Gegeben seien $N \in \mathbb{N}^+$ Bewohner mit je einem Score $x_1^{(s)}, \ldots, x_N^{(s)} \in \mathbb{R}$ zur Woche $s \in \mathbb{N}$.

$x_i^{(s)} = 0$ gdw. Bewohner i bisher genau so oft ihren Dienst erfüllt hat, wie sie musste. Bei $x_i^{(s)} < 0$ hat sie den Dienst seltener und bei $x_i^{(s)} > 0$ ihren Dienst häufiger getätigt.

Formal gelte:
Hat Bewohner i in einer Woche den Dienst vollbracht, so gilt für die neuen Scores $x_1^{(s+1)}, \ldots, x_N^{(s+1)}$

$$x_j^{(s+1)} = \begin{cases} x_j^{(s)} + 1 & , \text{falls } i = j \\ x_j^{(s)} - \frac{1}{N-1} & , \text{sonst} \end{cases}$$

Für die initialen Scores $x_1^{(0)}, \ldots, x_N^{(0)}$ gilt $x_1^{(0)} = \ldots = x_N^{(0)} = 0$.

Es gilt:

IA $s = 0$: $\sum_{n=1}^{N} x_n^{(0)} = 0$

IV : $\sum_{n=1}^{N} x_n^{(s)} = 0$

IS $s \to s+1$: $\sum_{n=1}^{N} x_n^{(s+1)} = \sum_{n=1}^{N} x_n^{(s)} + \begin{cases} 1 & , \text{falls } n = i \\ -\frac{1}{N-1} & , \text{sonst} \end{cases}$, mit i demjenigen, der den Dienst vollbracht hat.

$$= 1 - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{N} \frac{1}{N-1} = 0$$

Gesucht ist eine Wahrscheinlichkeitsfunktion $f: [1, N] \to [0, 1]$ abhängig von $x_1^{(s)}, \ldots, x_N^{(s)}$, mit der der nächste Arbeiter gewählt wird. Es soll gelten

$$x_i = 0 \Rightarrow f(i) = \frac{1}{N} \quad \text{und}$$

$$x_i > x_j \Rightarrow f(i) \leq f(j) \quad .$$

Betrachte $g(x_i) := f(i)$ mit $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$ monoton fallend, sodass für feste aber beliebige $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{n=1}^{N} x_n = 0$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = 1 \quad \text{und}$$

$$g(0) = \frac{1}{N}, \text{ falls } \exists\, x_i = 0.$$

O.B.d.A. sei $x_1, \dots, x_N$ aufsteigend sortiert.
Betrachte $x_1, \dots, x_a, x_b, \dots, x_t, x_d, \dots, x_N$ mit

$x_1, \dots, x_a < 0$, $x_b, \dots, x_t = 0$, $x_d, \dots, x_N > 0$.

Betrachte
$$c_i := \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{N} - g(x_i)}{x_i} & \text{, falls } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$\frac{1}{N} - c_i \cdot x_i = \begin{cases} g(x_i) & \text{, falls } x_i \neq 0 \\ \frac{1}{N} & \text{, sonst} \end{cases} = g(x_i).$$

Uns interessiert der affin-lineare Ansatz $c_1 = \dots = c_N$. Für diesen gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} - c_n \cdot x_n = 1 - c_1 \underbrace{\sum_{n=1}^{N} x_n}_{=0} = 1$$

Für $c_1 < 0$ ist g nicht monoton fallend. Für $c_1 > \frac{1}{N \cdot x_N}$ ist

$$g(x_N) = \frac{1}{N} - c_N \cdot x_N < \frac{1}{N} - \frac{1}{N} = 0$$

außerhalb des angedachten Bildraums.
Das legt den Parameter $\gamma \in [0, 1]$ mit

$$g(x_N) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{, falls } x_N = 0 \\ (1-\gamma) \cdot 0 + \gamma \cdot \frac{1}{N} & \text{, falls } x_N > 0 \end{cases}.$$

nahe.

Fall $x_N = 0$:

Setze $c_1 = \dots = c_N = 0$. Es gilt:

$$g(x_i) = \frac{1}{N} - c_i \cdot x_i = \frac{1}{N} \in [0,1] \quad \text{, insb. } g(x_N) = \frac{1}{N}$$

$$\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = 1$$

$g(x_1) \geq \dots \geq g(x_N) \Rightarrow g$ fällt monoton

$\Rightarrow$ Alle Bedingungen erfüllt.

Fall $x_N > 0$:

Setze $c_1 = \dots = c_N = \frac{1-\gamma}{N \cdot x_N}$. Dies ist wohldefiniert, da $x_N > 0$.
Es gilt:

$$\frac{\overbrace{1-\gamma}^{\geq 0}}{\underbrace{N \cdot x_N}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow g \text{ fällt monoton.}$$

$$\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = 1 - \sum_{n=1}^{N} c_n \cdot x_n = 1 - \frac{1-\gamma}{N \cdot x_N} \cdot \sum_{n=1}^{N} x_n = 1 \quad \text{, wie erwartet}$$

$$g(x_N) = \frac{1}{N} - c_N x_N = \frac{1}{N} - \frac{1-\gamma}{N \cdot x_N} \cdot x_N = \frac{1}{N} - \frac{1}{N} + \frac{\gamma}{N} = \frac{\gamma}{N}$$

$$g(x_i) = \frac{1}{N} - c_i x_i = \frac{1}{N} - \frac{1-\gamma}{N \cdot x_N} x_i = \begin{cases} \frac{1}{N} - \frac{1-\gamma}{N \cdot x_N} x_i & \text{, falls } x_i \neq 0 \\ \frac{1}{N} & \text{, falls } x_i = 0 \end{cases} \in [0,1] \text{, da:}$$

Fall $x_i > 0$:

$$\frac{1}{N} - \frac{\overbrace{1-\gamma}^{\geq 0}}{\underbrace{N \cdot x_N}_{>0}} \underbrace{x_i}_{>0} \leq \frac{1}{N} \leq 1$$

$$\frac{1}{N} - \frac{1-\gamma}{N \cdot x_N} x_i \geq \frac{1}{N} - \frac{1}{N \cdot x_N} x_i \geq \frac{1}{N} - \frac{1}{N \cdot x_N} \cdot x_N = 0$$

Fall $x_i < 0$:

$$\frac{1}{N} - \frac{\overbrace{1-\gamma}^{\geq 0}}{\underbrace{N \cdot x_N}_{>0}} \underbrace{x_i}_{<0} \geq \frac{1}{N} \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} g(x_n) = 1 \iff$$

$$g(x_i) \geq g(x_1) = 1 - \sum_{n=2}^{a} \underbrace{g(x_i)}_{\geq \frac{1}{N}} - \sum_{n=b}^{t} \frac{1}{N} - \sum_{n=d}^{N} \underbrace{g(x_i)}_{\geq 0} \leq 1 - \underbrace{\frac{t-2}{N}}_{>0} \leq 1$$

$\Rightarrow$ Alle Bedingungen erfüllt.

Da wie oben gezeigt andere affin-lineare Lösungen nicht existieren, bildet γ auf das gesamte Spektrum affin-linearer Lösungen ab.