

Mathematik 3 für den Lehramtsstudiengang Sekundarstufe

Wintersemester 2023/24

Christoph Schweigert

Universität Hamburg

Fachbereich Mathematik

Bereich Algebra und Zahlentheorie

(Stand: 31.01.2024)

Inhaltsverzeichnis

1	Determinanten	1
1.1	Wiederholung zur Linearen Algebra	1
1.2	Das Vektorprodukt des \mathbb{R}^3	5
1.3	Axiomatische Beschreibung der Determinante	10
2	Diagonalisierbare Abbildungen	16
2.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	16
2.2	Diagonalisierbarkeit	18
3	Stetige Funktionen	22
3.1	Wiederholung	22
3.2	Extremalsatz und gleichmäßige Stetigkeit	30
4	Der Fundamentalsatz der Algebra	32
4.1	Beweis	33
5	Differenzierbarkeit	36
5.1	Definition	36
5.2	Ableiten und lineare Approximation	38
5.3	Rechenregeln für Ableitungen	39
5.4	Höhere Ableitungen	43
6	Der Mittelwertsatz und seine Konsequenzen	44
6.1	Extrema und der Mittelwertsatz	44
6.2	Konvexe Funktionen	48
6.3	Wendepunkte	54
6.4	Die Regel von L'Hôpital	56
7	Das Riemann-Integral	59
7.1	Treppenfunktionen	59
7.2	Riemann-Integrierbarkeit	62
7.3	Eigenschaften des Integrals	66
7.4	Differentiation und Integration	76
7.5	Uneigentliche Integrale	81

8	Euklidische und unitäre Räume	83
8.1	Skalarprodukte und Normen	83
8.2	Orthogonalität	86
8.3	Adjungierte Abbildungen	92
9	Spektraltheorie	95
9.1	Der selbstadjungierte Fall	96
9.2	Normalform symmetrischer und hermitescher Matrizen	98
9.3	Normalformen normaler, unitärer und orthogonaler Endomorphismen	98
9.4	Positive und negative Definitheit	100
10	Gleichmäßige Konvergenz	101
10.1	Wiederholung	101
10.2	Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit	102
10.3	Gleichmäßige Konvergenz und Integration	103
10.4	Gleichmäßige Konvergenz und Ableitungen	104
10.5	Gleichmäßige Konvergenz und Potenzreihen	105
11	Taylorentwicklung	106
11.1	Taylorpolynome und Restglieder	106
11.2	Die Taylorreihe	109
12	Gewöhnliche Differentialgleichungen	112
12.1	Beispiele	112
12.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung	114

Die aktuelle Version dieses Skriptes finden Sie unter

<http://www.math.uni-hamburg.de/home/schweigert/skripten/l3skript.pdf>

als pdf-Datei.

Bitte schicken Sie Korrekturen und Bemerkungen an christoph.schweigert@uni-hamburg.de!

Diese Notizen orientieren sich an dem Skript, das Sven-Ake Wegner im Wintersemester 2021/22 angefertigt hat; andere Teile stammen aus Birgit Richters Skript zur Linearen Algebra aus dem Wintersemester 2022/23..

1 Determinanten

1.1 Wiederholung zur Linearen Algebra

Algebraische Strukturen Wir haben bereits die folgenden algebraischen Strukturen kennen gelernt:

- Eine Gruppe ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\cdot : G \times G \rightarrow G$. Es gilt das Assoziativgesetz, es gibt ein neutrales Element, und jedes Element hat ein inverses Element. Es gilt insbesondere $(g_1 \cdot g_2)^{-1} = g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}$.
- Ringe $(R, +, \cdot)$ Es gibt zwei Verknüpfungen: $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe, (R, \cdot) assoziativ. Es gelten zwei Distributivgesetze.
- Beispiele für Ringe, die nicht Körper sind, sind die ganzen Zahlen \mathbb{Z} , die Restklassenringe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für n nicht prim, und der Polynomring $K[X]$ über einem Körper K .
- Körper sind spezielle Ringe. Wichtige Beispiele für Körper: rationale Zahlen \mathbb{Q} , reelle Zahlen, \mathbb{R} , komplexe Zahlen \mathbb{C} , für jede Primzahl p der Körper \mathbb{F}_p , der genau p Elemente hat.

Vektorräume und Untervektorräume Ein K -Vektorraum $(V, +, \cdot)$ ist über einem Körper K als Menge V mit zwei Verknüpfungen, der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation:

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad \text{und} \quad \cdot : K \times V \rightarrow V$$

definiert. Die Elemente von K heißen Skalare, die Elemente von V Vektoren. Beispiele für Vektorräume sind K^n , $K[X]$, $\text{Abb}(X, K)$, wobei X eine beliebige Menge ist.

Ein Untervektorraum ist eine Teilmenge $U \subseteq V$, die mit den durch Einschränkung induzierten Verknüpfungen wieder ein Vektorraum ist. Daraus folgt, dass der Nullvektor von V in U liegt und dass U unter Vektoraddition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

Zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ konstruiert man den Quotientenvektorraum oder Faktorraum V/U . Die Vektoren in V/U sind Äquivalenzklassen von Vektoren in V .

Basen von Vektorräumen

- Beispiel für einen Untervektorraum: sei $X \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge, dann ist das Erzeugnis oder die lineare Hülle

$$\text{span}_K X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in K, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Untervektorraum von V .

- Ein Vektorraum V wird erzeugt von der Teilmenge $X \subseteq V$, falls $V = \text{span}_K X$ gilt. Jeder Vektorraum hat ein Erzeugendensystem, aber nicht unbedingt ein endliches Erzeugendensystem.
- Eine Teilmenge von Vektoren $X \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn für jede endliche Teilfamilie v_1, \dots, v_n in X aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt.
- Eine Familie b_1, \dots, b_n ist eine Basis von V , wenn V von der Familie b_1, \dots, b_n erzeugt wird und b_1, \dots, b_n linear unabhängig ist. Das ist genau dann der Fall, wenn b_1, \dots, b_n eine maximale linear unabhängige Familie ist und genau dann, wenn b_1, \dots, b_n ein minimales Erzeugendensystem ist.

Linearkombinationen, Basis

- Ist \mathcal{B} eine Basis des Vektorraums V , so hat jeder Vektor $x \in V$ eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$$

als Linearkombination der Basisvektoren, die Basisdarstellung.

- Ist $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis des Vektorraums V , so ist $n = \dim V$, die Dimension, unabhängig von der gewählten Basis. Es gibt auch unendlich-dimensionale Vektorräume, z.B. $K[X]$.
- Der Basisauswahlsatz erlaubt es uns, aus jedem Erzeugendensystem eine Basis auszuwählen. (Diese Basis ist im Allgemeinen nicht eindeutig.)
Der Basisergänzungssatz erlaubt es, linear unabhängige Familien zu Basen zu ergänzen. Auch die Ergänzung ist im Allgemeinen nicht eindeutig.
Insbesondere hat jeder Vektorraum (mindestens) eine Basis.
- Der Schnitt zweier Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.
- Die innere Summe von Untervektorräumen ist definiert durch $W_1 + W_2 = \text{span}_K(W_1 \cup W_2)$. Ihre Dimension ist $\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K(W_1) + \dim_K(W_2) - \dim_K(W_1 \cap W_2)$.

Eine Bemerkung zum mathematischen Sprechen Der Satz

Der Schnitt zweier Untervektorräume $U_1, U_2 \subseteq V$ ist ein Untervektorraum.

enthält versteckt eine Menge All-Quantoren:

Für jeden Körper K und jeden K -Vektorraum V und jedes Paar U_1, U_2 von Untervektorräumen von V ist die Teilmenge $U_1 \cap U_2 \subseteq V$ ein Untervektorraum.

Gängige sprachliche Formulierungen für Aussagen mit

Allquantor $\forall x \in M : P(x)$	Existenzquantor $\exists x \in M : P(x)$
Für alle $x \in M$ gilt $P(x)$.	Es gibt (mindestens) ein $x \in M$ mit $P(x)$
Für jedes Element $x \in M$ gilt $P(x)$.	Es existiert (mindestens) ein $x \in M$ mit $P(x)$.
Für ein beliebiges Element $x \in M$ gilt $P(x)$.	Für ein geeignetes Element $x \in M$ gilt $P(x)$.
Sei $x \in M$ (beliebig). Dann gilt $P(x)$.	
Ist $x \in M$, dann/so gilt $P(x)$.	Man kann ein $x \in M$ wählen, so dass $P(x)$ gilt.
Wenn $x \in M$, dann folgt $P(x)$.	
Jedes Element von M erfüllt P .	Ein Element von M erfüllt P .
Alle Elemente von M erfüllen P .	Die Menge M hat ein Element x , das P erfüllt.

Matrizen

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ mit $a_{ij} \in K$ ist eine $m \times n$ -Matrix.
- Die Menge $\text{Mat}(m \times n, K)$ aller $m \times n$ -Matrizen bildet unter der eintragsweisen Addition und Streckung mit Skalaren aus K einen Vektorraum.
- Außerdem können wir Matrizen bei geeignetem Format auch multiplizieren: Zeile mal Spalte. Die Multiplikation ist *nicht* kommutativ und multiplikative Inverse existieren nicht für alle Matrizen A .

- Andere Operationen für Matrizen sind Transponieren, A^T mit $(AB)^T = B^T A^T$ eintragsweise komplex konjugieren und \bar{A} bilden, falls $K = \mathbb{C}$ ist.

Lineare Abbildungen

- Eine Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ ist K -linear, wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \quad \text{und} \quad \varphi(\lambda u) = \lambda \varphi(u)$$

- Beispiele:

1. Eine Matrix $A \in \text{Mat}(m \times n, K)$ induziert eine lineare Abbildung $K^n \rightarrow K^m$ durch Matrix-Vektor-Multiplikation, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. Jede (geordnete) Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V induziert eine lineare Bijektion

$$V \xrightarrow{\sim} K^n \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = x \mapsto x_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Jeder endlich-dimensionale K -Vektorraum ‘sieht also aus wie K^n ’ mit geeignetem $n \in \mathbb{N}$. Aber diese Identifikation hängt von der *Wahl* einer (geordneten) Basis ab.

Hauptsatz: Jede K -lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ sieht aus wie eine Matrix-Vektor-Multiplikation. Gegeben:

- $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine (geordnete) Basis von V
- $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine (geordnete) Basis von W .

so kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \varphi(x) & & \\ & & & & \\ \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ x_{\mathcal{B}} \end{array} & \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\ K^n & \dashrightarrow & K^m \end{array} & & \begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ y_{\mathcal{C}} \end{array} \\ & & & & \\ & x_{\mathcal{B}} \xrightarrow{\quad\quad\quad} M_{\mathcal{CB}}(\varphi) x_{\mathcal{B}} & & & \end{array}$$

mit der darstellenden Matrix $M_{\mathcal{CB}}(\varphi) = [\varphi(v_1)_{\mathcal{C}} \cdots \varphi(v_n)_{\mathcal{C}}]$.

Lineare Abbildungen Für K -lineare Abbildungen $\varphi : V \rightarrow W$ sahen wir:

- Urbilder von Untervektorräumen sind Untervektorräume von V und somit nie die leere Menge.
- Insbesondere ist der Kern von φ als Urbild der $0 \in W$ ein Untervektorraum von V . Die lineare Abbildung φ ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}\varphi = \{0\}$ gilt.
- Der Raum $\text{Hom}_K(V, W)$ der K -linearen Abbildungen ist ein K -Vektorraum. Sind V und W endlich-dimensionale K -Vektorräume, so gilt $\dim_K \text{Hom}_K(V, W) = \dim_K V \cdot \dim_K W$.
- Es gilt der Faktorisierungssatz: für eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ erhalten wir einen eindeutigen Isomorphismus $V/\text{Kern}\varphi \xrightarrow{\sim} \text{Bild}\varphi$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ \downarrow & & \uparrow \\ V/\text{Kern}\varphi & \xrightarrow{\sim} & \text{Bild}\varphi \end{array}$$

- Hieraus folgt insbesondere die Dimensionsformel:

$$\dim_K V - \dim_K \text{Kern}\varphi = \dim_K \text{Bild}\varphi = \text{Rang}\varphi.$$

Lineare Gleichungssysteme, Gauß Algorithmus Aus den entwickelten Begriffen folgt eine Beschreibung der Lösungsmenge

$$\text{Lsg}(A, b) := \{x \mid Ax = b\}$$

eines inhomogenen linearen Gleichungssystems:

- $\text{Lsg}(A, b) = \emptyset$ genau dann, wenn $\text{Rang}(A, b) = \text{Rang}(A) + 1$.
- $\text{Lsg}(A, b)$ ist entweder leer oder affiner Unterraum der Dimension $n - \text{Rang}A$. Man erhält alle Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems, indem man zu einer speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems alle Lösungen des zugehörigen homogenen Gleichungssystems addiert.
- Der Gauß'sche Algorithmus erlaubt es, lineare Gleichungssysteme *systematisch* zu lösen.

Determinanten für quadratische Matrizen:

- Kleinste nicht-triviale Beispiele:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \quad \text{und} \quad \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + dhc + gbf - ceg - fha - ibd,$$

Die zweite Regel heißt Sarrus-Regel.

- Leibniz-Formel: Definition für Determinanten beliebiger quadratischer Matrizen:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}\pi \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)}$$

Σ_n Menge (Gruppe! - warum?) aller Bijektionen von $\{1, \dots, n\}$ in sich, $\text{sign}\pi$ Vorzeichen der Permutation π .

Die Berechnung nach der Leibniz-Formel ist rechnerisch aufwändig.

Eigenschaften von Determinanten

- Berechnung:

- Entwicklungssätze: nach Zeilen oder Spalten

- Obere Dreiecksmatrizen: $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$

- Für eine blockdiagonale Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad \det A = \det A_1 \cdot \det A_2 .$$

- Multiplikativität: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

- A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Berechnung der inversen Matrix A^{-1} durch Streichungsmatrizen: $A_{ij}^{-1} = (\det A)^{-1} (-1)^{i+j} \det(A_{ji}^{str})$.

- Ist A eine invertible Matrix (also insbesondere eine quadratische Matrix), so kann die eindeutige Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit Hilfe der Cramerschen Regel gefunden werden:

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}$$

Endomorphismen $\varphi \in \text{End}_K(V)$: Gilt $\varphi v = \lambda v$ für ein $v \neq 0$, so heißt $\lambda \in K$ ein Eigenwert von φ und $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von φ . Der Eigenraum von φ zum Eigenwert $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum $\text{Eig}(\varphi, \lambda) := \text{Kern}(\varphi - \lambda \text{id}_V)$.

- Geometrische Vielfachheit: $\mu_{geo}(\varphi, \lambda) := \dim_K \text{Eig}(\varphi, \lambda)$

- Charakteristisches Polynom: $\text{Ch}_\varphi(X) := \det(X \text{id}_V - \varphi)$

- Eigenwerte sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms Ch_φ ; die Vielfachheit als Nullstelle heißt algebraische Vielfachheit des Eigenwerts. Es gilt für jeden Eigenwert λ :

$$1 \leq \mu_{geo}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{alg}(\varphi, \lambda) .$$

1.2 Das Vektorprodukt des \mathbb{R}^3

Definition 1.2.1. Die Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = (x, y) \mapsto x \times y = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

heißt das Vektorprodukt oder das Kreuzprodukt auf dem \mathbb{R}^3 .

Beispiele 1.2.2. Die Vektorprodukte der Standardbasisvektoren sind einfach zu berechnen:

$$e_1 \times e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2.$$

Man erhält auch:

$$e_2 \times e_1 = -e_3, \quad e_3 \times e_2 = -e_1, \quad e_1 \times e_3 = -e_2 \text{ und } e_1 \times e_1 = e_2 \times e_2 = e_3 \times e_3 = 0.$$

Zusammen mit dem Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^3 , das gegeben ist durch

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

erhalten wir folgende Rechenregeln:

Lemma 1.2.3. Für alle $u, x, y, x', y' \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

1. Das Vektorprodukt ist bilinear:

$$\begin{aligned} (\lambda x + \mu x') \times y &= \lambda(x \times y) + \mu(x' \times y), \\ x \times (\lambda y + \mu y') &= \lambda(x \times y) + \mu(x \times y'). \end{aligned}$$

2. Das Vektorprodukt ist antisymmetrisch:

$$x \times y = -y \times x.$$

3. Es gilt die Graßmann-Identität:

$$u \times (x \times y) = \langle u, y \rangle \cdot x - \langle u, x \rangle \cdot y.$$

4. Es gilt die Jacobi-Identität:

$$u \times (x \times y) + x \times (y \times u) + y \times (u \times x) = 0.$$

5. $\langle u \times x, y \rangle = \langle u, x \times y \rangle$.

Beweis. 1., 2. und 5. beweisen wir hier nicht, 3. ist eine Übungsaufgabe. Wir leiten 4. aus 3. her:

$$\begin{aligned} &u \times (x \times y) + x \times (y \times u) + y \times (u \times x) \\ &= \langle u, y \rangle \cdot x - \langle u, x \rangle \cdot y + \langle x, u \rangle \cdot y - \langle x, y \rangle \cdot u + \langle y, x \rangle \cdot u - \langle y, u \rangle \cdot x \\ &= (\langle u, y \rangle - \langle y, u \rangle) \cdot x + (\langle x, u \rangle - \langle u, x \rangle) \cdot y + (\langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle) \cdot u \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.2.4. Die Graßmann-Identität ist in der Physik auch als *bac-cab-Regel* bekannt, weil die rechte Seite sich so liest, wenn man die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nennt und die Skalare von rechts an die Vektoren heranmultipliziert:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c}\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle.$$

Wir setzen im Folgenden $||x||^2 := \langle x, x \rangle$.

Satz 1.2.5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$||x||^2 \cdot ||y||^2 = ||x \times y||^2 + \langle x, y \rangle^2.$$

Beweis. Nach Definition ist $||x \times y||^2 = \langle x \times y, x \times y \rangle$ und mit Lemma 1.2.3.5 können wir dies umformen:

$$\langle x \times y, x \times y \rangle = \langle x, y \times (x \times y) \rangle.$$

Mit der Graßmann-Identität 1.2.3.3 erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \langle x, y \times (x \times y) \rangle &= \langle x, \langle y, y \rangle \cdot x - \langle y, x \rangle \cdot y \rangle \\ &= \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle \\ &= ||y||^2 ||x||^2 - \langle y, x \rangle^2. \end{aligned}$$

□

Aus obigem Satz erhalten wir als wichtige Folgerung:

Korollar 1.2.6. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt insbesondere die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Bemerkung 1.2.7. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung stellt sicher, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt

$$\left| \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| ||y||} \right| = \frac{|\langle x, y \rangle|}{||x|| ||y||} \leq 1.$$

Wir wissen also, dass der Ausdruck $\frac{\langle x, y \rangle}{||x|| ||y||}$ Werte im Intervall $[-1, 1] := \{t \in \mathbb{R}, -1 \leq t \leq 1\}$ annimmt. Die Kosinusabbildung

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

ist bijektiv; arccos bezeichne die Umkehrabbildung

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

die also einem $t \in [-1, 1]$ einen Winkel in $[0, \pi]$ zuordnet.

