3 Modelle für Messdaten

Stetige Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Oft Messdaten statt Zähldaten
- Diese können jeden Wert in bestimmten Bereich annehmen
- Genauigkeitsangabe durch Messgenauigkeit vorgegeben

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung

- Zufallsvariable X
- Wertemenge W_X
- Wertemenge besteht aus endlich vielen **ganzen** Zahlen (diskret)
- Die Menge ist also löchrig
- Beispiel einer Realisierung von $X: X(Person) = 174$
- x ist eine Zahl, X ist eine Menge
- Wahrscheinlichkeit berechnen:
    - $P(X = x)$: Wahrscheinlichkeit der Zahl x
    - → Anzahl Personen mit x durch Gesamtmenge von X

Stetige Verteilung

- **nicht** löchrig (Wertemenge ist kontinuierlich)
- Wertemenge W_X von Zufallsvariable X = alle Werte die X annehmen kann
- **Intervall**: z.B. (a, b]
- **runde Klammer** = Wert liegt ausserhalb des Intervalls
- **eckige Klammern** = Wert liegt innerhalb des Intervalls

> Notiz:
>
> Man hat eine Reihe von Daten, die alle gleichwahrscheinlich vorkommen. Je mehr Kommastellen man zulässt, desto mehr gegen null strebt die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Zahl zu ziehen. (i = Nachkommastellen)
>
> $$\frac{1}{10^{i+1}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Die Wahrscheinlichkeitsdichte f ist die Ableitung der kumulativen Verteilungsfunktion:

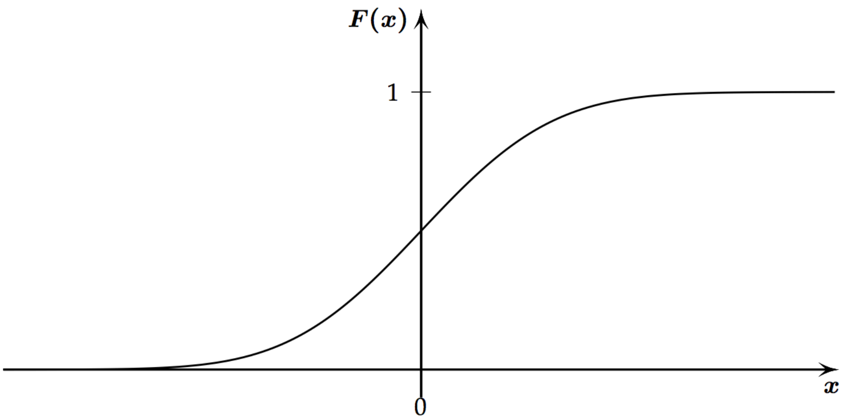
> $$f(x) = F'(x)$$

- bei experimentellen Messdaten verwendet,
- wo relative Häufigkeit in bestimmten Intervallen grösser als in anderen ist
- **Wahrscheinlichkeit einer stetigen Zufallsvariablen X** kann mit Wahrscheinlichkeiten aller Intervalle $(a, b]$ beschreiben werden,

> $$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b)$$
>
> $$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

- Berechnen mit der kumulativen Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$

> Eigenschaften der **kummulativen Verteilungsfunktion**:



> 1. $0 \leq F(x) \leq 1$ (Wahrscheinlichkeit)
> 2. $F(-\infty) = 0$ (Wahrscheinlichkeit, dass Messwert kleiner als $-\infty$)
> 3. $F(\infty) = 1$ (Wahrscheinlichkeit, dass Messwert kleiner als ∞)
> 4. $F(x)$ ist monoton wachsend: $F(a) < F(b)$. Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ also immer grösser gleich 0
>
> Eigenschaften der **Wahrscheinlichkeitsdichte**:
>
> 1. $f(x) \geq 0$, F(x) ist monoton wachsend
> 2. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$, Fläche zwischen a und b unter f(x)
> 3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Kennzahlen von stetigen Verteilungen

Erwartungswert

- Mittlere Lage der Verteilung von Daten: μ
- Bei diskreter Verteilung z.B. Mittelwert oder Median

> $$E(X) = \mu x = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Standardabweichung

Selbe Bedeutung, wie bei diskreter Verteilung: σ_x

Varianz

Selbe Bedeutung, wie bei diskreter Verteilung: σ_x^2

> $$Var(X) = \sigma_x^2 = E((X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx = E(X^2) - E(X)^2$$

Quantile

Selbe Bedeutung, wie bei diskreter Verteilung: $q(\alpha)$

Wichtige stetige Verteilungen

- Im diskreten Fall gibt es Binomial- und Poisson-Verteilung
- Im stetigen Fall gibt es
  - uniforme Verteilung
  - Exponentialverteilung
  - Normalverteilung (Gauss-Verteilung)
  - Standardnormalverteilung

Uniforme Verteilung

- "Ignoranz"
- Dichte ist konstant (gleichförmig)
- gleiche Wahrscheinlichkeit auf ganzem Wertebereich
- Zufallsvariable X ist Uniform verteilt, falls:

