

HOCHSCHULE MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR INFORMATIK UND MATHEMATIK

Praktikumsaufgabe 4

in der Vorlesung

Computational Geometry

Konvexe Hüllen mit qhull

Team:	Christopher Hinz, Tobias Gruber
Studiengruppe:	Master Informatik
Studiensemester:	1. Semester
Schwerpunkt:	Embedded Computing

20. Juni 2022

Sommersemester 2022

1 Einführung

Installieren Sie das Programm `qhull`, erzeugen Sie zufällige Punktmengen und berechnen Sie mit `qhull` konvexe Hüllen, auch in höheren Dimensionen (`qhull` bringt ein Werkzeug zur Erzeugung von Punktmengen mit). Plotten Sie die Zeiten für zunehmende Punktzahlen bei unterschiedlichen Dimensionen (2-8). Versuchen Sie, die Ausgaben von `qhull` bei "geschwätzigster" Einstellung nachzuvollziehen, zu verstehen und ggf. mit Inhalten dieser Lehrveranstaltung in Einklang zu bringen.

2 Funktionen von `qhull`

`Qhull` bietet 6 verschiedene Programme an:

- `qconvex`: convex hulls
- `qdelaunay`: Delaunay triangulations and furthest-site Delaunay triangulations
- `qhalf`: halfspace intersections about a point
- `qhull`: all structures with additional options
- `qvoronoi`: Voronoi diagrams and furthest-site Voronoi diagrams
- `rbox`: generate point distributions for `qhull`

Im Zuge dieses Praktikums werden wir sowohl `rbox`, zur Erzeugung von Punktmengen nutzen, als auch `qconvex`, zur Berechnung der konvexe Hüllen, nutzen. `Qhull` nutzt hierbei den, in der Vorlesung besprochenen, Quick Hull Algorithmus. Dieser teilt für die Berechnung der konvexen Hülle die Punktmengen nach dem "divide and conquer" Prinzip auf. Hierbei dienen jeweils die Extrempunkte (z.B maximaler und minimaler x-Wert für erste Teilung) als Kriterien zur Teilung der Punktmenge. Als Ergebnis des Algorithmus erhält man die Hyperebenen, die die konvexe Hülle bilden.

2.1 `rbox`

Das Programm `rbox` generiert zufällige oder reguläre Punkte. Standardmäßig innerhalb eines Würfels (es sei denn die Optionen 's', 'x', oder 'y' werden übergeben). Einige Beispiele zur Erzeugung von Punktmengen sind:

- `rbox 10 D3`: erzeugt 10 Punkte in 3D
- `rbox 15 D4`: erzeugt 15 Punkte in 4D
- `rbox 10 D2`: erzeugt 10 Punkte auf einem 2D Kreis
- `rbox 100 W0`: erzeugt 100 Punkte auf der Oberfläche eines Würfels

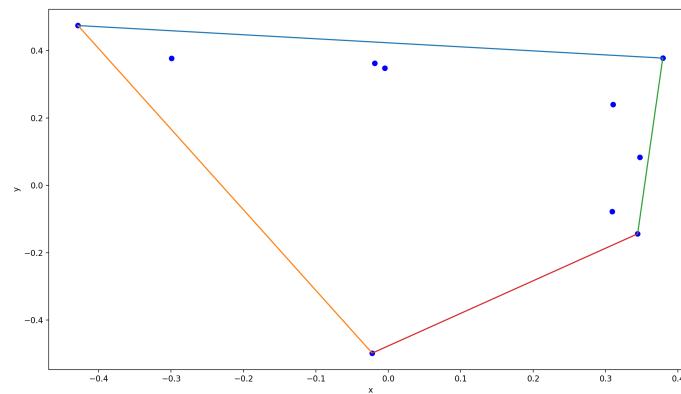
2.2 Beispiele

Bevor auf Details von `qconvex` eingegangen wird, sollen zwei kurze Beispiele die Eingabedaten und die Ergebnisse der Berechnung visualisieren.