Definition 1.2.8. Für $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ heißt

$$\angle(x, y) := \arccos \left(\frac{\langle x, y \rangle}{||x|| ||y||} \right)$$

der Innenwinkel von x und y .

Beispiele 1.2.9.

- Ist $y = -x$, so erhalten wir

$$\langle x, y \rangle = -\langle x, x \rangle$$

und somit

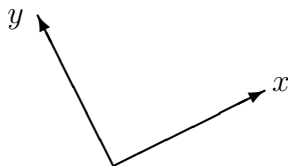
$$\angle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) = \left(\frac{-\langle x, x \rangle}{\|x\|\|x\|}\right) = \arccos(-1) = \pi.$$

- Ist $x = y$, so gilt

$$\angle(x, y) = \angle(x, x) = \arccos(1) = 0.$$

- Ist $\langle x, y \rangle = 0$ für $x \neq 0 \neq y$, so ist $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ entsprechend 90 Grad. Also stehen x und y senkrecht aufeinander. Wir sagen auch, dass x und y *orthogonal* zueinander sind.

Zum Beispiel ist $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ immer orthogonal zu $y = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Bemerkung 1.2.10. Wegen der Antisymmetrie gilt für alle $x \in \mathbb{R}^3$, dass

$$x \times x = -x \times x$$

und damit muss $x \times x = 0$ sein. Damit gilt aber ebenfalls

$$\langle x, x \times y \rangle \stackrel{1.2.3.5}{=} \langle x \times x, y \rangle = 0.$$

Dies bedeutet, dass $x \times y$ immer senkrecht auf x steht. Genauso folgt, dass $x \times y$ senkrecht auf y steht. Wir benutzen die Notation $x \perp y$ wenn x senkrecht auf y steht:

$$x \perp (x \times y) \quad \text{und} \quad y \perp (x \times y).$$

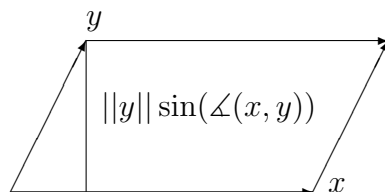
Welche Länge hat $x \times y$? Wir erhalten mit Satz 1.2.5, dass

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$$

ist. Wir formen dies weiter um zu

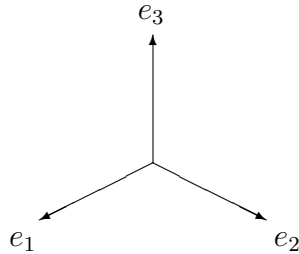
$$\begin{aligned} \|x \times y\|^2 &= \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 \\ &= \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2(\angle(x, y))) \\ &= \|x\|^2\|y\|^2(\sin^2(\angle(x, y))). \end{aligned}$$

Damit ist $\|x \times y\|$ der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelograms.



Man kann sich merken, in welche Richtung das Vektorprodukt $x \times y$ zeigt, indem man die rechte-Hand-Regel benutzt: Entspricht x dem Daumen und y dem Zeigefinger der rechten Hand, dann entspricht $x \times y$ dem Mittelfinger.

Wem das zu kompliziert ist, der kann sich auch lediglich den Fall $e_1 \times e_2 = e_3$ merken:



Definition 1.2.11. Es sei (x, y, z) eine geordnete Basis des \mathbb{R}^3 . Für $p \in \mathbb{R}^3$ heißt

$$P := \{p + \lambda x + \mu y + \nu z \mid 0 \leq \lambda, \mu, \nu \leq 1\}$$

das von (x, y, z) aufgespannte Parallelotop (oder Spat) an p .

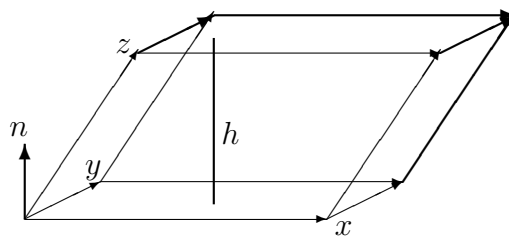
Satz 1.2.12. Das Volumen des von (x, y, z) aufgespannten Parallelotops ist

$$\text{Vol}(P) = |\langle x \times y, z \rangle|.$$

Das Vektorprodukt wird deshalb auch Spatprodukt genannt.

Beweis. Das Volumen von P ist natürlich unabhängig von p . Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass $p = 0$ ist. Ebenso können wir das Parallelotop im Raum drehen, damit es so liegt, wie in der Skizze unten. Das Volumen errechnet sich aus dem Produkt aus Grundfläche und Höhe. Die Grundfläche ist genau das Parallelogramm, welches von x und y aufgespannt wird. Für die Fläche kennen wir den Flächeninhalt, und der ist $\|x \times y\|$.

Wir betrachten $n := \frac{x \times y}{\|x \times y\|}$. Dieser Vektor hat Länge 1 und steht senkrecht auf x und y .



Damit ist die Höhe des Parallelotops

$$h = \|z\| \cos \angle(n, z) = \|z\| \cdot \|n\| \cdot \cos \angle(n, z) = |\langle n, z \rangle|$$

und wir erhalten insgesamt für das Volumen von P :

$$\text{Vol}(P) = \|x \times y\| \cdot h = \|x \times y\| \cdot |\langle n, z \rangle| = \|x \times y\| \cdot \frac{|\langle x \times y, z \rangle|}{\|x \times y\|} = |\langle x \times y, z \rangle|.$$

□

Bemerkung 1.2.13. Eine direkte Rechnung zeigt, dass das Volumen mit der Determinante wie folgt in Beziehung steht:

$$\text{Vol}(P) = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right|.$$

1.3 Axiomatische Beschreibung der Determinante

Wir hatten in der Mathematik 2 die Determinante einer quadratischen Matrix ad hoc über die Leibnizformel eingeführt. Wir werden jetzt die Abbildung, die einer quadratischen Matrix ihre Determinante zuordnet, durch wenige Eigenschaften charakterisieren.

Definition 1.3.1. Es sei K ein beliebiger Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung

$$\det: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K, \quad A \mapsto \det(A),$$

heißt eine Determinantenabbildung, falls gilt:

(D1) Die Abbildung \det ist linear in jeder Zeile, das heißt, es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + a'_{i1} & \dots & a_{in} + a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

(D2) Die Abbildung \det ist *alternierend*, das heißt, dass $\det(A) = 0$ gilt, falls zwei Zeilen von A übereinstimmen.

(D3) Die Abbildung \det ist normiert durch $\det(\mathbb{I}_n) = 1$. Hierbei ist \mathbb{I}_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix:

$$(\mathbb{I}_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Satz 1.3.2. Ist $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und ist $\det: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K$ eine Determinantenabbildung, so gilt für alle $A, B \in \text{Mat}(n \times n, K)$ und alle $\lambda \in K$:

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
2. Ist eine Zeile von A gleich 0, so ist $\det(A) = 0$.
3. Entsteht B aus A durch das Vertauschen zweier Zeilen, so ist $\det(B) = -\det(A)$.
4. Entsteht B aus A durch die Addition eines Vielfachen einer Zeile von A , so ist $\det(B) = \det(A)$.
5. Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also ist $A = (a_{ij})$ und $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$, so ist $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Beweis. Zu 1: Jede der n Zeilen von A wird mit λ multipliziert und daher erhalten wir mit (D1), dass $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ ist.

Zu 2: Ist die i -te Zeile von A null, so wählen Sie zum Beispiel $a_{i1} = \dots = a_{in} = 1$. Dann ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 \cdot a_{i1} & \dots & 0 \cdot a_{in} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0 \cdot \det(A) = 0.$$

Zu 3: Es sei $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ die i -te Zeile von A . Dann können wir A schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Es sei B die Matrix, die aus A entsteht, indem man Zeile i und Zeile j vertauscht für $i < j$. Es gilt

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i + a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_i + a_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

nach (D2), weil die i -te und j -te Zeile dieser Matrix gleich sind. Nach (D1) und (D2) können wir dies umformen zu

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_i \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_i \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ a_j \\ a_{j+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Wiederum wegen (D2) sind die letzten beiden Summanden gleich Null, und wir erhalten $\det(B) + \det(A) = 0$.

Zu 4: Wir schreiben die Matrix B als $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i + \lambda a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und erhalten wegen (D1):

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i + \lambda a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \lambda a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det(A) + \lambda \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_j \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Im letzten Term kommt die Zeile a_j doppelt vor, wegen (D2) verschwindet also dieser Summand und es bleibt nur $\det(A)$ übrig.

Zu 5: Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ eine obere Dreiecksmatrix und sind alle Diagonalelemente $a_{ii} \neq 0$, so kann man A durch wiederholte Addition von Vielfachen von Zeilen in die Matrix transformieren, die als von Null verschiedene Einträge nur die Diagonaleinträge a_{11}, \dots, a_{nn} hat:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aber \det dieser Matrix ist nach (D1)

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn} \det(\mathbb{I}_n)$$

und wegen der Normierung in (D3) ist dies gleich $\prod_{i=1}^n a_{ii}$.

Sind nicht alle $a_{ii} \neq 0$, so gibt es ein größtes i_0 , sodass $a_{i_0 i_0} = 0$. Durch wiederholte Addition von Vielfachen der Zeilen $i_0 + 1, \dots, n$ kann man A transformieren zu einer Matrix, deren i_0 -te Zeile nur aus Nullen besteht. Damit ist aber $\det(A)$ wegen 1. trivial. \square

Lemma 1.3.3. Ist $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ und ist $\det: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K$ eine Determinantenabbildung. Dann ist $\det(A) = 0$ genau dann trivial, wenn $\text{Rang}(A) < n$ gilt.

Beweis. Durch allgemeine Zeilenumformungen können wir A in eine obere Dreiecksmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

transformieren. Hierbei steht $*$ für einen beliebigen Teil der Matrix A' , der uns nicht weiter interessiert und 0 steht für ein unteres Dreieck, in dem nur Null als Eintrag auftritt. Damit ist

$$\det(A) = \pm \det(A') = \pm \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

und $\det(A)$ verschwindet genau dann, wenn es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ gibt, sodass $\lambda_i = 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn A nicht invertierbar ist, und dies wiederum ist äquivalent dazu, dass A nicht vollen Rang hat. \square

Korollar 1.3.4 (Eindeutigkeit der Determinantenabbildung). Für jeden Körper K und für alle $n \geq 1$ gibt es höchstens eine Determinantenabbildung

$$\det: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K.$$

Beweis. Jedes $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ kann durch elementare Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gebracht werden und es gilt $\det(A) = \pm \det(A')$, wobei das Vorzeichen bestimmt ist durch die Anzahl der Zeilenvertauschungen. Damit ist

$$\det(A) = \pm \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

eindeutig bestimmt. □

Satz 1.3.5. Für jeden Körper K und für alle $n \geq 1$ gibt es eine Determinantenabbildung

$$\det = \det_n: \text{Mat}(n \times n, K) \rightarrow K.$$

Beweis. Wir beweisen die Behauptung mit vollständiger Induktion über n . Für $n = 1$ setzen wir $\det_1(a) = a$ setzen. Diese Abbildung erfüllt offensichtlich die Axiome (D1), (D2) und (D3).

Für den Induktionsschritt definieren wir A'_{ij} als die Matrix, die aus A entsteht, wenn wir die i -te Zeile und die j -te Spalte streichen.

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Damit ist die Streichungsmatrix $A'_{ij} \in \text{Mat}((n-1) \times (n-1), K)$ und $\det_{n-1} A'_{ij}$ existiert nach Induktionsannahme.

Wir wählen ein beliebiges aber festes $j \in \{1, \dots, n\}$ und definieren

$$\det_n(A) := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det_{n-1}(A'_{ij}).$$

Wir müssen die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) für die so definierte Funktion \det_n nachrechnen.

(D1): Ist $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ mit

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} \lambda a_{kj}, & \text{für } k = i, \\ a_{ij}, & \text{für } k \neq i. \end{cases}$$

Damit ist $A'_{kj} = \tilde{A}'_{kj}$. Für $i \neq k$ entsteht \tilde{A}'_{ij} durch Multiplikation einer Zeile von A'_{ij} mit $\lambda \in K$.

Damit ist $\det_{n-1}(\tilde{A}'_{ij}) = \lambda \det_{n-1}(A'_{ij})$ und für \det_n erhalten wir

$$\begin{aligned} \det_n \tilde{A} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+j} \tilde{a}_{ij} \det_{n-1}(\tilde{A}'_{ij}) + (-1)^{k+j} \tilde{a}_{kj} \det_{n-1}(\tilde{A}'_{kj}) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (-1)^{i+j} \tilde{a}_{ij} \lambda \det_{n-1}(A'_{ij}) + (-1)^{k+j} \lambda a_{kj} \det_{n-1}(A'_{kj}) \\ &= \lambda \det_n(A). \end{aligned}$$

Die Additivität von \det_n zeigt man analog.

Zu (D2): In A sei die k -te Zeile gleich der ℓ -ten für $k \neq \ell$. Die Streichungsmatrix A'_{ij} mit $i \neq k$ und $i \neq \ell$ hat auch zwei übereinstimmende Zeilen, denn die beiden übereinstimmenden Zeilen wurden ja nicht gestrichen. Somit gilt nach Induktionsannahme $\det_{n-1}(A'_{ij}) = 0$ für alle $i \neq k$ und alle $i \neq \ell$. Damit bleiben nur zwei Terme von der Entwicklung von $\det_n(A)$ übrig:

$$\det_n(A) = (-1)^{k+j} a_{kj} \det_{n-1}(A'_{kj}) + (-1)^{\ell+j} a_{\ell j} \det_{n-1}(A'_{\ell j}).$$

Es gilt $a_{kj} = a_{\ell j}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $k < \ell$. Die Streichungsmatrix $A'_{\ell j}$ geht aus A'_{kj} durch $\ell - k - 1$ Zeilenvertauschungen hervor. Damit ist

$$\det_{n-1}(A'_{\ell j}) = (-1)^{\ell-k-1} \det_{n-1}(A'_{kj})$$

und wir erhalten

$$\det_n(A) = (-1)^{k+j} a_{kj} \det_{n-1}(A'_{kj}) + (-1)^{\ell+j} (-1)^{\ell-k-1} a_{kj} \det_{n-1}(A'_{\ell j}) = 0,$$

weil gilt

$$(-1)^{\ell-k-1+\ell-j} = (-1)^{2\ell-k-j-1} = (-1)^{k+j+1}.$$

Zu (D3): Wir rechnen einfach nach:

$$\det_n(\mathbb{I}_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} (\mathbb{I}_n)_{ij} \det_{n-1}((\mathbb{I}_n)'_{ij})$$

Da $(\mathbb{I}_n)_{ij} = \delta_{ij}$, bleibt nur der Term für $i = j$ übrig und die obige Summe reduziert sich auf den Term

$$(-1)^{2j} \det_{n-1}(\mathbb{I}_{n-1}) = 1.$$

□

Wir schreiben ab jetzt wieder \det statt \det_n . Die Determinantenformel im Beweis von Satz 1.3.5 sollte Ihnen aus der Mathematik 2 bekannt vorkommen. Wir erhalten sofort die Folgerung:

Korollar 1.3.6 (Spaltenentwicklungssatz von Laplace). Für $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ ist

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij})$$

für jedes beliebige aber fest gewählte $j \in \{1, \dots, n\}$.

Existenz- und Eindeutigkeitsresultat erklären die Definition der Determinante in Mathematik 2. Man kann aus der Eindeutigkeitsaussage über die Determinantenfunktion eine Rechenregel ableiten. Dies gibt einen neuen Beweis des Determinantenmultiplikationssatzes:

Satz 1.3.7. Für alle $A, B \in \text{Mat}(n \times n, K)$ gilt $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Beweis. • Wir behandeln erst den Fall $\det(B) = 0$. Dann ist $\text{Rang}(B) < n$, nach der Dimensionsformel

$$\dim_K V = n = \dim_K \text{Kern} B + \text{Rang} B$$

ist dann $\text{Kern}(B)$ nicht trivial. Also gibt es $x \in K^n$, $x \neq 0$ mit $Bx = 0$. Es folgt erst recht $ABx = 0$, also $\text{Rang}(AB) < n$, wiederum nach der Dimensionsformel. Daraus folgt $\det(AB) = 0$ und somit die behauptete Gleichung.

• Wir halten B mit $\det B \neq 0$ fest und zeigen, dass auch die Funktion

$$\widetilde{\det}(A) := \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$$

eine Determinantenfunktion ist, woraus die Behauptung wegen der Eindeutigkeitsaussage in Korollar 1.3.4 folgt.

(D1) Entsteht \tilde{A} aus A durch Multiplikation der i -ten Zeile mit $\lambda \in K$, so ist

$$\tilde{A} = \Delta_{\lambda,i} \cdot A$$

mit der Matrix

$$\Delta_{\lambda,i} := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \lambda & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

\uparrow
 i -te Spalte.

Es folgt $\tilde{A}B = \Delta_{\lambda,i}(A \cdot B)$, d.h. auch $\tilde{A}B$ entsteht aus AB durch Multiplikation der i -ten Zeile mit λ . Nach dem Axiom (D1) für die Determinantenfunktion \det folgt

$$\det(\tilde{A}B) = \lambda \det(AB)$$

und somit

$$\widetilde{\det} \tilde{A} = \frac{\det(\tilde{A}B)}{\det B} = \lambda \frac{\det AB}{\det B} = \lambda \widetilde{\det} A.$$

Um die Additivität von $\widetilde{\det}$ zu zeigen, schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = (b_1, \dots, b_n) \quad ,$$

drücken also die Matrix A durch Zeilenvektoren $a_j \in K^n$ und die Matrix B durch Spaltenvektoren $b_j \in K^n$ aus. Es gelte $a_i = a'_i + a''_i$. Dann ist

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & a_1 b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_n b_1 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix} \\ &= ((a'_i + a''_i) b_1 \dots (a'_i + a''_i) b_n) \end{aligned}$$

Somit folgt $\det(AB) = \det(A'B) + \det(A''B)$ und daraus die Additivität von $\widetilde{\det}$:

$$\widetilde{\det}(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)} = \widetilde{\det}(A') + \widetilde{\det}(A'') \quad .$$

(D2) Hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\text{Rang}(A) < n$. Wegen $\text{Bild}(AB) \subseteq \text{Bild}(A)$ ist $\text{Rang}(AB) < n$, also wegen Lemma 1.3.3 auch $\det(AB) = 0$, also $\widetilde{\det}(A) = 0$.

