

Chapitre 6

Modèles. Complétude.

Nous pouvons maintenant décrire différents objets, et parler de leurs propriétés. Nous avons en effet tous les ingrédients pour parler de modèles et de théories. Nous nous intéresserons ensuite au théorème de complétude

Le concept de base est celui de théorie.

Définition 6.1 (Théorie) – Une théorie \mathcal{T} est un ensemble de formules closes sur une signature donnée. Les formules d'une théorie sont appelées les axiomes de cette théorie.
– Une structure \mathfrak{M} est un modèle de la théorie \mathcal{T} si \mathfrak{M} est un modèle de chacune des formules de la théorie.

Définition 6.2 (Théorie consistante) Une théorie est dite consistante si elle possède un modèle. Elle est dite inconsistante dans le cas contraire.

Bien entendu, les théories inconsistantes sont de peu d'intérêt.

Remarque 6.1 D'un point de vue informatique, on peut voir une théorie comme la spécification d'un objet : on décrit l'objet à l'aide de la logique du premier ordre, i.e. à l'aide des axiomes qui le décrivent.

Une spécification (théorie) consistante est donc ni plus ni moins qu'une théorie qui spécifie au moins un objet.

Remarque 6.2 Dans ce contexte, la question de la complétude est de savoir si l'on décrit bien l'objet en question, ou la classe des objets en question : le théorème de complétude permet de dire que oui pour une spécification consistante, tant que l'on s'intéresse à la classe de tous les modèles de ces spécifications.

Nous allons commencer par donner différents exemples de théories, pour rendre notre discussion beaucoup moins abstraite.

6.1 Exemples de théories

6.1.1 Graphe

Un graphe orienté peut se voir comme un modèle de la théorie sans axiome sur la signature $\Sigma = (\emptyset, \emptyset, \{E\})$, où le symbole de relation E est d'arité 2 : $E(x, y)$ signifie qu'il y a un arc entre x et y .

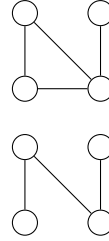
Exemple 6.1 La formule $\exists y(E(x, y) \wedge \forall z(E(x, z) \Rightarrow x = y))$ est vraie en x si et seulement si x est de degré extérieur 1 (modulo le commentaire de la sous-section qui suit sur l'égalité).

Un graphe non-orienté peut se voir comme un modèle de la théorie avec l'unique axiome

$$\forall x \forall y (E(x, y) \Leftrightarrow E(y, x)), \quad (6.1)$$

sur la même signature. Cet axiome signifie que s'il y a un arc entre x et y , alors il y en a aussi un de y vers x et réciproquement.

Exemple 6.2 Voici 2 graphes (non-orientés).



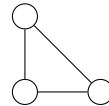
La formule $\exists x \forall y (\neg(x = y) \Rightarrow E(x, y))$ est satisfaite sur le premier et pas sur le second.

6.1.2 Remarques simples

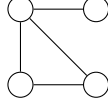
Remarque 6.3 Sur la signature $\Sigma = (\emptyset, \emptyset, \{E\})$, il n'y a aucun terme. On ne peut donc pas désigner un sommet particulier autrement que par une variable libre, ou via des quantifications.

Si l'on veut désigner un ou des sommets particuliers, on peut ajouter un ou des symboles de constantes. On peut considérer la signature $(V, \emptyset, \{E\})$ où $V = \{a, b, c\}$.

Par exemple, le graphe



est un modèle de $E(a, b) \wedge E(b, c) \wedge E(a, c)$.
 Mais attention, ce n'est pas le seul : le graphe



en est aussi un modèle : le domaine d'un modèle peut contenir des éléments qui ne correspondent à aucun terme.

Par ailleurs l'interprétation de a, b ou c pourrait être la même.

Exemple 6.3 On peut aussi parfois se passer de constantes. La formule

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(x = z) \wedge E(x, y) \wedge E(y, z) \wedge E(x, z) \wedge \forall t (t = x \vee t = y \vee t = z)) \quad (6.2)$$

caractérise les triangles comme le graphe plus haut (modulo le commentaire de la sous-section qui suit sur l'égalité).

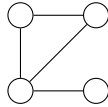
Remarque 6.4 Attention : toutes les propriétés ne peuvent pas s'écrire facilement. Par exemple, on peut prouver qu'il n'est pas possible d'écrire une formule (du premier ordre) qui caractériserait les graphes connexes. Exercice : essayer de l'écrire pour réaliser où sont les problèmes.

Remarque 6.5 C'est la présence de modèles "parasites", i.e. d'autres modèles que ceux que l'on arrive à décrire et que l'on ne peut pas éviter, qui sera quelque part au cœur des difficultés de l'axiomatisation des entiers.

6.1.3 Égalité

Attention, la discussion précédente est impropre : on a utilisé à plusieurs reprises le symbole d'égalité. La discussion suppose que l'interprétation de l'égalité est bien l'égalité.

Exemple 6.4 En fait



est bien un modèle de (6.2), et donc il est parfaitement faux que (6.2) caractérise les triangles.

En effet, appelons $\{a, b, c, d\}$ les sommets de haut en bas et de gauche à droite ; on peut considérer l'interprétation \equiv de $=$ avec $a \equiv a, b \equiv b, c \equiv c, d \equiv b$ et $a \not\equiv b, a \not\equiv c, b \not\equiv c$. Un tel modèle vérifie bien (6.2). Cependant, \equiv , l'interprétation de $=$ n'est pas l'égalité. Remarquons que l'on a une arête entre a et $b, b = d$ qui est vrai mais pas d'arête entre a et d .

Il faut pour rendre correct la discussion ajouter d'une part le symbole $=$ à la signature dans les exemples, et d'autre part, ajouter les axiomes vérifiés par l'égalité.

Soit \mathcal{R} un ensemble de symboles de relations contenant au moins le symbole d'égalité $=$.

