Vitesse de descente d'une bille le long d'un toboggan

L'objectif de ce projet est de calculer de façon approchée la vitesse de descente d'une bille le long d'un toboggan. On attachera le plus grand soin à créer une interface graphique. On créera une bibliothèque de primitives.

On considère un toboggan, dont la forme est donnée par une fonction $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ (on impose la normalisation $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$, l'axe des ordonnées étant dirigé vers le bas). Une bille est lâchée sans vitesse initiale en haut du toboggan, i.e. en $x = y = 0$; on souhaite connaître le temps qu'elle met à arriver au bas du toboggan, i.e. en $x = y = 1$. On assimile la bille à un point matériel de masse m qui se déplace sans frottements sur la courbe $y = y(x)$. Afin de déterminer le temps de descente, on va effectuer un bilan d'énergie. Si on note s l'abscisse curviligne sur la courbe, alors l'énergie cinétique au temps t est donnée par

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2.$$

L'énergie potentielle, quant à elle, s'écrit

$$E_p(t) = -mgy(x(t)).$$

La conservation de l'énergie totale entre les instants $t = 0$, initial, et $t = T(y)$, où la bille arrive au bas du toboggan, fournit

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mgy = 0,$$

d'où $s'(t) = \sqrt{2gy}$. Le temps de descente est alors donné par

$$T(y) = \int_0^{T(y)} \mathrm{d}t = \int_0^{l(y)} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2gy}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x.$$

Le but de ce projet est de mettre au point une méthode efficace pour calculer $T(y)$.

1. Calcul approché d'une intégrale

Étant donnée une fonction f continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ il est dans certaine situation difficile ou impossible calculer l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. On a alors recours à des méthodes d'approximation dites *quadrature numérique* ou d'*intégration numérique*.

Parmi les nombreuses quadratures numériques existantes, citons la formule du point milieu. Cette formule est obtenue en remplaçant f par une constante égale à la valeur de f au point milieu de $[a,b]$, autrement dit

$$I(f) \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

Proposition 1. *Si $f \in \mathcal{C}^2([a,b])$ l'erreur de quadrature, i.e. l'erreur entre le calcul exact $I(f)$ et son approximation, $E(f) = I(f) - (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ vaut :*

$$E(f) = \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi), \quad \xi \in]a,b[.$$

Pour améliorer la précision on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en N sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}], i = 0, N-1$ avec $x_0 = a$ et $x_N = b$ et on applique la formule du point milieu pour le calcul approché de $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$, on en déduit ainsi un calcul approché de $I(f)$. Cette technique est appelée *formule composite du point milieu.*

Q.1

a. Calculer la valeur approchée de $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et de $\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$ par la méthode du point milieu.

b. Appliquer la formule composite du point milieu pour approcher ces deux intégrales.

c. Observez-vous une amélioration ?

2. Calcul approché du temps de descente par la formule composite du point milieu

Soit $y : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donnée dont on connaît aussi la dérivée y'. On suppose $y(0) = 0, y(1) = 1$ et $y(x) > 0$ pour $x \neq 0$, et on cherche à approcher la quantité

$$T(y) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec $f(x) = \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}$ et $g = 10$. La méthode la plus simple consiste à utiliser une formule de quadrature ouverte, pour éviter la singularité en $x = 0$.

Q.2 Afin d'évaluer la précision de la méthode précédente, on l'applique au calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I.

b. Appliquer la la formule composite du point milieu à I.

c. Représenter graphiquement l'évolution, en fonction du nombre N de sous-intervalles de $[0,1]$, de l'erreur entre l'intégrale approchée et l'intégrale exacte. Commenter.

Q.3 Approcher $T(y)$ par la formule composite du point milieu.

3. Une méthode hybride pour la prise en compte de la singularité

Si l'on connaît la forme de la singularité de la fonction f en 0, il est possible d'approcher l'intégrale de manière plus précise. En effet, si la courbe définissant le toboggan est régulière et vérifie $y(x) \equiv c.x^\alpha$ en $x = 0$, alors f admet une singularité en $x^{-\beta}$, où l'on a noté

$$\beta = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{\alpha}{2} & \text{si } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{1}$$

On peut alors récrire le temps de descente $T(y)$ sous la forme (le nombre réel h reste à préciser)

$$T(y) = \int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x + \int_h^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

La seconde intégrale n'étant pas singulière, on peut lui appliquer la méthode du point milieu décrite au paragraphe précédent. Quant à la première intégrale, on l'approche par une méthode gaussienne à un point :

$$\int_0^h f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h^{1-\beta}}{1-\beta} f(hu)(hu)^\beta, \quad \text{avec } u = \frac{1-\beta}{2-\beta}.$$

Q.4

a. Appliquer la méthode hypride pour approcher I.

b. Représenter graphiquement l'évolution, en fonction du nombre N de sous-intervalles de $[0,1]$, de l'erreur entre l'intégrale approchée et l'intégrale exacte(avec $h = 0.01$ et $\beta = \frac{3}{4}$).

4. Applications à quelques formes de toboggan

Dans ce paragraphe, on applique les méthodes décrites plus haut au calcul des temps de descente correspondant aux formes de toboggan suivantes. (On pourra faire un dessin.)

1. toboggan plan : $y(x) = x$;
2. toboggan "raide" : $y(x) = \sqrt{x}$;
3. toboggan "doux" : $y(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(5 - 3x)$.

Q.5 Pour chaque typpe de toboggan, indiquer dans un tableau, les approximations de $T(y)$ pour différentes valeurs de N entre 2 et 35000.