(D3) Auch die Funktion $\widetilde{\det}$ ist normiert:

$$\widetilde{\det}(\mathbb{I}_n) = \frac{\det(\mathbb{I}_n \cdot B)}{\det(B)} = 1 \quad .$$

□

2 Diagonalisierbare Abbildungen

2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Bemerkung 2.1.1. Gegeben sei eine lineare Abbildung $T: V \rightarrow V$ auf einem endlichdimensionalen K -Vektorraum V . Gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V , sodass $M_{\mathcal{B}}(T)$ möglichst einfache Gestalt hat? Die einfachste denkbare Gestalt wäre:

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

d.h., $M_{\mathcal{B}}(T)$ ist eine Diagonalmatrix. Wäre dies der Fall, so hätten wir

$$(Tv_k)_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(T) \cdot (v_k)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (\lambda_k v_k)_{\mathcal{B}}$$

also $Tv_k = \lambda_k v_k$ für jedes k . Daher stellt sich die Frage, wann eine quadratische Matrix diagonalisierbar ist.

Wiederholung 2.1.2. Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $T: V \rightarrow V$ sei linear.

(i) Ein $\lambda \in K$ heißt Eigenwert von T , wenn $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $Tv = \lambda v$.

(ii) Ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $Tv = \lambda v$ wie in (i) heißt Eigenvektor von T ;

$$E_{\lambda}(T) := \{v \in V \mid v \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{0\} = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\} = \text{Kern}(T - \lambda)$$

heißt der Eigenraum von T zum Eigenwert λ .

Definition 2.1.3. Wir nennen

$$\sigma(T) := \{\lambda \in K \mid \lambda \text{ ist Eigenwert von } T\}$$

das Spektrum von T .

Bemerkungen 2.1.4. 1. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind stets linear unabhängig; wir zeigen dies in einer Aufgabe.

2. Die Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto A \cdot x$ mit $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ funktioniert nach folgendem Schema:

- (a) Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom $\text{Ch}_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}_n)$. Beachten Sie, dass im letzten Semester $\text{Ch}_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{I}_n - A)$ definiert wurde, dass dies aber keinen Einfluss auf die Nullstellen hat.
- (b) Wir bestimmen dann die Nullstellen von Ch_A . Dies liefert die Eigenwerte und deren algebraische Vielfachheiten.
- (c) Für jeden Eigenwert λ lösen wir das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda \mathbb{I}_n)v = 0$. Eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems ist dann eine Basis des Eigenraums. Wir lesen auch die geometrische Vielfachheit $\dim E_{\lambda}(T)$ von λ .

Beispiel 2.1.5. Es sei $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(1) Dann ist das charakteristische Polynom $\text{Ch}_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 0 & 7 \\ 6 & 2-\lambda & -6 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix} = \dots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$.

(b) Wir raten die Nullstelle $\lambda = -1$ und führen dann die Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (-\lambda^3 + 3\lambda^2 \quad -4) : (\lambda + 1) = -\lambda^2 + 4\lambda - 4 \\ \underline{\lambda^3 + \lambda^2} \\ 4\lambda^2 \\ \underline{-4\lambda^2 - 4\lambda} \\ -4\lambda - 4 \\ \underline{4\lambda + 4} \\ 0 \end{array}$$

und sehen, dass $\lambda = 2$ zweifache Nullstelle ist. Also ist das Spektrum $\sigma(A) = \{-1, 2\}$, wobei der Eigenwert $\lambda = -1$ die algebraische Vielfachheit 1 und der Eigenwert $\lambda = 2$ die algebraische Vielfachheit 2 hat.

(3) Wir lösen das lineare Gleichungssystem $(A - (-1))x = 0$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^t$. Mit dem Gaußverfahren erhält man

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & -6 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \cdot 3 \quad \boxed{+} \\ \cdot 2 \quad \leftarrow + \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \leftarrow \quad \boxed{+} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also $x_1 = \frac{7}{4}x_3$, $x_2 = -\frac{3}{2}x_3$ und x_3 ist beliebig. Es folgt für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$

$$E_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 7/4t \\ -3/2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 7/4 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 7/4 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Für das lineare Gleichungssystem $(A - 2)x = 0$ erhält man analog

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & -6 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \cdot 1/7 \\ \cdot 1/6 \\ \cdot 1/4 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \cdot (-1) \\ \leftarrow \quad \boxed{+} \\ \leftarrow \quad \boxed{+} \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h. $x_1 = x_3$ und x_2 und x_3 sind beliebig. Also für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 2$

$$E_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir sehen also, dass der Eigenwert $\lambda = -1$ die geometrische Vielfachheit 1 und der Eigenwert $\lambda = 2$ die geometrische Vielfachheit 2 hat.

Bemerkungen 2.1.6. 1. Wir hatten in der Mathematik 2 gesehen, dass die geometrische Vielfachheit immer kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist,

$$1 \leq \mu_{\text{geo}}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{\text{alg}}(\varphi, \lambda).$$

Im vorangehenden Beispiel trat Gleichheit auf. Es kann auch passieren, dass eine echte Ungleichung vorliegt. Als Beispiel betrachte $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\det(A - \lambda) = (1 - \lambda)^2$, die algebraische Vielfachheit von $\lambda = 1$ ist also 2. Aber $E_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ und damit hat der Eigenwert $\lambda = 1$ nur die geometrische Vielfachheit 1.

2. Sollen Eigenwerte und Eigenvektoren für eine lineare Abbildung $T: V \rightarrow V$ auf einem beliebigen endlichdimensionalen Vektorraum V bestimmt werden, so wählen wir eine Basis \mathcal{B} von V und bestimmen die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(T)$. Auf diese wenden wir das in Beispiel 2.1.5 illustrierte Verfahren an.

Das charakteristische Polynom, und damit die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sind dann unabhängig von der Wahl von \mathcal{B} . Daher ist es sinnvoll, Ch_T zu schreiben. Das Verfahren aus Beispiel 2.1.5 liefert die Eigenräume *in den Koordinaten der Basis* \mathcal{B} . Diese Koordinaten ändern sich, wenn man die Basis ändert. Ihre Dimensionen, und damit die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte kann aber in beliebigen Koordinaten ablesen. Das zeigen Sie in einer Übungsaufgabe.

2.2 Diagonalisierbarkeit

Definition 2.2.1.

1. Eine lineare Abbildung $T: V \rightarrow V$ auf einem n -dimensionalen Vektorraum V heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ aus Eigenvektoren gibt, also genau dann, wenn es eine Basis $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ gibt, in der die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(T)$ eine Diagonalmatrix ist.
2. Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ heißt diagonalisierbar, wenn die induzierte lineare Abbildung $K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto A \cdot x$ diagonalisierbar ist.

Bemerkungen 2.2.2. 1. Eine Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, K)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \text{Mat}(n \times n, K)$ gibt mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind. Hierbei ist $S = M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(\text{Id})$ die darstellende Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ zur Basis \mathcal{B} aus Eigenvektoren.

2. Wir rechnen explizit nach: $SAS^{-1}e_k = \lambda e_k$ impliziert $AS^{-1}e_k = \lambda_i S^{-1}e_k$, d.h. $S^{-1}e_k$, die k -te Spalte von S^{-1} , ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k .

Satz 2.2.3. (Kriterium für Diagonalisierbarkeit) Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum über K . Eine lineare Abbildung $T: V \rightarrow V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Das charakteristische Polynom zerfällt über K in Linearfaktoren.
- (ii) Für jeden Eigenwert λ ist die algebraische Vielfachheit gleich der geometrischen Vielfachheit.

Arbeiten wir mit der Darstellung von T in eine Basis \mathcal{B} , so hängt nach Bemerkung 2.1.6.2 das charakteristische Polynom nicht von der Wahl der Basis ab. Auch die Dimension der Eigenräume hängt nicht von \mathcal{B} ab.

Beweis. ‘ \implies ’ Es sei T diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $Tv_k = \lambda v_k$ für $k = 1, \dots, n$. Insbesondere ist

$$D := M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

und $\text{Ch}_T(\lambda) = \text{Ch}_D(\lambda) = \det(D - \lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren, womit (i) gezeigt ist.

Es seien jetzt μ_1, \dots, μ_r die paarweise verschiedenen Nullstellen von Ch_T und k_1, \dots, k_r die zugehörigen Vielfachheiten. Durch eventuelles Umnummerieren der Basis erreichen wir

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} &= \mu_1 \\ \lambda_{k_1+1} = \dots = \lambda_{k_1+k_2} &= \mu_2 \\ \lambda_{k_1+k_2+1} = \dots = \lambda_{k_1+k_2+k_3} &= \mu_3 \\ &\vdots \\ \lambda_{k_1+\dots+k_{r-1}+1} = \dots = \lambda_{k_1+\dots+k_r} &= \mu_r \end{aligned}$$

und müssen $\dim E_{\mu_i}(T) = k_{\mu_i}$ für $i = 1, \dots, r$ zeigen. Allerdings genügt es natürlich, dies für $k = 1$ zu zeigen, weil wir ansonsten einfach nochmal umnummerieren können. Durch die oben vorgenommene Umnummerierung und Umbenennung haben wir \mathcal{B} jetzt so gewählt, dass

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_1 & \\ & & & \mu_2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_2 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

gilt, wobei μ_1 genau k_1 -mal vorkommt, μ_2 genau k_2 -mal usw. Damit gelten für $v \in V$ mit

Koordinaten x_1, \dots, x_n bezüglich der Basis \mathcal{B} die Äquivalenzen

$$\begin{aligned}
Tv = \mu_1 v &\iff (Tv)_{\mathcal{B}} = (\mu_1 v)_{\mathcal{B}} \\
&\iff Dv_{\mathcal{B}} = \mu_1 v_{\mathcal{B}} \\
&\iff \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mu_1 & \\ & & & \mu_2 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_2 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k_1} \\ x_{k_1+1} \\ \vdots \\ x_{k_1+k_2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k_1} \\ x_{k_1+1} \\ \vdots \\ x_{k_1+k_2} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 x_1 = \mu_1 x_1 \\ \vdots \\ \mu_1 x_{k_1} = \mu_1 x_{k_1} \\ \mu_2 x_{k_1+1} = \mu_1 x_{k_1+1} \\ \vdots \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Gilt für beliebige } x_1, \dots, x_{k_1}. \\ \\ \text{Da } \mu_1 \neq \mu_2, \mu_1 \neq \mu_3, \dots, \text{ gilt} \\ \text{dies genau dann, wenn } x_i = 0 \\ \text{für } i > k_1. \end{array} \\
&\iff v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } x_1, \dots, x_{k_1} \in K \text{ beliebig.}
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der Eigenraum $E_{\mu_1}(T) = \{v \in V \mid Tv = \mu_1 v\}$ Dimension k_1 haben muss, womit auch (ii) gezeigt ist.

‘ \Leftarrow ’ Es seien $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T und es seien k_1, \dots, k_r ihre algebraischen Vielfachheiten, die nach Annahme (ii) gleich den geometrischen Vielfachheiten sind,

$$k_i = \mu_{geo}(\varphi, \mu_i) = \mu_{alg}(\varphi, \mu_i) .$$

Da nach Annahme (i) das charakteristische Polynom zerfällt, gilt $k_1 + \dots + k_r = n$. Um eine Basis \mathcal{B} aus Eigenvektoren zu finden, wählen wir zunächst in jedem Eigenraum E_{μ_i} eine Basis \mathcal{B}_i , die natürlich aus Eigenvektoren besteht und k_i -viele Elemente hat. Dann setzen wir

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r .$$

Wir behaupten, dass diese Menge linear unabhängig ist: Angenommen, sie ist es nicht, dann gibt es eine Linearkombination der Elemente von \mathcal{B}

$$0 = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k_1} v_{k_1}}_{=: x_1 \in E_{\mu_1}} + \underbrace{\alpha_{k_1+1} v_{k_1+1} + \dots + \alpha_{k_1+k_2} v_{k_1+k_2}}_{=: x_2 \in E_{\mu_2}} + \dots =: (*),$$

in der mindestens ein Koeffizient nicht Null ist. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass dieser Koeffizient vor einem Vektor aus \mathcal{B}_1 auftritt (sonst nummerieren wir die Eigenwerte und Eigenräume geeignet um). Ist aber nun unter den $\alpha_1, \dots, \alpha_{k_1}$ ein Koeffizient ungleich Null, dann muss $x_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{k_1} v_{k_1} \neq 0$ sein, weil die v_1, \dots, v_{k_1} als Basis von E_{μ_1} linear unabhängig sind. Jetzt lassen wir diejenigen x_i weg, die gleich Null sind und erhalten

$$0 = (*) = x_1 + \dots + x_r = \sum_{\substack{i=1 \\ x_i \neq 0}}^n 1 \cdot x_i$$

also eine Darstellung der Nulls als nichttriviale Linearkombination aus Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten im Widerspruch dazu, dass Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, vgl. Bemerkung 2.1.6. \square

Beispiel 2.2.4. (Fortsetzung des Beispiels in 2.1.5) Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

deren Spektrum $\sigma(A) = \{-1, 2\}$ wir schon aus Beispiel 2.1.5 kennen. Der Eigenwert $\lambda = -1$ hat algebraische Vielfachheit 1; der Eigenwert $\lambda = 2$ algebraische Vielfachheit 2. Die Eigenräume sind

$$E_{-1}(A) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad E_2(A) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Insbesondere erfüllt die lineare Abbildung $K^n \rightarrow K^n$, $x \mapsto Ax$, die Eigenschaften (i) und (ii) des Diagonalisierbarkeitskriteriums in Satz 2.2.3. Wir können direkt ablesen, dass die geordnete Basis aus Eigenvektoren

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

zur diagonalen Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}(A) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

führt. Die Spaltenvektoren von S^{-1} sind nach Bemerkung 2.2.2 eine Basis von Eigenvektoren:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gewählt werden kann und dass jetzt nur noch $S = (S^{-1})^{-1}$ bestimmt werden muss. Dies kann mit dem Gaußverfahren gemacht werden oder mit Hilfe der Adjunkten. Wir machen hier Letzteres und bestimmen zunächst mit der Sarrus-Regel

$$\det S^{-1} = 0 + 0 + 4 - 0 - 7 - 0 = -3$$

und mit Hilfe von Streichungsmatrizen

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\det S^{-1}} \text{adj } S^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} (-1)^2 \det \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (-1)^3 \det \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (-1)^4 \det \begin{pmatrix} \cancel{7} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & 0 & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 7 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & 0 & 1 \\ 4 & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix} & (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 7 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 7 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & 0 & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 7 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & \cancel{0} \end{pmatrix} & (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 7 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 7 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -6 & 0 & \cancel{1} \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies liefert in der Tat die Diagonalmatrix $M_{\mathcal{B}}(A)$:

$$SAS^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -7 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen 2.2.5.

1. Zerfällt das charakteristische Polynom einer linearen Abbildung und haben alle Eigenwerte algebraische Vielfachheit 1, so ist die Abbildung automatisch diagonalisierbar. Denn es gilt

$$1 \leq \mu_{\text{geo}}(\varphi, \lambda) \leq \mu_{\text{alg}}(\varphi, \lambda).$$

Also ist auch die geometrische Vielfachheit jeden Eigenwerts gleich 1, also gleich der algebraischen Vielfachheit. Beide Kriterien in Satz 2.2.3 sind also erfüllt.

2. Schon das Gegenbeispiel in Bemerkung 2.1.6.1 zeigt, dass nicht jede lineare Abbildung T diagonalisierbar ist. Es bleibt also die Frage, wie eine möglichst einfach Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(T)$ für allgemeine Endomorphismen T aussieht. Dies beantwortet der Satz von der Jordan–Normalform, den wir ohne Beweis notieren: Es sei K ein Körper, V ein Vektorraum über K und $T: V \rightarrow V$ sei linear. Wir nehmen an, dass das charakteristische Polynom Ch_T über K in Linearfaktoren zerfällt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra, den wir in Kapitel 4 beweisen werden, wissen wir, dass dies für $K = \mathbb{C}$ stets der Fall ist. Dann existiert eine Basis \mathcal{B} von V , sodass

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \lambda_2 \end{matrix}} & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

Blockdiagonalform hat und die Blöcke sogenannte Jordanblöcke sind: auf der Hauptdiagonalen des Blocks steht jeweils der gleiche Eintrag, in der ersten Nebendiagonalen stehen Einsen und alle restlichen Einträge sind Null. Die Diagonaleinträge λ_i sind hierbei die Eigenwerte von T . Zu jedem $\lambda \in \sigma(T)$ gibt es seiner geometrischen Vielfachheit entsprechend viele Jordanblöcke. Die Gesamtdimension der Blöcke zum Eigenwert λ ist gleich der algebraischen Vielfachheit von λ . Im Bild oben ist also $\lambda_i = \lambda_j$ für $i \neq j$ durchaus möglich. Ist $T: K^n \rightarrow K^n$ durch Multiplikation mit der Matrix A gegeben, so gibt es eine invertierbare Matrix S mit $M_{\mathcal{B}}(T) = SAS^{-1}$.

3 Stetige Funktionen

3.1 Wiederholung

Wir wollen hier einige Sachverhalte über stetige Funktionen wiederholen und ausbauen, die wir beim Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra und bei der Untersuchung differenzierbarer Funktionen brauchen.

Definition 3.1.1. Es seien D und W Mengen. Eine Funktion, oder Abbildung, von D nach W ordnet jedem $x \in D$ genau ein $y \in W$ zu. Wir schreiben

$$f: D \rightarrow W, \quad x \mapsto f(x)$$

und nennen D den Definitionsbereich und W den Wertebereich, Bildbereich oder Zielbereich der Funktion f .

Im Folgenden sind stets D und W Teilmengen von \mathbb{R} oder \mathbb{C} , und wir nehmen immer $D \neq \emptyset$ und $W \neq \emptyset$ an, ohne dies explizit zu vermerken. Definiert man Funktionen mithilfe von Relationen, so wie wir das in Mathematik 1 gemacht haben, dann sieht man, dass es genau eine Abbildung $\emptyset \rightarrow W$ gibt bei beliebigem W , und keine Abbildung $D \rightarrow \emptyset$ für $D \neq \emptyset$.

Schließlich kürzen wir „Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ “ ab durch „Es sei $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ “ oder durch $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir erinnern uns:

Definition 3.1.2. Es sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$.

(i) f ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$ (oder im Punkt $x_0 \in D$), falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(ii) f ist stetig auf D , falls f stetig an jeder Stelle $x_0 \in D$ ist, d.h., falls gilt

$$\forall x_0 \in D \quad \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Beispiele 3.1.3. Wir erwähnen folgende Beispiele stetiger Funktionen:

1. Polynomfunktionen sind stetig. Rationale Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.
2. Die Betragsfunktion ist stetig. Aus der Dreiecksungleichung folgt nämlich

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

und somit $|x| - |y| \leq |x - y|$. Durch Vertauschen von x und y erhält man auch die Ungleichung $|y| - |x| \leq |x - y|$ und somit

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

woraus sofort die Stetigkeit der Betragsfunktion folgt: für gegebenes $\varepsilon > 0$ wähle $\delta = \varepsilon$.

