UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.
Eksamensdag:	Tirsdag 19. mars 2013.
Tid for eksamen:	15:00 – 17:00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Formeltillegg på 2 sider.
Tillatte hjelpemidler:	K. Rottmann: Matematische Formelsamlung, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

Oppgave 1

Vi skal betrakte et svømmebasseng med en litt spesiell form: Bunnen i bassenget er gitt ved $z = -h(x, y)$ hvor dybden er

$$h(x, y) = h_0 - x - \alpha y^2 \qquad \text{for} \quad x \geq 0.$$

Her er x og y horisontale koordinater, z-aksen peker oppover, og både α og h_0 er positive konstanter. Ved $x = 0$ er det en vertikal vegg. Bassenget er fylt opp med vann i området $z \leq 0$.

1a

Tegn noen dybdekonturer (h lik konstant verdi) for utvalgte dyp i intervallet $0 \leq h \leq h_0$. Marker spesielt dybdekonturen $h = 0$ som svarer til vannkanten. Gitt at h, x og y har dimensjon lengde, forklar hva som er dimensjonene til h_0 og α.

1b

Bestem i hvilken retning bassengets bunn stiger brattest i punktet $x = y = 0$. Finn stigningstallet til bunnen i denne retningen i dette punktet.

1c

Bestem enhetsnormalvektoren $\boldsymbol{n}$ til bunnen for vilkårlig x og y. La $\boldsymbol{n}$ være orientert slik at den peker inn i vannet.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Vi skal betrakte vektorfeltet $\boldsymbol{v} = (2x - y)\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} - y^2z\boldsymbol{k}$.
La sirkelen γ være gitt ved $x^2 + y^2 = 1$ og $z = 1$.

2a

Finn divergensen til $\boldsymbol{v}$.

2b

Finn virvlingen til $\boldsymbol{v}$.

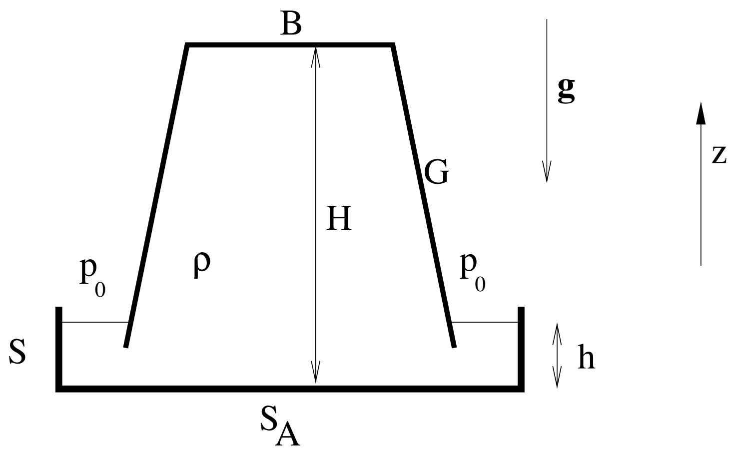
2c

Finn sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt γ ved direkte utregning.

2d

Finn sirkulasjonen til $\boldsymbol{v}$ rundt γ indirekte ved å beregne et flateintegral over en passende flate S. Forklar hvilken flate S du velger og hvilken integralsats du bruker.

Oppgave 3



Et glass (G) er fylt med vann og holdes med bunnen (B) opp og med åpningen ned mot ei skål (S) uten å komme i berøring med skåla. Bunnen av skåla (S_A) er horisontal med areal A. Vannet har høyde h fra bunnen av skåla til fri luft, og har høyde H fra bunnen av skåla til bunnen av glasset. Lufta har konstant trykk p_0. Vannet har tetthet ρ. Tyngdens akselerasjon $\boldsymbol{g}$ er rettet ned. La z-aksen peke opp.

Finn trykket i vannet like oppunder glassets bunn B.
Finn kraften som virker fra vannet på skålas bunn S_A.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

Vi skal se på vektorfeltet

$$\boldsymbol{v} = xy\boldsymbol{i} + v_y(x, y)\boldsymbol{j}$$

hvor v_y er en funksjon som har egenskapen $v_y(0, 0) = 0$.

4a

Bestem $v_y(x, y)$ slik at feltet blir divergensfritt og virvelfritt.

4b

Finn strømfunksjonen for feltet og skisser strømlinjene.
Marker eventuelle stagnasjonspunkter (hvor $\boldsymbol{v} = 0$) med symbolet $\bullet$ og framhev spesielt eventuelle strømlinjer som går igjennom eventuelle stagnasjonspunkter.
Marker retningen til feltet med piler.

SLUTT