

## 第2章 三轮全向移动机器人建模

### 2.1 引言

移动机器人的数学模型建立是进行轨迹规划、控制系统设计和性能分析的重要基础。在移动机器人领域中，全向轮移动机器人由于其独特的机械结构设计，在运动学和动力学特性上都显著区别于传统的差速轮式或阿克曼转向的移动机器人系统。具体而言，全向轮通过其周向均匀分布的被动小轮实现横向运动的能力，从而使得机器人整体可以实现全向移动，即在平面内可以同时完成任意方向的平移运动和自转运动，无需复杂的转向过程。然而，由于多个全向轮之间存在耦合作用，使得系统的动力学特性较为复杂，影响控制器设计的有效性。

因此，建立准确的数学模型对于全向轮移动机器人的控制系统设计具有重要的理论和实践意义。在具体的建模过程中，通常需要综合考虑运动学模型和动力学模型两个层面。运动学模型主要描述机器人的位置、姿态与各轮速度之间的映射关系，而动力学模型则进一步考虑系统的惯性特性、摩擦力等因素，建立驱动力矩与加速度之间的关系。

基于以上分析，本章。。。 (具体的内容概述) 这种多层次的建模方法有助于全面描述系统特性，为后续的控制系统设计奠定坚实基础。

### 2.2 基于速度分解原理的运动学模型构建

三轮全向移动机器人的结构原理简图如图2.1所示。在机械结构上，机器人配备三个等间距分布的全向轮，轮间夹角为  $\pi/3$ ，每轮均装配轮毂电机实现驱动。该机器人采用双坐标系统进行运动描述，全局坐标系为固定于地面的  $XY$  坐标系，局部坐标系为固定于机器人中心的  $X_R Y_R$  坐标系。机器人的重心位于中心点  $P$  处，各车轮质量均集中分布于其轮心位置。其他物理量定义如表2.1所示。

下面在  $X_R Y_R$  坐标系下，推导三轮全向机器人的运动学方程。对于轮 1，由轮速  $\dot{\psi}_1$  提供的运动线速度可以表示为  $-\dot{\psi}_1 r$ ，将质心速度  $\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R$  分解在由轮 1 提供的线速度方向上，可以得到

$$-\dot{\psi}_1 r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dot{X}_R + \frac{1}{2} \dot{Y}_R + \omega L \quad (2.1)$$