3. $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig auf ganz \mathbb{C} . Es seien $\varepsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{|e^{z_0}| + \varepsilon}$. Dann gilt für $|z - z_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |e^z - e^{z_0}| &= |e^{z-z_0+z_0} - e^{z_0}| = |e^{z-z_0} - 1| |e^{z_0}| = \left| e^{z-z_0} - \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} (z - z_0)^k \right| |e^{z_0}| \\ &\leq \frac{|z - z_0|^{0+1}}{(0+1)!} e^{|z-z_0|} |e^{z_0}| < \delta e^\delta |e^{z_0}| \leq \delta \frac{1}{1-\delta} |e^{z_0}| = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir erst die Fehlerabschätzung der Exponentialfunktion

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}$$

aus Mathematik 2, Satz 5.7.10 benutzt haben, dann, dass $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strikt wächst, und schließlich die fundamentale Abschätzung

$$e^\delta \leq \frac{1}{1-\delta} \quad \text{für} \quad \delta < 1$$

aus Mathematik 2, Satz 5.3.4 (c). Letzteres ist möglich, weil auch in unserer Situation $\delta < 1$ gilt. Die Gleichung am Ende folgt durch Auflösen von $\delta = \frac{\varepsilon}{|e^{z_0}| + \varepsilon}$ nach ε .

Bemerkungen 3.1.4.

- In der Definition der Stetigkeit kommt es auf kleine $\varepsilon > 0$ an; genauer: Gilt die Bedingung $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \dots$ mit einem festen $\varepsilon_0 > 0$, dann gilt auch für alle $\forall \varepsilon > 0 \dots$. Beim Nachweis der Stetigkeit kann man also ohne Einschränkung $\varepsilon < 1$ oder etwas Ähnliches annehmen, wenn dies beim Abschätzen hilft.

- In der am Ende zu zeigenden Abschätzung genügt es auch $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ oder $\leq 2\varepsilon$ oder $\leq \varepsilon^2$ zu zeigen (statt $< \varepsilon$).
- Stetigkeit (in einem Punkt) ist eine lokale Eigenschaft: Es seien $f, g: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$, dann ist g genau dann stetig in x_0 , wenn f stetig in x_0 ist.

Bei einer Abbildung kommt es immer auf den Definitionsbereich und den Wertebereich an:

Definition 3.1.5. Es seien D, W Mengen und $f: D \rightarrow W$ eine Abbildung.

- Für $D' \subset D$ bezeichnen wir mit $f|_{D'}: D' \rightarrow W$, $f|_{D'}(x) = f(x)$ die Einschränkung von f auf D' .
- Für $W \supset W' \supset \text{Bild}(f)$ bezeichnen wir mit $f|^{W'}: D \rightarrow W'$, $f|^{W'}(x) = f(x)$, die Ko-Einschränkung von f nach W' .

Man beachte, dass die Ko-Einschränkung nur definiert ist, wenn $W' \supset \text{Bild}(f)$ gilt. Einschränkung und Ko-Einschränkung können kombiniert werden, z.B. kann die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$, gleichzeitig eingeschränkt und ko-eingeschränkt werden zu der Funktion $f|_{[0,2]}^{[0,5]}: [0,2] \rightarrow [0,5]$. Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, schreiben wir allerdings einfach f für die (Ko-)Einschränkung.

Satz 3.1.6. Es sei $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

- Jede Einschränkung von f ist stetig.
- Jede definierte Ko-Einschränkung von f ist stetig.

Beweis. Da f stetig ist, gilt nach Definition 3.1.2(ii)

$$\forall x_0 \in D, \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Für (i) sieht man nun, dass die Bedingung auch gilt, wenn man D durch eine Teilmenge $D' \subset D$ ersetzt. Für (ii) sieht man, dass es sich bei einer Koeinschränkung um exakt die gleiche Bedingung handelt, weil der Wertebereich in der Bedingung gar nicht vorkommt. \square

Satz 3.1.7. Es seien $D, F, G, H \subset \mathbb{R}$ und es seien $f: D \rightarrow F$, $g: H \rightarrow G$ Abbildungen mit $f(D) \subset H$, so dass also die Komposition $g \circ f: D \rightarrow G$, $x \mapsto g(f(x))$ definiert ist. Falls f in $x_0 \in D$ stetig ist und $g \in f(x_0) \in H$ stetig ist, dann ist auch die Komposition $g \circ f$ stetig in x_0 .

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von g können wir $\tilde{\delta} > 0$ finden, sodass für $y \in H$ mit $|y - f(x_0)| < \tilde{\delta}$ die Abschätzung $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ gilt. Wegen der Stetigkeit von f können wir $\delta > 0$ finden, sodass für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)| < \tilde{\delta}$ gilt. Setzen wir nun $y = f(x)$, dann gilt für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ stets $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. \square

Korollar 3.1.8. Es seien $D, F, G, H \subset \mathbb{R}$. Sind $f: D \rightarrow F$ und $g: G \rightarrow H$ komponierbar und stetig, so ist ihre Komposition $g \circ f: D \rightarrow H$ ebenfalls stetig. \square

Bei der Untersuchung von Differenzierbarkeit werden wir den folgenden Begriff verwenden:

Definition 3.1.9. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung.

(i) Wir nennen $a \in \mathbb{R}$ einen Berührungspunkt von D , falls eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D existiert, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt.

(ii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von D und $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$c = \lim_{x \rightarrow a} f(x) : \Longleftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

(iii) Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein Berührungspunkt von $D \cap (a, \infty)$ und $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$c = \lim_{x \searrow a} f(x) : \Longleftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \cap (a, \infty) \text{ mit} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

(iv) Es sei D nicht von oben beschränkt und $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$c = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) : \Longleftrightarrow \text{Für jede Folge } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } D \text{ mit} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c.$$

(v) Wir definieren analog

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = c, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c, \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \text{ etc.}$$

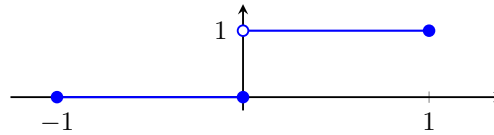
und sprechen in allen Fällen vom Grenzwert der Funktion f im Punkt a oder in $\pm\infty$, bzw. vom linksseitigen oder rechtsseitigen Grenzwert.

Bemerkungen 3.1.10.

- (a) Ist $a \in \mathbb{R}$ kein Berührungspunkt, so ist die rechte Seite in Definition 3.1.9(ii) wahr für jedes $c \in \mathbb{R}$. In einem solchen Fall können wir ‘ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ’ nicht in sinnvoller Weise erklären. Ist a Berührungspunkt, aber die rechte Seite in 3.1.9(ii) gilt nicht, dann sagen wir *der Grenzwert von f in a existiert nicht*. Analoges gilt für Grenzwerte in $\pm\infty$.
- (b) Endliche Grenzwerte von Funktionen in Punkten können genauso für $f: D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert werden. Bei rechts- oder linksseitigen Grenzwerten, bei $\pm\infty$ als Grenzwert und bei Grenzwerten im Unendlichen geht das im Allgemeinen nicht, aber in Spezialfällen, z.B. kann $\lim_{x \searrow a} f(z)$ für $f: D \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert werden, wenn a ein Berührungspunkt von $D \cap (a, \infty)$ ist. Bei komplexen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet man oft auch $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z)$.
- (c) Ist $a \in D$, so ist a automatisch Berührungspunkt: Die konstante Folge $x_n \equiv a$ konvergiert gegen a und liegt in D . In diesen Fall muss bei einer stetigen Funktion $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gelten, falls der Grenzwert von f im Punkt a existiert.
- (d) Es können auch Punkte $a \notin D$ Berührungspunkte sein. Zum Beispiel ist $a = 1$ ein Berührungspunkt des offenen Intervalls $D = (0, 1)$, denn die Folge $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ liegt in D und konvergiert gegen a . Wenn in diesem Fall für *jede* Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \rightarrow a$ die Folge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann ist deren Grenzwert unabhängig von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Angenommen, es gibt zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n, y_n \rightarrow a$ aber $f(x_n) \rightarrow c \neq b \leftarrow f(y_n)$. Definiere die ‘Zick-Zack-Folge’ $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$. Dann ist $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ divergent, weil es zwei konvergente Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten gibt.

Beispiele 3.1.11. Für den einseitigen Grenzwert an der Stelle a in Definition 3.1.9 betrachten wir mit Absicht nur Folgen, die den Wert a nicht annehmen. Betrachte die Treppenfunktion

$$i: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

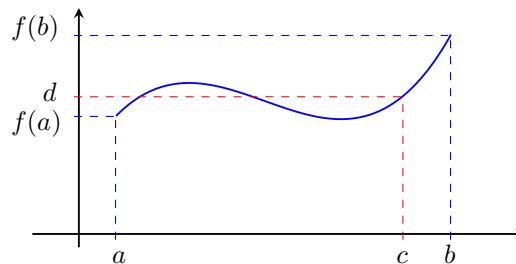


Dann gilt $\lim_{x \nearrow 0} i(x) = 0$, denn für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[-1, 0)$ mit $x_n \rightarrow 0$ folgt $0 \equiv i(x_n) \rightarrow 0$. Analog gilt $\lim_{x \searrow 0} i(x) = 1$. Der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} i(x)$ existiert nicht: Hier kann man die Folgen $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $(-1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ einsetzen, sodass die Bildfolgen gegen verschieden Werte konvergieren. Da $i(0) = 0$ ist, könnte man hier auch die Folge konstant Null statt $(-1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ verwenden. Schließlich könnte man auch z.B. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1/2, 1/3, -1/4, \dots)$ betrachten und argumentieren, dass diese Folge auf die divergente Bildfolge $(1, 0, 1, 0, \dots)$ führt.

Wir erinnern an folgende zwei Resultate, die bereits in Mathematik 2 bewiesen wurden:

Satz 3.1.12. (Folgenkriterium für Stetigkeit) Die Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \rightarrow x_0$ gilt $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$, also $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt, also wenn sie folgenstetig ist.

Satz 3.1.13. (Zwischenwertsatz) Es sei $-\infty < a < b < +\infty$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$ [bzw. $f(a) > f(b)$]. Es sei $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < d < f(b)$ [bzw. $f(a) > d > f(b)$] gegeben. Dann existiert (wenigstens) ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = d$.



Korollar 3.1.14. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist $f(I)$ wieder ein Intervall.

Das Intervall I kann hierbei offen, abgeschlossen, halboffen, beschränkt, oder unbeschränkt sein. Wir können hier sogar $I = [a, a] = \{a\}$ oder $I = (a, a) = \emptyset$ zulassen; in diesem Fall ist die Aussage offensichtlich wahr. Wir setzen dennoch im Folgenden stets voraus, dass Intervalle ‘mindestens zwei verschiedene Punkte enthalten’ (und damit dann natürlich unendlich viele).

Beweis. Setze $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es genügt zu zeigen, dass $(A, B) \subset f(I)$ gilt denn dann folgt $f(I)$ eines der Intervalle (A, B) , $[A, B)$, $(A, B]$, $[A, B]$ ist. Es sei also $y \in (A, B)$. Dann existieren $a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $x \in [a, b] \subset I$ mit $f(x) = y$, also $y \in f(I)$. \square

Wir erinnern uns weiter:

Satz 3.1.15. (Umkehrsatz) Es sei $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf einem beliebigen Intervall und strikt wachsend (d.h. für $x < x'$ in I gilt $f(x) < f(x')$). Dann ist $I' := f(I) \subset \mathbb{R}$ nach 3.1.14 ein Intervall. Ferner ist $f: I \rightarrow I'$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1}: I' \rightarrow I$ ist strikt wachsend und stetig.

Bemerkung 3.1.16. Ein analoger Satz gilt für ‘strikt fallend’.

Beispiele 3.1.17.

1. Die reelle Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist stetig als Einschränkung der komplexen Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, bijektiv und strikt wachsend. Letzteres wissen wir aus der Mathematik 2. Nach dem Umkehrsatz 3.1.15 ist daher $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und strikt wachsend.
2. Aus 1. folgt auch, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto \exp(x \log a) = a^x$ für $a > 0$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Ebenso ist die Umkehrfunktion $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
3. Auch die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^\alpha$ für $\alpha > 0$ ist stetig. Hierfür betrachten wir zunächst den Fall $x > 0$. Dann gilt

$$x^\alpha = e^{\log x^\alpha} = e^{\alpha \log x}.$$

Nach 1. ist die Funktion $x \mapsto \log x$ stetig. Dann ist aber auch $x \mapsto \alpha \log x$ stetig und schließlich die Komposition $x \mapsto e^{\alpha \log x} = x^\alpha$ nach Korollar 3.1.8.

An der Stelle $x = 0$ klappt die obige Argumentation nicht, hier wenden wir daher das Folgenkriterium an und sehen $f(0) = 0^\alpha = 0$. Um $\lim_{x \searrow 0} e^{\alpha \log x}$ zu berechnen, beachten wir, dass nach der fundamentalen Abschätzung für $y < 1$ stets $0 < e^y < \frac{1}{1-y}$ gilt. Für $y \rightarrow -\infty$ geht dieser Ausdruck gegen Null. Für $x \searrow 0$ geht also $\log x \rightarrow -\infty$ und $e^{\alpha \log x} \rightarrow 0$.

4. Aus Mathematik 2, Korollar 5.7.14 wissen wir, dass die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig sind.¹

Wir zeigen jetzt, dass $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv ist und strikt wächst. Mit der Beziehung

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{für jedes } x \in \mathbb{R} \quad (*)$$

folgt dann, dass $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv ist und strikt fällt,

- (a) Zunächst halten wir fest, dass aus $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und dem Zwischenwertsatz 3.1.13 folgt, dass $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ surjektiv ist.
- (b) Da ferner aus der Mathematik 2 bekannt ist, dass $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$ ist, folgt durch nochmalige Anwendung des Zwischenwertsatzes für das Vorzeichen der Sinusfunktion:

$$\sin|_{(0, \frac{\pi}{2}]} > 0 \quad \text{und} \quad \sin|_{[-\frac{\pi}{2}, 0)} < 0.$$

¹Historische Fußnote:

- (a) In nachhellenistischer Zeit in Indien in Sanskrit: (ardha-)jya = (Halb-)sehne, synon. jiva.
- (b) Ins Arabische übernommen als Lehnwort: jiba
- (c) Verwechselt mit arabisch jaib = Bucht, Busen und übersetzt ins Lateinische als sinus.

Aus (*) folgt, dass $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ist und für das Vorzeichen gilt

$$\cos|_{[0, \frac{\pi}{2})} > 0$$

gilt. Für die Sinusfunktion folgt, dass für $x \neq y$ und $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ stets $\sin x < \sin y$ gilt. In der Tat ist für $x = 0 < y$ dann $\sin x = 0 < \sin y$, für $x < 0 = y$ ist $\sin x < 0 = \sin y$. Für $x < 0 < y$ haben wir $\sin x < 0 < \sin y$.

- (c) Es seien nun $0 < x < y \leq \frac{\pi}{2}$. Wir setzen $u := \frac{x+y}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $v := \frac{x-y}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, d.h. es gilt $x = u + v$ und $y = u - v$ und nach obigem $\cos u > 0$ und $\sin v < 0$. Es folgt mit Hilfe des Additionstheorems für die Sinusfunktion

$$\begin{aligned} \sin y - \sin x &= \sin(u - v) - \sin(u + v) \\ &= \sin u \cos v - \cos u \sin v - (\sin u \cos v + \cos u \sin v) \\ &= -2 \cos u \sin v > 0 \end{aligned}$$

und damit $\sin y > \sin x$. Der Sinus wächst also auf dem halboffenen Intervall $(0, \frac{\pi}{2}]$ strikt.

- (d) Für $-\frac{\pi}{2} \leq x < y < 0$ folgt durch Multiplikation mit -1 , dass $0 < -y < -x \leq -\frac{\pi}{2}$. Aus (c) schließen wir

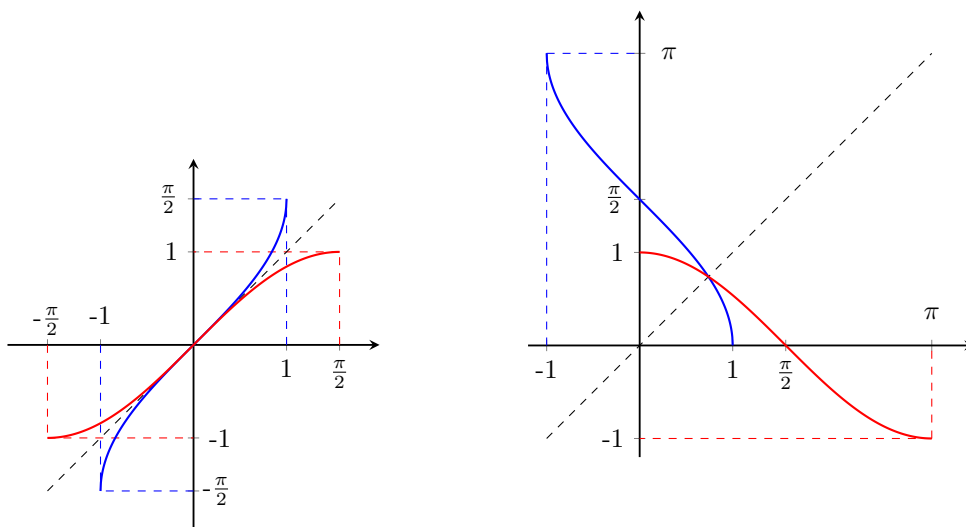
$$-\sin(y) = \sin(-y) < \sin(-x) = -\sin(x),$$

wobei wir bei den Gleichheiten ausgenutzt haben, dass die Sinusfunktion ungerade ist, also $\sin(-x) = -\sin(x)$ gilt, was aus der Mathematik 2 bekannt ist. Es folgt, wiederum durch Multiplikation mit -1 , dass $\sin(x) < \sin(y)$. Wir erhalten, dass der Sinus auch auf dem halboffenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ strikt wächst.

Wir bezeichnen mit

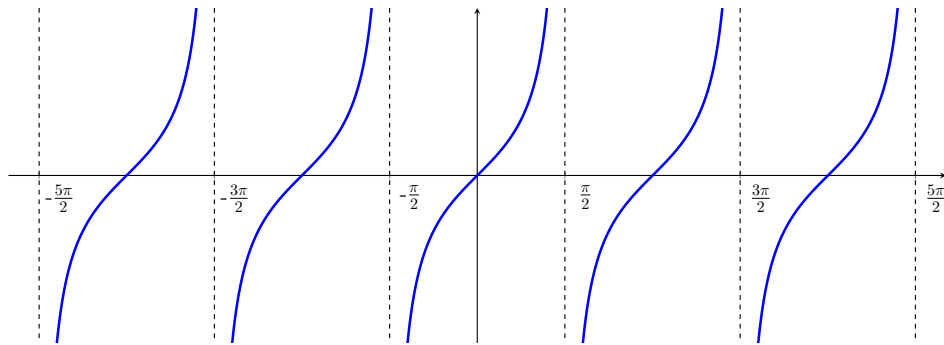
$$\arcsin := \sin^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ und } \arccos := \cos^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

die nach obigem wohldefinierten und nach 3.1.15 stetigen Umkehrfunktionen *Arkussinus* bzw. *Arkuskosinus*. Die arccos-Funktion hatten wir schon früher kennengelernt.



Wir beachten, dass wir den Definitionsbereich von Sinus und Kosinus auch anders hätten wählen können, z.B. ist $\sin: [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi] \rightarrow [-1, 1]$ ebenfalls bijektiv.