Définition 6.3 (Axiomes de l'égalité) Les axiomes de l'égalité pour une signature $\Sigma = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$, avec $= \in \mathcal{R}$, sont

- l'axiome $\forall x \, x = x$
- pour chaque symbole de fonction $f \in \mathcal{F}$ d'arité n , l'axiome

$$\forall x_1 \cdots \forall x_i \forall x'_i \cdots \forall x_n (x_i = x'_i \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n))$$

- pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{R}$ d'arité n ,

$$\forall x_1 \cdots \forall x_i \forall x'_i \cdots \forall x_n (x_i = x'_i \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \Rightarrow R(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)))$$

Tous ces axiomes spécifient que l'égalité est reflexive et est préservée par les symboles de fonction et de relation.

Exercice 6.1. Prouver que l'on a nécessairement alors $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$.

Exercice 6.2. Prouver que l'on a nécessairement alors pour chaque symbole de relation $R \in \mathcal{R}$ d'arité n ,

$$\forall x_1 \cdots \forall x_i \forall x'_i \cdots \forall x_n (x_i = x'_i \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \Leftrightarrow R(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n))).$$

Exercice 6.3. Prouver que l'on a nécessairement alors pour chaque formule $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\forall x_1 \cdots \forall x_i \forall x'_i \cdots \forall x_n (x_i = x'_i \Rightarrow (F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \Leftrightarrow F(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n))).$$

Exercice 6.4. Prouver que l'on a nécessairement alors $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z)$.

On déduit des deux exercices précédents, que $=$ (et son interprétation) est une relation d'équivalence.

6.1.4 Petite parenthèse

Définition 6.4 Un modèle \mathfrak{M} d'une théorie \mathcal{T} sur une signature avec le symbole de relation $=$ est dit égalitaire, si l'interprétation de $=$ dans \mathfrak{M} est l'égalité.

En d'autres termes, l'interprétation du symbole $=$ dans \mathfrak{M} est le sous-ensemble $\{(x, x) | x \in M\}$ où M est l'ensemble de base de \mathfrak{M} .

Il se trouve que si ce n'est pas le cas, et si les axiomes de l'égalité font partie de la théorie \mathcal{T} , alors on peut s'y ramener :

Proposition 6.1 Soit \mathcal{T} une théorie sur une signature Σ , avec au moins le symbole $=$ comme symbole de relation, qui contient tous les axiomes de l'égalité pour Σ .

Si \mathcal{T} possède un modèle, alors \mathcal{T} possède un modèle égalitaire.

Démonstration : On peut quotienter le domaine M de tout modèle \mathfrak{M} de \mathcal{T} par la relation d'équivalence qui place dans la même classe d'équivalence x et y lorsque l'interprétation de $x = y$ est vraie dans \mathfrak{M} (i.e. l'interprétation de $=$). Le modèle quotient, c'est-à-dire celui dont les éléments sont les classes d'équivalence de cette relation d'équivalence, est par définition égalitaire. \square

Du coup, une théorie \mathcal{T} possède un modèle égalitaire si et seulement si tous les axiomes de l'égalité (pour la signature correspondante) possèdent un modèle.

Exemple 6.5 Dans l'exemple 6.3, la phrase devrait être : les modèles égalitaires de la formule (6.2) caractérisent les triangles.

Ou encore : la formule (6.2) avec les axiomes de l'égalité (dans ce cas $\forall x x = x, \forall x \forall x' \forall y (x = x' \Rightarrow (R(x, y) \Rightarrow R(x', y))), \forall x \forall y \forall y' (y = y' \Rightarrow (R(x, y) \Rightarrow R(x, y'))))$) caractérise les triangles.

6.1.5 Groupes

Commençons par parler des groupes, en théorie des groupes.

Exemple 6.6 (Groupe) Un groupe est un modèle de la théorie constituée des axiomes de l'égalité et des deux formules :

$$\forall x \forall y \forall z \ x * (y * z) = (x * y) * z \quad (6.3)$$

$$\exists e \forall x \ (x * e = e * x = x \wedge \exists y (x * y = y * x = e)) \quad (6.4)$$

sur la signature $\Sigma = (\emptyset, \{*\}, \{=\})$, où $*$ et $=$ sont d'arité 2.

La première propriété exprime le fait que la loi du groupe $*$ est associative, et la seconde qu'il existe un élément neutre, e , tel que tout élément possède un inverse.

Exemple 6.7 (Groupe commutatif) Un groupe commutatif est un modèle de la théorie constituée des axiomes de l'égalité et des trois formules :

$$\forall x \forall y \forall z \ x * (y * z) = (x * y) * z \quad (6.5)$$

$$\exists e \forall x \ (x * e = e * x = x \wedge \exists y (x * y = y * x = e)) \quad (6.6)$$

$$\forall x \forall y \ x * y = y * x \quad (6.7)$$

sur la même signature.

6.1.6 Corps

Exemple 6.8 (Corps commutatif) *Un corps commutatif est un modèle de la théorie constituée des axiomes de l'égalité et des formules*

$$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z) \quad (6.8)$$

$$\forall x \forall y (x + y = y + x) \quad (6.9)$$

$$\forall x (x + \mathbf{0} = x) \quad (6.10)$$

$$\forall x \exists y (x + y = \mathbf{0}) \quad (6.11)$$

$$\forall x \forall y \forall z x * (y + z) = x * y + x * z \quad (6.12)$$

$$\forall x \forall y \forall z ((x * y) * z) = (x * (y * z)) \quad (6.13)$$

$$\forall x \forall y (x * y = y * x) \quad (6.14)$$

$$\forall x (x * \mathbf{1} = x) \quad (6.15)$$

$$\forall x \exists y (x = \mathbf{0} \vee x * y = \mathbf{1}) \quad (6.16)$$

$$\neg \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (6.17)$$

sur une signature avec deux symboles de constantes $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$, deux symboles de fonctions $+$ et $*$ d'arité 2, et le symbole de relation $=$ d'arité 2.

Par exemple \mathbb{R} ou \mathbb{C} avec l'interprétation standard sont des modèles de ces théories.

Si l'on ajoute à la théorie la formule F_p définie par $\mathbf{1} + \dots + \mathbf{1} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{1}$ est répété p fois, les modèles sont les corps de caractéristique p : par exemple \mathbb{Z}_p , lorsque p est premier.

