051013 VO Theoretische Informatik

Einführung, Formale Logik in der Informatik, Aussagenlogik

Ekaterina Fokina

Wintersemester 2019-2020

Section 1

VO Theoretische Informatik - Ausblick

Abstraktion

Abstraktion ist ein zentrales Konzept in der Informatik:

Abstraktion

- Reduktion der vorhanden Information auf die für das aktuelle Problem wesentliche Information.
- oft auch: die Reduktion auf ein allgemeineres bzw. einfacheres Konzept.

Beispiel

Statt eine Landkarte zu betrachten verwendet man eine Graphen mit den Distanzen zwischen den relevanten Zielen.

Modell

- Vereinfachte abstrakte Darstellung eines komplexen Systems (eines Ausschnitts der „Realität“)
- um dieses einfacher zu verstehen und zu analysieren.
- Es werden nur die für den Zweck relevanten Aspekte darstellt.

Analyse von Systemen

- Modell kommt nach der Realität.
- Modell wird angepasst, bis es die Realität wiedergibt.
- Kritischer Vergleich der Voraussagen des Modells mit der Realität.

Planung/Spezifikation von Systemen

- Modell kommt vor dem System.
- System wird angepasst und korrigiert, bis es dem Modell entspricht.
- Kritischer Vergleich des Systemverhaltens mit dem Modell.

Natürliche Sprachen

Natürliche Sprachen sind

- universell,
- vielseitig,
- ausdrucksstark, und
- wandlungsfähig,

aber auch

- komplex,
- mehrdeutig, und
- ungenau.

und daher nicht gut geeignet zur Modellierung und Spezifikation.

Natürliche Sprachen (Mehrdeutigkeit)

Mehrdeutigkeit einzelner Wörter: Rodel.

Rodelschlitten[a]

vs.

Sackrodel[b]

anderes Beispiel: Schimmel (Pilz oder Pferd?)

[a] Bild Von Basti007 - Eigenes Werk, CC BY 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20206926`

[b] Bild Gemeinfrei, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=971442`.

Natürliche Sprachen (ungenau)

Beispiel

Der Satz: "Jede Frau liebt einen Mann" kann unterschiedlich interpretiert werden

- Jede Frau liebt mindestens einen Mann.
- Jede Frau liebt genau einen Mann.
- Alle Frauen lieben den selben Mann.

Formale Sprachen

Kernaspekte formaler Sprachen:

- Syntax: Welche Äußerungen sind in der Sprache gültig?
- Semantik: Was bedeuten diese gültigen Äußerungen?
- Ausdrucksstärke: Was kann in der Sprache ausgedrückt werden?

Formale Sprachen in der THI-Vorlesung

- Logische Sprachen (Teil 1)
  - Aussagenlogik
  - Prädikatenlogik
  - Prolog (Logische Programmierung)
- Reguläre Ausdrücke (Teil 2)
- Formale Grammatiken (Teil 2)
- Automaten & Turing Maschinen (Teil 2)

Heute

- Logik in der Informatik: ein Überblick
- Aussagenlogik:
    - Syntax
    - Semantik
    - Grundbegriffe
    - Eigenschaften
    - Formalisieren in Aussagenlogik: Beispiele

Section 2

Formale Logik in der Informatik

Formale Logik in der Informatik

Das Gebiet der Logik

- beschäftigt sich mit den Prinzipien des korrekten Schließens.
- hat Überschneidungen mit vielen Wissenschaftsdisziplinen: Philosophie, Mathematik, Rechtswissenschaften, . . . , und Informatik.

Wir interessieren uns für formale Logik (auch mathematische Logik)

- Basiert auf Formalen Sprachen.
- Studiert die Gültigkeit von Ableitungs- und Folgerungsbeziehungen.

Ergänzende/Weiterführende Literatur

Die Vorlesung folgt dem Buch von Kreuzer & Kühling

Martin Kreuzer, Stefan Kühling (2006).
Logik für Informatiker.
Addison-Wesley Verlag, ISBN-13: 978-3827372154

Freie Ressourcen:

Wikibooks
Logic for Computer Science.
http://en.wikibooks.org/wiki/Logic_for_Computer_Science

In der Fachbereichsbibliothek:

Jürgen Dassow (2005).
Logik für Informatiker.
Vieweg+Teubner Verlag, ISBN-13: 978-3519005186

Hartmut Ehrig et al. (2001).
Mathematisch-strukturelle Grundlagen der Informatik. (Teil III & IV)
Springer Verlag, ISBN-13: 978-3540419235

Worum geht es in der Logik?

Es geht um

- das Ziehen von **Schlussfolgerungen**
- die Gültigkeit von **Begründungen**
- die **Widerspruchsfreiheit** zwischen Aussagen

Die formale Logik befasst sich **nicht**

mit dem Wahrheitsgehalt/Inhalt einer Aussage

an sich, sondern mit Regeln die es erlauben

aus wahren Aussagen richtige Schlüsse zu ziehen.

Worum geht es in der Logik?

Beispiel

Aussage 1: Jeder Mensch hat 2 Augen.
Aussage 2: John ist ein Mensch.
Schlussfolgerung: Also hat John 2 Augen.