5. Nach 3.1.17 (4) und als Quotient stetiger Funktionen ist der Tangens $\tan: \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ stetig.



Wir zeigen jetzt, dass $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ bijektiv und strikt wachsend ist.

- (a) Es seien zunächst $0 \leq x < y < \frac{\pi}{2}$. Dann gilt

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos x} < \frac{\sin y}{\cos y} = \tan y,$$

wobei wir für die erste Ungleichung benutzt haben, dass \sin im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ wächst, und für die zweite, dass \cos im gleichen Intervall fällt, siehe 4.

- (b) Wir bemerken nun, dass aus den Symmetrieeigenschaften von Sinus und Kosinus, die wir in der Mathematik 2 gezeigt haben, folgt, dass der Tangens ungerade ist,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\tan(-x).$$

Sei nun $-\frac{\pi}{2} < x < y \leq 0$. Dann gilt

$$\tan x = -\tan(-x) < -\tan(-y) = \tan y,$$

wobei wir die Abschätzung aus (a) benutzt haben.

- (c) Ist $-\frac{\pi}{2} < x < 0 < y < \frac{\pi}{2}$, so folgt $\tan x < 0 < \tan y$ durch Betrachtung der Vorzeichen von \sin und \cos , die wir oben notiert haben.
- (d) Als letztes müssen wir noch zeigen, dass $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ surjektiv ist. Dazu berechnen wir zuerst

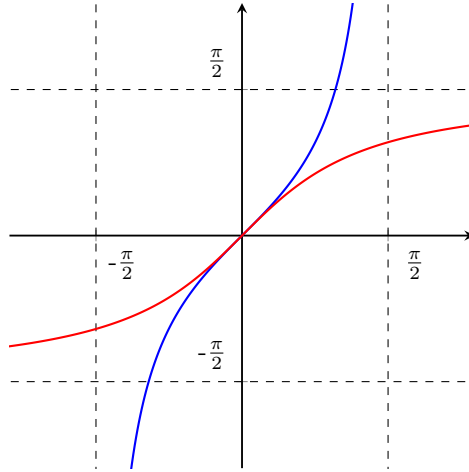
$$\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty,$$

weil $\sin x \rightarrow \pm 1$, $\cos x \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ und $\cos x > 0$ für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gelten. Da der Tangens stetig ist, folgt aus Korollar 3.1.14, dass $\text{Bild}(\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall sein muss, was nach dem Vorherigen aber nur geht, wenn das Intervall $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ ist.

Die nach dem Umkehrsatz 3.1.15 stetige Inverse von $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$\arctan := \tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

und sprechen vom Arkustangens.



Wir beachten wieder, dass man auch hier einen anderen Zweig des Tangens hätte betrachten können.

3.2 Extremalsatz und gleichmäßige Stetigkeit

Definition 3.2.1. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ beliebig. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls das Bild $f(D) \subset \mathbb{R}$ eine beschränkte Menge ist. Explizit heißt dies

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D : m \leq f(x) \leq M.$$

Entsprechend mit nur einer Abschätzung definiert man, was es heißt, dass f von oben bzw. von unten beschränkt ist. Hierbei heißt m eine untere und M eine obere Schranke.

Satz 3.2.2. (Extremalsatz) Es sei $-\infty < a < b < \infty$. Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt und nimmt ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h. es gibt $p, q \in [a, b]$ mit

$$f(p) = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \text{ und } f(q) = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

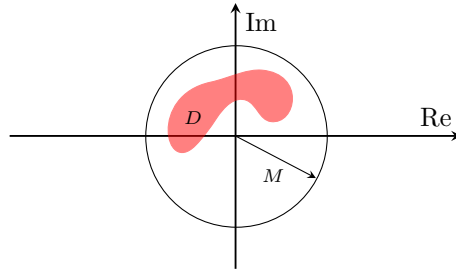
Insbesondere ist das obige Supremum also ein Maximum und das Infimum ein Minimum.

Beweis. Wir setzen $A := \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und wählen eine Folge y_n von Bildern mit $y_n \rightarrow A$. Für jedes y_n wählen wir ein Urbild $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ mit $y_n = f(x_n)$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, besagt der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gibt und wir können $p := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$ definieren. Da f stetig ist, gilt nach dem Folgenkriterium 3.1.12 $A = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(p)$. Damit gilt aber $A \in \mathbb{R}$, also ist f von oben beschränkt und nimmt sein Supremum im Punkt p an, welches daher ein Maximum ist. Die Aussage über das Minimum wird ebenso gezeigt. \square

Bemerkung 3.2.3. Intervalle der Form $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ heißen kompakte Intervalle. Die Aussage im Extremalsatz 3.2.2 wird falsch wenn der Definitionsbereich nicht kompakt ist oder wenn f nicht stetig ist. Als Gegenbeispiel betrachte den Tangens auf dem offenen Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$.

Definition 3.2.4. Wir nennen eine Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt, wenn gilt

$$\exists M \geq 0 \quad \forall z \in D : |z| \leq M.$$



Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ beliebig (also vielleicht auch unbeschränkt) heißt *beschränkt*, wenn ihr Bild $f(D) \subset \mathbb{C}$ beschränkt ist. Explizit heißt dies

$$\exists M \geq 0 \forall x \in D: |f(x)| \leq M.$$

Bemerkung 3.2.5. Der Extremalsatz 3.2.2 gilt komplex zumindest in folgendem Sinne: Ist $M \geq 0$ und $f: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion f beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an. Hat man eine stetige Funktion $f: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\} \rightarrow \mathbb{C}$, so zeigt die Betrachtung der stetigen Funktion $|f|: \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\} \rightarrow \mathbb{R}$, dass f beschränkt ist.

Wir bringen nun einen weiteren wichtigen Begriff:

Definition 3.2.6. Eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Bemerkungen 3.2.7.

- (i) Jede gleichmäßig stetige Funktion ist auf ganz D stetig, denn die Implikation

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y: \dots \implies \forall x \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y: \dots$$

gilt unabhängig von der Aussage, die nach den Quantoren folgt.

Wir erinnern an folgendes Beispiel, das illustriert, warum Quantoren nicht vertauschen: sei D die Menge der Tage im August 2023 und O die Menge der Orte in Deutschland. Dann ist die Aussage

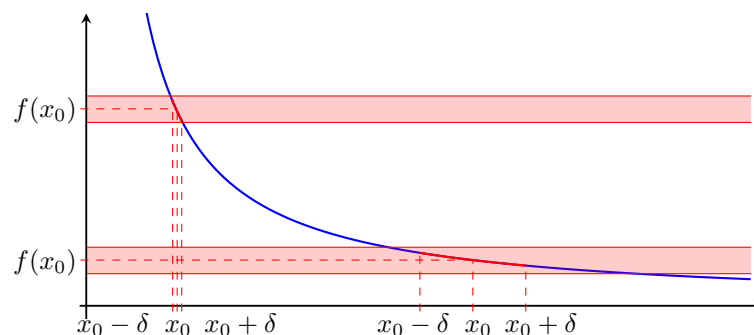
$$\forall t \in D \quad \exists x \in O \quad \text{es regnete in } x \text{ am Tag } t$$

ziemlich sicher wahr, aber

$$\exists x \in O \quad \forall t \in D \quad \text{es regnete in } x \text{ am Tag } t$$

kann ich durch ein Gegenbeispiel widerlegen.

- (ii) Die Umkehrung von (i) ist falsch: Betrachten Sie dazu die Funktion $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Nach 3.1.3(iii) und 3.1.6 ist f stetig. Wir hatten aber bereits beobachtet, dass wir bei einem fixierten $\varepsilon > 0$ den Wert von $\delta > 0$ immer weiter verkleinern müssen, wenn wir x_0 näher an Null wählen.



Für einen formalen Beweis betrachten wir $x = \frac{1}{n}$ und $y = \frac{1}{2n}$. Dann gilt

$$|x - y| = \left| \frac{2-1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} \quad \text{und} \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = |n - 2n| = n \geq 1.$$

Für jedes $\delta > 0$ finden wir also $x, y \in (0, 1)$, so dass $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq 1$ gilt. Für gleichmäßige Stetigkeit müsste aber insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ existieren mit

$$\forall x, y \in (0, 1): |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1.$$

(iii) Aus der Abschätzung

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

in Beispiel 3.1.3.2 folgt, dass die Betragsfunktion auf ganz \mathbb{R} gleichmäßig stetig ist: man kann $\delta = \varepsilon$ wählen.

Auf kompakten Intervallen sind die zwei Begriffe äquivalent wie der nächste Satz zeigt.

Satz 3.2.8. Es sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist f sogar gleichmäßig stetig.

Beweis. Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig. D.h. es gilt mit $D = [a, b]$

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in D: |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Wir wählen ein $\varepsilon > 0$ wie oben. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\delta = \frac{1}{n}$ und finden dazu $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert dann eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir setzen $c := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Da $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt, folgt mit der Dreiecksungleichung

$$|y_{n_k} - c| = |y_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leq |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| \rightarrow 0$$

und daher gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = c$. Da f stetig ist, folgt weiter

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})] = f(c) - f(c) = 0$$

im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 3.2.9. Satz 3.2.8 gilt auch im Komplexen, z.B. für $f: \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R > 0$ beliebig.

4 Der Fundamentalsatz der Algebra

In diesem Kapitel behandeln wir einen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, den wir schon in der Mathematik 2 benutzt haben. Dieser besagt, dass jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten mindestens eine komplexe Nullstelle besitzt.

4.1 Beweis

Lemma 4.1.1. Es sei

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto p(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k \end{aligned}$$

eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$ und es sei $a \in \mathbb{C}$ mit $p(a) \neq 0$. Es sei weiter $R > 0$ beliebig und $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |a - z| < R\}$ die offene Kreisscheibe um a mit Radius R . Dann existiert ein $b \in D$ mit $|p(b)| < |p(a)|$.

Beweis. • Wir bemerken zunächst, dass die Punkte in der Kreisscheibe D in der Form $a + w$ mit $|w| < R$ geschrieben werden können. Nun behaupten wir, dass

$$p(a + w) = p(a) + cw^m(1 + r(w)) \quad (\star)$$

gilt mit einem $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $1 \leq m \leq n$ und einer Polynomfunktion $r: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vom Grad $n - m$, für die $r(0) = 0$ gilt.

In der Tat gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$p(a + w) = \sum_{k=0}^n c_k (a + w)^k = \sum_{k=0}^n c_k \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} a^{k-i} w^i \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} c_k a^{k-i} \right) w^i,$$

wobei wir $\binom{k}{i} = 0$ für $i > k$ benutzt haben. Also ist $w \mapsto p(a + w)$ eine komplexe Polynomfunktion vom Grad n , und damit ist auch

$$\tilde{p}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{p}(w) := p(a + w) - p(a)$$

eine Polynomfunktion vom Grad n , die wegen $n \geq 1$ nicht konstant ist. Diese Polynomfunktion hat offensichtlich an der Stelle $w_0 = 0$ eine Nullstelle.

Ist $m \in \mathbb{N}_0$ die Ordnung der Nullstelle $w_0 = 0$, so gilt $1 \leq m \leq n$ und wir können nach dem Satz über Polynomdivision aus der Mathematik 1 für jedes $w \in \mathbb{C}$

$$\tilde{p}(w) = w^m q(w)$$

schreiben. Hierbei ist $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion vom Grad $n - m$, für die $q(0) \neq 0$ gilt. Wir betrachten nun die Polynomfunktion

$$\begin{aligned} r: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto \frac{q(w) - q(0)}{q(0)} \end{aligned}$$

Dann hat auch diese Polynomfunktion r Grad n und es gilt $r(0) = 0$, sowie $q(w) = q(0)(1 + r(w))$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} p(a + w) &= p(a) + \tilde{p}(w) = p(a) + w^m q(w) \\ &= p(a) + w^m q(0)(1 + r(w)) \end{aligned}$$

Damit haben wir (\star) mit $c := q(0)$ gezeigt.

- Als nächstes schätzen wir die beiden Funktionen $|cw^m|$ und $|r(w)|$ nach oben ab für Werte w , die nahe bei Null liegen:

1. Für $|w| < \rho_1 := \sqrt[m]{|p(a)/c|}$ (wohldefiniert und strikt positiv!) gilt:

$$|cw^m| = |c||w|^m < |c||p(a)/c| = |p(a)|.$$

2. Da $r: D \rightarrow \mathbb{C}$ als Polynomfunktion stetig ist und $r(0) = 0$ gilt, folgt für $\varepsilon = 1$, dass ein $\rho_2 > 0$ existiert, sodass für alle $w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|w| < \rho_2 \Rightarrow |r(w)| < 1.$$

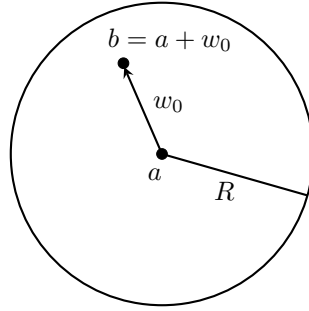
Kombinieren wir 1. und 2., so erhalten wir die beiden Abschätzungen

$$\forall w \in \mathbb{C} \text{ mit } |w| < \rho := \min(\rho_1, \rho_2): |cw^m| < |p(a)| \text{ und } |r(w)| < 1. \quad (\circ)$$

- Es sei nun ζ eine m -te Wurzel von $-\frac{p(a)/c}{|p(a)/c|}$, d.h. es gilt

$$\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1 \text{ und } \zeta^m = -\frac{p(a)/c}{|p(a)/c|}.$$

Es sei weiter $0 < \varepsilon < \min(\rho, R)$. Wir setzen $w_0 := \varepsilon\zeta$ und behaupten, dass $b := a + w_0$ die im Lemma gewünschten Eigenschaften hat. In der Tat gilt zunächst $|w_0| = \varepsilon < R$ und daher ist $b \in D$:



Jetzt muss noch $|p(b)| < |p(a)|$ gezeigt werden. Mit (\star) folgt

$$|p(b)| = |p(a + w_0)| = |p(a) + cw_0^m(1 + r(w_0))|$$

und weiter mit $\delta := \frac{\varepsilon^m}{|p(a)/c|}$

$$(+)\quad cw_0^m = c\varepsilon^m\zeta^m = -\frac{\varepsilon^m}{|p(a)/c|}p(a) = -\delta p(a),$$

wobei wir erst die Definition von $w_0 := \varepsilon\zeta$, dann die Definition von ζ und schließlich die Definition von δ benutzt haben. Da $\varepsilon > 0$ ist, sehen wir, dass $\delta > 0$ gilt. Wegen $\varepsilon = |w_0| < \rho$ folgt mit (\circ) , dass

$$\delta = \frac{\varepsilon^m}{|p(a)/c|} = \frac{|w_0|^m}{|p(a)/c|} = \frac{|cw_0^m|}{|p(a)|} < 1$$

gilt. Damit schätzen wir nun $|p(b)|$ weiter ab. Mit $(+)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} |p(b)| &= |p(a) - \delta p(a)(1 + r(w_0))| \\ &= |(1 - \delta)p(a) - \delta p(a)r(w_0)| \\ &\leq (1 - \delta)|p(a)| + \delta|p(a)||r(w_0)| \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \\ &< (1 - \delta)|p(a)| + \delta|p(a)| \quad (\text{weil } |r(w_0)| < 1 \text{ nach } (\circ)) \\ &= |p(a)|. \end{aligned}$$

□

Satz 4.1.2. (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. • Es sei

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto p(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k \end{aligned}$$

eine Polynomfunktion vom Grad $n \geq 1$. Wir betrachten

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{p(z)}{z^n} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left[c_n + \frac{c_{n-1}}{z} + \frac{c_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{c_0}{z^n} \right] = c_n,$$

woraus folgt

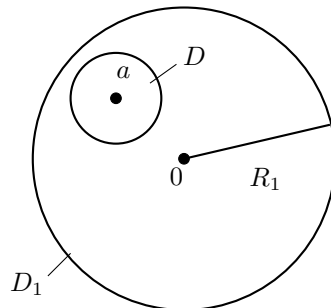
$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |p(z)| = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \cdot |z^n| = +\infty,$$

weil $c_n \neq 0$ nach Voraussetzung über den Grad von P gilt. Es existiert also ein $R_1 > 0$, sodass $|p(z)| > |p(0)|$ für alle z auf dem Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R_1\}$ gilt. Nun ist die reellwertige Funktion

$$|p|: \overline{D}_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R_1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig und nimmt gemäß Bemerkung 3.2.5 ihr Minimum in einem Punkt $a \in \overline{D}_1$ an.

- Wegen der gerade gezeigten Ungleichung $|p(z)| > |p(0)|$ für Randpunkte z von \overline{D}_1 kann a aber nicht auf dem Rand liegen. Also gilt $a \in D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_1\}$. Jetzt wählen wir $R > 0$ so klein, dass $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\} \subset D_1$ gilt:



Angenommen, $p(a) \neq 0$, dann gäbe es nach Lemma 4.1.1 ein $b \in D \subset \overline{D}_1$ mit $|p(b)| < |p(a)|$ und a wäre keine Minimalstelle von $|p|$ auf \overline{D}_1 . Widerspruch, also muss $p(a) = 0$ gelten. □

Korollar 4.1.3. Über \mathbb{C} zerfällt jedes Polynom p vom Grad $n \geq 1$ in Linearfaktoren. Genauer: Es gibt $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = c \prod_{i=1}^n (z - z_i).$$

Beweis. Wir wenden den Fundamentalsatz 4.1.2 und den Satz über Polynomdivision aus der Mathematik 2 n Mal an. □

5 Differenzierbarkeit

5.1 Definition

Definition 5.1.1. 1. Es sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und es sei $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$. Dann heißt f differenzierbar in a , falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in D \setminus \{a\}}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in \mathbb{R} existiert.

2. Der Wert $f'(a)$ heißt die Ableitung von f an der Stelle a .
3. Falls jeder Punkt $a \in D$ Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ ist und f differenzierbar in jedem $a \in D$ ist, dann sagen wir, dass f (überall) differenzierbar ist. Wir bekommen in diesem Fall eine Abbildung

$$f': D \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto f'(a),$$

die wir als Ableitung von f bezeichnen.

Bemerkungen 5.1.2.

- (i) Dass $a \in D$ ein Berührungspunkt von $D \setminus \{a\}$ ist, ist nötig damit der Grenzwert in Definition 5.1.1 wohldefiniert ist: Da wir $x = a$ nicht einsetzen können, brauchen wir Punkte in D , die nah bei a liegen, aber nicht gleich a sind. Oft lässt man ‘ $x \in D \setminus \{a\}$ ’ unter dem Limes weg, weil man am nachfolgenden Bruch sieht, dass $x = a$ nicht eingesetzt werden darf.
- (ii) In Definition 5.1.1 bedeutet ‘der Grenzwert existiert’, dass dieser in \mathbb{R} existiert; $\pm\infty$ sind nicht erlaubt.
- (iii) Substituiert man $h := x - a$, so sieht man, dass

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

gilt, falls f differenzierbar ist. Man kann auch die Definition mit obigem Ausdruck formulieren. Wenn man ganz genau sein will, muss man noch sagen, dass nur $h \in \{x \in \mathbb{R} : x + a \in D\} \setminus \{0\}$ zugelassen ist und dies unter den Limes schreiben, aber auch hier lassen wir dies meistens weg. Wir schreiben oft zur Vereinfachung der Notation schon den Limes, bevor überhaupt die Konvergenz der Funktion geklärt ist.