Si l'on veut décrire un corps de caractéristique nulle, il faut considérer la théorie constituée des axiomes précédents et de l'union des axiomes F_p , pour p un nombre premier.

Exemple 6.9 (Corps algébriquement clos) *Pour chaque entier n , on considère la formule G_n*

$$\forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{n-1} \exists x (x_0 + x_1 * x + x_2 * x^2 + \dots + x_{n-1} * x^{n-1} + x^n) = 0$$

où le lecteur aura deviné que x^k est $x * \dots * x$ avec x répété k fois.

Un corps commutatif algébriquement clos est un modèle de la théorie constituée des axiomes des corps commutatifs et de l'union des formules G_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple, \mathbb{C} est algébriquement clos. \mathbb{R} n'est pas algébriquement clos, car $x^2 + 1$ ne possède pas de racine réelle.

6.1.7 Arithmétique de Robinson

On peut aussi chercher à axiomatiser les entiers. Voici une première tentative.

Exemple 6.10 (Arithmétique de Robinson) *Considérons la signature constituée du symbole de constante $\mathbf{0}$, d'une fonction unaire s , et de deux fonctions binaires $+$ et $*$, et des relations binaires $<$ et $=$.*

Les axiomes de l'arithmétique de Robinson sont les axiomes de l'égalité et

$$\forall x \neg s(x) = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

$$\forall x \forall y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y) \quad (6.19)$$

$$\forall x (x = \mathbf{0} \vee \exists y s(y) = x) \quad (6.20)$$

$$\forall x \mathbf{0} + x = x \quad (6.21)$$

$$\forall x s(x) + y = s(x + y) \quad (6.22)$$

$$\forall x \mathbf{0} * x = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

$$\forall x s(x) * y = x * y + y \quad (6.24)$$

$$(6.25)$$

La structure dont l'ensemble de base est les entiers, et où l'on interprète $+$ par l'addition, $*$ par la multiplication, et $s(x)$ par $x + 1$ est un modèle de cette théorie. On appelle ce modèle *le modèle standard des entiers*.

Remarquons que l'on peut définir dans tout modèle des axiomes précédents un ordre, par la règle $x < y$ ssi $\exists z (x + s(z) = y)$.

Une alternative est de prendre $<$ comme primitif et d'ajouter les axiomes

$$\forall x \neg x < \mathbf{0} \quad (6.26)$$

$$\forall x \mathbf{0} = x \vee \mathbf{0} < x \quad (6.27)$$

$$\forall x \forall y (x < y \Leftrightarrow (s(x) < y \vee s(x) = y)) \quad (6.28)$$

$$\forall x \forall y (x < s(y) \Leftrightarrow (x < y \vee x = y)) \quad (6.29)$$

Exercice 6.5. Prouver que l'ordre défini par la règle $x < y$ ssi $\exists z (x + s(z) = y)$ satisfait ces formules.

Exercice 6.6. Soit n et m deux entiers. On note $s^n(\mathbf{0})$ pour $s(s(\dots s(\mathbf{0})))$ avec s répété n fois, avec la convention $s^{(0)} = \mathbf{0}$.

Montrer par récurrence que

$$s^n(\mathbf{0}) + s^m(\mathbf{0}) = s^{n+m}(\mathbf{0}).$$

Trouver un modèle des axiomes de Robinson où deux éléments a et b sont tels que $a + b \neq b + a$.

En déduire que les axiomes de Robinson ne suffisent pas à axiomatiser les entiers : il y a d'autres modèles que le modèle standard des entiers de ces axiomes.

Exercice 6.7. Ajoutons $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ aux axiomes précédents pour garantir la commutativité de l'addition. Produire un modèle des axiomes obtenus qui n'est pas le modèle standard des entiers : par exemple, avec deux éléments a et b tels que $a * b \neq b * a$.

Plutôt que de chercher à ajouter certains axiomes pour garantir des propriétés comme la commutativité de l'addition ou la multiplication, on va considérer des familles d'axiomes.

6.1.8 Arithmétique de Peano

Exemple 6.11 (Arithmétique de Peano) *Considérons une signature constituée du symbole de constante $\mathbf{0}$, d'une fonction unaire s , et de deux fonctions binaires $+$ et $*$, et de la relation binaire $=$.*

Les axiomes de l'arithmétique de Peano sont les axiomes de l'égalité et

$$\forall x \neg s(x) = \mathbf{0} \quad (6.30)$$

$$\forall x \forall y (s(x) = s(y) \Rightarrow x = y) \quad (6.31)$$

$$\forall x (x = \mathbf{0} \vee \exists y s(y) = x) \quad (6.32)$$

$$\forall x \mathbf{0} + x = x \quad (6.33)$$

$$\forall x s(x) + y = s(x + y) \quad (6.34)$$

$$\forall x \mathbf{0} * x = \mathbf{0} \quad (6.35)$$

$$\forall x s(x) * y = x * y + y \quad (6.36)$$

$$(6.37)$$

et l'ensemble de toutes les formules de la forme

$$\begin{aligned} \forall x_1 \cdots \forall x_n ((F(\mathbf{0}, x_1, \dots, x_n) \wedge \forall x_0 (F(x_0, x_1, \dots, x_n) \Rightarrow F(s(x_0), x_1, \dots, x_n))) \\ \Rightarrow \forall x_0 F(x_0, x_1, \dots, x_n)) \end{aligned} \quad (6.38)$$

où n est n'importe quel entier et $F(x_0, \dots, x_n)$ est n'importe quelle formule de variables libres x_0, \dots, x_n .

Il y a donc en fait une infinité d'axiomes. Les derniers axiomes visent à capturer le raisonnement par récurrence que l'on fait régulièrement sur les entiers.

Bien entendu, ces axiomes garantissent la propriété suivante : le modèle standard des entiers est un modèle de ces axiomes.