Zur Demonstration der Funktion von `qconvex` sollen Zufallsdaten und deren konvexe Hülle visualisiert werden. Hierzu wurde ein Python-Skript implementiert das die Datenpunkte plottet und aus den Ergebnissen von `qconvex` die Hyperebenen zeichnet.

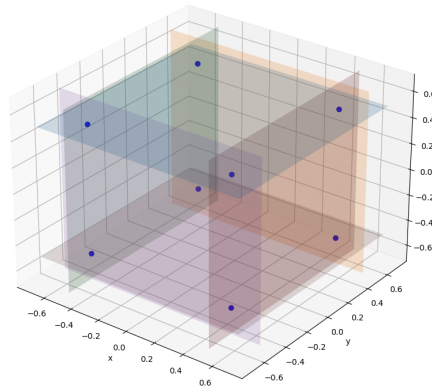
Punkte und konvexe Hülle in 2 Dimensionen

Im erste Beispiel werden die Datenpunkte in 2 Dimensionen erzeugt und eingelesen und deren Hyperebenen (Geraden) mit `qconvex` berechnet. Der nachfolgende Plot zeigt dies:



Punkte und konvexe Hülle in 3 Dimensionen

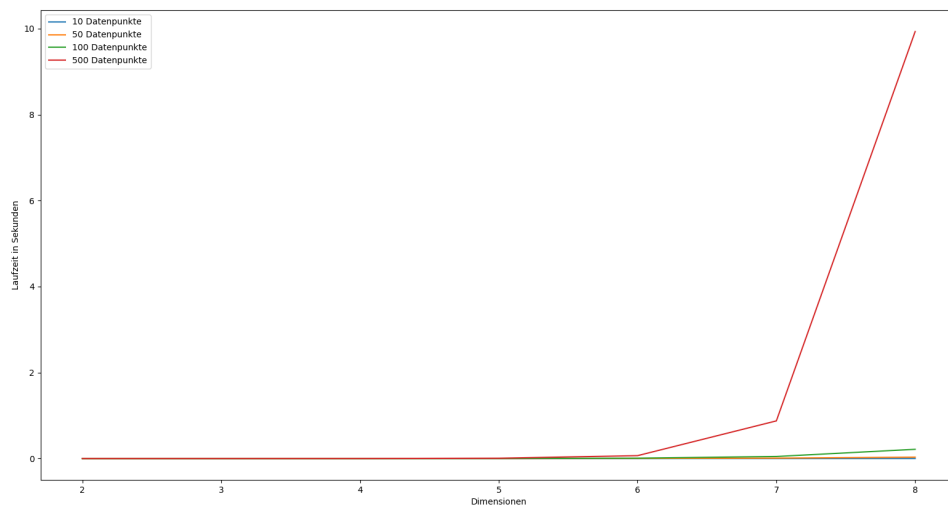
Im zweiten Beispiel werden die Datenpunkte in 3 Dimensionen erzeugt und eingelesen und ebenfalls die Hyperebenen (Ebenen) mit `qconvex` berechnet. Auch dies ist untenstehend mit `matplotlib` visualisiert:



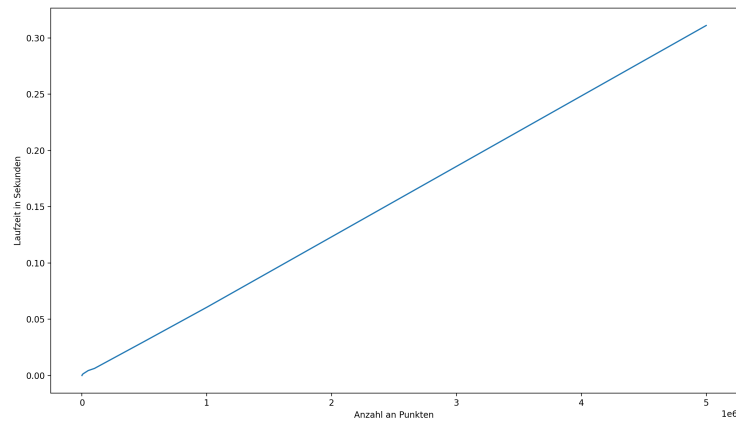
2.3 Zeitmessung

Es soll die Laufzeit des Algorithmus für verschiedene Punktmengen in unterschiedlichen Dimensionen gemessen werden. Eine Zeitangabe ist bei der Ausgabe der Zusammenfassung des Ergebnisses enthalten. Die Zusammenfassung erhält man durch die `qconvex` Option `'s'`. Das Ergebnis der Messungen ist untenstehend grafisch und tabellarisch dargestellt.