- (iv) Andere Notationen für die Ableitung sind

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df(a)}{dx} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a}$$

oder $f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx}$ bzw. kurz $f' = \frac{df}{dx}$. Hierbei ist zu beachten, dass $\frac{df}{dx}$ lediglich eine Abkürzung ist und kein Bruch reeller Zahlen. Wir werden allerdings später an manchen Stellen so tun, als wäre dies doch ein Bruch mit dem wir ganz normal rechnen könnten! Solche ‘Rechnungen’ sind dann aber nur als Heuristiken zu werten und haben keinen Beweiswert. Wir werden sehen, dass dies einerseits in der Praxis durchaus hilfreich

sein kann und manchmal nur eine etwas unsaubere Schreibweise eines fundierten mathematischen Satzes ist. Andererseits werden wir auch sehen, dass es zu schweren Fehlern führen kann, wenn man allzu sorglos damit umgeht.

Es gilt z.B.

$$f'(0) = \frac{df}{dx}(0) = \frac{df(0)}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \Big|_{x=0}$$

aber nicht $f'(0) = \frac{df}{d0}(0)$.

Beispiele 5.1.3.

(i) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ die konstante Funktion für ein $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

(ii) Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = cx$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - cx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cx + ch - cx}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ch}{h} = c.$$

(iii) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann gilt unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

(iv) Für die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

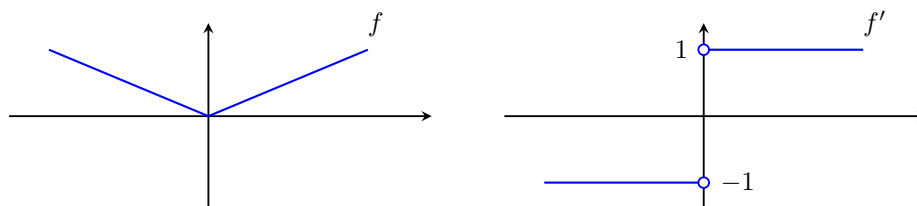
(v) Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ die Betragsfunktion. Dann gilt für $x \neq 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{x+h-x}{h}, & x > 0 \\ \frac{-(x+h)-(-x)}{h}, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases},$$

wobei wir in der ersten geschweiften Klammer benutzt haben, dass für $x > 0$ und h geeignet klein ebenfalls $x+h > 0$ gilt und analog für $x < 0$ und h hinreichend klein $x+h < 0$ gilt. Für $x = 0$ existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$$

also nicht und die Betragsfunktion ist im Punkt Null nicht differenzierbar.



5.2 Ableiten und lineare Approximation

Satz 5.2.1. (Lineare Approximation) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und es sei $x_0 \in D$ Berührungspunkt von $D \setminus \{x_0\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist in x_0 differenzierbar.
- (ii) Es existieren $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in D$ gilt

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x - x_0) + \varphi(x)$$

wobei

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0 ,$$

gilt und $\alpha = f'(x_0)$ die Ableitung an der Stelle x_0 ist.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Es sei f differenzierbar in x_0 . Wir setzen $\alpha := f'(x_0)$ und $\varphi(x) := f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)$. Dann gilt die Formel aus (ii) und überdies

$$\frac{\varphi(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

(ii) \Rightarrow (i): Es seien α und φ wie in (ii). Dann gilt

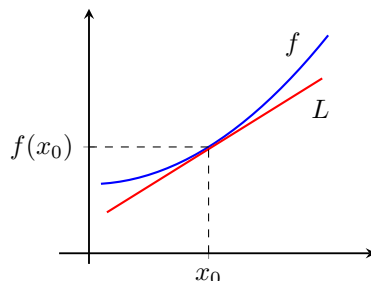
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \alpha = \frac{f(x) - f(x_0) - \alpha(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{\varphi(x)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

und damit existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und ist gleich α . \square

Bemerkung 5.2.2. Es sei $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion

$$L: D \rightarrow \mathbb{R}, L(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eine affin-lineare Approximation von f . Den Graphen von L kann man sich als Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ graphisch veranschaulichen. In der Schule wird die Ableitung vielleicht manchmal als Steigung der Tangente in einem Punkt ‘definiert’. Hierfür müsste man allerdings zuerst definieren, was eine Tangente an einen Graphen in einem Punkt sein soll. Dennoch passt das nachfolgende Bild gut zu der üblichen Erklärung, bei der man Sekanten einzeichnet, die durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ gehen, und sich dann vorstellt, dass x immer näher an x_0 heranrückt und die Sekante im Grenzfall mit dem Graphen von L übereinstimmt.



Die Abbildung φ aus 5.2.1 kann als $\varphi = f - L$ geschrieben und als Fehler interpretiert werden, den wir machen, wenn wir die Funktion f durch die affine Approximation L ersetzen. Es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$. Satz 5.2.1 sagt dann, dass dieser Fehler sogar schneller als $x - x_0$ gegen Null geht, wenn wir uns mit x an x_0 annähern. Denn wenn wir $\varphi(x)$ durch $x - x_0$ teilen, was selbst gegen Null geht, dann geht der Quotient immer noch gegen Null.

Korollar 5.2.3. Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Es sei $x_0 \in D$. Dann gilt: Ist f differenzierbar in x_0 , so ist f auch stetig in x_0 . Die Umkehrung gilt nicht.

Beweis. ‘ \implies ’ Wir wählen α und φ wie in 5.2.1(ii). Dann gilt

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varphi(x)) \\ &= f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = f(x_0).\end{aligned}$$

‘ \nLeftarrow ’ Die Betragsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist nach Beispiel 3.1.3.2 im Punkt $x_0 = 0$ zwar stetig, aber nach Beispiel 5.1.3.(v) nicht differenzierbar. \square

5.3 Rechenregeln für Ableitungen

Satz 5.3.1. (Ableitungsregeln) Es seien $f, g: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in D$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Abbildungen $f + g$, λf und $f \cdot g: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x und es gilt:

$$\begin{aligned}(f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (\lambda f)' &= \lambda f'(x) \\ (f \cdot g)'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{Produkt- oder Leibnizregel.}\end{aligned}$$

Die ersten beiden Regeln zusammen besagen, dass Ableiten eine \mathbb{R} -lineare Abbildung auf dem Raum der Funktionen ist. Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen oben noch $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch $\frac{f}{g}: D \rightarrow \mathbb{R}$ in x differenzierbar und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Beweis. Die ersten zwei Aussagen folgen direkt aus den Rechenregeln für Grenzwerte, die wir in der Mathematik 2 behandelt haben. Für die Produktregel berechnen wir

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + [f(x+h) - f(x)]g(x) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \right) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, dass nach Korollar 5.2.3 die Funktion f als differenzierbare Funktion stetig ist. Für die Quotientenregel betrachten wir erst den Spezialfall, dass der Zähler konstant Eins ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \\ &= \frac{1}{g(x)^2} (-g'(x)).\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass g in x wegen Korollar 5.2.3 stetig ist. Die allgemeine Version der Quotientenregel können wir nun mithilfe der bereits bewiesenen Produktregel zeigen:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x) \frac{1}{g(x)} + \frac{-g'(x)}{g(x)^2} f(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}. \square$$

Satz 5.3.2. (Kettenregel) Es seien $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(D) \subseteq F$ gegeben. Es sei f differenzierbar in $x \in D$ und g differenzierbar in $y := f(x) \in F$. Dann ist die Komposition $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in x und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Beweis. Wir definieren zunächst die Hilfsfunktion

$$g^*: F \rightarrow \mathbb{R}, \quad g^*(\tilde{y}) = \begin{cases} \frac{g(\tilde{y}) - g(y)}{\tilde{y} - y}, & \tilde{y} \neq y, \\ g'(y), & \tilde{y} = y. \end{cases}$$

Da g in y differenzierbar ist, gilt dann $\lim_{\tilde{y} \rightarrow y} g^*(\tilde{y}) = g'(y) = g^*(y)$. Daraus folgt

$$(g \circ f)'(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{g(f(\tilde{x})) - g(f(x))}{\tilde{x} - x} = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} g^*(f(\tilde{x})) \cdot \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x} = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

wobei die letzte Gleichheit aus Korollar 5.2.3 zusammen mit dem in der Zeile davor ausgerechneten Grenzwert folgt. Die mittlere Gleichung sieht man am besten rückwärts durch Fallunterscheidung: Ist $f(\tilde{x}) \neq f(x)$ so kann der erste Faktor gemäß dem ersten Fall in der Definition von g^* ersetzt werden. Dann kürzen sich aber die Terme $f(\tilde{x}) - f(x)$ weg und auf beiden Seiten bleibt das gleiche übrig. Ist $f(\tilde{x}) = f(x)$, so sind beide Seiten gleich Null. \square

Beispiele 5.3.3.

- (i) Es sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $f'_n = n f_{n-1}$. Wir zeigen dies mit Induktion.

Die Fälle $n = 1, 2$ haben wir schon in Beispiel 5.1.3 gesehen.

Für den Induktionsschritt von n auf $n + 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (f_{n+1})'(x) &= (f_1 f_n)'(x) = f'_1(x) f_n(x) + f_1(x) f'_n(x) \\ &= 1 \cdot x^n + x \cdot n x^{n-1} = (1 + n) x^n = (n + 1) f_n(x), \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Gleichung die Produktregel und für die dritte die Induktionsannahme sowie die Formel für $n = 1$ aus dem Induktionsanfang benutzt haben.

- (ii) Es sei $g_n: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $g'_n = -\frac{n}{x^{n+1}}$. In der Tat folgt mit der Quotientenregel aus Satz 5.3.1 und (i):

$$\begin{aligned} g'_n(x) &= \left(\frac{1}{f_n}\right)'(x) = \frac{0 \cdot f_n(x) - 1 \cdot f'_n(x)}{f_n(x)^2} \\ &= \frac{-n x^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{2n-n+1}} = -\frac{n}{x^{n+1}}. \end{aligned}$$

- (iii) Beispiele (i) und (ii) schreibt man oft zusammen als $(x^n)' = n x^{n-1}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dabei muss man aber beachten, dass diese Funktionen für unterschiedliche n verschiedene Definitionsbereiche haben.

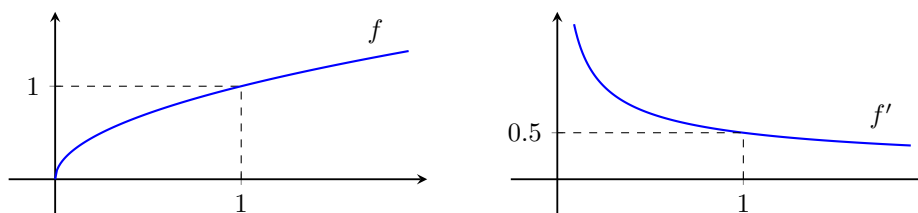
(iv) $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Dann gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ für $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass hier nur Werte von $h \neq 0$ betrachtet werden, für die $x+h > 0$ gilt, vgl. Definition 5.1.1 und Bemerkung 5.1.2(i). In $x=0$ ist f nicht differenzierbar, weil der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h}}{h}$$

nicht existiert. In Null existiert die Ableitung nicht. Im folgenden Bild sieht man, dass die Funktion immer steiler wird, je näher man der Null kommt; für die Ableitung(sfunktion) $f': (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = +\infty$.



Satz 5.3.4. Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt $\exp' = \exp$.

Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $0 < |h|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{x+h} - e^x}{h} - e^x \right| &= e^x \left| \frac{e^h - 1 - h}{h} \right| = \frac{e^x}{|h|} |e^h - (1+h)| \\ &= \frac{e^x}{|h|} \left| e^h - \sum_{k=0}^1 \frac{h^k}{k!} \right| \leq \frac{e^x}{|h|} \frac{|h|^{1+1}}{(1+1)!} e^{|h|} \\ &= e^x \frac{|h|}{2} e^{|h|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

wobei wir zuerst die Fehlerabschätzung für die Exponentialfunktion, vgl. Beispiel 3.1.3.1, angewendet haben und dann, dass nach Beispiel 3.1.3.1 die Exponentialfunktion (insbesondere in Null) stetig ist. Es folgt also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$$

und damit die Behauptung. □

Satz 5.3.5. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, strikt wachsend und $g := f^{-1}: I' \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion, die nach dem Umkehrsatz 3.1.15 existiert. Hierbei setzen wir wobei wir $I' := \text{Bild}(f)$. Es sei nun zusätzlich f differenzierbar in $x \in I$ und gelte $f'(x) \neq 0$. Dann ist g differenzierbar in $y := f(x)$ und es gilt

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Der Satz gilt analog für strikt fallende Funktionen.

Beweis. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I' \setminus \{y\}$ gegeben mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Wir setzen $x_n := g(y_n)$. Da g stetig ist, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = g(y) =: x$. Da g bijektiv ist, gilt $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$

und da $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beliebig war, haben wir $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ gezeigt. \square

Korollar 5.3.6. Es gilt $\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und unter Benutzung von Satz 5.3.5 und Satz 5.3.4.

Satz 5.3.7. Die Funktionen $\sin, \cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar und es gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Beweis. Wir notieren zunächst

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} =: (\star) \end{aligned}$$

und sehen, dass es genügt,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

zu zeigen. Wir behandeln den ersten Grenzwert hier und den zweiten in einer Präsenzaufgabe. Da wir im Beweis von Satz 5.3.4 die Exponentialfunktion mithilfe der Fehlerabschätzung ihrer Reihendarstellung behandelt haben, und wir für den Kosinus ebenfalls die Reihendarstellung $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ kennen, liegt es nahe, auch hier diese Reihenabschätzung zu verwenden. Dies führt zunächst auf

$$\left| \frac{\cos h - 1}{h} \right| = \frac{1}{|h|} |\cos h - 1|$$

und wir benötigen nun eine Fehlerabschätzung. Hierfür berechnen wir

$$\begin{aligned} \left| \frac{\cos h - 1}{h} \right| &= \frac{1}{|h|} |\cos h - 1| = \frac{1}{|h|} |\operatorname{Re}(e^{ih} - 1)| = \frac{1}{|h|} |\operatorname{Re}(e^{ih} - (1 + ih))| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| e^{ih} - \sum_{k=0}^1 \frac{(ih)^k}{(k)!} \right| \\ &\leq \frac{|ih|^2}{(2)!|h|} e^{|ih|} = \frac{|h|}{2} e^{|h|} \end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} = |\operatorname{Re} z|$ benutzt haben, für die zweite die Fehlerabschätzung der Exponentialfunktion (vgl. Beispiel 3.1.3.3). Mit Hilfe der Stetigkeit der Exponentialfunktion an der Stelle Null folgt, dass $\left| \frac{\cos h - 1}{h} \right| \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

Wir zeigen $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ in einer Präsenzaufgabe und bekommen damit

$$(\star) = \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x.$$

Analog zeigt man $\cos' = -\sin$. □

Bemerkungen 5.3.8.

- (i) Mit Satz 5.3.7 und der Quotientenregel aus Satz 5.3.1 kann man sehen, dass auch der Tangens differenzierbar ist und \tan' bestimmen.
- (ii) Mit (i) und Satz 5.3.5 folgt, dass die inversen trigonometrischen Funktionen differenzierbar sind; ihre Ableitungen werden wir in einer Übungsaufgabe bestimmen.

5.4 Höhere Ableitungen

Ist eine Funktion $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz D differenzierbar, so betrachten wir die Ableitung als neue Funktion $f': D \rightarrow \mathbb{R}$. Es liegt dann nahe, diese Funktion wieder auf Differenzierbarkeit oder zumindest auf Stetigkeit zu untersuchen und, im Fall, dass f' wieder überall differenzierbar sein sollte, für die Ableitung der Ableitung $(f')' =: f''$ wieder genauso zu verfahren. Im Folgenden beschränken wir uns auf Definitionsbereiche, die nichtleere offene Intervalle sind und definieren induktiv, was es heißt, k -mal differenzierbar zu sein, wobei wir den Anfang in (i) für $k = 1$ schon in 5.1.1 erledigt haben und nur noch bemerken müssen, dass wir statt f' unten $f^{(1)}$ schreiben:

Definition 5.4.1. Es sei I ein nichtleeres offenes Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Für $k \geq 2$ sagen wir, dass f k -mal differenzierbar ist, falls f $(k-1)$ -mal differenzierbar ist und $f^{(k-1)}: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Wir bezeichnen in diesem Fall $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$ als die k -te Ableitung. (Die wird manchmal auch als $\frac{d^k f}{dx^k}$ notiert.)
- (ii) Ist für $k \geq 1$ die k -te Ableitung zusätzlich stetig, so sagen wir f ist k -mal stetig differenzierbar. Im Fall einer 1-mal stetig differenzierbaren Abbildung lassen wir '1-' weg und sprechen nur von einer stetig differenzierbaren Abbildung.
- (iii) Wir führen die folgende Notation ein

$$\begin{aligned} C^0(I) &:= C(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\} \\ C^k(I) &:= \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\} \text{ für } k \in \mathbb{N} \\ C^\infty(I) &:= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I) \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ nennen wir die Elemente von $C^k(I)$ auch C^k -Funktionen. Wir bezeichnen manchmal mit $f^{(0)} := f$ die Funktion selbst ('0-te Ableitung'). Wir beachten, dass C^∞ -Funktionen *beliebig oft* (stetig) differenzierbar sind. Sie heißen auch glatte Funktionen.

Beispiele 5.4.2.

1. $x \mapsto x^2$, \sin , \cos , $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\log \in C^\infty((0, \infty))$.
2. $|\cdot| \in C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$; in der Tat ist $|\cdot|$ in $x = 0$ nicht differenzierbar also insbesondere nicht stetig differenzierbar auf ganz \mathbb{R} .
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ liegt ebenfalls in $C^0(\mathbb{R}) \setminus C^1(\mathbb{R})$, ist aber überall differenzierbar jedoch mit unstetiger Ableitung.
4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ gehört zu $C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$. Hier ist f' in Null nicht differenzierbar.

6 Der Mittelwertsatz und seine Konsequenzen

6.1 Extrema und der Mittelwertsatz

Definition 6.1.1. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ gegeben. Dann hat f ein lokales Maximum [bzw. Minimum] in $x \in (a, b)$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ und $f(x) \geq f(\xi)$ [bzw. $f(x) \leq f(\xi)$] für alle $\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Das lokale Maximum [bzw. Minimum] ist strikt falls Gleichheit nur für $\xi = x$ gilt. Wir verwenden das Wort Extremum für beides, Maximum und Minimum. Lokale Extrema nennt man auch relative Extrema.