Exercice 6.8. *Prouver que l'axiome $\forall x (x = \mathbf{0} \vee \exists y s(y) = x)$ est en fait inutile : cette formule est conséquence des autres.*

Un intérêt est que cette fois on a :

Exercice 6.9. *Prouver que dans tout modèle des axiomes de Peano, l'addition est commutative : la formule $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ est satisfaite.*

Exercice 6.10. *Prouver que dans tout modèle des axiomes de Peano, la multiplication est commutative : la formule $\forall x \forall y (x * y = y * x)$ est satisfaite.*

Autrement dit, ces familles d'axiomes suffisent à garantir nombre des propriétés qui sont vraies sur les entiers.

On verra ultérieurement (théorème d'incomplétude) qu'il y reste cependant d'autres modèles que le modèle standard des entiers des axiomes de Peano.

6.2 Complétude

Le *théorème de complétude*, dû à Kurt Gödel, et parfois appelé *premier théorème de Gödel*, relie la notion de conséquence à la notion de prouvabilité, en montrant que ces deux notions coïncident.

6.2.1 Conséquence

La notion de conséquence est facile à définir.

Définition 6.5 (Conséquence) Soit F une formule. La formule F est dite une conséquence (sémantique) de la théorie \mathcal{T} si tout modèle de la théorie \mathcal{T} est un modèle de F . On note dans ce cas $\mathcal{T} \models F$.

Exemple 6.12 Par exemple, la formule $\forall x \forall y \, x * y = y * x$, qui exprime la commutativité, n'est pas une conséquence de la théorie des groupes (définition 6.6), car il y a des groupes qui ne sont pas commutatifs.

Exemple 6.13 On peut montrer que la formule $\forall x \, 0 + x = x$ est une conséquence des axiomes de Peano.

Exemple 6.14 L'exercice 6.6. prouve que la formule $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ (commutativité de l'addition) n'est pas une conséquence des axiomes de Robinson.

6.2.2 Démonstration

Il faut aussi fixer la notion de démonstration, ce que nous allons faire, mais disons dans un premier temps que nous avons une notion de démonstration telle que l'on note $\mathcal{T} \vdash F$ si l'on peut prouver la formule close F à partir des axiomes de la théorie \mathcal{T} .

On espère au minimum de cette notion de preuve d'être valide : c'est-à-dire de dériver uniquement des conséquences : si F est une formule close, et si $\mathcal{T} \vdash F$, alors F est une conséquence de \mathcal{T} .

6.2.3 Énoncé du théorème de complétude

Le théorème de complétude dit en fait qu'on arrive à atteindre toutes les conséquences : les relations \models et \vdash sont les mêmes.

Théorème 6.1 (Théorème de complétude) Soit \mathcal{T} une théorie. Soit F une formule close. F est une conséquence de \mathcal{T} si et seulement si F se prouve à partir de \mathcal{T} .

6.2.4 Signification de ce théorème

Arrêtons-nous sur ce que cela signifie : autrement dit, **les énoncés prouvables sont exactement ceux qui sont vrais dans tous les modèles de la théorie.**

Cela signifie en particulier que

- si une formule close F n'est pas prouvable alors c'est qu'il existe un modèle qui n'est pas un modèle de F .
- si une formule close F est vraie dans tous les modèles des axiomes de la théorie, alors F est prouvable.

Exemple 6.15 Par exemple, la formule $\forall x \forall y x * y = y * x$, qui exprime la commutativité, n'est pas prouvable à partir des axiomes de la théorie des groupes.

Exemple 6.16 La formule $\forall x 0 + x = x$ est prouvable à partir des axiomes de Peano.

6.2.5 Autre formulation du théorème

On dit qu'une théorie \mathcal{T} est *cohérente* s'il n'existe pas de formule F telle que $\mathcal{T} \vdash F$ et $\mathcal{T} \vdash \neg F$.

On verra au détour de la preuve que cela revient aussi à dire :

Théorème 6.2 (Théorème de complétude) Soit \mathcal{T} une théorie. \mathcal{T} possède un modèle si et seulement si \mathcal{T} est cohérente.

6.3 Preuve du théorème de complétude

6.3.1 Un système de déduction

Il nous faut définir une notion de démonstration. Nous choisissons de considérer une notion basée sur la notion de preuve à la Frege et Hilbert, c'est-à-dire basée sur le *modus ponens*.

Par rapport au calcul propositionnel, on n'utilise plus seulement la règle de *modus ponens*, mais aussi une règle de *généralisation* : si F est une formule et x une variable, la règle de généralisation déduit $\forall x F$ de F .

Cette règle peut être considérée comme troublante, mais c'est ce que l'on fait dans le raisonnement courant régulièrement : si on arrive à prouver $F(x)$ sans hypothèse particulière sur x , alors on saura que $\forall x F(x)$.

On considère alors un certain nombre d'axiomes :

Définition 6.6 (Axiomes logiques du calcul des prédicats) Les axiomes logiques du calcul des prédicats sont :

1. toutes les instances des tautologies du calcul propositionnel ;
2. les axiomes des quantificateurs, c'est-à-dire
 - (a) les formules de la forme $(\exists x F \Leftrightarrow \neg \forall x \neg F)$, où F est une formule quelconque et x une variable quelconque ;
 - (b) les formules de la forme $(\forall x (F \Rightarrow G) \Rightarrow (F \Rightarrow \forall x G))$ où F et G sont des formules quelconques et x une variable qui n'a pas d'occurrence libre dans F ;

- (c) les formules de la forme $(\forall x F \Rightarrow F(t/x))$ où F est une formule, t un terme et aucune occurrence libre de x dans F ne se trouve dans le champ d'un quantificateur liant une variable de t , où $F(t/x)$ désigne la substitution de x par t .

Exercice 6.11. Montrer que les axiomes logiques sont valides.

Remarque 6.6 On pourrait ne pas mettre toutes les tautologies du calcul propositionnel, et comme pour le calcul propositionnel se limiter à certains axiomes, essentiellement les axiomes de la logique booléenne. Nous le faisons ici pour simplifier les preuves.

On obtient la notion de démonstration.

