Mathematische Grundlagen der Informatik 1

Matrizen und Lineare Algebra

W. Gansterer, K. Schindlerova

21. April 2020

Wiederholung

Vektorraum

Definition:
Sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** V mit Skalaren aus K besteht aus einer kommutativen Gruppe $(V, +)$ und einer skalaren Multiplikation

$$\cdot : \quad K \times V \to V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v,$$

sodass für alle $v, w \in V$, $\lambda, \mu \in K$ gilt:

(V1) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

(V2) $1 \cdot v = v$ . . . "1" $=$ Einselement des Körpers!

(V3) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$

(V4) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

Lineare Abbildung

Definition:
Es seien U, V Vektorräume über K. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt **lineare Abbildung**, falls für alle $u, v \in U$ und für alle $\lambda \in K$ gilt:

(LA1) $f(u + v) = f(u) + f(v)$

(LA2) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Definition:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des K-Vektorraums V heißen linear unabhängig, wenn für jede beliebige Linearkombination der Vektoren gilt:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Die Vektoren heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Basis, Dimension

Definitionen:
Eine Teilmenge B eines Vektorraums V heißt Basis von V, wenn gilt:

(B1) Span(B)=V . . . “B erzeugt V”

(B2) B ist eine linear unabhängige Menge von Vektoren.

Sei $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Dann heißt die Zahl n Dimension von V. Wir schreiben hierfür $n = dim(V)$. Dem Nullraum $\{0\}$ wird die Dimension 0 zugeordnet.

Koordinaten

Satz/Definition:
Ist $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ eine Basis des Vektorraums V, so gibt es für jeden Vektor $v \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $x_1, x_2, \ldots x_n$ mit der Eigenschaft

$$v = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n$$

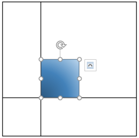
Die x_i heißen Koordinaten von v bezüglich B. Wir schreiben dafür

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

Matrizen und Lineare Algebra

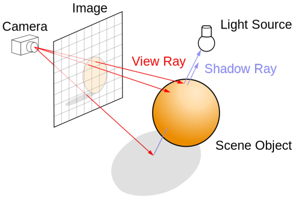
Herausforderungen im Alltag der Informatik

- Drehen, verschieben, verändern eines Objektes
- Abbildung eines 3D Objektes auf einem Bildschirm (2D)
- Markieren eines Objekts per Mausklick
- Bewegung eines Roboterarms mit mehreren Gelenken



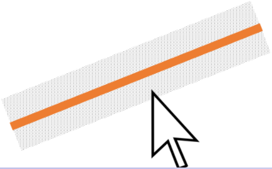
Herausforderungen im Alltag der Informatik

- Drehen, verschieben, verändern eines Objektes
- Abbildung eines 3D Objektes auf einem Bildschirm (2D)
- Markieren eines Objekts per Mausklick
- Bewegung eines Roboterarms mit mehreren Gelenken



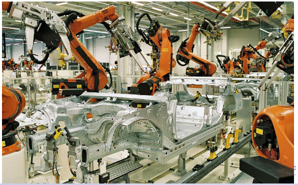
Herausforderungen im Alltag der Informatik

- Drehen, verschieben, verändern eines Objektes
- Abbildung eines 3D Objektes auf einem Bildschirm (2D)
- Markieren eines Objekts per Mausklick
- Bewegung eines Roboterarms mit mehreren Gelenken



Herausforderungen im Alltag der Informatik

- Drehen, verschieben, verändern eines Objektes
- Abbildung eines 3D Objektes auf einem Bildschirm (2D)
- Markieren eines Objekts per Mausklick
- Bewegung eines Roboterarms mit mehreren Gelenken

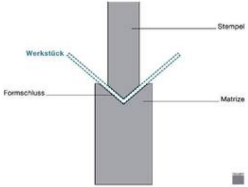


Überblick

2. Matrizen und Lineare Algebra
   - Matrizen
     - Rechnen mit Matrizen
     - Zusammenhang Lineare Abbildungen - Matrizen

Matrizen

"Matrix" - Was ist das?



"Matrix" - Was ist das?

...rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

$(n, m) =$ Dimension der Matrix

"Matrix" - Was ist das?

...rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

$(n, m) =$ Dimension der Matrix

"Matrix" - Was ist das?

…rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

$(n, m) =$ Dimension der Matrix

"Matrix" - Was ist das?

...rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

$(n, m) =$ Dimension der Matrix

"Matrix" - Was ist das?

...rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

$(n, m) =$ Dimension der Matrix

"Matrix" - Was ist das?

. . . rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

(n, m) = Dimension der Matrix

Kompakte Darstellung

$$\begin{array}{rrcr} i: & x_1 + 3x_2 & = & 25 \\ ii: & 5x_1 - x_2 & = & 2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

"Matrix" - Was ist das?

...rechteckige "Tabelle" von mathematischen Objekten.

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \dots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Element/Koeffizient

Zeilenindex Spaltenindex

m Spaltenvektoren

n Zeilenvektoren

$n \times m$ Matrix

(n, m) = Dimension der Matrix

Kompakte Darstellung

$$\begin{array}{rrcr} i: & x_1 + 3x_2 & = & 25 \\ ii: & 5x_1 - x_2 & = & 2 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Anwendung von Operationen

$$2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Operationen mit Matrizen

- Addition
- Multiplikation
  - mit einem Skalar
  - Matrizenmultiplikation
- Transponierung
- Invertierung

Addition

Addition nur möglich bei Matrizen gleicher Dimension

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d+j & e+k & f+l \end{pmatrix}$$

- ist kommutativ: $A + B = B + A$
- und assoziativ: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Multiplikation mit Skalar

Bei der Multiplikation mit einem Skalar wird jeder Eintrag der Matrix mit dem Skalar multipliziert. Umgekehrt kann jeder beliebige Skalar aus einer Matrix herausgehoben werden:

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ \lambda d & \lambda e & \lambda f \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot g + b \cdot j & a \cdot h + b \cdot k & a \cdot i + b \cdot l \\ c \cdot g + d \cdot j & c \cdot h + d \cdot k & c \cdot i + d \cdot l \\ e \cdot g + f \cdot j & e \cdot h + f \cdot k & e \cdot i + f \cdot l \end{pmatrix}$$

Multiplikation zweier Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot g + b \cdot j & a \cdot h + b \cdot k & a \cdot i + b \cdot l \\ c \cdot g + d \cdot j & c \cdot h + d \cdot k & c \cdot i + d \cdot l \\ e \cdot g + f \cdot j & e \cdot h + f \cdot k & e \cdot i + f \cdot l \end{pmatrix}$$

- ist assoziativ: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Multiplikation zweier Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot g + b \cdot j & a \cdot h + b \cdot k & a \cdot i + b \cdot l \\ c \cdot g + d \cdot j & c \cdot h + d \cdot k & c \cdot i + d \cdot l \\ e \cdot g + f \cdot j & e \cdot h + f \cdot k & e \cdot i + f \cdot l \end{pmatrix}$$

- ist assoziativ: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- aber im Allgemeinen nicht kommutativ: $A \times B \neq B \times A$

Multiplikation zweier Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a \cdot g + b \cdot j & a \cdot h + b \cdot k & a \cdot i + b \cdot l \\ c \cdot g + d \cdot j & c \cdot h + d \cdot k & c \cdot i + d \cdot l \\ e \cdot g + f \cdot j & e \cdot h + f \cdot k & e \cdot i + f \cdot l \end{pmatrix}$$

- ist assoziativ: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- aber im Allgemeinen nicht kommutativ: $A \times B \neq B \times A$
- ist distributiv bez. Matrizenaddition: $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

Transponieren

Transponierte Matrix $A^\top$

Ist $A \in K^{n\times m}$, so entsteht die transponierte Matrix $A^\top \in K^{m\times n}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, d. h., die i-te Spalte von A ist die i-te Zeile von $A^\top$.
Für eine quadratische Matrix entspricht das dem Spiegeln der Matrixelemente an der Hauptdiagonale.

Beispiele

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

Transponieren

Transponierte Matrix $A^\top$

Ist $A \in K^{n\times m}$, so entsteht die transponierte Matrix $A^\top \in K^{m\times n}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, d. h., die i-te Spalte von A ist die i-te Zeile von $A^\top$.
Für eine quadratische Matrix entspricht das dem Spiegeln der Matrixelemente an der Hauptdiagonale.