Beispiel

Aussage 1: Jeder Mensch hat 4 Augen.
Aussage 2: John ist ein Mensch.
Schlussfolgerung: Also hat John 4 Augen.

Beobachtungen:

1. Wir haben die gleiche (gültige) Regel zum Schlussfolgern verwendet.
2. Aber nur wenn die Prämissen wahr sind stimmt auch die Folgerung.

Worum geht es in der Logik?

Die formale Logik beschäftigt sich damit unter welchen Bedingungen man aus der

Gültigkeit von Voraussetzungen

auf die

Gültigkeit von Folgerungen

schließen kann.

Dazu nutzen wir in der Informatik unterschiedliche logische Systeme (oft auch als unterschiedliche "Logiken" bezeichnet).

Logische Systeme

Bestandteile eines logischen Systems:

1. **Syntax**: Legt fest welche formalen Ausdrücke als Formeln des logischen Systems gelten. Üblicher Weise startet man von sogenannten atomaren Formeln und legt Regeln fest wie aus diesen weitere Formeln zusammengesetzt werden dürfen.
2. **Semantik**: Regeln die festlegen wie Formeln Wahrheitswerte zugeordnet werden können. Dem syntaktischen Element einer Formel wird damit eine Bedeutung gegeben.
3. **Kalkül**: Ein System von Regeln zum (systematischen) Ableitung neuer wahrer Formeln.

Logische Systeme, Beispiele

In der Vorlesung werden wir zwei logische Systeme kennen lernen

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik

Es gibt aber noch unzählige andere logische Systeme (mit Bedeutung in der Informatik)

- Mehrwertige Logiken und Fuzzylogik
- Nichtmonotone Logiken (z.B.: Reitersche Default-Logik)
- Modallogik
- ...

Anwendungen in der Informatik

- Boolesche Ausdrücke in Programmiersprachen (if Anweisungen)
- Formale Spezifikation
- Verifikation von Programmen
- Logische Programmierung
- Datenbanksysteme
- Wissensrepräsentation und Künstliche Intelligenz
- Berechenbarkeits- und Komplexitätstheorie
- ...

Section 3

Aussagenlogik

Aussagenlogik - Einleitung

Eine **Aussage** ist

- Ein Satz in der natürlichen Sprache (z.B. "Das Auto ist rot.")
- Ist entweder wahr (W) oder falsch (F)

Beispiel

„4 ist größer als 10“	F
„101 ist eine Primzahl“	W
„Junge Pferde nennt man Welpen“	F
„4 ist größer als 10, oder 10 ist größer als 4“	W
„4 ist größer als 10, und 10 ist größer als 4“	F
„Die Vorlesung ist im AudiMax“	?
„Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge“	?

Aussagenlogik - Einleitung

Es gibt Aussagen die aus der logischen Verknüpfung von mehreren einfacheren Aussagen bestehen. Wir wollen diese mit atomaren Aussagen und logischen Operatoren darstellen.

Eine **einfache/atomare Aussage**

- ist eine Aussage
- die nur einen Sachverhalt enthält (unteilbare Aussage).

Insbesondere enthält sie keine aussagenlogischen Verknüpfungen wie: nicht, und, oder, wenn ... dann, genau dann wenn

Als **logische Operatoren / Verknüpfungen** betrachten wir

- die Negation $\neg A$ (NOT),
- die Konjunktion $A \wedge B$ (AND),
- die Disjunktion $A \vee B$ (OR), und
- die Folgerung/Implikation $A \rightarrow B$.

Aussagenlogik - Einleitung

Beispiel

Die Aussage „Das Auto ist rot und das Fahrrad ist grün“ besteht aus zwei atomare Aussagen:

1. „Das Auto ist rot“
2. „Das Fahrrad ist grün“

Mit einer Konjunktion können wir die ursprüngliche Aussage aus den Atomen aufbauen.

$$\text{„Das Auto ist rot“} \land \text{„Das Fahrrad ist grün“}$$

Beispiel

Aussage: „Gestern hat es in Wien geregnet“

Die Aussage ist atomar. Sie enthält zwar mehrere Informationen (Zeit, Ort, Wetter) beschreibt aber nur einen Sachverhalt und kann nicht in mehrere Aussagen aufgespalten werden.

Aussagenlogik - Einleitung

Beispiele:

Beispiel

„4 ist größer als 10, oder 10 ist größer als 4“
„4 ist größer als 10" $\vee$ “10 ist größer als 4“

Beispiel

„Wenn es regnet ist die Straße nass.“
„Es regnet" $\rightarrow$ “Die Straße ist nass.“

Beispiel

„Wenn ich nicht lerne, schaffe ich die Prüfung nicht.“
($\neg$ “Ich lerne.") $\rightarrow$ ($\neg$ „Ich schaffe die Prüfung.“)
(„Ich lerne.") $\vee$ ($\neg$ „Ich schaffe die Prüfung.“)

Aussagenlogik - Formale Logik

Zur Erinnerung: In der formalen Logik müssen wir alle Bestandteile eines logischen Systems genau definieren.

