UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 15 mars 2016.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Temperaturen i et område er gitt på dimensjonell form som

$$T = T_0 + \alpha x + \beta y^2 \tag{1}$$

hvor T_0 og α og β er konstanter. Vi måler T og T_0 med enhet Celsius. De horisontale koordinatene x og y måler vi med enhet meter. De er orientert slik at x-aksen peker mot øst og y-aksen peker mot nord.

1a

Finn de fysiske enhetene til α og β.

1b

Regn ut den retningsderiverte av temperaturen mot nordøst i punktet (x, y).

1c

Skaler likning (1) slik at den kommer på dimensjonsløs form.

Oppgave 2

Et vektorfelt er gitt på dimensjonsløs form som $\boldsymbol{v} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

(Fortsettes på side 2.)

2a

Regn ut divergensen til $\boldsymbol{v}$.

2b

Regn ut virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

2c

Undersøk om vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ har et potensial ϕ, og finn i så fall potensialet.

2d

I denne deloppgaven skal vi studere feltet for $z = 0$, legg merke til at da er vektorfeltet et plant felt i xy-planet.
Tegn et vektor pil-plott (tilsvarende *quiver* i Matlab eller Python) for $\boldsymbol{v}$ i et område rundt origo. La styrken til feltet være proporsjonal med lengden til pilene.
Finn alle stagnasjonspunkter (der hvor $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$) og vis dem med symbolet $\bullet$.

2e

Finn sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt sirkelen $\gamma : \{x^2 + y^2 = R^2, z = 0\}$ ved direkte utregning. La sirkelen være orientert slik at vi vandrer fra kvadrant 1 til 2 til 3 til 4 i xy-planet.
Kontroller svaret ved å regne ut sirkulasjonen som et flateintegral ved å anvende en passende integralsats. Hva heter den integralsatsen du bruker?

2f

Regn ut den integrerte fluksen av $\boldsymbol{v}$ gjennom flaten $S : \{x = 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ orientert vekk fra origo.

2g

Finn likninger som representerer strømlinjene til vektorfeltet $\boldsymbol{v}$. Beskriv med ord hvordan disse strømlinjene ser ut for $z = 0$, for $z > 0$, og for $z < 0$.
Hint: Differensiallikningene som må løses kan virke vanskelige da de ikke umiddelbart ser ut som separable likninger. De kan likevel bringes over til separabel form ved å innføre nye variable r og θ slik at $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$.

SLUTT