Beispiele

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$
- $(A^T)^T =$

Transponieren

Transponierte Matrix $A^\top$

Ist $A \in K^{n\times m}$, so entsteht die transponierte Matrix $A^\top \in K^{m\times n}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten, d. h., die i-te Spalte von A ist die i-te Zeile von $A^\top$.
Für eine quadratische Matrix entspricht das dem Spiegeln der Matrixelemente an der Hauptdiagonale.

Beispiele

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$
- $(A^T)^T = A$

Symmetrische Matrix

Symmetrische Matrix

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch, wenn gilt $A = A^\top$.

Beispiel

- $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & f & g \\ c & g & h \end{pmatrix}$

Hermitesche Matrix

Eine Hermitesche Matrix ist eine spezielle **komplexe** Matrix.

Hermitesche Matrix

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt hermitesch, wenn gilt $A^T = \overline{A}$, d. h. $\overline{A}^T = A$.

Beachten Sie, dass die Diagonaleinträge einer hermiteschen Matrix reell sein müssen!

Beispiele

- $\begin{pmatrix} a & \overline{b} & \overline{c} \\ b & d & \overline{e} \\ c & e & f \end{pmatrix}$,

Hermitesche Matrix

Eine Hermitesche Matrix ist eine spezielle **komplexe** Matrix.

Hermitesche Matrix

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt hermitesch, wenn gilt $A^T = \overline{A}$, d. h. $\overline{A}^T = A$.

Beachten Sie, dass die Diagonaleinträge einer hermiteschen Matrix reell sein müssen!

Beispiele

- $\begin{pmatrix} a & \overline{b} & \overline{c} \\ b & d & \overline{e} \\ c & e & f \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & i & 3+i \\ -i & 2 & 7-i \\ 3-i & 7+i & 4 \end{pmatrix}$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to Rang(A) =$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(A) = 2$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(A) = 2$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(B) =$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to Rang(A) = 2$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to Rang(B) = 1$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(A) = 2$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(B) = 1$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(C) =$

Rang einer Matrix

Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix A ist die maximale Anzahl linear unabhängiger (Zeilen- bzw.) Spaltenvektoren in der Matrix.

Beachten Sie, dass immer "Spaltenrang = Zeilenrang" gilt!

Beispiele

- $Rang(A) = Rang(A^T)$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(A) = 2$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(B) = 1$
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Rang(C) = 2$

Spezielle Eigenschaften

Reguläre Matrix

Ist der Rang einer quadratischen Matrix (Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten) gleich ihrer (Zeilen- = Spalten-) Dimension, so hat sie **vollen Rang** *und ist eine* **reguläre Matrix***.*

Spezielle Eigenschaften

Reguläre Matrix

Ist der Rang einer quadratischen Matrix (Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten) gleich ihrer (Zeilen- = Spalten-) Dimension, so hat sie **vollen Rang** *und ist eine* **reguläre Matrix**.

Diagonalmatrix

Eine quadratische Matrix, deren Einträge außerhalb Hauptdiagonale alle gleich Null sind, nennt man **Diagonalmatrix**.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Spezielle Matrizen

Einheitsmatrix

Eine Diagonalmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonale alle gleich 1 sind, nennt man eine **Einheitsmatrix** I.

- $A \times I = I \times A = A$

$$I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ *Vergleiche neutrales Element bezüglich Multiplikation!*

Inverse Matrix

Inverse Matrix

Zu jeder regulären Matrix A existiert die inverse Matrix A^{-1}, die dadurch definiert ist, dass

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

- $(A^{-1})^{-1} =$

Inverse Matrix

Inverse Matrix

Zu jeder regulären Matrix A existiert die inverse Matrix A^{-1}, die dadurch definiert ist, dass

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

- $(A^{-1})^{-1} = A$

Inverse Matrix

Inverse Matrix

Zu jeder regulären Matrix A existiert die inverse Matrix A^{-1}, die dadurch definiert ist, dass

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

- $(A^{-1})^{-1} = A$

$\rightarrow$ *Vergleiche inverses Element bezüglich Multiplikation!*

Zusammenhang Lineare Abbildungen - Matrizen

Satz

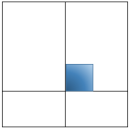
Zu jeder linearen Abbildung $f : K^n \to K^m$ *gibt es genau eine Matrix* $A \in K^{m \times n}$ *mit der Eigenschaft* $f(x) = Ax$ *für alle* $x \in K^n$.