Auf den folgenden Folien:

- **Formale Syntax**: Wir definieren was genau eine Aussagenlogische Formel ist.
- **Formale Semantik**: Wir geben Aussagenlogischen Formeln eine Bedeutung.

Später:

- **Kalkül & Schlussregeln**

Subsection 1

Die Syntax der Aussagenlogik

Induktive Definition

- A ... Menge von Atomen /Grundelementen
- Funktionen $f(x, y)$, $g(x_1, \ldots, x_n)$, ...

Induktive Definition einer Menge / Sprache L

L ist die kleinste Menge für die folgendes gilt:

- $A \subseteq L$
- Wenn $x, y \in L$ dann ist auch $f(x, y) \in L$
- Wenn $x_1, \ldots, x_n \in L$ dann ist auch $g(x_1, \ldots, x_n) \in L$

Beispiel

Die Menge $\mathbb{G}$ der gerade Zahlen ist induktiv wie folgt definiert.

- $0 \in \mathbb{G}$
- Wenn $x \in \mathbb{G}$ dann ist auch $x + 2 \in \mathbb{G}$

Wichtig: $\mathbb{G}$ ist die kleinste Menge die beide Bedingungen erfüllt.

Aussagenlogische Formeln - Syntax

Nun wollen wir formal definieren was wir unter Aussagenlogischen Formeln (auch Boolesche Ausdrücke, nach George Boole) verstehen.

Definition (Aussagenlogische Formel)

Wir betrachten eine Menge von **atomaren Formeln** (Variablen) Var. Die aussagenlogischen Formeln sind jetzt induktiv definiert.

- Jede atomare Formel aus Var ist eine Formel
- Sind F und G Formeln dann sind auch

  $$\neg F, \quad (F \wedge G), \quad (F \vee G), \quad \text{und} \quad (F \rightarrow G)$$

  Formeln.

$\mathcal{F}_{Var}$ bezeichnet die Menge der aussagenlogischen Formeln die aus den Atomen Var gebildet werden können.

Aussagenlogische Formeln - Syntax

Beispiel

Für die atomaren Formeln $Var = \{x, y, z\}$ können wir z.B. die folgende Formel bilden:

$$((x \to y) \land (z \lor \neg x))$$

Zunächst können wir Formeln $F_1 = x$ und $F_2 = y$ bilden und dann

$$F_3 = (F_1 \to F_2) = (x \to y)$$

Mit $F_4 = z$ und $F_5 = \neg F_1 = \neg x$ bilden wir dann

$$F_6 = (F_4 \lor F_5) = (z \lor \neg x)$$

Schlussendlich erhalten wir

$$(F_3 \land F_6) = ((x \to y) \land (z \lor \neg x))$$

Subsection 2

Die Semantik der Aussagenlogik

Semantik der Aussagenlogik

Die Semantik der Aussagenlogik wird über Wahrheitswerte “wahr” (1) und “falsch” (0) definiert.

Die Aussagenlogik ist damit eine zweiwertige Logik [1].

Ein $x \in Var$ steht für irgendeine Aussage. Der Wahrheitswert von x hängt also davon ab für welche konkrete Aussage x steht.

- Der Wahrheitswert einer Formel wird in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der atomaren Formeln berechnet.
- Jeder Formel wird dann entweder der Wert 1 oder 0 zugeordnet.

Definition

Eine **Belegung** ist eine Funktion $\alpha : Var \to \{1, 0\}$ die

- jeder atomaren Formel entweder den Wert 1 oder 0 zuweist.

Diese Wahrheitswerte setzten sich auf beliebige Formeln fort.

[1] Außerhalb dieser Vorlesung gibt es sogenannte mehrwertige Logiken, die mehr als zwei Wahrheitswerte betrachten.

Semantik der Aussagenlogik

Definition

Sei α eine Belegung für Atome in Var. Wir definieren die Erweiterung $\widehat{\alpha}$ der Belegung α auf alle Formeln in $\mathcal{F}_{Var}$ wie folgt:

- für atomare Formeln $F \in Var$: $\widehat{\alpha}(F) = \alpha(F)$
- für Formeln $F, G \in \mathcal{F}_{Var}$:

$$\widehat{\alpha}(F \wedge G) = \begin{cases} 1 & \text{Wenn } \widehat{\alpha}(F) = 1 \text{ und } \widehat{\alpha}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}(F \vee G) = \begin{cases} 1 & \text{Wenn } \widehat{\alpha}(F) = 1 \text{ oder } \widehat{\alpha}(G) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\widehat{\alpha}(\neg F) = \begin{cases} 1 & \text{Wenn } \widehat{\alpha}(F) = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- für Formeln $F, G \in \mathcal{F}_{Var}$: $\widehat{\alpha}(F \rightarrow G) = \widehat{\alpha}(\neg F \vee G)$

Negation

Beispiel

Die Vorlesung ist nicht im AudiMax.

Die Aussage

- ist falsch wenn die Vorlesung im AudiMax ist
- und wahr andernfalls.

Negation

Der Wahrheitswert von $\neg F$ ergibt sich aus dem Wahrheitswert von F entsprechend der folgenden Wahrheitstafel:

$\hat{\alpha}(F)$	$\hat{\alpha}(\neg F)$
0	1
1	0

Andere Bezeichnungen/Symbole: not, non, $-F$, $\sim F$, $\bar{F}$, NF, ...