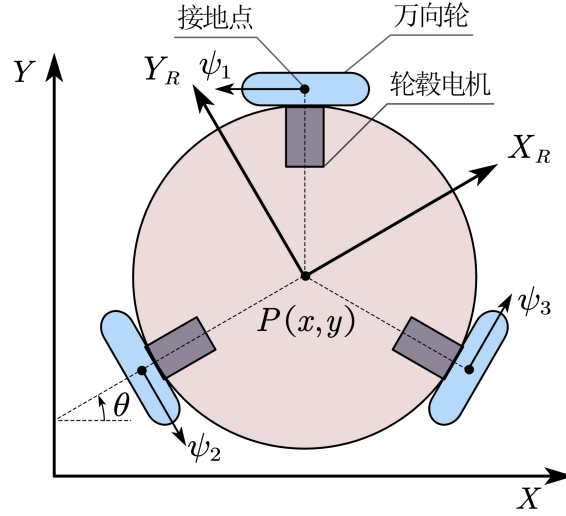


图 2.1 三轮全向机器人结构简图

表 2.1 三轮全向移动机器人的物理量

| 物理量                               | 含义                                  | 单位                           |
|-----------------------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| $m_1$                             | 单个车轮的质量                             | kg                           |
| $I_1$                             | 单个车轮的转动惯量                           | $\text{N} \times \text{m}^2$ |
| $r$                               | 单个车轮的半径                             | m                            |
| $\psi_1, \psi_2, \psi_3$          | 车轮的旋转角度                             | rad                          |
| $\tau_{f1}, \tau_{f2}, \tau_{f3}$ | 轮毂电机的力矩                             | $\text{N} \times \text{m}$   |
| $m_2$                             | 车身（不含车轮和载荷）的质量                      | kg                           |
| $I_2$                             | 车身（不含车轮和载荷）的惯转动惯量                   | $\text{N} \times \text{m}^2$ |
| $L$                               | 车身（不含车轮和载荷）的半径                      | m                            |
| $x$                               | 三轮全向机器人在 $XY$ 坐标系下, $X$ 方向位置        | m                            |
| $y$                               | 三轮全向机器人在 $XY$ 坐标系下, $Y$ 方向位置        | m                            |
| $\theta$                          | 三轮全向机器人在 $XY$ 坐标系下的偏航角              | rad                          |
| $x_R$                             | 三轮全向机器人在 $X_R Y_R$ 坐标系下, $X_R$ 方向位置 | m                            |
| $y_R$                             | 三轮全向机器人在 $X_R Y_R$ 坐标系下, $Y_R$ 方向位置 | m                            |
| $\theta_R$                        | 三轮全向机器人在 $X_R Y_R$ 坐标系下的偏航角         | rad                          |

同理，对于轮 2 和轮 3，可以得到

$$-\dot{\psi}_2 r = -\dot{Y}_R + \omega L \quad (2.2)$$

$$-\dot{\psi}_3 r = \frac{\sqrt{3}}{2} \dot{X}_R + \frac{1}{2} \dot{Y}_R + \omega L \quad (2.3)$$

将公式2.1-公式2.3合并写成矩阵形式，可以得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 r \\ \dot{\psi}_2 r \\ \dot{\psi}_3 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \\ 0 & 1 & -L \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta}_R \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

由于我们需要构建在地面坐标系  $XY$  下的运动学模型，所以需要进一步讨论  $X_R Y_R$  坐标系与  $XY$  坐标系之间的关系。由于机器人的偏航角为  $\theta$ ，可以得到  $X_R Y_R$  坐标系与  $XY$  坐标系的旋转角为  $\theta$ 。根据速度运动学，同一质点在  $X_R Y_R$  坐标系的速度  $[\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R]^\top$  和  $XY$  坐标系下的速度  $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^\top$  有如下关系

$$[\dot{x}_R, \dot{y}_R, \dot{\theta}_R]^\top = R(\theta)^{-1} [\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}]^\top \quad (2.5)$$

其中，

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

将公式2.5带入公式2.4，可以得到三轮全向机器人在  $XY$  坐标系下的运动学方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_1 r \\ \dot{\psi}_2 r \\ \dot{\psi}_3 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) & -\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) & -L \\ -\sin \theta & \cos \theta & -L \\ \sin(\theta - \frac{\pi}{3}) & -\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) & -L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

## 2.3 基于扩展 Rosenberg 约束嵌入法的动力学模型构建

### 2.3.1 扩展 Rosenberg 约束嵌入法理论基础

扩展 Rosenberg 约束嵌入法是一种针对非完整机械系统动力学建模的改进方法。该方法在原有 Rosenberg 嵌入法的基础上，引入了约束方程的二阶形式（即约束条件的二次微分表达式），将一阶约束和二阶约束进行整合。这种整合使得所建立的动力学模型既保持了无需辅助变量的优点，又便于对各个自由度进行解耦。这使得该方法特别适用于结构复杂的机械系统动力学建模。

扩展 Rosenberg 约束嵌入法研究的对象是一个由  $s$  个质点或刚体组成的机械系统，该系统可以用广义坐标向量  $q \in \mathbb{R}^n$  来表示系统的广义位移状态，根据分析力学，系统的动力学方程可以统一表达为

$$M\ddot{q} = F \quad (2.8)$$

其中,

$$F := -\dot{M}\dot{q} - N^\top \dot{q} + \frac{\partial T}{\partial q} + Q \quad (2.9)$$

其中,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为系统惯性矩阵,  $N^\top \dot{q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  表示科氏力,  $Q \in \mathbb{R}^n$  为系统外力,  $T$  为系统能量。为了简化后续问题的分析, 我们假设

