UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 27 mars 2012.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Vi skal se på vektorfeltet $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}\sin y + \boldsymbol{j}(y+z) + \boldsymbol{k}xy$.

1a

Regn ut divergensen til $\boldsymbol{v}$.

1b

Regn ut virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

1c

Har $\boldsymbol{v}$ en strømfunksjon ψ? Finn i så fall strømfunksjonen.
Har $\boldsymbol{v}$ et skalart potensial ϕ? Finn i så fall potensialet.

1d

Regn ut fluksen av $\boldsymbol{v}$ ut av overflaten til enhetskuben $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$.

1e

Regn ut, ved direkte utregning, sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt en trekantet kurve γ som består av rette linjestykker mellom de tre hjørnene: origo, punktet $\boldsymbol{i}$, og punktet $\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}$.

1f

Kontroller svaret i oppgave 1e ved å benytte en passende integralsats.

Oppgave 2

Vi skal se på det todimensjonale vektorfeltet $\boldsymbol{v} = x^3\boldsymbol{i} - 3x^2y\boldsymbol{j}$ i xy-planet. Finn og tegn strømlinjene. Indiker strømretning med piler. Finn eventuelle stagnasjonspunkter, og indiker disse med symbolet $\bullet$. Finn eventuelle singulære punkter, og indiker disse med symbolet $\times$.

Oppgave 3

En partikkel beveger seg langs en bane γ med posisjon $\boldsymbol{r}(t)$ og hastighet $\boldsymbol{v}(t)$ gitt som funksjon av tiden t. Det virker en friksjonskraft på partikkelen

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{v}(\mu + \nu|\boldsymbol{v}|) \tag{1}$$

hvor μ og ν er positive konstanter. Vi ser at dette er en typisk friksjonskraft fordi den er motsatt rettet hastigheten. Friksjonskraften utfører et arbeid på partikkelen

$$W = \int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

når partikkelen beveger seg langs banen γ.

3a

Gjør rede for de fysiske enhetene til $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{F}$, μ, ν og W uttrykt ved lengde (m), tid (s) og masse (kg).

3b

Vi skal nå se på det spesielle tilfellet at partikkelen beveger seg i rett linje med konstant hastighet fra origo til posisjon $L\boldsymbol{i}$ i løpet av en tid T. Finn en passende parametrisering av banen og regn ut arbeidet uttrykt ved L, T, μ og ν.

3c

I MEK1100 har vi diskutert diverse kriterier som kan brukes for å bestemme om et vektorfelt er konservativt.

Gjør rede for minst tre forskjellige kriterier som kan brukes for å bestemme om et vektorfelt er konservativt.

Friksjonskraften (1) er ikke et vektorfelt i den forstand som vi er vant til fra MEK1100. Det er fordi friksjonskraften ikke er en entydig funksjon av posisjon og tid, men er derimot en entydig funksjon av hvordan partikkelen beveger seg (partikkelhastigheten). Generelt ønsker vi å kunne karakterisere en kraft $\boldsymbol{F}$ som konservativ eller ikke, selv om kraften ikke er en entydig funksjon av posisjon og tid. Det vil da ikke være hensiktsmessig å bruke et hvilket som helst av de kriteriene for konservative felt som vi har diskutert i MEK1100 fordi noen av disse forutsetter entydig funksjonsavhengighet av rom og tid. Det kan derimot være hensiktsmessig å benytte et kriterium som baserer seg på en entydig definert bevegelse langs en bane γ.

Bestem om friksjonskraften (1) er konservativ ved å anvende et hensiktsmessig kriterium.

SLUTT