Konjunktion

Beispiel

Ich sehe mir einen Film an und esse Popcorn.

Ist nur wahr wenn beide Aussagen wahr sind.

Konjunktion

$\hat{\alpha}(F)$	$\hat{\alpha}(G)$	$\hat{\alpha}(F \wedge G)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Andere Bezeichnungen/Symbole: and, et, $F \cdot G$, FG, $F \& G$, KFG, ...

Disjunktion

Beispiel

Ich sehe mir einen Film an oder esse Burger.

Ist wahr wenn mind. eine der beiden Aussagen wahr ist.

Disjunktion

$\hat{\alpha}(F)$	$\hat{\alpha}(G)$	$\hat{\alpha}(F \vee G)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Andere Bezeichnungen/Symbole: or, vel, $F + G$, $F|G$, AFG, ...

Implikation

Beispiel

Wenn Fritz Fußball spielt dann spielt auch Barbara Fußball.

Ist nur falsch wenn Fritz spielt aber Barbara nicht spielt

Implikation

$\hat{\alpha}(F)$	$\hat{\alpha}(G)$	$\hat{\alpha}(F \to G)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Andere Bezeichnungen/Symbole: implies, only if, $F \supset G$, $F \Rightarrow G$, CFG, . . .

Semantik der Aussagenlogik - Zusammenfassung

Für Formeln $F, G \in \mathcal{F}_{Var}$:

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \wedge G)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \vee G)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(\neg F)$
0	1
1	0

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \rightarrow G)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Da alle Formeln nur aus solchen Verknüpfungen aufgebaut sind ist damit $\widehat{\alpha}$ für alle Formeln definiert.

Semantik der Aussagenlogik - Äquivalenz Operator

Wir können jetzt weitere zusätzliche Operator definieren.

Beispiel

Fritz spielt Fußball genau dann wenn Barbara auch Fußball spielt.

Ist wahr wenn beiden spielen oder keiner der beiden spielt.

Äquivalenz

$(F \leftrightarrow G)$

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \leftrightarrow G)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$F \leftrightarrow G$ ist also eine Kurzschreibweise von $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$.
Andere Bezeichnungen/Symbole: iff, eq, $F \equiv G$, $F \Leftrightarrow G$, EFG, ...

Ausschließende Disjunktion (XOR)

Beispiel

Ich sehe mir entweder einen Film an oder spiele Fußball
(aber nicht beides).

Ist wahr wenn genau eine der beiden Aussagen wahr ist.

Ausschließende Disjunktion

Wir notieren die Ausschließende Disjunktion von zwei Aussagen F, G als $F \oplus G$.

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \oplus G)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Andere Bezeichnungen/Symbole: Antivalenz, xor, $F \not\equiv G$, $F \not\Leftrightarrow G$, $F \not\leftrightarrow G$, JFG, ...

Implikation (Umkehrung)

Beispiel

Fritz spielt Fußball, wenn Barbara Fußball spielt.

Ist nur falsch wenn Fritz nicht spielt aber Barbara spielt

Implikation

Wir notieren die Implikation von zwei Aussagen F, G als $F \leftarrow G$.

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \leftarrow G)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Andere Bezeichnungen/Symbole: if, $F \subset G$, $F \Leftarrow G$, ...

NAND & NOR

Beispiel

- Es ist nicht der Fall, dass das Kuvert signiert und zugeklebt ist.
- Weder Fritz noch Barbara spielen Tischtennis.

Negierte Konjunktion & Negierte Disjunktion

Negierte Konjunktion: F nand G
Negierte Disjunktion: F nor G

$\widehat{\alpha}(F)$	$\widehat{\alpha}(G)$	$\widehat{\alpha}(F \wedge G)$	$\widehat{\alpha}(F \text{ nand } G)$	$\widehat{\alpha}(F \vee G)$	$\widehat{\alpha}(F \text{ nor } G)$
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0

Andere Bezeichnungen/Symbole:

- NAND: Sheffer-Strich, $F \uparrow G$, $F|G$, F/G, DFG, ...
- NOR: Peirce-Pfeil, $F \downarrow G$, XFG, ...

Logische Operatoren – Zusammenfassung

Logische / Boolesche Operatoren

Konstanten

$\top$	$\bot$
1	0

Unäre Op.

x	$\neg x$
0	1
1	0

Binäre Operatoren

x	y	$x \wedge y$	x nand y	$x \vee y$	x nor y	$x \leftrightarrow y$	$x \oplus y$	$x \rightarrow y$	$x \leftarrow y$	$x \not\rightarrow y$	$x \not\leftarrow y$
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0

- Es gibt 2^{2^n} verschiedene n-stellige Boolesche Operatoren.
  - Es gibt 2^n Möglichkeiten für die Argumente
  - Jeweils 2 Möglichkeiten (0,1) für das Ergebnis

Funktionale Vollständigkeit

Definition (Funktionale Vollständigkeit)

Wie nennen eine Teilmenge der Booleschen Funktionen *funktional vollständig*, wenn damit alle Booleschen Funktionen ausgedrückt werden können.