Umgekehrt definiert jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ *eine lineare Abbildung* $f : K^n \to K^m$ *als* $f(x) := Ax$.

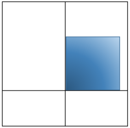
Zusammenhang Lineare Abbildungen - Matrizen

$$
\begin{aligned}
f(x) &:= Ax \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matrix A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Vektor x}}
\end{aligned}
$$

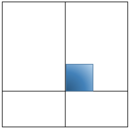
Beispiele für lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$



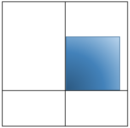
$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung}} \rightarrow$$



Beispiele für lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

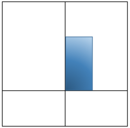


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung}} \rightarrow$$

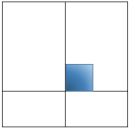


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung in } x\text{-Richtung}} \rightarrow$$

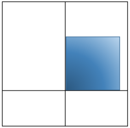
$\rightarrow$



Beispiele für lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

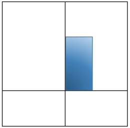


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}}_{\text{Streckung}} \rightarrow$$

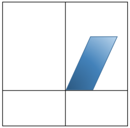


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Streckung in } x\text{-Richtung}} \rightarrow$$

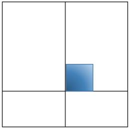
$\rightarrow$



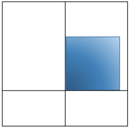
$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1 & \lambda_3\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{\text{Scherung}} \rightarrow$$



Beispiele für lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

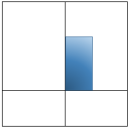


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung}} \rightarrow$$

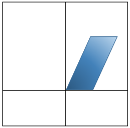


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung in } x\text{-Richtung}} \rightarrow$$

$\rightarrow$

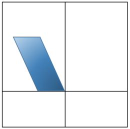


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Scherung}} \rightarrow$$

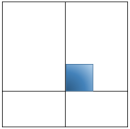


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung } y\text{-Achse}} \rightarrow$$

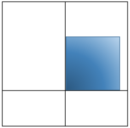
$\rightarrow$



Beispiele für lineare Abbildungen im $\mathbb{R}^2$

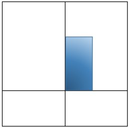


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung}} \rightarrow$$

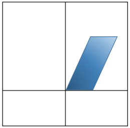


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Streckung in } x\text{-Richtung}} \rightarrow$$

$\rightarrow$

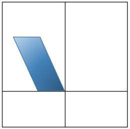


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Scherung}} \rightarrow$$

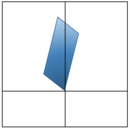


$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spiegelung } y\text{-Achse}} \rightarrow$$

$\rightarrow$



$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}}_{\text{Drehung um } \alpha} \rightarrow$$



Eine wichtige Ausnahme ...

Translation (Verschiebung)

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$
- Für jede lineare Abbildung f gilt: $f(0) = 0$

$\Rightarrow$ Translation ist *keine* lineare Abbildung

Verknüpfung von Linearen Abbildungen

Sind $f : K^n \to K^m$ und $g : K^m \to K^r$ lineare Abbildungen, so ist die Hintereinanderausführung möglich und auch $g \circ f : K^n \to K^r$ ist linear.
Zur Erinnerung: Verknüpfung immer von rechts nach links!

Die Verknüpfung zweier linearer Abbildungen $g \circ f$ entspricht der Multiplikation ihrer Koeffizientenmatrizen:

$f(x) = Fx, \quad g(x) = Gx$

$$\Rightarrow \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (G \times F)\,x$$

Zusammenfassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Matrix A ist invertierbar
- Die Matrix A hat vollen Rang
- Die Matrix A ist regulär
- Die Determinante der Matrix A ist ungleich null
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat einen nulldimensionalen Lösungsraum
- Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
- Der Kern der linearen Abbildung $f(x) = Ax$ hat die Dimension 0
- Die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ ist bijektiv