Aufgabe 3: Eisbudendilemma

Teilnahme-ID: 56860

Bearbeiter/-in dieser Aufgabe:
Christopher Besch

9. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Ein Wort über die Graphiken

Alle in dieser Dokumentation verwendeten Darstellungen verwenden einheitliche Symbole:

- Der See ist als schwarzer Kreis dargestellt.
- Die Häuser sind verschieden gefärbte Rechtecke, deren Adresse außerhalb des Kreises stehen:
  - Rot: Das Haus stimmt gegen eine Verlegung der Eisdielen.
  - Grün: Es stimmt für eine Verlegung.
  - Andere Farben werden verwendet, um bestimmte Häuser herauszuheben. Die jeweiligen Bedeutungen werden darstellungsspezifisch angegeben.
- Die Adressen sind aufsteigend im Uhrzeigersinn angeordnet. Adresse 0, die Dorfkirche befindet sich oben.
- Blaue Kreuze stellen die Positionen des Test-Arrangements dar und
- blaue Kreise die des Check-Arrangements. In beiden Fällen stehen die Adressen innerhalb des Kreises.

2 Lösungsidee

Das Ziel ist es, ein Arrangement bestehend aus drei Positionen für Eisdielen zu generieren, das in einer Abstimmung durch kein anderes Arrangement abgelöst werden kann. Diese Arrangements werden stabil genannt. Hierzu darf die Eisbudendistanz, die Strecke zwischen einem beliebigen Haus und der nächsten Eisbude, von nicht mehr als der Hälfte der Hauser durch ein anderes Arrangement verkürzt werden. Wäre dies der Fall, würde die Ablösung mehr Ja- als Nein-Stimmen erhalten. Hieraus geht hervor, dass für eine optimale Lösung alle möglichen Arrangements (Diese werden Test-Arrangement genannt.) auf Stabilität überprüft werden müssen. Um die Stabilität zu bestimmen, muss das Test-Arrangement mit allen möglichen anderen Arrangements (Check-Arrangement genannt) verglichen werden. Wenn auch nur ein einziges Check-Arrangement gefunden wird, das mehr Ja- als Nein-Stimmen erhält, ist das getestete Test-Arrangement instabil. Es lässt sich leicht erkennen, dass dieser Algorithmus, der Durchgang aller möglichen Test-Arrangements, mit einer Laufzeit von $O(n^6)$ nicht verwendbar ist.

Als Versuch der Optimierung werden bevor sie getestet werden alle Arrangement sortiert. Hierzu wird für jedes mögliche Arrangement ein Score berechnet. Dieser entspricht der durchschnittlichen Eisbudendistanz aller Häuser. Nun stellt sich heraus, dass stabile Arrangements einen der niedrigsten Scores aller Arrangements aufweisen. Dies lässt sich damit erklären, dass je kleiner die Eisbudendistanz eines Hauses in einem Test-Arrangement ist, desto weniger Check-Arrangement existieren, die eine noch geringere Eisbudendistanz für das Haus generieren. Wenn die Eisbudendistanz beispielsweise 0 beträgt, existiert kein einziges Check-Arrangement, dem dieses Haus eine Ja-Stimme geben würde, da eine geringere Eisbudendistanz nicht möglich ist und ein Haus bei gleichbleibender Eisbudendistanz immer gegen einen Wechsel stimmt. Dies ist in Abbildung 1 gezeigt. Wenn die Eisbudendistanz den maximalen Wert, dem

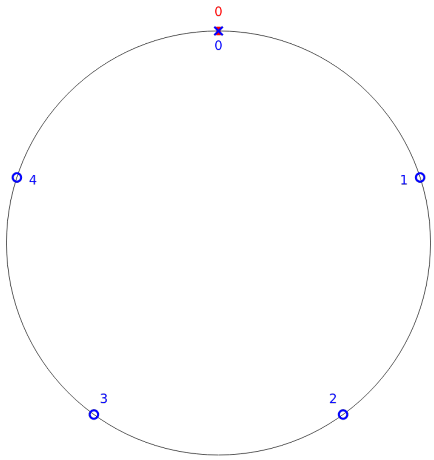


Abbildung 1: Das einzige Haus ist zufrieden mit der einzigen Eisdiele und lehnt jegliche Veränderung ab. Die Eisbudendistanz beträgt 0.

halben Umfang des Sees, entspricht, stimmt es für alle Check-Arrangements (Abbildung 3a), abgesehen von denen, die die Eisbudendistanz nicht verändern (Abbildung 3b). Die durchschnittliche Eisbudendistanz lässt sich dementsprechend als „Zufriedenheitsgrad“ des Dorfes interpretieren. Je höher er ist, desto unwahrscheinlicher wird eine Verlegung durchgesetzt.