Satz 6.1.2. (notwendige Bedingung für lokale Extrema) Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ gegeben. Wenn f im Punkt $x \in (a, b)$ ein lokales Extremum hat und f in x differenzierbar ist, dann verschwindet die erste Ableitung, also $f'(x) = 0$.

Beweis. Wir behandeln nur den Fall, dass f in x ein lokales Maximum hat. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset (a, b)$ und $f(\xi) \leq f(x)$ gilt für alle $\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Weil f differenzierbar ist, folgt für die einseitigen Grenzwerte

$$f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

In den beiden letzten Brüchen sind für alle ξ die hinreichend nah bei x sind, die Zähler negativ oder Null. Der Nenner ist aber im letzten Bruch stets negativ und im vorletzten stets positiv. Der Grenzwert ist also gleichzeitig kleiner gleich Null und größer gleich Null und kann damit nur gleich Null sein. \square

Bemerkungen 6.1.3.

- (i) $f'(x) = 0$ ist nur notwendig, aber nicht hinreichend für ein Extremum. Zum Beispiel gilt für die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ an der Stelle Null $f'(0) = 0$, aber in Null liegt kein Extremum vor.
- (ii) Ein Extremum kann auch vorliegen, ohne dass die Funktion differenzierbar ist, z.B. hat die Betragsfunktion $|\cdot|: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein striktes lokales Minimum in Null.

- (iii) Betrachten wir $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < +\infty$, so kann $f(a) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ oder $f(a) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ gelten und f in a differenzierbar sein, ohne dass die Ableitung in diesem Punkt verschwindet, so zum Beispiel für $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Hier liegen Maximum und Minimum auf Randpunkten.

Satz 6.1.4. (Satz von Rolle; ausgesprochen ‘Roll’) Es sei $-\infty < a < b < +\infty$ und es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Weiterhin sei die Einschränkung von f auf (a, b) , $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Falls f konstant ist, dann ist die Aussage nach Beispiel 5.1.3(i) wahr. Es sei f also nicht konstant.

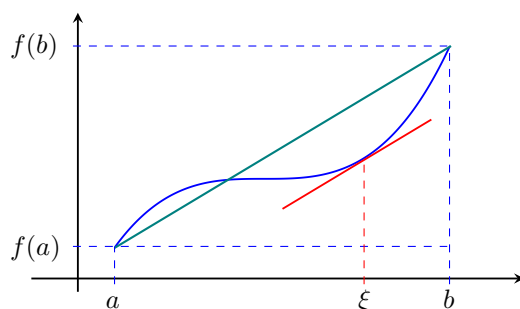
Fall 1: Es gibt ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$. Nach dem Extremalsatz 3.2.2 existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \max_{y \in [a, b]} f(y)$. Dieses x muss aber ungleich a und auch ungleich b sein, da wir ja wissen, dass $f(x_0) > f(a) = f(b)$ gilt und damit das Maximum nicht in den Randpunkten a bzw. b angenommen werden kann. Es gilt also $x \in (a, b)$, und daher folgt mit Satz 6.1.2, dass $f'(x) = 0$ ist.

Fall 2: Wenn es kein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) > f(a)$ gibt, dann muss es ein x_0 mit $f(x_0) < f(a)$ geben und man kann völlig analog zum ersten Fall argumentieren. \square

Satz 6.1.5. (Mittelwertsatz) Es sei $-\infty < a < b < +\infty$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Im Bild hat die rote Gerade die Steigung $f'(\xi)$ und ist parallel zur grünen Verbindungsstrecke mit Steigung $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$:



Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

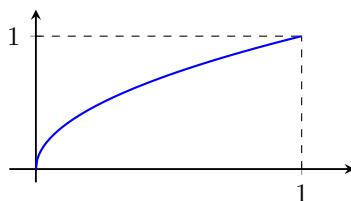
Dann ist F stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) nach Ergebnissen aus Kapitel 3 und Kapitel 5. Außerdem gilt $F(a) = f(a) = F(b)$ wie man durch Einsetzen direkt überprüft. Nach dem Satz von Rolle 6.1.4 existiert daher $\xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$. Damit gilt aber

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und dies zeigt die Behauptung, wenn man nach $f'(\xi)$ auflöst. \square

Bemerkungen 6.1.6.

- (i) Der Spezialfall $f(a) = f(b)$ im Mittelwertsatz 6.1.5 liefert den Satz von Rolle 6.1.4.
- (ii) Wir haben im Satz 6.1.4 von Rolle und im Mittelwertsatz 6.1.5 Differenzierbarkeit nur auf dem offenen Intervall (a, b) gefordert und fanden $\xi \in (a, b)$. Nun kann man aber auch Differenzierbarkeit und Ableitung in Randpunkten mit Definition 5.1.1 definieren. Wenn wir dies fordern, kann auch ξ im abgeschlossenen Intervall liegen, also $\xi \in [a, b]$. Unsere Formulierung ist aber stärker, weil die Voraussetzungen schwächer sind und die Aussage $\xi \in (a, b)$ stärker ist als $\xi \in [a, b]$. Ein konkretes Beispiel dafür ist die Wurzelfunktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, die im linken Randpunkt Null nicht differenzierbar ist, aber die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt:



- (iii) Es gibt einen ‘verallgemeinerten Mittelwertsatz’: Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und es sei außerdem $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Der Beweis wird in einer Präsenzaufgabe behandelt. Setzt man $g(x) = x$, so erhält man den Mittelwertsatz in der Fassung von Satz 6.1.5.

Korollar 6.1.7. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Falls die Ableitungsfunktion f' auf (a, b) beschränkt ist, es also Schranken $m, M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $\xi \in (a, b)$ die Ungleichungen $m \leq f'(\xi) \leq M$ gelten, so folgt

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b) \text{ mit } x_1 < x_2: m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1)$$

Beweis. Für $x_1 < x_2$ in (a, b) existiert $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$ und daher nach Voraussetzung $m \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq M$. \square

Korollar 6.1.8. Es seien $-\infty < a < b < +\infty$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wir wenden Korollar 6.1.7 mit den Schranken $m = M = 0$ für die Ableitungsfunktion an. \square

Satz 6.1.9. Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) = cf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Es sei weiter $a := f(0)$. Dann gilt $f(x) = ae^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Wir definieren die Hilfsfunktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $F(x) = f(x)e^{-cx}$. Dann ist F differenzierbar mit

$$F'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = (f'(x) - cf(x))e^{-cx} = 0.$$

Nach Korollar 6.1.8 ist F konstant und wegen $F(0) = f(0)e^0 = f(0) = a$ folgt, dass $F(x) = a$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gelten muss. Umstellen von $a = F(x) = f(x)e^{-cx}$ liefert $f(x) = ae^{cx}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. \square

Bemerkung 6.1.10. Korollar 6.1.8 impliziert, dass $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch die Eigenschaften $\exp' = \exp$ und $\exp(0) = 1$ eindeutig bestimmt ist. Wir können also die Funktion $f(x) = ae^{cx}$ durch eine Gleichung an ihre Ableitungsfunktion und einen Anfangswert charakterisieren.

Satz 6.1.11. Es seien $-\infty < a < b < +\infty$ und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar.

- (i) Falls $f'(x) \geq 0$ [bzw. $> 0, \leq 0, < 0$] für alle $x \in (a, b)$ gilt, dann ist f auf $[a, b]$ wachsend [bzw. strikt wachsend, fallend, strikt fallend].
- (ii) Ist f auf $[a, b]$ wachsend [bzw. fallend], dann ist $f'(x) \geq 0$ [bzw. ≤ 0] für alle $x \in (a, b)$.

Beweis. (i) Es sei $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Angenommen, f wäre nicht wachsend. Dann existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ aber $f(x_1) > f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz 6.1.5 existiert dann $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ gilt, im Widerspruch zur Annahme $f'(x) \geq 0$.

Es sei jetzt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Angenommen, f wäre nicht strikt wachsend. Dann existieren $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2$ aber $f(x_1) \geq f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert dann $\xi \in (x_1, x_2)$, sodass $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq 0$ gilt. Widerspruch.

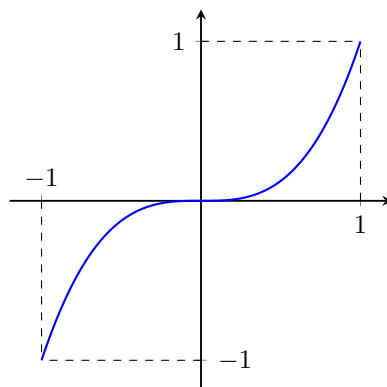
Die Aussagen mit $f'(x) \leq 0$ und < 0 zeigt man analog.

(ii) Es sei nun f wachsend. Dann gilt für $x, \xi \in (a, b)$ mit $x \neq \xi$ stets $\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0$. Wir fixieren $x \in (a, b)$ und nehmen den Grenzwert $\xi \rightarrow x$. Dann folgt $f'(x) \geq 0$.

Die zweite Aussagen mit f fallend behandelt man analog. □

Bemerkungen 6.1.12.

- (i) Hätten wir im Mittelwertsatz $\xi = a, b$ erlaubt (siehe die Kommentare in 6.1.6(ii)), dann hätten wir oben in (i) Differenzierbarkeit in den Randpunkten a, b fordern und auch in diesen Punkten $f'(x) \geq 0$ [bzw. $> 0, \leq 0, < 0$] fordern müssen. Das hätte unseren Satz schwächer gemacht, z.B. kann man mit Satz 6.1.11(i) schließen, dass $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ und $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$ auf $[0, 1]$ strikt wachsen, obwohl $f'(0) = 0$ gilt und die Ableitung $g'(0)$ nicht existiert. In der oben skizzierten Variante des Satzes hätte man ‘strikt wachsend’ auf $(0, 1]$ schließen können und hätte dann nochmal genauer untersuchen müssen, was passiert, wenn man den Punkt 0 noch hinzufügt.
- (ii) In 6.1.11(ii) wurde die Implikation ‘ f strikt wachsend $\Rightarrow f' > 0$ ’ nicht vergessen, sondern sie ist **falsch**: Z.B. ist $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ strikt wachsend aber es gilt $f'(0) = 0$.



Satz 6.1.13. (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema) Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ überall differenzierbar und an der Stelle $x \in (a, b)$ zweimal differenzierbar². Es gelte $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ [bzw. < 0]. Dann hat f an der Stelle x ein striktes lokales Minimum [bzw. Maximum].

Beweis. Es sei $f''(x) > 0$. Wir behaupten zunächst, dass wegen

$$f''(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0$$

ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass $\frac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0$ für alle $\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}$ gilt.

Angenommen, es gäbe kein solches $\varepsilon > 0$, dann könnten wir eine Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (a, b)$ mit $\xi_n \rightarrow x$ finden, für die $\frac{f'(\xi_n) - f'(x)}{\xi_n - x} \leq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt aber $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n) - f'(x)}{\xi_n - x} \leq 0$, was im Widerspruch dazu steht, dass dieser Grenzwert für jede Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ echt größer Null sein soll.

Da überdies $f'(x) = 0$ gelten soll, erhalten wir also

$$\forall \xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \setminus \{x\}: \frac{f'(\xi)}{\xi - x} > 0$$

und daher $f'(\xi) < 0$ für $\xi \in (x - \varepsilon, x)$ und $f'(\xi) > 0$ für $\xi \in (x, x + \varepsilon)$. Mit Satz 6.1.11 folgt, dass $f|_{[x - \varepsilon, x]}$ strikt fallend und $f|_{[x, x + \varepsilon]}$ strikt wachsend ist. Also muss in x ein striktes lokales Minimum vorliegen.

Wenn $f''(x) < 0$ ist, argumentiert man analog, um die Existenz eines lokalen Maximums zu zeigen. \square

Bemerkungen 6.1.14. 1. Der letzte Teil des obigen Beweises zeigt das Vorzeichenwechselkriterium: Ist $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) = 0$ für ein $x \in (a, b)$ und gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f'(\xi) < 0$ für $\xi \in (x - \varepsilon, x)$ sowie $f'(\xi) > 0$ für $\xi \in (x, x + \varepsilon)$ [bzw. $f'(\xi) > 0$ für $\xi \in (x - \varepsilon, x)$ sowie $f'(\xi) < 0$ für $\xi \in (x, x + \varepsilon)$], dann hat f in x ein striktes lokales Minimum [bzw. Maximum].

2. Die Bedingung in Satz 6.1.13 ist nicht notwendig: die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$ hat ein striktes Maximum bei $x = 0$. Dort verschwindet auch die erste Ableitung, also $f'(0) = 0$, aber es ist wegen $f''(x) = 12x^2$ auch die zweite Ableitung gleich Null. Andererseits ist die erste Ableitung $f'(x) = 4x^3$ für $x \leq 0$ negativ und für $x \geq 0$ positiv, so dass mit Hilfe des Vorzeichenwechselkriteriums die Existenz eines Maximums folgt.

6.2 Konvexe Funktionen

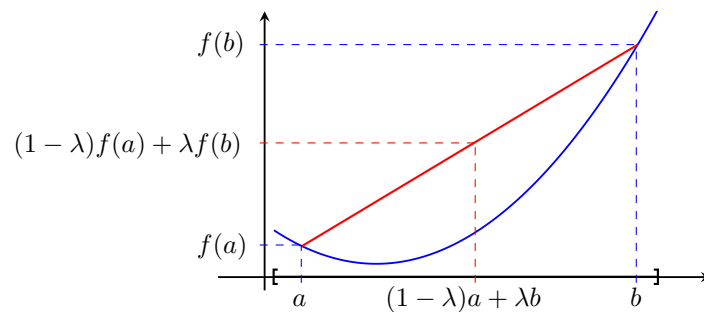
Definition 6.2.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (i) konvex, falls $\forall a, b \in I, \lambda \in [0, 1]: f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$,
- (ii) strikt konvex, falls $\forall a \neq b \in I, \lambda \in (0, 1): f((1 - \lambda)a + \lambda b) < (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$,
- (iii) [strikt] konkav, falls $-f$ [strikt] konvex ist.

²Streng genommen haben wir in Kapitel 5.4 nur definiert, was 2-mal stetig differenzierbar auf einem offenen Intervall I heißt. Aber es ist natürlich klar, dass wir hier meinen, dass die Ableitungsfunktion $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt x differenzierbar ist, und dass wir mit $f''(x)$ die Ableitung von f' in x bezeichnen.

Bemerkungen 6.2.2.

- (i) In der Definition 6.2.1(i) von Konvexität könnte man auch $\lambda \in (0, 1)$ schreiben, da für $\lambda \in \{0, 1\}$ beide Seiten der geforderten Ungleichung automatisch gleich sind. Aus demselben Grund kann man in Definition 6.2.1(ii) nicht $\lambda \in [0, 1]$ schreiben, weil dann die strikte Ungleichung für $\lambda \in \{0, 1\}$ immer verletzt wäre.
- (ii) [Strikte] Konkavität wird durch die Bedingungen in Definition 6.2.1(i) bzw. in Definition 6.2.1(ii) mit umgedrehter Abschätzung charakterisiert.
- (iii) Die Bedingung in Definition 6.2.1(i) hat die folgende anschauliche Interpretation:

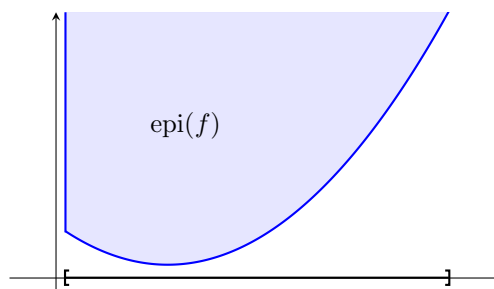


Für alle $a, b \in I$ ist die gerade Verbindungsline von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$, oder genauer der Graph der Abbildung

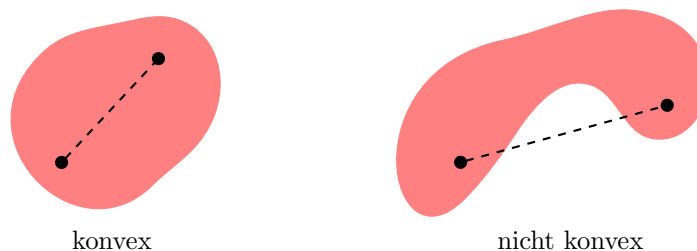
$$\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(\lambda) = (1 - \lambda) \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} + \lambda \left(\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} \right),$$

oberhalb des Graphen von f (wobei '=' erlaubt ist). Zeichnet man den sogenannten *Epigraph* von f ,

$$\text{epi}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\},$$



so sieht man, wo der Name 'konvex' herkommt: f ist konvex genau dann, wenn $\text{epi}(f) \subset \mathbb{R}^2$ konvex ist (d.h. die Verbindungsline von je zwei Punkten bleibt in der Menge):



Lemma 6.2.3. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist konvex.
- (ii) $\forall a < x < b: f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.
- (iii) $\forall a < x < b: \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.
- (iv) $\forall a < x < b: \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$.

Ersetzt man in (ii)–(iv) ‘ \leq ’ durch ‘ $<$ ’, so sind diese Aussagen äquivalent dazu, dass f strikt konvex ist. Durch Umdrehen der Abschätzungen erhält man Charakterisierungen [strikt] konkaver Funktionen.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage; der Rest geht genauso bzw. folgt durch Multiplikation mit -1 .

(i) \implies (ii): Es seien $a < x < b$ in I . Setze $\lambda := \frac{x-a}{b-a}$. Dann ist $\lambda \in (0, 1)$ und es gilt

$$\begin{aligned} (1-\lambda)a + \lambda b &= \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)a + \frac{x-a}{b-a}b \\ &= \frac{(b-a-x+a)a + (x-a)b}{b-a} \\ &= \frac{ba - xa + xb - ab}{b-a} \\ &= \frac{(b-a)x}{b-a} = x. \end{aligned}$$

Daher können wir benutzen, dass f konvex ist, und mit der Definition 6.2.1(i) von Konvexität wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1-\lambda)a + \lambda b) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \\ &= \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) \\ &= f(a) + \frac{-f(a) + f(b)}{b-a}(x-a) \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \end{aligned}$$

(ii) \implies (iii): Es seien wieder $a < x < b$ in I . Wir starten mit der Ungleichung in (ii) und subtrahieren erst $f(a)$ und teilen dann durch $(x-a)$. Das liefert die erste Ungleichung in (iii). Jetzt multiplizieren wir die Ungleichung aus (ii) mit -1 und addieren $f(b)$ auf beiden Seiten. Dies liefert

$$\begin{aligned} f(b) - f(x) &\geq f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \\ &= \frac{(f(b)-f(a))(b-a) - (f(b)-f(a))(x-a)}{b-a} \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a-x+a) \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x). \end{aligned}$$

Nun teilen wir beide Seiten der obigen Ungleichung durch $(b - x)$ und beachten, dass letzteres positiv ist. Dann folgt

$$\frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Das ist gerade die zweite Ungleichung in (iii).

(iii) \Rightarrow (iv): Dies ist eine Spezialisierung, weil man lediglich den mittleren Term weglässt.