Satz

Die Menge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *ist funktional vollständig.*

z.B.: $x \rightarrow y = \neg x \vee y$

Satz

Die Menge $\{\neg, \wedge\}$ *ist funktional vollständig.*

Funktionale Vollständigkeit

Satz

Die Menge $\{\neg, \wedge\}$ *ist funktional vollständig.*

Beweis:

- Wir wissen dass die Menge $\{\neg, \wedge, \vee\}$ vollständig ist
- Es genügt also zu zeigen dass $\vee$ mit Hilfe von $\neg$ und $\wedge$ ausgedrückt werden kann
- $x \ \vee \ y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$ – das können wir mit einer Wahrheitstafel überprüfen

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$\neg x \wedge \neg y$	$\neg(\neg x \wedge \neg y)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1

Semantik der Aussagenlogik - Modelle

Definition

Eine Belegung α für *Var* ist ein **Modell einer Formel** F über *Var* wenn $\widehat{\alpha}(F) = 1$, wir schreiben auch $\alpha \models F$.

Die Semantik einer Formel ergibt sich aus der Menge ihrer Modelle.

Definition

Eine Belegung α für *Var* ist ein **Modell einer Menge von Formeln** $\mathcal{F}$ wenn $\widehat{\alpha}(G) = 1$ für jede Formel $G \in \mathcal{F}$, wir schreiben auch $\alpha \models \mathcal{F}$.

Subsection 3

Aussagenlogik: Grundbegriffe

Definition

Eine Formel F ist **erfüllbar** wenn F mind. ein Modell hat (sonst **unerfüllbar**).

Definition

Eine Menge von $\mathcal{F}$ Formeln ist

- **konsistent** (**widerspruchsfrei**) wenn es ein Modell für $\mathcal{F}$ gibt.
- **inkonsistent**(**widersprüchlich**) wenn es kein Modell für $\mathcal{F}$ gibt.

Beispiel

Belegung α mit $\alpha(a) = 1$, $\alpha(b) = 1$, $\alpha(c) = 0$

- α ist ein Modell von $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$
- Die Formel $(a \vee c) \wedge (b \vee c)$ ist daher erfüllbar
- Die Formelmenge $\{(a \vee c), (b \vee c)\}$ ist konsistent

Definition

Eine Formel F ist **allgemein gültig** / eine **Tautologie** wenn jede Belegung auch ein Modell ist.

Beispiele für Tautologien:

- $(x \vee \neg x)$
- $((a \vee c) \vee \neg c)$
- $(c \to c)$
- $(((a \to b) \wedge (b \to c)) \to (a \to c))$

Definition

Zwei Formeln F und G sind **semantisch äquivalent** wenn $\widehat{\alpha}(F) = \widehat{\alpha}(G)$ für alle Belegungen α. Wir schreiben $F \equiv G$.

Beispiele für semantisch äquivalente Formeln:

- $(x \wedge y)$ und $(y \wedge x)$ $\qquad (x \wedge y) \equiv (y \wedge x)$
- $(\neg x \vee y)$ und $(x \to y)$ $\qquad (\neg x \vee y) \equiv (x \to y)$
- $((a \vee b) \wedge (c \vee \neg c))$ und $(a \vee b)$ $\qquad ((a \vee b) \wedge (c \vee \neg c)) \equiv (a \vee b)$

Definition

Eine Formel G **folgt** aus der Formel F / der Formelmenge $\mathcal{F}$ wenn jedes Modell von F / $\mathcal{F}$ auch Modell von G ist.

- Wir schreiben $F \models G$ bzw. $\mathcal{F} \models G$.

Beispiele:

- Aus a folgt $(a \vee b)$. $\quad a \models (a \vee b)$
- Aus $(\neg a \wedge b)$ folgt $(a \vee b)$. $\quad (\neg a \wedge b) \models (a \vee b)$
- Aus $\{a, b\}$ folgt $(a \wedge b)$. $\quad \{a, b\} \models (a \wedge b)$
- Aus $\{a, a \rightarrow b\}$ folgt b. $\quad \{a, a \rightarrow b\} \models b$
- Aus $\{\neg b, a \rightarrow b\}$ folgt $\neg a$. $\quad \{\neg b, a \rightarrow b\} \models \neg a$

G ist eine Tautologie $\iff \emptyset \models G$. In diesem Fall schreiben wir

$$\models G.$$

Grundlegende Begriffe - Zusammenfassung

α: Belegung für Var,
F, G: Formeln über Var
$\mathcal{F}$: Eine Menge von Formeln über Var

Definition

- $\mathcal{F}$ ist **konsistent** (**widerspruchsfrei**) wenn es ein Modell für $\mathcal{F}$ gibt. $\mathcal{F}$ ist **inkonsistent**(**widersprüchlich**) wenn es kein Modell für $\mathcal{F}$ gibt.
- F ist **erfüllbar** wenn F mind. ein Modell hat (sonst **unerfüllbar**).
- F ist **allgemein gültig** / eine **Tautologie** wenn jede Belegung auch ein Modell ist.
- F ist **semantisch äquivalent** zu G wenn $\widehat{\alpha}(F) = \widehat{\alpha}(G)$ für alle Belegungen α. Wir schreiben $F \equiv G$.
- G **folgt** aus $F/\mathcal{F}$ wenn jedes Modell von $F/\mathcal{F}$ auch Modell von G ist. Wir schreiben $F \models G$ bzw. $\mathcal{F} \models G$.