Allerdings muss dieser Wert nicht zwangsweise mit der Stabilität eines Arrangements übereinstimmen, was beispielsweise in Abbildung 4 gezeigt wird. Hieraus geht hervor, dass die durchschnittliche Eisbudendistanz nur eine Näherungslösung liefert. Trotzdem kann sie zur Generierung eines Satzes an Test-Arrangements verwendet werden, die anschließend von dem bereits genannten Algorithmus auf Stabilität überprüft werden.

Um die Stabilität eines Test-Arrangements zu berechnen, müssen alle möglichen Check-Arrangements durchgegangen werden. Es wird nur eine einziges Check-Arrangement gesucht, das das Test-Arrangement schlagen kann. Daher können zwei Optimierungen getroffen werden:

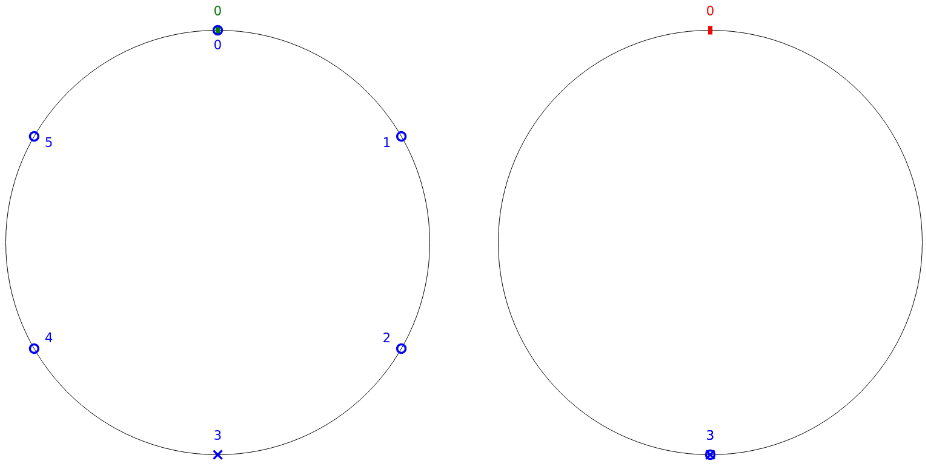
1. Eisdielen sollten nicht übereinander liegen, da bei der Aufsplittung zweier aufeinanderliegender Eisdielen die Eisbudendistanz keines Häuses vergrößert wird.

2. Alle Dopplungen sind unnötig, da die Reihenfolge der Eisdielen für die Stimmen der Häuser irrelevant sind.

Deshalb darf die Bedingung gelten, dass die Adresse der zweiten Eisdiele größer als die der ersten und kleiner als die der dritten ist. Hieraus folgt, dass der See in drei Sektoren unterteilt ist (Abbildung 5).

Um nun alle Position durchzugehen, können zuerst zwei Positionen für die ersten beiden Eisdielen festgesetzt werden (Die verschiedenen Optionen für diese müssen in einem übergeordneten Schritte durchgegangen werden) und daraufhin alle möglichen Positionen für die dritte Eisdiele verwendet werden, die die genannten Bedingungen erfüllt. Somit ist die Größe und Position des ersten Sektor bei vielen Durchläufen gleich.

Abbildung 2: Unzufriedene Häuser



(a) Das Haus ist maximal unzufrieden, weshalb es für fast jede Verlegung stimmt. Jeder Kreis repräsentiert eine anderes Check-Arrangement, die alle von dem Haus angenommen werden.

(b) Dies ist der einzige Fall, in dem das Haus trotz seiner extremen Unzufriedenheit gegen eine Verlegung stimmt.

Nun zeigt sich, dass die Stimme der Häuser innerhalb eines Sektors ausschließlich durch die Größe und Position des Sektors und die in dem Sektor befindlichen Eisdielen des Test-Arrangements determiniert sind. Dies lässt sich dadurch begründen, dass die Eisdielendistanzen dieser Häuser nur dann nicht verkürzt werden, wenn sich eine Eisdiele des Test-Arrangements in dem Sektor befindet. Alle Test-Eisdielen außerhalb des Sektors sind von den Häusern immer weiter entfernt als die Ränder des Sektors, weshalb sich die Eisbudendistanz ohne Test-Eisdielen innerhalb des Sektors nicht verkürzt wird.

In der Implementation wird auf viele Optimierungen eingegangen

3 Umsetzung

Die Lösungsidee wird in C++ implementiert.

Einlese der Eingabedatei Als erster Schritt wird in der Funktion **read_file** die Eingabedatei gelesen. Hierbei wird überprüft, ob die Eingabedatei dem gegebenen Format entspricht, wenn nicht wird das Programm abgebrochen. Hierzu wird ein Makro **raise_error()** verwendet, dass die Ausführung des Programmes abbricht und eine möglichst informative Fehlermeldung zurückgibt. Dieses Makro wird ebenfalls für alle Methoden aller Klassen verwendet, um z.b. Segmentation Faults zu verhindern.

Es wird die Menge der Adressen aller Häuser in einem std::vector<int> und der Umfang des Sees in einem int gespeichert.