Dimension	2D	3D	4D	5D	6D	7D	8D
Laufzeit in s	2.3e-05	3.4e-05	3.5e-05	4.2e-05	5.8e-05	6.2e-05	4.8e-05
	3e-05	6.3e-05	0.000186	0.000832	0.003005	0.009608	0.03245
	3.6e-05	7.8e-05	0.000298	0.001947	0.009298	0.04809	0.2151
	0.000116	0.00021	0.000907	0.007799	0.06736	0.876	9.933



Mit dem Quick Hull Algorithmus wird eine Komplexität von $\Omega(n * \log(k))$ erreicht. Dies soll zusätzlich veranschaulicht werden. Hierzu wurden die Zeiten bei zunehmender Punktmenge in 2 Dimensionen aufgetragen. Das folgende Bild zeigt dies. Es ist gut zu erkennen, dass ein annähernd linearer Zusammenhang besteht. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass auch für hohe Punktzahlen eine geringe Anzahl an Kanten berechnet werden (z.B. 46 Kanten bei 1.000.000 Punkten). Dadurch ist der Ausdruck $\log(k)$ annäherung konstant und erklärt damit den Verlauf der Kurve.



2.4 qconvex

Im Folgenden sollen die Ausgaben bzw. die Ergebnisse von qconvex genauer betrachtet werden. Die bereits erwähnt stellt qconvex Informationen über die Hyperebenen der konvexen Hülle über eine Punktmengen bereit. Wie diese Informationen ausgegeben und interpretiert werden müssen soll nachfolgend genauer betrachtet werden.

Normalenvektoren der Hyperebenen

Eine mögliche Ausgabe von qconvex sind die Normalenvektoren der Hyperebenen, also in der Hesseschen Normalenform. Die Normalenvektoren können über die Option 'n' ausgegeben werden. Für jede berechnete Hyperebene erhält man jeweils den Normalenvektor und den Abstand der Hyperebene vom Ursprung. Mit Hilfe dieser Parametern lassen sich die Hyperebenen darstellen.

In 2 Dimensionen erhält man 3 Parameter pro Hyperebene (Gerade). Die zwei ersten sind die Koordinaten des Normalenvektors, der dritte entspricht dem Abstand zum Ursprung. Diese repräsentieren die Parameter der Hesseschen Normalenform wie folgt:

$$g : n_1 * x + n_2 * y + d = 0 \text{ mit Normalenvektor: } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}, d \hat{=} \text{Abstand}$$

Für oben gezeigte Beispiel in zwei Dimensionen erhält man die folgende Ausgabe:

```
0.1187746524595787 0.9929212365203528 -0.4203231200255335
-0.9227096915324942 -0.3854955578888162 -0.2124714536362973
0.9977929883946747 -0.06640144810487485 -0.3530963274142334
0.6949453872092842 -0.7190625207842071 -0.3426299574618282
```

Listing 1: Ausgabe von qconvex mit Option 'n'

Hieraus lassen sich nun die 4 Geradengleichungen aufstellen:

- $g_1 : 0.1187746524595787 * x + 0.9929212365203528 * y - 0.4203231200255335 = 0$
- $g_2 : -0.9227096915324942 * x - 0.3854955578888162 * y - 0.2124714536362973 = 0$
- $g_3 : 0.9977929883946747 * x - 0.06640144810487485 * y - 0.3530963274142334 = 0$
- $g_4 : 0.6949453872092842 * x - 0.7190625207842071 * y - 0.3426299574618282 = 0$

In 3 Dimensionen erhält man entsprechend 4 Parameter pro Hyperebene (Ebene). Die drei ersten sind die Koordinaten des Normalenvektors, der vierte entspricht dem Abstand zum Ursprung. Diese entsprechen den Parametern einer Ebene in der Hesseschen

Normalenform:

$$e : n_1 * x + n_2 * y + n_3 * z + d = 0 \text{ mit Normalenvektor: } \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, d \hat{=} \text{Abstand}$$

Auch hier können analog zum Vorgehen in 2 Dimensionen alle Ebenengleichungen aufgestellt werden.