Fundamentale Sätze

Satz

Ein Formel F ist genau dann eine Tautologie wenn $\neg F$ unerfüllbar ist.

Beispiel: Tautologie: $(c \vee \neg c)$
unerfüllbar: $\neg(c \vee \neg c) \equiv (\neg c \wedge c)$

Satz

Zwei Formeln F, G sind semantisch äquivalent genau dann wenn F aus G folgt und G aus F folgt.

- $F \equiv G \Leftrightarrow G \models F$ *und* $F \models G$

Satz

Zwei Formeln F, G sind semantisch äquivalent genau dann wenn $F \leftrightarrow G$ eine Tautologie ist

- $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G$

Es gilt auch:

- $F \models G \Leftrightarrow \models F \rightarrow G$
- $\{F, G\} \models H \Leftrightarrow F \models G \rightarrow H$
- $\{F, G\} \models H \Leftrightarrow \models (F \wedge G) \rightarrow H$

Satz (Kompaktheitssatz)

Eine (unendliche) Menge von aussagenlogischen Formeln ist genau dann erfüllbar, wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist.

Ersetzungssatz

Beobachtung:

- Jede Teilformel kann durch eine semantisch äquivalente Formel ersetzt werden.

Satz (Ersetzungssatz)

Betrachtet man eine Formel G mit einer Teilformel F_1 und bildet eine neue Formel $G[F_1/F_2]$ indem man (in G) die Teilformel F_1 durch eine semantisch äquivalente Formel F_2 ersetzt, dann gilt $G \equiv G[F_1/F_2]$.

Beispiel: $G = ((\neg a \vee b) \vee c)$

$F_1 = (\neg a \vee b)$ ist semantisch äquivalent zu $F_2 = (a \to b)$

$G[F_1/F_2] = ((a \to b) \vee c)$

Ersetzungssatz: $(\neg a \vee b \vee c) \equiv ((a \to b) \vee c)$

Äquivalenzen der Aussagenlogik

Mit dem Ersetzungssatz kann man äquivalente Formeln verwenden um eine Formel zu vereinfachen. Einige hilfreiche Äquivalenzen:

Idempotenz

- $(F \wedge F) \equiv F$
- $(F \vee F) \equiv F$

Kommutativität

- $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$
- $(F \vee G) \equiv (G \vee F)$

Assoziativität

- $((F \wedge G) \wedge H) \equiv (F \wedge (G \wedge H))$
- $((F \vee G) \vee H) \equiv (F \vee (G \vee H))$

Absorption

- $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$
- $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$

Distributivität

- $(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
- $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$

Doppelnegation

- $\neg\neg F \equiv F$

de Morgansche Regeln

- $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$
- $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$

Äquivalenzen der Aussagenlogik

Mit dem Ersetzungssatz kann man äquivalente Formeln verwenden um eine Formel zu vereinfachen. Einige hilfreiche Äquivalenzen:

- Idempotenz $(F \wedge F) \equiv F$ und $(F \vee F) \equiv F$
- Kommutativität $(F \wedge G) \equiv (G \wedge F)$ und $(F \vee G) \equiv (G \vee F)$
- Assoziativität $((F \wedge G) \wedge H) \equiv (F \wedge (G \wedge H))$ und
  $((F \vee G) \vee H) \equiv (F \vee (G \vee H))$
- Absorption $(F \wedge (F \vee G)) \equiv F$ und $(F \vee (F \wedge G)) \equiv F$
- Distributivität $(F \wedge (G \vee H)) \equiv ((F \wedge G) \vee (F \wedge H))$
  $(F \vee (G \wedge H)) \equiv ((F \vee G) \wedge (F \vee H))$
- Doppelnegation $\neg\neg F \equiv F$
- de Morgansche Regeln $\neg(F \wedge G) \equiv (\neg F \vee \neg G)$
  $\neg(F \vee G) \equiv (\neg F \wedge \neg G)$

Äquivalenzen der Aussagenlogik

Dank dieser Äquivalenzen können wir Formeln kompakter notieren:

- Klammerung zwischen aufeinander folgender $\wedge$ oder $\vee$ ist nicht notwendig:
  $\hookrightarrow$ Statt $((F \wedge G) \wedge H)$ können wir $(F \wedge G \wedge H)$ schreiben.
- Weiters werden wir Klammern um die ganze Formel nicht notieren:
  $\hookrightarrow$ Statt $(F \wedge G)$ können wir $F \wedge G$ schreiben.

Diese Äquivalenzen sind die Basis für **Normalformen**.

Normalform

Eine **Normalform** ist eine Einschränkung auf der Syntax sodass jede beliebige Formel in eine semantisch äquivalente Formel in Normalform umgewandelt werden kann.