4 Beispiele

Nun wird das Programm mit allen Beispieldateien ausgeführt.

eisbuden1.txt Mit der Eingabe
20 7
0 2 3 8 12 14 15
gibt das Programm aus, dass es keine stabilen Positionen gibt.

eisbuden2.txt Mit der Eingabe
50 15
3 6 7 9 24 27 36 37 38 39 40 45 46 48 49

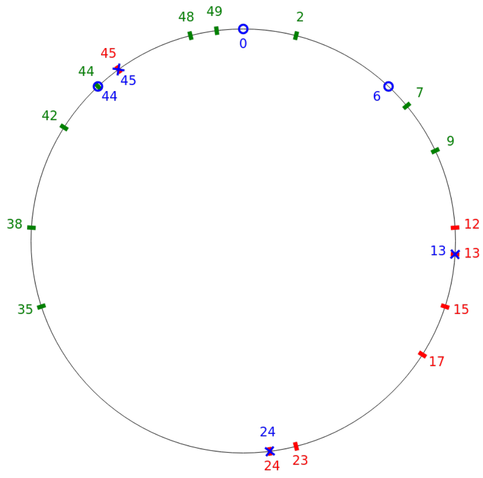


Abbildung 4: Trotz der für dieses Beispiel, *eisbuden3.txt*, minimalen durchschnittlichen Eisbudendistanz von 3, 3125 stimmen mehr Häuser für eine Verlegung.

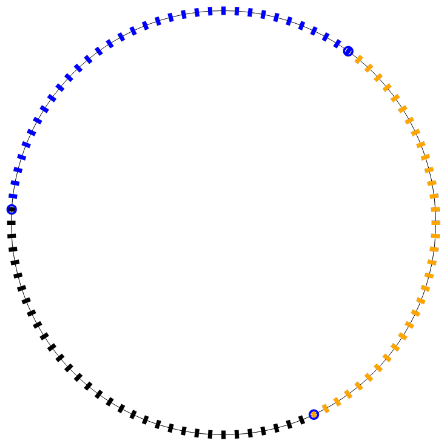


Abbildung 5: Einteilung in Sektoren

gibt das Programm die Menge an stabilen Positionen aus:
45

eisbuden3.txt Mit der Eingabe
50 16
2 7 9 12 13 15 17 23 24 35 38 42 44 45 48 49
gibt das Programm die Menge an stabilen Positionen aus:
2, 3, 4, 5, 6 und 7

eisbuden4.txt Mit der Eingabe
100 19
6 12 23 25 26 28 31 34 36 40 41 52 66 67 71 75 80 91 92
gibt das Programm die Menge an stabilen Positionen aus:
34

eisbuden5.txt Mit der Eingabe
247 24
2 5 37 43 72 74 83 87 93 97 101 110 121 124 126 136 150 161 185 200 201 230 234 241
gibt das Programm die Menge an stabilen Positionen aus:
93, 94, 95, 96 und 97

eisbuden6.txt Mit der Eingabe
437 36
4 12 17 23 58 61 67 76 93 103 145 154 166 170 192 194 209 213 221 225 239 250 281 299 312 323 337 353 383 385 388 395 405 407 412 429
gibt das Programm aus, dass es keine stabilen Positionen gibt.

eisbuden7.txt

4.1 Eigene Beispiele

myeisbuden0.txt Mit der Eingabe
12 4
0 3 6 9
gibt das Programm die Menge an stabilen Positionen aus:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 und 11
Dies ergibt Sinn, da die Häuser gleichmäßig verteilt sind, womit nie eine Mehrheit gegen jegliche Positionen gefunden werden kann.

myeisbuden0.txt Mit der Eingabe
10 0
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9
Dies ergibt Sinn, da keine Häuser vorhanden sind, die für eine Umlegung stimmen könnten.

5 Quellcode

Dies sind die wichtigsten Funktionen:

```
int get_distance(int circumference, int place_a, int place_b)
{
    int direct_distance = std::abs(place_a - place_b);
    // take shortest way, direct or the othe rdirection
    return std::min(direct_distance, circumference - direct_distance);
}

bool vote(int circumference, int house_place, int old_place, int new_place)
{
    // is new place better?
    if (get_distance(circumference, house_place, new_place) <
    get_distance(circumference, house_place, old_place))
        return true;
    return false;
}

bool is_stable(int circumference, std::vector<int> &houses, int test_place)
{
    // would any other place win an election against test_place?
    for (int other_place = 0; other_place < circumference; other_place++)
    {
        int trues = 0;
        for (int house : houses)
            if (vote(circumference, house, test_place, other_place))
                trues++;

        if (trues > houses.size() - trues)
            return false;
    }
    return true;
}

std::vector<int> get_stabel_places(int circumference, std::vector<int> &houses)
{
```

```
    // go thorugh all possible places
    std::vector<int> result;
    for (int test_place = 0; test_place < circumference; test_place++)
        if (is_stable(circumference, houses, test_place))
            result.push_back(test_place);
    return result;
}
```