Définition 6.7 (Démonstration par modus ponens et généralisation) Soit \mathcal{T} une théorie et F une formule. Une preuve de F à partir de \mathcal{T} est une suite finie F_1, F_2, \dots, F_n de formules telle que F_n est égale à F , et pour tout i , ou bien F_i est dans \mathcal{T} , ou bien F_i est un axiome logique, ou bien F_i s'obtient par modus ponens à partir de deux formules F_j, F_k avec $j < i$ et $k < i$, ou bien F_i s'obtient à partir d'une formule F_j avec $j < i$ par généralisation.

On note $\mathcal{T} \vdash F$ si F est prouvable à partir de \mathcal{T} .

6.3.2 Théorème de finitude

On obtient d'abord facilement au passage le théorème de finitude.

Théorème 6.3 (Théorème de finitude) Pour toute théorie \mathcal{T} , et pour toute formule F , si $\mathcal{T} \vdash F$, alors il existe un sous-ensemble fini \mathcal{T}_0 de \mathcal{T} tel que $\mathcal{T}_0 \vdash F$.

Démonstration : Une démonstration est une suite finie de formules F_1, F_2, \dots, F_n . Elle ne fait donc appel qu'à un nombre fini \mathcal{T}_0 de formules de \mathcal{T} . Cette démonstration est aussi une démonstration de F dans la théorie \mathcal{T}_0 . \square

Corollaire 6.1 Si \mathcal{T} est une théorie dont toutes les parties finies sont cohérentes, alors \mathcal{T} est cohérente.

Démonstration : Sinon \mathcal{T} prouve $(F \wedge \neg F)$, pour une certaine formule F , et par le théorème de finitude on en déduit qu'il existe un sous-ensemble fini \mathcal{T}_0 de \mathcal{T} qui prouve aussi $(F \wedge \neg F)$. \square

6.3.3 Deux résultats techniques

On aura besoin des deux résultats suivants, dont les démonstrations relèvent d'un jeu de réécriture sur les démonstrations.

Lemme 6.1 (Lemme de déduction) Supposons que $\mathcal{T} \cup \{F\} \vdash G$, avec F une formule close. Alors $\mathcal{T} \vdash (F \Rightarrow G)$.

Démonstration : A partir d'une démonstration $G_0 G_1 \cdots G_n$ de G dans $\mathcal{T} \cup \{F\}$ on construit une démonstration de $(F \Rightarrow G)$ dans \mathcal{T} en faisant des insertions dans la suite $(F \Rightarrow G_0)(F \Rightarrow G_1) \cdots (F \Rightarrow G_n)$.

Si G_i est une tautologie, alors il n'y a rien à faire car $(F \Rightarrow G_i)$ en est une aussi.

Si G_i est F , alors il n'y a rien à faire car $(F \Rightarrow G_i)$ est une tautologie.

Si G_i est un axiome des quantificateurs ou encore un élément de \mathcal{T} , alors il suffit d'insérer¹ entre $(F \Rightarrow G_{i-1})$ et $(F \Rightarrow G_i)$ les formules G_i et $(G_i \Rightarrow (F \Rightarrow G_i))$ (qui est une tautologie).

Supposons maintenant que G_i soit obtenue par modus ponens : il y a des entiers $j, k < i$ tels que G_k soit $(G_j \Rightarrow G_i)$. On insère alors entre $(F \Rightarrow G_{i-1})$ et $(F \Rightarrow G_i)$ les formules ;

1. $((F \Rightarrow G_j) \Rightarrow ((F \Rightarrow (G_j \Rightarrow G_i)) \Rightarrow (F \Rightarrow G_i)))$ (une tautologie) ;
2. $(F \Rightarrow (G_j \Rightarrow G_i)) \Rightarrow (F \Rightarrow G_i)$ qui s'obtient par modus ponens à partir de la précédente à l'aide de $(F \Rightarrow G_j)$ qui est déjà apparue ;
3. $(F \Rightarrow G_i)$ se déduit alors par modus ponens de cette dernière formule et de $(F \Rightarrow (G_j \Rightarrow G_i))$, qui est déjà apparue puisque c'est $(F \Rightarrow G_k)$.

Supposons enfin que G_i soit obtenue par généralisation à partir de G_j avec $j < i$. On insère dans ce cas entre $(F \Rightarrow G_{i-1})$ et $(F \Rightarrow G_i)$ les formules :

1. $\forall x(F \Rightarrow G_j)$ obtenue par généralisation en partant de $(F \Rightarrow G_j)$;
2. $(\forall x(F \Rightarrow G_j) \Rightarrow (F \Rightarrow \forall x G_j))$ (un axiome des quantificateurs). F étant une formule close, x n'y est pas libre ;
3. $(F \Rightarrow G_i)$ se déduit alors par modus ponens à partir des deux précédentes.

□

Lemme 6.2 Soit \mathcal{T} une théorie, et $F(x)$ une formule dont la seule variable libre est x . Soit c un symbole de constante qui n'apparaît ni dans F ni dans \mathcal{T} . Si $\mathcal{T} \vdash F(c/x)$ alors $\mathcal{T} \vdash \forall x F(x)$.

Démonstration : Considérons une démonstration $F_1 F_2 \cdots F_n$ de $F(c/x)$ dans \mathcal{T} . On considère une variable w qui n'est dans aucune formule F_i et on appelle K_i la formule obtenue en remplaçant dans F_i le symbole c par w .

Il s'avère que cela donne une preuve de $F(w/x)$: si F_i est un axiome logique, K_i aussi ; si F_i se déduit par modus ponens, alors K_i se déduit des mêmes formules, et si $F_i \in \mathcal{T}$ alors K_i est F_i .

Par généralisation, on obtient donc une preuve de $\forall w F(w/x)$, et par la remarque qui suit, on peut alors obtenir une preuve de $\forall x F(x)$. □

Remarque 6.7 Si w est une variable qui n'a aucune occurrence dans F (ni libre ni liée) alors on peut prouver $\forall w F(w/x) \Rightarrow \forall x F$: en effet, puisque w n'a pas d'occurrence dans F , on peut donc prouver $\forall w F(w/x) \Rightarrow F$, (axiome (c) des quantificateurs, en observant que $(F(w/x))(x/w) = F$ avec ces hypothèses). Par généralisation, on obtient $\forall x(\forall w F(w/x) \Rightarrow F)$, et puisque x n'est pas libre dans $\forall w F(w/x)$, la formule $\forall x(\forall w F(w/x) \Rightarrow F) \Rightarrow (\forall w F(w/x) \Rightarrow \forall x F)$ fait partie des axiomes (b) des quantificateurs, ce qui permet d'obtenir $\forall w F(w/x) \Rightarrow \forall x F$ par modus ponens.