**假设 2.1.** 机械系统的质量矩阵  $M$  为对称正定矩阵。

当系统受到  $l(l < n)$  个非完整约束时, 这些约束可以用二阶形式表示为:

$$A\ddot{q} = b, \quad (2.10)$$

为了简化后续问题的分析, 我们假设

**假设 2.2.** 机械系统的约束方程 2.10 相互独立。

在这种情况下, 该机械系统适用于扩展 Rosenberg 约束嵌入法。

**定理 2.1** (扩展 Rosenberg 约束嵌入法). 若机械系统满足假设 2.1 和假设 2.2, 则该系统具有  $l$  个独立的广义坐标变量, 通过重排将这些变量置于广义坐标向量  $q$  的前端。因此, 该机械系统的动力学模型可表示为:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= A_1^{-1}b - KX^{-1}(F_2 + K^\top M_{11}A_1^{-1}b - K^\top F_1 + M_{21}A_1^{-1}b) \\ \ddot{q}_2 &= X^{-1}(F_2 + K^\top M_{11}A_1^{-1}b - K^\top F_1 - M_{21}A_1^{-1}b) \end{aligned} \quad (2.11)$$

其中, (1) 系统惯性矩阵  $M$  可以被分解为  $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ , 子矩阵满足如下维度要求:  $M_{11} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ ,  $M_{12} \in \mathbb{R}^{l \times (n-l)}$ ,  $M_{12} = M_{21}^\top$  以及  $M_{22} \in \mathbb{R}^{(n-l) \times (n-l)}$ ; (2) 矩阵  $A$  可以被分解为  $[A_1, A_2]$ , 子矩阵满足如下维度要求:  $A_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$  以及  $A_2 \in \mathbb{R}^{l \times (n-l)}$ ; (3) 广义坐标向量  $q$  可以被分解为  $[q_1^\top, q_2^\top]^\top$ , 子向量满足如下维度要求:  $q_1 \in \mathbb{R}^l$  以及  $q_2 \in \mathbb{R}^{(n-l)}$ ; (4) 向量  $F$  可以被分解为  $[F_1^\top, F_2^\top]^\top$ , 子向量满足如下维度要求:  $F_1 \in \mathbb{R}^l$  以及  $F_2 \in \mathbb{R}^{(n-l)}$ ; (5) 系统外力向量  $Q$  可以被分解为  $[Q_1^\top, Q_2^\top]^\top$ , 子向量满足如下维度要求:  $Q_1 \in \mathbb{R}^l$  以及  $Q_2 \in \mathbb{R}^{n-l}$ ; (6) 矩阵  $K$  的定义如下:  $K := A_1^{-1}A_2$ ; (7) 矩阵  $X$  的定义如下:  $X := K^\top M_{11}K - K^\top M_{12} - M_{21}K + M_{22}$ 。

注 1. 扩展 Rosenberg 嵌入法的核心思想在于将非完整约束以二阶形式嵌入到虚位移和基本方程中, 从而获得一个易于计算的机械系统动力学模型。因此, 系统状态变量被分类为  $l$  个可直接控制的变量和  $n-l$  个需要间接控制的变量。这两个方程之间不

存在耦合，因此，该方法确保了系统动力学模型可以在低维度下进行计算，获得更高的计算效率。

### 2.3.2 基于扩展 Rosenberg 约束嵌入法的动力学模型构建

针对本文研究的三轮全向机器人，令其状态变量  $q = [\psi_1, \psi_2, \psi_3, x, y, \theta]^\top$ ，控制变量  $\tau_f = [\tau_{f1}, \tau_{f2}, \tau_{f3}]^\top$ ，根据分析力学，其动力学方程可以写作

$$M\ddot{q} = F + B\tau_f \quad (2.12)$$

其中，(1)  $B = [0_{3 \times 3}, I_{3 \times 3}]^\top$  用于调整  $\tau_f$  的维度使其与系统匹配；(2) 三轮全向机器人的惯性矩阵  $M = \text{diag}(I_1, I_1, I_1, 3m_1 + m_2, 3m_1 + m_2, 3m_1L^2 + I_2)$ 。由于针对三轮全向机器人来说， $-\dot{M}\dot{q} - N^\top\dot{q} + \frac{\partial T}{\partial q} = 0$ ，我们可以得到  $F = Q$ 。