- Vereinfacht die maschinelle Verarbeitung von logischen Formeln. (Viele Algorithmen verarbeiten nur eine bestimmte Normalform)

Konjunktive Normalform

Literal: Unter Literalen verstehen wir

- Atome $x \in \mathit{Var}$ und
- negierte Atome $\neg x$ für $x \in \mathit{Var}$.

Definition

Eine Formel ist in **konjunktiver Normalform (KNF)**, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist. F ist also von folgender Form ($L_{i,j}$ Literale):

$$F = (L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge (L_{n,1} \vee \cdots \vee L_{n,m_n})$$

Beispiele:

- $(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg c \vee d) \wedge \neg b$
- $(\neg a \vee x \vee \neg c \vee d) \wedge (\neg b \vee \neg y)$

Disjunktive Normalform

Definition

Eine Formel ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist. F ist also von folgender Form ($L_{i,j}$ Literale):

$$F = (L_{1,1} \wedge \cdots \wedge L_{1,m_1}) \vee \cdots \vee (L_{n,1} \wedge \cdots \wedge L_{n,m_n})$$

Beispiele:

- $(\neg a \vee b) \wedge (a \vee \neg c \vee d) \wedge \neg b$ (KNF)
- $(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg c \wedge d)$ (DNF)
- $\neg a \wedge b \wedge c$ (DNF, KNF)
- $\neg a \vee b \vee c$ (DNF, KNF)
- $(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee (b \wedge d))$ ()

Jede Formel kann mit Hilfe der präsentierten Äquivalenzumformungen in eine semantisch äquivalente KNF (DNF) transformiert werden.

Konjunktive und Disjunktive Normalform - Beispiele

Zwei Beispiele wie man eine Formel in KNF umwandeln kann:

$$\begin{aligned}
&(A \wedge B) \rightarrow C && \\
&\neg(A \wedge B) \vee C && \text{(Definition von } \rightarrow\text{)} \\
&(\neg A \vee \neg B) \vee C && \text{(de Morgan)} \\
&\neg A \vee \neg B \vee C && \text{(Assoziativität)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C \leftrightarrow (A \wedge B) && \\
&(\neg C \vee (A \wedge B)) \wedge (C \vee \neg(A \wedge B)) && \text{(Definition von } \leftrightarrow\text{)} \\
&(\neg C \vee (A \wedge B)) \wedge (C \vee (\neg A \vee \neg B)) && \text{(de Morgan)} \\
&(\neg C \vee (A \wedge B)) \wedge (C \vee \neg A \vee \neg B) && \text{(Assoziativität)} \\
&((\neg C \vee A) \wedge (\neg C \vee B)) \wedge (C \vee \neg A \vee \neg B) && \text{(Distributivität)} \\
&(\neg C \vee A) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (C \vee \neg A \vee \neg B) && \text{(Assoziativität)}
\end{aligned}$$

Konjunktive und Disjunktive Normalform - Algorithmus

Diese Schritte lassen sich auch in einen Algorithmus fassen der eine Formel F in eine semantisch äquivalente KNF umzuwandeln.

Algorithmus

1. Ersetze $G \leftrightarrow H$ durch $(G \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow G)$
2. Ersetze $G \rightarrow H$ durch $(\neg G \vee H)$
3. Iteriere das Folgende solange wie möglich
    1. Ersetze $\neg\neg G$ durch G
    2. Ersetze $\neg(G \wedge H)$ durch $(\neg G \vee \neg H)$
    3. Ersetze $\neg(G \vee H)$ durch $(\neg G \wedge \neg H)$
4. Iteriere das Folgende solange wie möglich
    1. Ersetze $(G \vee (H \wedge I))$ und $((H \wedge I) \vee G)$ durch $((G \vee H) \wedge (G \vee I))$

„Ersetze“ liest sich als „Ersetze alle Teilformeln der Form“

Formalisieren in Aussagenlogik

Unser ursprüngliches Ziel ist es (natürlich sprachliche) Aussagen zu formalisieren und logische Zusammenhänge zu Identifizieren.

Faustregel zur Formalisierung von Deutsch:

Identifizieren von atomaren Aussagen:

- die kürzeste Aussage, in der keine logische Verknüpfung vorkommt (nicht, und, oder, wenn ... dann usw.), und
- die entweder wahr oder falsch sein kann

Dann ersetzt man atomare Aussagen mit Aussagenvariablen

Wörter/Phrasen nicht, und, oder, wenn ... dann, usw.

- werden durch die entsprechenden logischen Operationen ersetzt.

Formalisieren in Aussagenlogik - Beispiel 1

Aussage 1: Der Verkauf von Häusern sinkt, wenn die Zinsen steigen.
Aussage 2: Auktionäre sind nicht glücklich, wenn der Verkauf von Häusern sinkt.
Aussage 3: Die Zinsen steigen.
Aussage 4: Auktionäre sind glücklich.

Atomare Aussagen:
S: der Verkauf von Häusern sinkt
R: die Zinsen steigen
H: Auktionäre sind glücklich

Aussage 1: $R \rightarrow S$
Aussage 2: $S \rightarrow \neg H$
Aussage 3: R
Aussage 4: H

Wir wollen wissen, ob die Aussagen miteinander konsistent sind. Deshalb betrachten wir deren Konjunktion $(R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg H) \wedge R \wedge H$.

