UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Torsdag 11 oktober 2012.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Et terreng er gitt ved sin vertikale høyde $z = h(x, y)$, hvor

$$h(x, y) = 2 - \cos\frac{\pi x}{2} + 2y.$$

Her er x og y horisontale koordinater og z-aksen peker oppover. Vi begrenser oss til å betrakte området $-1 \le x \le 1$ og $-1 \le y \le 1$.

1a

Bestem enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ til bakken slik at z-komponenten er rettet oppover.

1b

Bestem i hvilken retning terrenget stiger brattest i punktet $x = y = 0$. Bestem stigningstallet til bakken (den retningsderiverte til høyden) i denne retningen i dette punktet.

1c

Over bakken er det luft med konstant trykk p_0. Bestem den totale trykkraften som virker fra lufta på bakken for den avgrensningen av terrenget som er beskrevet ovenfor.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Vi skal se på vektorfeltet $\boldsymbol{v} = \dfrac{-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}}{x^2 + y^2}$.

2a

Regn ut divergensen til $\boldsymbol{v}$.

2b

Regn ut virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

2c

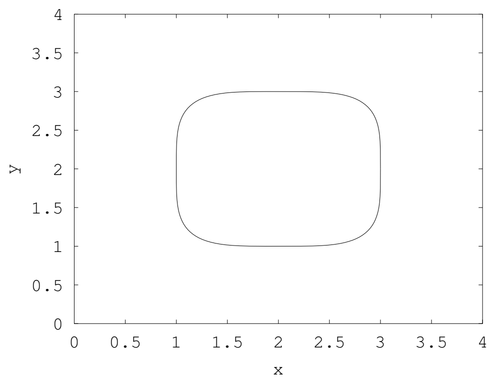
Regn ut strømlinjene til $\boldsymbol{v}$.

2d

I figuren ser vi grafen til en superellipse gitt ved likninga

$$(x-2)^4 + (y-2)^4 = 1.$$

Slike kurver ble først beskrevet av den franske fysikeren og matematikeren Gabriel Lamé (1795–1870), og ble senere gjort kjent og navngitt som "superellipse" av den danske dikteren og matematikeren Piet Hein (1905–1996).



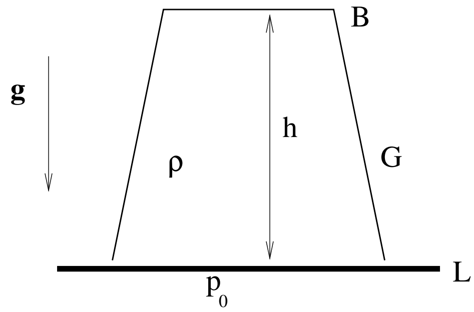
Regn ut sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt denne kurven.

2e

Regn ut sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt enhetssirkelen om origo, $|\boldsymbol{r}| = 1$, hvor $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3



Et glass (G) er fylt med vann og holdes med bunnen (B) opp og med åpningen ned. Under åpningen ligger det et løst lokk (L). Utenfor glasset og under lokket er det luft med konstant trykk. Lokket og vannet faller ikke ned, tvert imot ser det ut til at lokket holder vannet på plass inni glasset (dette kan kanskje virke rart første gang man ser eksperimentet).
Vannet har tetthet ρ, lokket har masse m, glasset har høyde h, åpningen til glasset har et tverrsnitt med areal A, tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er rettet ned, og lufta har konstant trykk p_0.
Oppgi øvre og nedre grense for trykket i vannet like oppunder glassets bunn (B).

Oppgave 4

Ei elv renner i x-retning og har rektangulært tverrsnitt $-b \leq y \leq b$ og $-h \leq z \leq 0$. Hastigheten til vannet er gitt ved

$$\boldsymbol{v} = \alpha(b^2 - y^2)(z + h)\boldsymbol{i}$$

hvor α er en konstant.

Hvilken fysisk dimensjon må α ha?

Regn ut volumfluksen av vannet i elva gjennom en snittflate som står vinkelrett på x-aksen.

Hva blir volumfluksen gjennom en skrå snittflate som står vinkelrett på vektoren $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$? Regn ut eller begrunn svaret.

SLUTT