1. Pour $i = 0$, il suffit de placer ces formules au début.

6.3.4 Validité du système de déduction

La validité de la méthode de preuve utilisée est facile à établir.

Théorème 6.4 (Validité) *Soit \mathcal{T} une théorie. Soit F une formule.*

Si $\mathcal{T} \vdash F$, alors tout modèle de \mathcal{T} est un modèle de la clôture universelle de F .

Démonstration : Il suffit de se convaincre que les axiomes logiques sont valides, et que le modus ponens et la généralisation ne font qu'inférer des faits qui sont valides dans tout modèle de \mathcal{T} . \square

C'était le sens facile du théorème de complétude.

6.3.5 Complétude du système de déduction

L'autre sens consiste à montrer que si F est une conséquence de \mathcal{T} alors F peut se prouver par notre méthode de preuve.

Définition 6.8

On dit qu'une théorie \mathcal{T} est complète si pour toute formule close F on a $\mathcal{T} \vdash F$ ou $\mathcal{T} \vdash \neg F$.

On dit qu'une théorie \mathcal{T} admet des témoins de Henkin si pour toute formule $F(x)$ avec une variable libre x , il existe un symbole de constante c dans la signature tel que $(\exists x F(x) \Rightarrow F(c))$ soit une formule de la théorie \mathcal{T} .

La preuve du théorème de complétude due à *Henkin* que nous présentons ici fonctionne en deux étapes.

1. On montre qu'une théorie cohérente, complète, et avec des témoins de Henkin admet un modèle.
2. On montre que toute théorie consistante admet une extension avec ces trois propriétés.

Lemme 6.3 *Si \mathcal{T} est une théorie cohérente, complète, et avec des témoins de Henkin, alors \mathcal{T} possède un modèle.*

Démonstration : L'astuce est de construire de toutes pièces un modèle, dont l'ensemble de base (le domaine) est l'ensemble M des termes clos sur la signature de la théorie : ce domaine n'est pas vide, car la signature a au moins les constantes.

La structure \mathfrak{M} est définie de la façon suivante :

1. si c est une constante, l'interprétation $c^{\mathfrak{M}}$ de c est la constante c elle-même.
2. si f est un symbole de fonction d'arité n , son interprétation $f^{\mathfrak{M}}$ est la fonction qui aux termes clos t_1, \dots, t_n associe le terme clos $f(t_1, \dots, t_n)$.
3. si R est un symbole de relation d'arité n , son interprétation $R^{\mathfrak{M}}$ est le sous-ensemble de M^n constitué des (t_1, \dots, t_n) tels que $\mathcal{T} \vdash R(t_1, \dots, t_n)$.

On observe que la structure obtenue vérifie la propriété suivante : pour toute formule close F , $\mathcal{T} \vdash F$ si et seulement si \mathfrak{M} est un modèle de F . Cela se prouve par induction structurelle sur F .

La propriété est vraie pour les formules atomiques.

En raison des propriétés des quantificateurs et connecteurs, et de la possibilité d'utiliser des occurrences des tautologies du calcul propositionnel dans notre méthode de preuve, il suffit de se convaincre de ce fait inductivement sur les formules du type $\neg G$, $(G \vee H)$ et $\forall xG$.

1. Cas $\neg G$: puisque \mathcal{T} est complète, $\mathcal{T} \vdash \neg G$ si et seulement si $\mathcal{T} \not\vdash G$, ce qui signifie inductivement $\mathfrak{M} \not\models G$, ou encore $\mathfrak{M} \models \neg G$.
2. Cas $(G \vee H)$: supposons $\mathfrak{M} \models (G \vee H)$, et donc $\mathfrak{M} \models G$ ou $\mathfrak{M} \models H$. Dans le premier cas par exemple, par hypothèse d'induction on a $\mathcal{T} \vdash G$, et puisque $(G \Rightarrow (G \vee H))$ est une tautologie, on a $\mathcal{T} \vdash (G \vee H)$. Réciproquement supposons que $\mathcal{T} \vdash (G \vee H)$. Si $\mathcal{T} \vdash G$ alors par hypothèse d'induction $\mathfrak{M} \models G$ et donc $\mathfrak{M} \models (G \vee H)$. Sinon, c'est que $\mathcal{T} \not\vdash G$, et parce que la théorie est complète, on a $\mathcal{T} \vdash \neg G$. Or puisque $(G \vee H \Rightarrow (\neg G \Rightarrow H))$ est une tautologie, on obtient que $\mathcal{T} \vdash H$ et par hypothèse d'induction, $\mathfrak{M} \models H$ et donc $\mathfrak{M} \models (G \vee H)$.
3. Cas $\exists xG(x)$: si $\mathfrak{M} \models \exists xG(x)$ c'est qu'il existe un terme clos t tel que $\mathfrak{M} \models G(t/x)$. Par hypothèse d'induction, $\mathcal{T} \vdash G(t/x)$. Or il est facile de trouver une démonstration formelle de $\exists xG(x)$ à partir d'une de $G(t/x)$. Réciproquement, supposons que $\mathcal{T} \vdash \exists xG(x)$. Grâce aux témoins de Henkin, on en déduit qu'il existe une constante c telle que $\mathcal{T} \vdash G(c/x)$, et par hypothèse d'induction $\mathfrak{M} \models G(c/x)$, et donc $\mathfrak{M} \models \exists xG(x)$.

□

Il reste la seconde étape. Une *extension d'une théorie* \mathcal{T} est une théorie \mathcal{T}' qui contient \mathcal{T} .

