bild von x** und x **Urbild von y**.

In der Mathematik muss man sehr genau sein und exakt wissen von was gesprochen wird, deswegen sind all diese Definitionen notwendig!

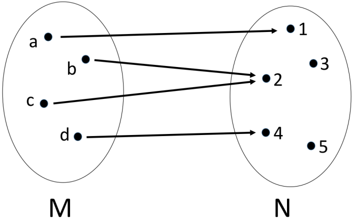
Abbildungen

Definitionen:
Ist $U \subset M$, dann ist die Menge der Bilder von $x \in U$ das **Bild von U.** Dies wird mit $f(U) := \{f(x) | x \in U\}$ bezeichnet.

Ist $V \subset N$, dann ist die Menge der Urbilder von $y \in V$ das **Urbild von V**. Dies wird mit $f^{-1}(V) := \{x \in M | f(x) \in V\}$ bezeichnet.

Abbildungen

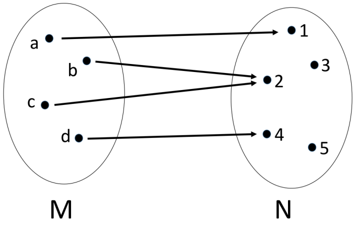
Wir betrachten diese Definitionen anhand eines Beispiels:



Die **Definitionsmenge** ist schlicht M selbst, also die Menge $\{a, b, c, d\}$. Die **Bildmenge** von f sind diejenige Elemente, die „getroffen" werden, also $\{1, 2, 4\}$. Betrachten wir a. Das **Bild** von a ist 1. Das **Urbild** von 1 ist a.

Abbildungen

Und nun das Ganze für Mengen:



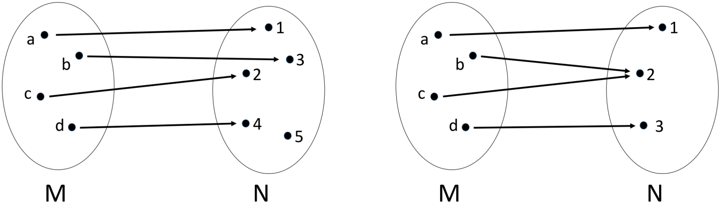
Nehmen wir an wir betrachten die Menge $\{a, b\}$. Das **Bild** davon ist dann $\{1, 2\}$. Allerdings: Das **Urbild** von $\{1, 2\}$ ist $\{a, b, c\}$.

Abbildungen

Definitionen:
Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann heißt f:
Injektiv: für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$
Surjektiv: für alle $y \in N$ gibt es ein $x \in M$ mit $f(x) = y$
Bijektiv: wenn f injektiv und surjektiv ist

Abbildungen

Beispiele:



Sind diese Beispiele injektiv/surjektiv/bijektiv?

Abbildungen

Beispiele:

- Sei p eine Primzahl, z.B. 5. $h : \mathbb{N}_0 \to 0, 1, 2, ..., p-1$
  $n \longmapsto n \mod p$. Diese Abbildung nennt man *Hashfunktion*.
- Programmiermethode zur Bestimmumg des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen
  `int ggt(int m, int n)`,
  in mathematischer Notation
  $ggt : M \times M \to M, (n, m) \longmapsto ggt(n, m)$, mit $M = [-2^{31}, 2^{31} - 1]$

Injektiv, surjektiv, bijektiv?

Abbildungen

Beispiele:

- Die Hashfunktion $h(x) = n \mod p$ ist nicht injektiv, da z.B. $h(0) = h(p)$. Sie ist aber surjektiv, da alle Reste vorkommen. Nicht bijektiv, da nicht injektiv.
- Programmiermethode zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen ist nicht injektiv, da z. B. $ggt(3, 6) = ggt(9, 12)$. Surjektiv, da alle Zahlen als Teiler vorkommen und $ggt(n, n) = n$. Nicht bijektiv, da nicht injektiv.

Oft ist es einfach, ein Gegenbeispiel zu finden um zu zeigen, dass eine Abbildung *nicht* injektiv oder nicht surjektiv ist. Nicht so einfach, zu zeigen, dass Surjektivität/Injektivität vorliegt.

Umkehrabbildung

Definition:
Ist $f : M \to N, x \longmapsto f(x)$ bijektiv, so wird durch $g : N \to M, y \longmapsto x$ mit $y = f(x)$ eine Abbildung definiert. g heißt Umkehrabbildung zu f, und wird mit f^{-1} notiert.

Abbildungen

Die **Mächtigkeit** einer Menge sagt aus, wie groß eine Menge ist. Bei endlichen Mengen ist das leicht, man zählt einfach die Elemente ab. So hat etwa $M = \{a, b, c, d\}$ die Mächtigkeit $|M| = 4$.

Zwei Mengen M und N haben dieselbe Mächtigkeit, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ zwischen den Mengen gibt. Man sagt sie haben dieselbe **Kardinalität**.

Unendlich große Mengen, wie $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$, haben keine endliche Kardinalität. Man sagt, dass $\mathbb{N}$ (und jede dazu bijektive Menge) **abzählbar unendlich** ist. $\mathbb{R}$ hingegen ist **überabzählbar unendlich**.

Abbildungen

Beispiel:
Welche Kardinalität hat $\mathbb{Z}$?

Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$: $0 \longmapsto 0$, $1 \longmapsto 1$, $2 \longmapsto -1$, $3 \longmapsto 2$, $4 \longmapsto -2$, $5 \longmapsto 3$, $6 \longmapsto -3$ usw.
Wir sehen: f ist bijektiv $\Rightarrow \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ haben dieselbe Mächtigkeit.

$\Rightarrow \mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind also gleich groß, auch wenn $\mathbb{N}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist.

Hintereinanderausführung von Abbildungen

Definition:
Seien $f : M \to N : x \longmapsto f(x)$ und $g : N \to S : y \longmapsto g(y)$ Abbildungen. Dann ist auch $h : M \to S : x \longmapsto g(f(x))$ eine Abbildung. Sie wird mit $h = g \circ f$ bezeichnet.

Beachten Sie:

- Erst wird f ausgeführt und dann g
- Man sagt auch: g nach f

Hintereinanderausführung von Abbildungen

Beispiel:
Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$ und $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x}$.
Dann ist $h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \longmapsto \sqrt{x^2} = |x|$.