

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.

Eksamensdag: Torsdag 14 oktober 2010.

Tid for eksamen: 15:00–17:00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Formeltillegg på 2 sider.

Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematische Formelsammlung, godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er tilsammen 8 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 12.5 (12.5 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Funksjonen $h(x, y)$ er gitt ved

$$h(x, y) = e^{-x^2 - y^2}.$$

Funksjonen h beskriver høyden over havet til et terreng $z = h(x, y)$, hvor x og y er horisontale koordinater og z er vertikal koordinat.

1a

Finn gradienten til h .

1b

Finn den retningsderiverte til h i punktet $(x = 1, y = 1)$ for retningen inn mot origo $(x = 0, y = 0)$.

1c

Finn enhetsnormalvektor til terrenget for vilkårlige verdier av x og y . La normalvektoren peke i positiv z -retning.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Et vektorfelt er gitt ved

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i}$$

hvor \mathbf{i} er koordinat-enhetsvektor i x -retning.

2a

Finn divergensen og virvlingen til \mathbf{v} .

2b

Finn ved direkte utregning sirkulasjonen til \mathbf{v} rundt en sirkel med enhets radius sentrert i origo.

2c

Har feltet \mathbf{v} en strømfunksjon? Begrunn svaret.

2d

Finn strømlinjene til \mathbf{v} (vis hvordan de regnes ut). Tegn et par strømlinjer i xy -planet, og på hver av disse angi med piler ($>$, $<$) hvilken vei strømmen går og med fylte sirkler (\bullet) eventuelle stagnasjonspunkter (der hvor $\mathbf{v} = 0$).

2e

Vektorfeltet \mathbf{v} strømmer igjennom en boks med hjørner $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ og $(1,1,1)$. Her er alle hjørnene gitt med sine (x, y, z) -koordinater. Finn ved direkte utregning fluksen av \mathbf{v} ut av boksen.

— Slutt —