Das selbe gilt auch für alle höheren Dimensionen. Auch hier entspricht der letzte Parameter der Ausgabe jeweils dem Abstand zum Ursprung und alle weiteren Parameter sind die Koordinaten des Normalenvektors.

Punkte der Hyperebenen

Eine weitere mögliche Ausgabe sind die Koordinaten der Punkte welche die Hyperebene aufspannen. Diese können über die Option 'o' ausgegeben werden. Die Ausgabe besteht hier aus einem Teil der bestimmte Vertices definiert und einem Teil der die Vertices den Facetten/Hyperebenen zuordnet. Die entsprechende Ausgabe für das Beispiel in 2 Dimensionen sieht folgendermaßen aus:

```

-0.02222276248244826 -0.4979727817680433 // Index 0
-0.4285431913366012 0.4745826469497594 // Index 1
0.3105396575392593 0.2400179190933871 // ...
-0.01883958887200765 0.3630260628303755
0.3790312361708201 0.3779794437605696
-0.2994955874043476 0.3776609263174803
0.3471817493878135 0.08365533089605659
-0.00485819764887746 0.3482682405489201
0.3443122672329771 -0.1437312230875075
0.309330780347186 -0.07758103877080702
2 4 1
2 1 0
2 8 4
2 0 8

```

Listing 2: Ausgabe von qconvex mit Option 'o'

Der untere Teil gibt als erstes die Anzahl an Vertices an, gefolgt von der Nummer bzw. Index des entsprechenden Vertex. So bedeutet die erste Zeile, dass die 2 Vertices der ersten Hyperebene durch eine Gerade durch die Punkten 4 und 1 definiert ist.

Damit ist jede Gerade in der folgenden Form definiert:

$$\vec{x} = \vec{s} + \lambda * (\vec{t} - \vec{s}) \text{ mit } \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

In drei Dimensionen ist die Ebene durch drei Punkte aufgespannt und ist definiert durch:

$$\vec{x} = \vec{s} + \lambda_1 * (\vec{t} - \vec{s}) + \lambda_2 * (\vec{r} - \vec{s}) \text{ mit } \vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Das selbe gilt auch hier wieder analog für höhere Dimensionen.

Kombinierte Information der Hyperebenen

Die letzte zu erwähnende Option stellt beide oben erwähnten Repräsentationen der Hyperebenen zusammen und formatiert dar. Zur Ausgabe wird die *qconvex* Option 'f' genutzt:

```
Vertices and facets:
- p4(v2):  0.38  0.38
- p1(v1): -0.43  0.47
- p0(v3): -0.022 -0.5
- p8(v4):  0.34 -0.14
- f1
  - flags: top simplicial
  - normal:  0.1188  0.9929
  - offset: -0.4203231
  - vertices: p4(v2) p1(v1)
  - neighboring facets: f2 f4
- f2
  - flags: bottom simplicial
  - normal:  -0.9227 -0.3855
  - offset: -0.2124715
  - vertices: p0(v3) p1(v1)
  - neighboring facets: f1 f5
- f4
  - flags: top simplicial
  - normal:  0.9978 -0.0664
  - offset: -0.3530963
  - vertices: p8(v4) p4(v2)
  - neighboring facets: f1 f5
- f5
  - flags: bottom simplicial
  - normal:  0.6949 -0.7191
  - offset:  -0.34263
  - vertices: p8(v4) p0(v3)
  - neighboring facets: f2 f4
```

Listing 3: Ausgabe von *qconvex* mit Option 'f'

Auch hier sind die Informationen über die Hyperebene als Punkte der Hyperebene und als Normalenvektoren und Abstand gegeben.