接着，我们对广义外力向量  $Q$  做进一步分析。 $Q$  来源于滚动摩擦和滑动摩擦导致的力与力矩，假设在固定场景非静止工况下，滚动摩擦和滑动摩擦导致的力与力矩不随工况的改变而改变，则  $Q$  可以表示为

$$Q = [-\text{sgn}(\dot{\phi}_1)f_1, -\text{sgn}(\dot{\phi}_2)f_1, -\text{sgn}(\dot{\phi}_3)f_1, -\text{sgn}(\dot{x})f_2, -\text{sgn}(\dot{y})f_2, -\text{sgn}(\dot{\theta})f_3]^\top \quad (2.13)$$

其中，(1)  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数；(2)  $f_1$  表达滚动摩擦和滑动摩擦对轮子转动的影响；(3)  $f_2$  表达滚动摩擦和滑动摩擦对车身质心平动的影响；(4)  $f_3$  表达滚动摩擦和滑动摩擦对车身质心转动的影响。

对于系统受到的约束，即为上一小节得到的运动学约束，对公式2.7求导，可以得到运动学约束的二阶表达形式

$$A\ddot{q} = b \quad (2.14)$$

其中，

$$(1) A = \begin{bmatrix} -r & 0 & 0 & \sin(\theta + \pi/3) & -\cos(\theta + \pi/3) & -L \\ 0 & -r & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & -L \\ 0 & 0 & -r & \sin(\theta - \pi/3) & -\cos(\theta - \pi/3) & -L \end{bmatrix};$$

$$(2) b = \begin{bmatrix} -\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta + \pi/3) - \dot{y}\dot{\theta}\sin(\theta + \pi/3) \\ \dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{y}\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta - \pi/3) - \dot{y}\dot{\theta}\sin(\theta - \pi/3) \end{bmatrix}$$

三轮全向机器人满足假设2.1和假设2.2根据定义2.1中引入的扩展 Rosenberg 约束

嵌入法，三轮全向机器人的动力学模型可以表达为

$$\begin{aligned}\ddot{q}_1 &= A_1^{-1}b - KX^{-1}(F_2 + K^\top M_{11}A_1^{-1}b - K^\top(F_1 + \tau_f)) \\ \ddot{q}_2 &= X^{-1}(F_2 + K^\top M_{11}A_1^{-1}b - K^\top(F_1 + \tau_f))\end{aligned}\quad (2.15)$$

其中，(1) 状态变量  $q$  被分解成如下子向量： $q_1 = [\psi_1, \psi_2, \psi_3]^\top$  以及  $q_2 = [x, y, \theta]^\top$  (2)

质量矩阵  $M$  被分解成如下子矩阵： $M_{12} = M_{21} = 0_{3 \times 3}$ ， $M_{11} = \text{diag}(I_1, I_1, I_1)$  以及

$M_{22} = \text{diag}(3m_1 + m_2, 3m_1 + m_2, 3m_1l^2 + I_2)$ ；(3) 矩阵  $A$  被分解成如下子矩阵：

$$A_1 = \begin{bmatrix} -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \text{ 以及 } A_2 = \begin{bmatrix} \sin(\theta + \pi/3) & -\cos(\theta + \pi/3) & -L \\ -\sin\theta & \cos\theta & -L \\ \sin(\theta - \pi/3) & -\cos(\theta - \pi/3) & -L \end{bmatrix};$$

(4)  $F$  被分解成如下子矩阵： $F_1 = [-\text{sgn}(\dot{\phi}_1)f_1, -\text{sgn}(\dot{\phi}_2)f_1, -\text{sgn}(\dot{\phi}_3)f_1]^\top$  以及

$F_2 = [-\text{sgn}(\dot{x})f_2, -\text{sgn}(\dot{y})f_2, -\text{sgn}(\dot{\theta})f_3]^\top$ ；(5)  $K = A_1^{-1}A_2$ ；(6)  $X = K^\top M_{11}K + M_{22}$ 。

注 2. 针对给定的三轮全向机器人及其运动环境，上述矩阵都可以被唯一确定。

### 2.3.3 仿真结果及对比分析

## 2.4 本章小结