Proposition 6.2 *Toute théorie cohérente \mathcal{T} sur une signature Σ possède une extension \mathcal{T}' sur une signature Σ' (avec Σ' qui contient Σ) qui est cohérente, complète et avec des témoins de Henkin.*

Avant de prouver cette proposition, discutons de ce que nous obtenons : puisqu'un modèle de \mathcal{T}' est un modèle de \mathcal{T} , le lemme précédent et la proposition précédente permettent tout d'abord d'obtenir :

Corollaire 6.2 *Une théorie cohérente possède un modèle.*

La remarque suivante relève d'un jeu sur les définitions :

Proposition 6.3 *Pour toute théorie \mathcal{T} et pour toute formule close F , F est une conséquence de \mathcal{T} si et seulement si $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ n'a pas de modèle.*

Démonstration : Si F est une conséquence de \mathcal{T} , alors par définition tout modèle de \mathcal{T} est un modèle de F , autrement dit, il n'y pas de modèle de $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$. La réciproque est triviale. □

On obtient avec cette remarque exactement le théorème de complétude (ou le sens manquant de ce que nous avons appelé le théorème de complétude).

Théorème 6.5 Soit F une formule close. Si F est une conséquence de la théorie \mathcal{T} , alors $\mathcal{T} \vdash F$.

Démonstration : Si \mathcal{T} ne prouve pas F , alors $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ est cohérente : par le corollaire précédente, $\mathcal{T} \cup \{\neg F\}$ possède donc un modèle. Cela veut donc dire que F n'est pas une conséquence de la théorie \mathcal{T} . \square

Il ne reste plus qu'à prouver la proposition 6.2.

Démonstration : La signature Σ' est obtenue en ajoutant un nombre dénombrable de nouvelles constantes à la signature Σ . La signature Σ' obtenue reste dénombrable et on peut énumérer les formules closes $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ' . La théorie \mathcal{T}' est obtenue comme l'union d'une suite croissante de théories \mathcal{T}_n , définie par récurrence, en partant de $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$. Supposons \mathcal{T}_n cohérente construite. Pour construire \mathcal{T}_{n+1} on considère la formule F_{n+1} dans l'énumération des formules closes de Σ' . Si $\mathcal{T}_n \cup F_{n+1}$ est cohérente, alors on pose $G_n = F_{n+1}$, sinon on pose $G_n = \neg F_{n+1}$. Dans les deux cas $\mathcal{T}_n \cup \{G_n\}$ est cohérente.

La théorie \mathcal{T}_{n+1} est définie par :

1. $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{G_n\}$ si G_n n'est pas de la forme $\exists x H$.
2. sinon : $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{G_n, H(c/x)\}$ où c est un nouveau symbole de constante qui n'apparaît dans aucune formule de $\mathcal{T}_n \cup \{G_n\}$: il y a toujours un tel symbole, car il y a un nombre fini de symboles de constantes dans $\mathcal{T}_n \cup \{G_n\}$.

La théorie \mathcal{T}_{n+1} est cohérente : en effet, si elle ne l'était pas, alors cela voudrait dire que G_n serait de la forme $\exists x H$, et que $\mathcal{T}_n \cup \{\exists x H\} \vdash \neg H(c/x)$. Par le choix de la constante c , et par le lemme 6.2, on obtient que $\mathcal{T}_n \cup \{\exists x H\} \vdash \forall x \neg H(x)$, ce qui est impossible car sinon \mathcal{T}_n ne serait pas cohérente.

La théorie $\mathcal{T}' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ définie comme l'union des théories \mathcal{T}_n est cohérente, puisque tout sous-ensemble fini de celle-ci est contenu dans l'une des théories \mathcal{T}_n , et donc est cohérent.

La théorie \mathcal{T}' est aussi complète : si F est une formule close de Σ' , elle apparaît à un moment dans l'énumération des formules F_n , et par construction, soit $F_n \in \mathcal{T}_n$ soit $\neg F_n \in \mathcal{T}_n$.

Enfin la théorie \mathcal{T}' a des témoins de Henkin : si $H(x)$ est une formule avec la variable libre x , alors la formule $\exists x H$ apparaît comme une formule dans l'énumération des formules F_n . Il y a alors deux cas, soit $\neg F_n \in \mathcal{T}_{n+1}$ ou il y a une constante c telle que $H(c/x) \in \mathcal{T}_{n+1}$. Dans les deux cas, $\mathcal{T}_{n+1} \vdash \exists x H(x) \Rightarrow H(c/x)$, ce qui prouve que $(\exists x H(x) \Rightarrow F(c))$ est dans \mathcal{T}' (sinon sa négation y serait, et \mathcal{T}' ne serait pas cohérente). \square

6.4 Compacité

Observons que l'on a fait établi d'autres faits.

Théorème 6.6 (Théorème de compacité) Soit \mathcal{T} une théorie telle que toute partie finie de \mathcal{T} possède un modèle. Alors \mathcal{T} possède un modèle.

Démonstration : Considérons un sous-ensemble fini d'une telle théorie \mathcal{T} . Ce sous-ensemble est cohérent puisqu'il a un modèle. \mathcal{T} est donc une théorie telle que toute partie finie soit cohérente. Par le théorème de finitude, cela veut dire que la théorie elle-même est cohérente.

Par le corollaire 6.2, cela veut dire que \mathcal{T} possède un modèle. \square

Exercice 6.12. *Utiliser le théorème de compacité pour prouver qu'il existe des modèles (non-standards) des axiomes de Peano.*

6.5 Autres conséquences

Théorème 6.7 (Löwenheim-Skolem) *Si \mathcal{T} une théorie sur une signature dénombrable possède un modèle, alors elle possède un modèle dont l'ensemble de base est dénombrable.*

Exercice 6.13. *Prouver le théorème.*

6.6 Notes bibliographiques

Lectures conseillées Pour aller plus loin sur les notions évoquées dans ce chapitre, nous suggérons la lecture de [Cori and Lascar, 1993], [Dowek, 2008] et [Lassaigne and de Rougemont, 2004].