> $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

python

Probability density function

```
from scipy.stats import uniform

# An der Stelle x = 5, Intervall [1, 10]
uniform.pdf(x=5, loc=1, scale=9)
```

Falls $X \sim \text{Uniform}([1, 10])$:

```
uniform.cdf(x = 5, loc = 1, scale=9)
```

Wahrscheinlichkeit $P(1.2 \leq X \leq 4.8)$:

```
uniform.cdf(x = 4.8, loc = 1, scale=9) - uniform.cdf(x = 1.2, loc = 1, scale=9)
```

Uniform verteilte Zufallsvariablen:

```
uniform.rvs(loc = 1, scale=9, size=5)
```

Exponentialverteilung

- einfachste Modell für "Wartezeiten auf Ausfälle" (Lebensdauer)
- (Poissonverteilung: Anzahl Beobachtungen in einem festen Zeitintervall)
- **Exponentialverteilung**: Wahrscheinlichkeit für eine Lebensdauer
- $exp(x) := e^x$

> - Zufallsvariable X,
> - mit Wertebereich $W_x = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$
> - mit Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^+$
> - heisst exponentialverteilt falls,
>
> $$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot exp(-\lambda x) & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
>
> - Geschrieben als:
>
> $$X \sim Exp(\lambda)$$

> - kumulative Verteilungsfunktion dazu:
>
> $$f(x) = \begin{cases} 1 - exp(-\lambda x) & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

→ Lambda muss oft aus Experimenten geschätzt werden.

Erwartungswert bei Exponentialverteilung

> $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

Varianz bei Exponentialverteilung

> $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Standardabweichung bei Exponentialverteilung

> $\sigma_x = \frac{1}{\lambda}$

python

```python
from scipy.stats import expon

# X ~ Exp(3), Wahrscheinlichkeit P(0 <= X <= 4)
expon.cdf(x=4, scale=1/3)
```

Normalverteilung

- häufigste / wichtigste Verteilung für Messwerte
- Dichte der Normalverteilung ist symmetrisch um Erwartungswert
- Je grösser σ, desto flacher / breiter die Dichte

> - Zufallsvariable X
> - mit Wertebereich $W_x = \mathbb{R}$
> - mit Parametern $\mu \in \mathbb{R} und \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$
> - ist normalverteilt falls,
>
> $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$$
>
> Geschrieben als:
>
> $$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$
>
> kumulative Verteilungsfunktion dazu:

> $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

Erwartungswert bei Normalverteilung

> $E(X) = \mu$

Varianz bei Normalverteilung

> $Var(X) = \sigma^2$

Standardabweichung bei Exponentialverteilung

> $\sigma_x = \sigma$

python

```
from scipy.stats import norm

# P(X > 130) (also 1 - P(X <= 130)), X ~ N(100, 15^2)
1 - norm.cdf(x=130, loc=100, scale=15)
```

Standardnormalverteilung

- Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$
- Normalverteilung kann immer in eine Standardnormalverteilung transformiert werden

Dichte bei Standardnormalverteilung

> $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

- python: `norm.cdf(x)`

kumulative Verteilungsfunktion bei Standardnormalverteilung

> $$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy$$

- python: `norm.ppf(q)`
  (probability point function ist Umkehrung von `cdf`)

Funktionen einer Zufallsvariable

- Zu jeder Realisierung x von X gehört die Realisierung $y = g(x)$ von Y
- "Funktion als neue Funktion darstellen"
- solche Transformationen treten häufig auf

Lineare Transformationen von Zufallsvariablen

- $y = g(x) = a + bx$

> Eigenschaften von linearen Transformationen einer Zufallsvariable
>
> 1. $E(Y) = E(a + bX) = a + b(E(Y))$
> 2. $Var(Y) = Var(a + bX) = b^2 Var(X), \sigma = |b|\sigma_x$
> 3. $\alpha - \text{Quantil von Y} = q_Y(\alpha) = \alpha + bq_X(\alpha)$
> 4. $f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-a}{b}\right)$

Standardisieren einer Zufallsvariablen

- X kann immer linear transformiert werden sodass,
- Erwartungswert = 0 und
- Varianz = 1 ist.

> $E(Z) = a + bE(X) = 0$
> $Var(Z) = b^2 Var(X) = 1$
>
> Standardnormalverteilung:
>
> $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Nichtlineare Transformationen von Zufallsvariablen

> z.B. Quadratische Transformation:
>
> $$y = g(x) = x^2$$
>
> Wie sonst auch:
>
> $$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_y(y) dy$$

Funktionen von mehreren Zufallsvariablen

- z.B. gleiche Grösse mehrmals messen
- Messungen $x_1, x_2, ..., x_n$ werden als Realisierungen $X_1, X_2, ..., X_n$ dargestellt
- X_i ist die i-te Wiederholung von unserem Zufallsexperiment

> Summe:
>
> $$S_n = X_1 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
>
> arithmetisches Mittel:
>
> $$\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$$

- Das arithmetische Mittel der Daten $\overline{x}_n$ ist eine Realisierung der Zufallsvariablen $\overline{X_n}$