UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 21 mars 2017.
Tid for eksamen:	14:30 – 16:30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

En skiløper som beveger seg med fart v blir utsatt for motstandskraft F på grunn av luftmotstand og dårlig gli. Dersom farten er liten skal vi anta at F er omtrent proporsjonal med v med koeffisient μ. Dersom farten er stor skal vi anta at F er omtrent proporsjonal med v^2 med koeffisient ν. For en vilkårlig fart skal vi anta følgende modell

$$F = \mu v + \nu v^2. \tag{1}$$

Koeffisientene μ og ν er to frie parametere som må måles i nøye kontrollerte eksperimenter. Vi måler kraft i Newton (N) og fart i meter per sekund (m/s).

1a

Finn de fysiske enhetene til μ og ν.

1b

Skaler likning (1) slik at den kommer på dimensjonsløs form. Vis hvordan dette kan gjøres ved å innføre dimensjonsløs kraft F^* og dimensjonsløs fart v^* på en slik måte at det ikke er noen frie parametere i den skalerte og dimensjonsløse likninga.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Et vektorfelt er gitt på dimensjonsløs form ved $\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$.

2a

Regn ut divergensen til $\boldsymbol{v}$.

2b

Regn ut virvlinga til $\boldsymbol{v}$.

2c

Undersøk om vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ har et potensial ϕ, og finn i så fall ϕ.

2d

Undersøk om vektorfeltet $\boldsymbol{v}$ har en strømfunksjon ψ, og finn i så fall ψ.

2e

Tegn et vektor pil-plott (som *quiver* på datamaskin) for $\boldsymbol{v}$ i et område rundt origo. La styrken til feltet være proporsjonal med lengden til pilene.
Finn alle stagnasjonspunktene (der hvor $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$) og indiker de i figuren.

2f

Regn ut strømlinjene til $\boldsymbol{v}$ og skisser dem i et plott.

2g

Finn sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt randa γ av firkanten $\Gamma : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\}$. La den lukkede kurven γ være orientert slik at vi vandrer fra origo langs x-aksen til $x = 1$, deretter til $x = y = 1$, deretter til y-aksen for $y = 1$ og så tilbake til origo. Regn dette ut som et kurveintegral.
Kontroller svaret ved å regne ut sirkulasjonen som et flateintegral ved å anvende en passende integralsats. Hva heter den integralsatsen du bruker?

2h

Regn ut den integrerte fluksen av $\boldsymbol{v}$ ut gjennom kuleskallet $S : \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, altså orientert vekk fra origo.

SLUTT