

# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i: MEK 1100 — Feltteori og vektoranalyse.  
Eksamensdag: Torsdag 10 oktober 2013.  
Tid for eksamen: 15:00 – 17:00.  
Oppgavesettet er på 3 sider.  
Vedlegg: Formeltillegg på 2 sider.  
Tillatte hjelpemidler: K. Rottmann: Matematiske Formelsamling, godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Det er 10 delspørsmål. Hvert delspørsmål honoreres med poengsum fra 0 til 10 (10 for fullstendig svar, 0 for blank). Maksimal oppnåelig poengsum er 100. Kontroller at du ikke overser noen av spørsmålene.

### Oppgave 1

Temperaturen i et klasserom er gitt ved uttrykket

$$T(x, y, z) = T_0 + \frac{A}{B + \frac{x^2 + y^2}{R^2}} + Cz$$

Her er  $x$  og  $y$  horisontale koordinater,  $z$  er vertikal koordinat, og  $T$  er temperaturen i rommet. Temperaturen måles i Kelvin (K) og alle lengder måles i meter (m).

Forklar hva som er de fysiske enhetene til konstantene  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $R$  og  $T_0$ .

Vi ønsker å gjøre uttrykket dimensjonsløst ved å skalere alle lengder med  $R$  og alle temperaturer med  $T_0$ . La alle de dimensjonsløse variablene være merket med stjerne, for eksempel  $x^*$ . Utled det skalerte og dimensjonsløse uttrykket for temperaturen i rommet.

### Oppgave 2

Vi skal se på vektorfeltet

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} - (y + 1)\mathbf{j}$$

#### 2a

Regn ut divergensen til  $\mathbf{v}$ .

(Fortsettes på side 2.)

**2b**

Regn ut virvlingen til  $\mathbf{v}$ .

**2c**

Undersøk om vektorfeltet  $\mathbf{v}$  har et skalarpotensial  $\phi$ , og finn i så fall potensialet.

**2d**

Undersøk om vektorfeltet  $\mathbf{v}$  har en strømfunksjon  $\psi$ , og finn i så fall strømfunksjonen.

**2e**

Finn sirkulasjonen til  $\mathbf{v}$  rundt sirkelen  $\gamma$ , hvor  $\gamma$  er gitt ved  $x^2 + y^2 = 4$ , ved direkte utregning.

**2f**

Vi skal kontrollere svaret fra forrige oppgavepunkt ved å regne ut et flateintegral over flaten  $S$ , hvor  $S$  er en kuppel gitt ved  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ , ved å anvende en passende integralsats.

Forklar hvilken integralsats vi må anvende.

Regn ut enhetsnormalvektoren  $\mathbf{n}$  til flaten  $S$ .

Beregn sirkulasjonen til  $\mathbf{v}$  rundt sirkelen  $\gamma$  indirekte ved å regne ut et flateintegral over  $S$ .

**2g**

Finn ei likning for alle strømlinjene til  $\mathbf{v}$ .

Finn alle stagnasjonspunktene til  $\mathbf{v}$  (de punktene hvor  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ), og finn spesielt alle strømlinjene som går gjennom stagnasjonspunktene.

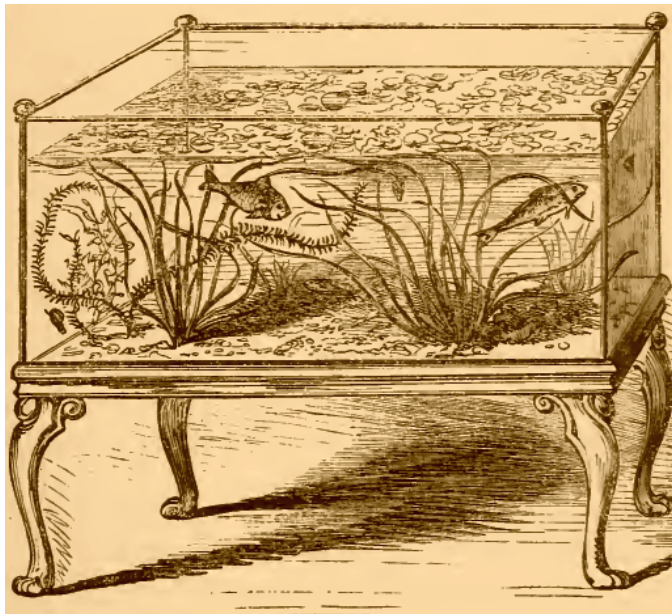
**2h**

La en skisse over vektorfeltet  $\mathbf{v}$  hvor stagnasjonspunkter er indikert med symbolet  $\bullet$ , strømlinjer er indikert med heltrukne kurver, retningen til feltet er indikert med piler, og styrken til feltet er indikert med lengden til pilene. Sørg spesielt for å indikere strømlinjene som går igjennom stagnasjonspunktene.

(Fortsettes på side 3.)

### Oppgave 3

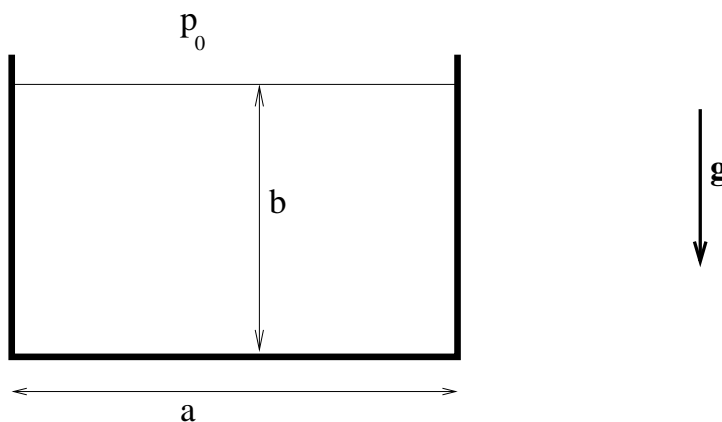
Et akvarium er fylt med vann. Rundt akvariet har vi luft med trykk  $p_0$ . Vannet er i ro og har tetthet  $\rho$ . Tyngdens akselerasjon  $g$  er rettet nedover.



Illustrasjon hentet fra Wikipedia:

Shirley Hibberd, The Book of the Aquarium and Water Cabinet. London: Groombridge & Sons. 1856.

Vi ønsker å beregne trykkrafta som virker på den ene siden av akvariet. Denne siden har rektangulær form, med bredde  $a$  i horisontal retning, og vannet har høyde  $b$  i vertikal retning. Vi tenker oss at  $x$  og  $y$  er horisontale koordinater,  $z$  er vertikal koordinat, og  $z$ -aksen peker oppover. Den aktuelle siden er vist i figuren nedenfor og ligger i  $xz$ -planet, vannet befinner seg her i området  $y > 0$ .



Regn ut trykkrafta som virker på denne ene siden av akvariet.

SLUTT