Beweistechniken

Inhaltsverzeichnis I

Einführung

Mathematische Beweise

Eine **mathematische Aussage** oder *Satz* besteht in der Regel aus einer *Voraussetzung* p und einer *Folgerung/Behauptung* q und hat die Form $p \Rightarrow q$ oder $p \Leftrightarrow q$ (wobei p und q wiederum mathematische Aussagen sein können).

Ein **mathematischer Beweis** besteht darin nachzuweisen, dass der zu einem mathematischen Satz gehörige logische Ausdruck eine *Tautologie* ist (= Aussage, die immer wahr ist).

Beispiel mathematischer Satz:

Wenn eine natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Direkter Beweis

Direkter Beweis

Man nimmt an, dass die Voraussetzung p wahr ist und versucht, durch Aneinanderreihung von korrekten Implikationen auf „q ist wahr“ zu schließen

Aussagenlogische Tautologie:
$((p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

Beispiel direkter Beweis:

$p \Rightarrow r$: Wenn eine Zahl n durch 6 teilbar ist, dann gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 6 \cdot k$
$r \Rightarrow q$: Die Zahl 6 ist darstellbar als das Produkt $6 = 2 \cdot 3$
Daher gilt $n = 2 \cdot 3 \cdot k$, und n ist durch drei teilbar. ■

Beweis durch Kontradiktion

Beweis durch Kontradiktion

Man nimmt an, dass die Folgerung q *falsch* ist und versucht daraus zu schließen, dass dann die Voraussetzung p falsch sein muss.
Es handelt sich also um einen direkten Beweis für die Implikation von negierter Voraussetzung $\neg p$ aus der negierten Folgerung $\neg q$.

Aussagenlogische Tautologie:
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

Beispiel Beweis durch Kontradiktion:

Wir nehmen an, dass n *nicht* durch 3 teilbar ist: $n \neq 3 \cdot k \quad \forall k \in \mathbb{N}$
Das gilt also auch für alle geraden $k = 2j$, $j \in \mathbb{N}$.
Daher ist $n \neq 3 \cdot (2 \cdot j) \quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Daher $n \neq 6 \cdot j \quad \forall j \in \mathbb{N}$, n ist also nicht durch 6 teilbar. ∎

Indirekter Beweis

Indirekter Beweis / Beweis durch Widerspruch

Es wird angenommen, dass die Voraussetzung p wahr und die Folgerung q falsch ist. Daraus wird versucht, einen logischen Widerspruch herbeizuführen. Somit wird der einzige Fall, in dem $p \Rightarrow q$ falsch ist, ausgeschlossen.

Aussagenlogische Tautologie:
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \land \neg q \Rightarrow \mathit{false})$

Beispiel indirekter Beweis:

Wir nehmen an, dass n durch 6 teilbar ist, aber nicht durch 3:
$\exists k_0 \in \mathbb{N} : n = 6 \cdot k_0, \quad \forall j \in \mathbb{N} : n \neq 3 \cdot j$
$\Rightarrow n = 2 \cdot 3 \cdot k_0$ und $n = 3j_0$ mit $j_0 := 2k_0 \in \mathbb{N} \to$ Widerspruch! ∎

Vollständige Induktion

Vollständige Induktion

. . . *kommt etwas später* . . .