UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 25 mars 2014.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Vi skal se på vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = x^2\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j}$$

1a

Regn ut divergensen til $\boldsymbol{v}$.

1b

Regn ut virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

1c

Undersøk om vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon ψ, og finn i så fall strømfunksjonen.

1d

Undersøk om vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ har et potensial ϕ, og finn i så fall potensialet.

(Fortsettes på side 2.)

1e

Tegn et vektor pil-plott for $\boldsymbol{v}$ i et område rundt origo. La styrken til feltet være indikert ved lengden til pilene.
Finn alle stagnasjonspunkter (der hvor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$) og indiker dem i plottet.

1f

Finn strømlinjene gjennom de to punktene $(x = 1, y = 0)$ og $(x = 1, y = 1)$. Disse strømlinjene skal definere et strømrør. Indiker strømrøret i plottet i forrige deloppgave.
Regn ut fluksen av $\boldsymbol{v}$ gjennom strømrøret.

1g

Finn sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt sirkelen γ, hvor γ er gitt ved $x^2 + y^2 = a^2$, ved direkte utregning.
Kontroller svaret ved å regne ut sirkulasjonen som et flateintegral ved å anvende en passende integralsats. Hva heter den integralsatsen du velger å bruke?
Hint: For å forenkle beregning av integral kan man kanskje benytte seg av symmetri-egenskaper til integrand, eller at $\mathrm{d}(\cos^3\theta) = -3\cos^2\theta \sin\theta \, \mathrm{d}\theta$.

1h

La oss tenke oss at vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ er et hastighetsfelt, og at en partikkel beveger seg i henhold til dette hastighetsfeltet. Regn ut akselerasjonen til partikkelen.

Oppgave 2

Et legeme blir utsatt for ei friksjonskraft

$$\boldsymbol{F} = -\mu \boldsymbol{v}$$

hvor $\boldsymbol{v}$ er hastigheten til legemet og μ er en friksjonskoeffisient. Dersom legemet beveger seg langs en bane γ vil friksjonskrafta utføre et arbeid gitt ved integralet

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

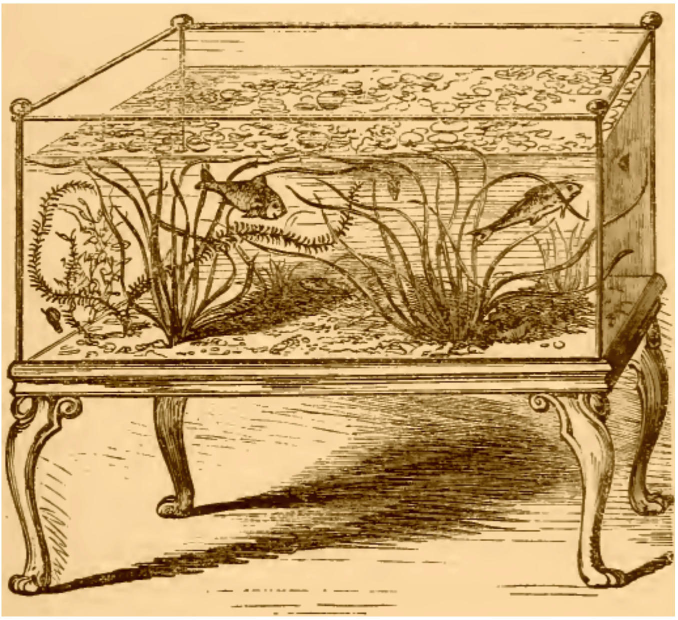
Gitt at lengde måles i meter (m), tid måles i sekund (s) og masse måles i kilogram (kg), forklar hva som er de fysiske enhetene til størrelsene $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$, μ og W.
Regn ut arbeidet som friksjonskrafta gjør dersom legemet går med konstant fart langs ei rett linje fra origo til punktet $\boldsymbol{r}_a = a(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j})$ i løpet av ei tid T.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3

Et akvarium er fylt med vann. Rundt akvariet har vi luft med trykk p_0. Vannet er i ro og har tetthet ρ. Tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er rettet nedover. Vi tenker oss at x og y er horisontale koordinater, z er vertikal koordinat, og z-aksen peker oppover.

Vi skal betrakte en stillestående fisk i akvariet. Fisken har volum V og er avgrenset av ei lukka flate S (flata S utgjøres altså av fiskens skinn og finner). Vi lar $\boldsymbol{n}$ være enhetsnormalvektor til S slik at $\boldsymbol{n}$ peker vekk fra fisken.



Illustrasjon hentet fra Wikipedia:

Shirley Hibberd, The Book of the Aquarium and Water Cabinet. London: Groombridge & Sons. 1856.

Skriv opp et uttrykk for det hydrostatiske trykket i akvariet.

Skriv opp et uttrykk for trykkrafta som virker fra vannet på fisken, uttrykt som et flateintegral over S.

Bruk en passende integralsats for å regne ut denne trykkrafta. Forklar hvilken integralsats du bruker.

SLUTT