Bibliographie Ce chapitre a été rédigé en s'inspirant essentiellement des ouvrages [Cori and Lascar, 1993] et [Lassaigne and de Rougemont, 2004].

Index

- (A_g, r, A_d) , voir arbre binaire
 (V, E) , voir graphe
 (q, u, v) , voir configuration d'une machine de Turing
 \cdot , voir concaténation
 $=$, 4
 A^c , voir complémentaire
 $F(G/p)$, voir substitution
 $L(M)$, voir langage accepté par une machine de Turing
 \Leftrightarrow , voir double implication
 \Rightarrow , voir définition inductive / différentes notations d'une, voir implication
 Σ , voir alphabet
 Σ^* , voir ensemble des mots sur un alphabet
 \cap , voir intersection de deux ensembles
 \cup , voir union de deux ensembles
 ϵ , voir mot vide
 \equiv , voir équivalence entre formules, voir équivalence entre problèmes
 \exists , voir quantificateur
 \forall , voir quantificateur
 \leq_m , voir réduction
 $|w|$, voir longueur d'un mot
 \leq , voir réduction
 $\mathcal{P}(E)$, voir parties d'un ensemble
 \models , 9, voir conséquence sémantique
 \neg , voir négation
 $\not\models$, voir conséquence sémantique
 \subset , voir partie d'un ensemble
 \times , voir produit cartésien de deux ensembles
 \vdash , 9, 11, 13, voir démonstration, voir relation successeur entre configurations d'une machines de Turing
 \vee , voir disjonction
 \wedge , voir conjonction
 uqv , voir configuration d'une machine de Turing
 $\langle\langle M\rangle, w\rangle$, voir codage d'une paire
 $\langle M\rangle$, voir codage d'une machine de Turing
 $\langle m\rangle$, voir codage
 $\langle\phi\rangle$, voir codage d'une formule
 $\langle w_1, w_2\rangle$, voir codage d'une paire
Arith, voir expressions arithmétiques
Arith', voir expressions arithmétiques parenthésées
arithmétique
 de Peano, 8
 de Robinson, 6
axiomes
 d'une théorie du calcul des prédicats, 1
 de l'arithmétique de Robinson, 6
 de l'arithmétique de Peano, 8
 de l'égalité, 4
 de la logique du calcul des prédicats, 10
codage
 notation, voir $\langle\cdot\rangle$
 d'une formule
 notation, voir $\langle\phi\rangle$
 d'une machine de Turing
 notation, voir $\langle M\rangle$
 d'une paire
 notation, voir $\langle\langle M\rangle, w\rangle$, voir $\langle w_1, w_2\rangle$
complémentaire
 notation, voir A^c

- du problème de l'arrêt des machines de Turing
 - Henkin, voir témoins de Henkin
 - notation, voir $\overline{\text{HALTING}} - \text{PROBLEM}$
- complète, voir théorie
- complétude
 - d'une théorie, 1, 9
 - RE-complétude, voir RE-complet
 - théorème, voir théorème de complétude
- concaténation
 - notation, voir .
- configuration d'une machine de Turing
 - notation, voir (q, u, v) , voir uqv
- conséquence
 - sémantique, 9
- consistance
 - d'un ensemble de formules, 1
 - d'une théorie, voir consistance d'un ensemble de formules
- corps
 - algébriquement clos, 6
 - commutatif, 6
- démonstration, 9
 - par modus ponens, 10, 11
- égalitaire, 4
- égalité, 4
- entiers, 6
- équivalence
 - entre problèmes
 - notation, voir \equiv
- extension d'une théorie, 13, 14
- graphe, 2
 - notation, voir (V, E)
 - non-orienté, 2
- groupe, 5
 - commutatif, 5
- $\overline{\text{HALTING}} - \text{PROBLEM}$, voir problème de l'arrêt des machines de Turing
- $\overline{\text{HALTING}} - \text{PROBLEM}$, voir complémentaire du problème de l'arrêt d'une machine de Turing
- inconsistance
 - d'une théorie, voir inconsistance d'un ensemble de formules
- intersection de deux ensembles
 - notation, voir \cap
- langage
 - accepté par une machine de Turing
 - notation, voir $L(M)$
- longueur d'un mot
 - notation, voir $|w|$
- modèle
 - d'une théorie, 1
 - égalitaire, 4
 - standard des entiers, 7, 8
- modus ponens, 10
- mot
 - vide
 - notation, voir ϵ
- partie
 - d'un ensemble
 - notation, voir \subset
- parties
 - d'un ensemble
 - notation, voir $\mathcal{P}(E)$
- preuve, 11
- problème
 - de l'arrêt des machines de Turing
 - notation, voir $\overline{\text{HALTING}} - \text{PROBLEM}$
- produit cartésien
 - de deux ensembles
 - notation, voir \times
- R, voir décidable
- RE, voir récursivement énumérable
- récursivement énumérable
 - notation, voir RE
- réduction
 - notation, voir \leq , voir \leq_m
- règle
 - de généralisation, 10
- relation successeur entre configurations d'une machine de Turing

- notation, voir* \vdash
- spécification, 1
- substitutions, 11
- témoins de Henkin, 13, 14
- théorème
 - de compacité
 - du calcul des prédicats, 15
 - de complétude, 9
 - du calcul des prédicats, 1, 9
 - de finitude, 11
 - de validité
 - du calcul des prédicats, 13
 - premier théorème de Gödel, 9
- théorie
 - cohérente, 10
 - complète, 13
 - consistante, 1
 - des groupes, 5
 - du calcul des prédicats, 1, 2
 - inconsistante, 1
- témoins de Henkin, 13
- union de deux ensembles
 - notation, voir* \cup
- valide
 - méthode de preuve, 9

Bibliographie

- [Cori and Lascar, 1993] Cori, R. and Lascar, D. (1993). *Logique mathématique. Volume I*. Mason.
- [Dowek, 2008] Dowek, G. (2008). *Les démonstrations et les algorithmes*. Polycopié du cours de l'Ecole Polytechnique.
- [Lassaigne and de Rougemont, 2004] Lassaigne, R. and de Rougemont, M. (2004). *Logic and complexity*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. Springer.