Formalisieren in Aussagenlogik - Beispiel 1

Da wir wissen wollen ob die Aussagen miteinander konsistent sind betrachten wir deren Konjunktion $(R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg H) \wedge R \wedge H$.

Wir testen ob die Formel erfüllbar ist und nutzen dazu Wahrheitstafeln.

S	R	H	$(R \rightarrow S)$	$(S \rightarrow \neg H)$	$(R \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg H) \wedge R \wedge H$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0

Die Formel hat kein Model (ist unerfüllbar) und daher sind die Aussagen widersprüchlich.

Formalisieren in Aussagenlogik - Beispiel 2

Aussage 1: Wenn der Geiger das Konzert gibt, werden viele kommen, wenn die Preise nicht zu hoch sind.
Aussage 2: Wenn der Geiger das Konzert gibt, werden die Preise nicht zu hoch sein.
Schluss: Daher werden, falls der Geiger das Konzert bestreitet, viele kommen.

Wir wollen wissen ob der Schluss korrekt ist.

Atomare Aussagen:
P: „der Geiger gibt das Konzert“
C: „viele werden kommen“
H: „die Preise sind zu hoch“

Aussage 1: $P \to (\neg H \to C)$
Aussage 2: $P \to \neg H$
Schluss: $P \to C$

Wir wollen wissen ob $P \to C$ aus $P \to (\neg H \to C)$ und $P \to \neg H$ folgt.

Widerspruchsmethode

Um $\{A, B\} \models C$ zu zeigen können wir zeigenm, dass

- $F = (A \land B) \to C$ eine Tautologie ist.

Die Formel F ist äquivalent zu

- $F' = \neg A \lor \neg B \lor C$.

Um zu testen ob F' eine Tautologie ist können wir testen ob $\neg F'$ unerfüllbar ist.

- $\neg F' \equiv A \land B \land \neg C$.

Wir erhalten also dass $\{A, B\} \models C$ genau dann gilt wenn $A \land B \land \neg C$ unerfüllbar ist.

Formalisieren in Aussagenlogik - Beispiel 2

Zurück zum Beispiel 2: Wir wollen wissen ob $P \rightarrow C$ aus $P \rightarrow (\neg H \rightarrow C)$ und $P \rightarrow \neg H$ folgt. (Wir schreiben auch $\{P \rightarrow (\neg H \rightarrow C), P \rightarrow \neg H\} \models P \rightarrow C$.)

Widerspruchsmethode:

Um $\{A, B\} \models C$ zu zeigen, zeigen wir dass $A \wedge B \wedge \neg C$ unerfüllbar (widersprüchlich) ist.

Wir betrachten also die Formel:

$$(P \rightarrow (\neg H \rightarrow C)) \wedge (P \rightarrow \neg H) \wedge \neg(P \rightarrow C)$$

Mittels Wahrheitstafel (oder dem später diskutierten Resolutionskalkül) stellen wir fest dass die Formel unerfüllbar ist.

Daher ist der ursprüngliche Schluss auf $P \rightarrow C$ korrekt.

Formalisieren in Aussagenlogik - Beispiel 3

(zum Selbststudium)

Aussage 1: Tom kann am Wochenende nicht beides eine Wanderung und eine Radtour machen.
Aussage 2: Wenn es am Wochenende regnet macht Tom eine Radtour.
Aussage 3: Tom geht am Wochenende Wandern.
Aussage 4 Es regnet nicht am Wochenende.

Aufgabe (Teil 1): Formalisieren Sie die Aussagen mittels aussagenlogischer Formeln. Geben Sie die Bedeutung jeder Aussagenvariablen an.

Atomare Aussagen:
R: „Es regnet am WE“ T: „Tom macht eine Radtour am WE“
W: „Tom macht eine Wanderung am WE“

Aussage 1: $\neg(T \wedge W)$ oder $(\neg T \vee \neg W)$
Aussage 2: $R \rightarrow T$
Aussage 3: W
Aussage 4: $\neg R$

Formalisieren in Aussagenlogik - Beispiel 3

(zum Selbststudium)

Aufgabe (Teil 2): Kann man aus den ersten drei Aussagen auf Aussage 4 schließen? Beweisen Sie Ihre Vermutung mit einer geeigneten Methode aus der Vorlesung (geben Sie auch an welche Methode Sie verwenden).

Wir verwenden die Widerspruchsmethode und betrachten die Konjunktion der drei Aussagen und des negierten Schluss:

$$(\neg T \vee \neg W) \wedge (R \rightarrow T) \wedge W \wedge R$$

Im nächsten Foliensatz werden wir zeigen, dass diese Formel unerfüllbar ist. Daher ist der Schluss aus den drei Aussagen korrekt.

Zusammenfassung & Ausblick

Bis jetzt haben wir Folgendes behandelt:

- Formale Definition von Syntax und Semantik der Aussagenlogik
- Fundamentale Begriffe & Sätze
- Formalisieren in Aussagenlogik

Nächste VO:

- Kalkül der Aussagenlogik
  - Schlussregeln
  - Resolution
  - Hornlogik, Einheitsresolution
- Prädikatenlogik:
  - Syntax
  - Semantik