Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Lineare Algebra I
Wintersemester 25/26

Prof. Dr. C. Schweigert
Dr. T. Zorman
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Blatt 12

Zur Abgabe am Montag, dem 19.01.26.

Wie in Definition 3.2.12.3 bezeichne $E_n = (\delta_{ij})$ die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

Problem 12.1 [$2 + 2$ Punkte]
Eine $(n \times n)$-Matrix A heißt *nilpotent*, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $A^k = 0$ gilt. Sei A eine nilpotente $(n \times n)$-Matrix. Zeigen Sie:

(a) Die Matrix A besitzt kein Inverses.
(b) Die Matrix $E_n - A$ ist invertierbar. Geben Sie das Inverse an.

Problem 12.2 [$2 + 2$ Punkte]
In dieser Aufgabe identifizieren wir die komplexen Zahlen mit einem Unterring des Matrixringes $M(2\times 2, \mathbb{R})$: Dazu fassen wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf und betrachten den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{C} &\to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}), \\ z &\mapsto \phi(z), \qquad\qquad \text{wobei } \phi(z)(w) := z \cdot w \text{ für alle } w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass es einen injektiven Ringhomomorphismus $F\colon \mathbb{C} \to M(2\times 2, \mathbb{R})$ gibt, indem sie die darstellende Matrix M_z von $\phi(z)$ bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $\{1, i\}$ von $\mathbb{C}$ bestimmen.

(b) Bestimmen Sie das Bild von F und geben Sie eine Matrix an, die nicht im Bild liegt.

Problem 12.3 [2 Punkte]
Sei V ein K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f\colon V \to V$ heißt *idempotent* falls $f \circ f = f$ gilt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Vektorraum V als direkte Summe $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$ geschrieben werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie auch die Abbildung $\mathrm{id}_V - f$.

Problem 12.4 [2 Punkte]
Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann idempotent ist, wenn es eine geordnete Basis $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_m)$ von V gibt, sodass die darstellende Matrix $M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(f)$ die Form

$$\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat.

Problem 12.5 [1 + 2 + 2 Punkte]
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Menge $\{\cos(2x), \cos^2(x), \sin^2(x)\}$ ist linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) Sei $(f_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie von reellen Polynomen. Dann ist auch

$$\{e^x\} \cup \{f_i\}_{i\in I}$$

linear unabhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Wir schreiben $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N}_{\geq 1}$ für die Menge der positiven natürlichen Zahlen und $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}$ für den $\mathbb{R}$-Vektorraum von Folgen $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ von reellen Zahlen. Für $i \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} s_i : \mathbb{R}^{\mathbb{N}_+} &\to \mathbb{R}^{\mathbb{N}_+} \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) &\mapsto (x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots). \end{aligned}$$

(c) Die Menge $\{s_i\}_{i\in\mathbb{N}_+}$ ist linear unabhängig in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}_+}, \mathbb{R}^{\mathbb{N}_+})$.

Problem 12.6 [3 + 2 Punkte]
Eine *strikte obere Dreiecksmatrix* ist eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, K)$, definiert durch

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i < j \\ 0, & \text{für } i \geq j. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass es für jede strikte obere Dreiecksmatrix A ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$.

Hinweis: Überlegen Sie sich in welchem Untervektorraum das Bild Ae_k liegt, wobei e_k der k-te Standardbasisvektor ist.

(b) Beweisen Sie:

$$n = \min\{\, k \in \mathbb{N} \mid A^k = 0, \text{ für alle strikten oberen Dreiecksmatrizen } A \in \mathrm{M}(n \times n, K)\,\}.$$