(iv) \Rightarrow (i): Es seien $a, b \in I$, $\lambda \in (0, 1)$ und ohne Einschränkung sei $a < b$. Wir setzen $x := (1 - \lambda)a + \lambda b$. Dann gilt $x = (1 - \lambda)a + \lambda b < (1 - \lambda)b + \lambda b = b$ und analog $x > (1 - \lambda)a + \lambda a = a$. Wir haben $a < x < b$ und können die Ungleichung aus (iv) verwenden:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \\ \Rightarrow (b - x)(f(x) - f(a)) &\leq (x - a)(f(b) - f(x)) \\ \Rightarrow (b - x)f(x) + (x - a)f(x) &\leq (x - a)f(b) + (b - x)f(a) \\ \Rightarrow (b - x + x - a)f(x) &\leq (x - a)f(b) + (b - x)f(a) \\ \Rightarrow f(x) &\leq \frac{x - a}{b - a}f(b) + \frac{b - x}{b - a}f(a). \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir noch in den zwei Brüchen der letzten Zeile wieder $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$ einsetzen. Dies liefert

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{(1 - \lambda)a + \lambda b - a}{b - a} = \frac{a - \lambda a + \lambda b - a}{b - a} = \lambda \frac{b - a}{b - a} = \lambda$$

und

$$\frac{b - x}{b - a} = \frac{b - (1 - \lambda)a - \lambda b}{b - a} = \frac{(1 - \lambda)b - (1 - \lambda)a}{b - a} = (1 - \lambda) \frac{b - a}{b - a} = 1 - \lambda,$$

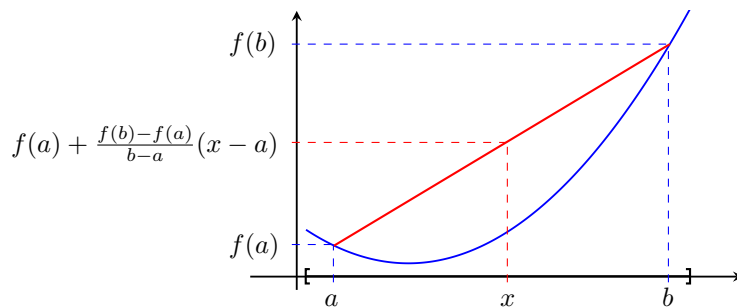
zusammen also

$$f((1 - \lambda)a + \lambda b) = f(x) \leq \lambda f(b) + (1 - \lambda)f(a)$$

was gerade die für (i) benötigte Ungleichung ist. \square

Bemerkungen 6.2.4.

- (i) Die Aussage in Lemma 6.2.3(ii) zeigt nochmal – und vielleicht etwas besser als unsere Erklärung in Bemerkung 6.2.2(iii) –, dass f genau dann konvex ist, wenn für alle $a < b$ der Graph von $f|_{(a,b)}$ unterhalb der Verbindungsstrecke von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$ liegt.

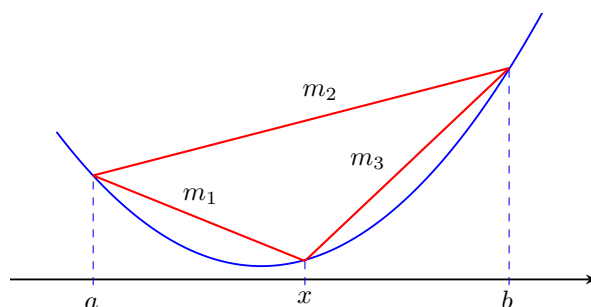


Diese Verbindungsstrecke kann mithilfe von 6.2.3(ii) jetzt als Graph der (Einschränkung der) affin-linearen Funktion

$$(a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

in aus der Schule bekannter ‘Punkt-Steigungs-Form’ beschrieben werden.

- (ii) Die Aussage in Lemma 6.2.3(iii) bedeutet anschaulich, dass die Steigung m_1 der Verbindungsstrecke von $(a, f(a))$ nach $(x, f(x))$ kleiner ist als die Steigung m_2 der Verbindungsstrecke von $(a, f(a))$ nach $(b, f(b))$ und dass diese wiederum kleiner ist als die Steigung m_3 der Verbindungsstrecke von $(x, f(x))$ nach $(b, f(b))$.



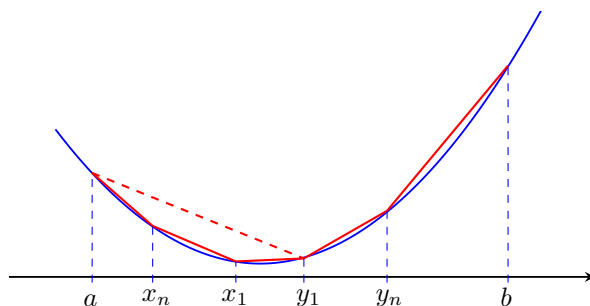
Im Bild bezeichnen m_1, m_2, m_3 die Steigungen und dann besagt 6.2.3(iii), dass $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ und 6.2.3(iv), dass $m_1 \leq m_3$ gilt.

- (iii) Da die Aussage in Lemma 6.2.3(iii) also mit der Änderung von Steigungen zu tun hat, erwarten wir, dass Konvexität etwas mit der (zweiten) Ableitung zu tun hat. Dies präzisieren wir im folgenden Satz.

Satz 6.2.5. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- (i) f ist genau dann [strikt] konvex, wenn f' [strikt] wächst.
- (ii) f ist genau dann [strikt] konkav, wenn f' [strikt] fällt.

Beweis. Wir zeigen (i) ‘ \implies ’: Es sei f strikt konvex und $a < b$ in I . Wähle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ strikt fallend mit Grenzwert a , $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ strikt wachsend mit Grenzwert b und derart, dass $x_1 < y_1$ gilt. Dann folgt mit Lemma 6.2.3(iii) bzw. Lemma 6.2.3(iv) aus der Konvexität von f für alle $n \in \mathbb{N}$



$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} < \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} < \frac{f(b) - f(y_n)}{b - y_n}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da f in a und b differenzierbar ist, folgt durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$f'(a) \leq \frac{f(x_1) - f(a)}{x_1 - a} < \frac{f(y_1) - f(x_1)}{y_1 - x_1} \leq f'(b).$$

Im Fall, dass f nur konvex (und nicht notwendig strikt konvex) ist, haben wir oben überall ' \leq ', d.h. aus $a < b$ folgt $f'(a) \leq f'(b)$.

Wir zeigen (i) ' \Leftarrow ': Es seien $a < x < b$ und I . Dafür wenden wir den Mittelwertsatz 6.1.5 in den Intervallen $[a, x]$ und $[x, b]$ an und finden $\xi \in (a, x)$ und $\eta \in (x, b)$ mit

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = f'(\eta).$$

Wenn nun f' strikt wächst, dann folgt $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$ also nach Lemma 6.2.3 strikte Konvexität. Wächst f lediglich (eventuell nicht strikt) so gilt die Ungleichung mit ' \leq ' und Lemma 6.2.3 zeigt, dass f immerhin konvex ist.

(ii) Da f' genau dann [strikt] fällt, wenn $-f' = (-f)'$ [strikt] wächst, folgt (ii) aus (i). \square

Korollar 6.2.6. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal differenzierbar. Dann gilt:

(i) f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

(ii) Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, dann ist f strikt konvex.

Für Konkavität gelten analoge Aussagen.

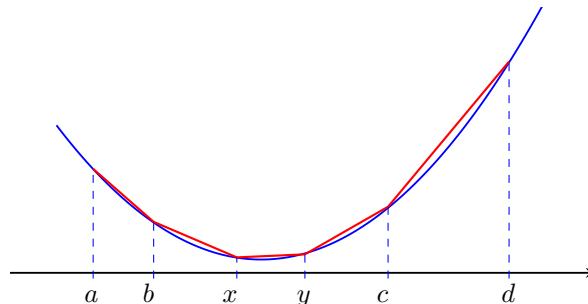
Beweis. Beide Aussagen folgen durch Kombination von Satz 6.2.5 mit Satz 6.1.11. \square

Bemerkung 6.2.7. Die Umkehrung von Korollar 6.2.6(ii) gilt nicht. Zum Beispiel ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$ konvex, aber es ist $f''(0) = 0$.

Korollar 6.2.8. (aus Lemma 6.2.3) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann ist f in jedem Punkt $x \in I$, der kein Randpunkt ist, stetig. Für eine konkave Funktion f gilt das gleiche.

Beweis. Es sei $x \in I$ kein Randpunkt. Dann gibt es $a < b < x < c < d$ mit $[a, d] \subset I$. Wir behaupten, dass $f|_{[b, c]}$ gleichmäßig stetig ist. Das sieht formal stärker aus als das, was in der Folgerung steht, aber tatsächlich ist es das doch nicht, da auf dem kompakten Intervall $[b, c]$ Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit nach Satz 3.2.8 äquivalent sind.

Es seien also jetzt $x, y \in [b, c]$ mit $x \neq y$ beliebig gegeben. Ohne Einschränkung dürfen wir $x < y$ annehmen. Mit Lemma 6.2.3 erhalten wir die Ungleichungen



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c},$$

woraus $\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq \max \left\{ \left| \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right|, \left| \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \right| \right\} =: K \geq 0$ folgt. Dies gilt für alle $x, y \in [b, c]$. Ist jetzt $\varepsilon > 0$ gegeben, so können wir $\delta := \frac{\varepsilon}{K+1}$ setzen. Für $x \neq y$ in $[b, c]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt dann

$$|f(y) - f(x)| \leq K|x - y| < K\delta = \frac{K\varepsilon}{K+1} \leq \varepsilon$$

und folglich ist $f|_{[b,c]}$ gleichmäßig stetig. \square

Bemerkung 6.2.9. In Randpunkten können konvexe Funktionen durchaus unstetig sein, z.B. ist

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

konvex!

6.3 Wendepunkte

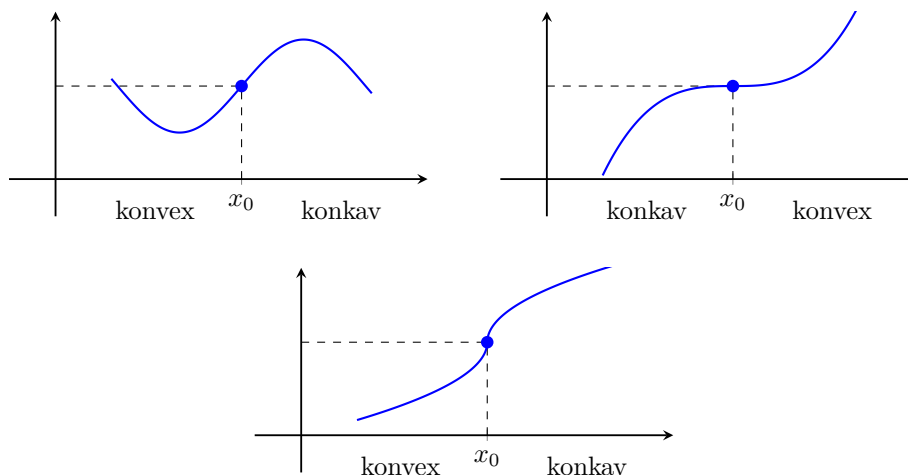
Definition 6.3.1. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

- (i) Ein Punkt $x_0 \in I$ heißt Wendestelle von f und der Punkt $(x_0, f(x_0)) \in I \times \mathbb{R}$ Wendepunkt, falls $\varepsilon > 0$ existiert mit $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset I$, sodass $f|_{(x_0 - \varepsilon, x_0)}$ konvex und $f|_{(x_0, x_0 + \varepsilon)}$ konkav ist, oder umgekehrt.

Manchmal wird auch x_0 als Wendepunkt bezeichnet.

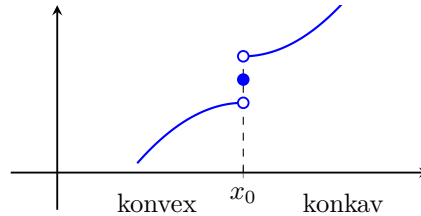
- (ii) Ist x_0 ein Wendepunkt, f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = 0$, so nennt man x_0 [oder $(x_0, f(x_0))$] einen Sattelpunkt.

Die Bilder unten zeigen einen Wendepunkt, der kein Sattelpunkt ist, dann einen Sattelpunkt und als letztes einen Wendepunkt, an dem die Abbildung nicht differenzierbar ist.



Bemerkungen 6.3.2.

- (i) In Definition 6.3.1 hätte es genügt vorauszusetzen, dass f in x_0 stetig ist, denn die Stetigkeit von $f|_{(x_0-\varepsilon, x_0)}$ und $f|_{(x_0, x_0+\varepsilon)}$ folgt aus der Konvexität bzw. Konkavität mit Korollar 6.2.8. Durch die Forderung der Stetigkeit an der Wendestelle x_0 schließen wir Beispiele des folgenden Typs als Wendepunkt aus:



- (ii) Der Begriff (wie auch z.B. ‘lokales Maximum/Minimum’) hat gewisse Pathologien, z.B. ist für konstantes $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jeder Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ Wendepunkt (wie auch lokales Maximum und lokales Minimum). Dies könnte man beheben, indem man in Definition 6.3.1 strikte Konvexität bzw. Konkavität fordert. Es gibt allerdings Funktionen, die nicht konstant sind, aber trotzdem an einer Stelle x_0 ein Minimum und gleichzeitig einen Wendepunkt haben.
- (iii) Es gibt einige weitere Begriffe (z.B. ‘Flachpunkte’, also Punkte, an denen die zweite Ableitung verschwindet). Ferner sind in der Literatur die Definitionen nicht einheitlich. Zum Beispiel wird oft definiert

$$‘x_0 \text{ Wendepunkt} : \Longleftrightarrow f''(x_0) = 0 \text{ und } f'' \text{ wechselt das Vorzeichen}’.$$

Dies setzt erstens voraus, dass f zweimal differenzierbar ist, was wir nicht vorausgesetzt haben, und ‘Vorzeichenwechsel’ kann man so verstehen, dass $f''|_{(x_0-\varepsilon, x_0)} > 0$ und $f''|_{(x_0, x_0+\varepsilon)} < 0$ oder umgekehrt gelten soll, was strikter Konvexität bzw. strikter Konkavität entspricht und daher stärker ist als unsere Definition 6.3.1.

Beispiel 6.3.3. (‘Kurvendiskussion’) Wir untersuchen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 10x + 1$.

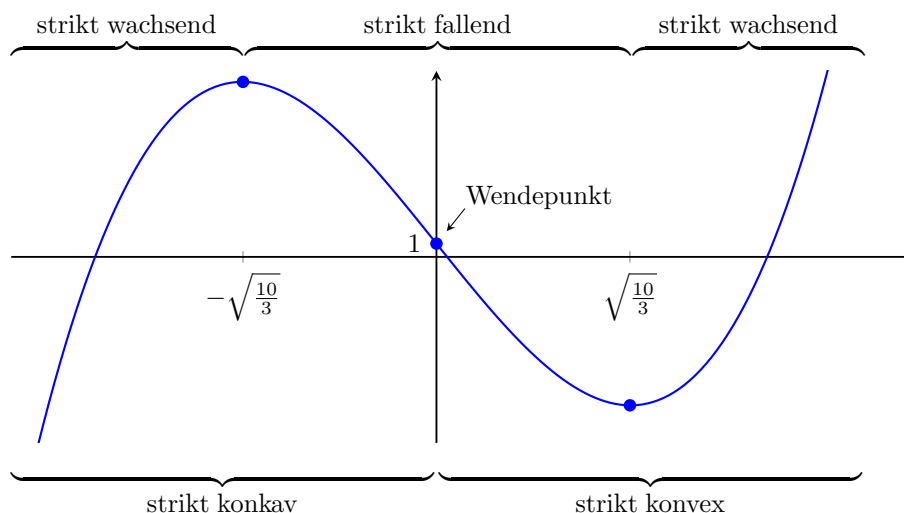
- Da f eine Polynomfunktion ist, ist klar, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ liegt, also glatt ist. Die erste und zweite Ableitung können wir mit den üblichen Regeln bestimmen:

$$f'(x) = 3x^2 - 10 \quad \text{und} \quad f''(x) = 6x.$$

- Als nächstes stellen wir fest, dass $f'(x) = 0$ genau dann gilt, wenn $x = \pm\sqrt{10/3}$ ist und dass $f''(+\sqrt{10/3}) > 0$ sowie $f''(-\sqrt{10/3}) < 0$ gilt. Daraus können wir mit Satz 6.1.13 schließen, dass f in $x_1 := -\sqrt{10/3}$ ein striktes lokales Maximum und in $x_2 := \sqrt{10/3}$ ein striktes lokales Minimum hat.
- Weiter sehen wir, dass $f'(x) < 0$ genau dann gilt, wenn $x_1 < x < x_2$. Aus Satz 6.1.11(i) folgt, dass f auf $(-\infty, x_1]$ strikt wachsend auf $[x_1, x_2]$ strikt fallend und auf $[x_2, \infty)$ strikt wachsend ist.

In Satz 6.1.11(i) haben wir nur beschränkte Intervalle betrachtet. Wir können hier, wenn $y_1 < y_2$ im offenen Intervall $(-\infty, x_1]$ gegeben sind, die Einschränkung $f|_{[y_1, y_2]}$ betrachten. Nach Satz 6.1.11(i) ist diese dann strikt wachsend, also gilt $f(y_1) < f(y_2)$, wie behauptet.

- Schließlich ist $f''(x) < 0$ für $x < 0$ und $f''(x) > 0$ für $x > 0$. Damit ist f auf $(-\infty, 0]$ strikt konkav und auf $[0, \infty)$ strikt konvex. Insbesondere liegt in $x_3 = 0$ ein Wendepunkt vor der wegen $f'(x_3) = -10 \neq 0$ kein Sattelpunkt ist. Die Steigung der Wendetangente ist $f'(x_3) = f'(0) = -10$.
- Anhand der Funktion sieht man, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ gilt; f ist also nach oben und unten unbeschränkt. Wegen des Zwischenwertsatzes ist $\text{Bild } f = \mathbb{R}$ und die bestimmten lokalen Extrema sind nicht global.
- Um ein einigermaßen vernünftiges Bild von f zu malen, müssen nun noch einige Punkte des Graphen explizit ausgerechnet werden. Wir sehen, dass offenbar $f(x_3) = f(0) = 1$ gilt, aber dass sowohl $f(x_1)$ als auch $f(x_2)$ ohne Taschenrechner/Computeralgebrasystem (CAS) eher schwierig auszurechnen sind. Was man aber direkt leicht sehen kann, ist allerdings, dass $f(x_1) > 1$ sein muss, denn wenn dem nicht so wäre, dann könnte $f|_{(x_1, 0)}$ nicht strikt fallend sein. Mit einem ähnlichen Argument kann man $f(x_2)$ abschätzen: Wir berechnen $f(1) = 1^3 - 10 \cdot 1 + 1 = -8$. Da $f|_{[x_1, x_2]}$ strikt fallend ist und $1 \in (x_1, x_2)$ liegt, muss $f(x_2) < f(1) = -8$ sein.
- Die Nullstellen von f sind ebenfalls schwierig explizit auszurechnen. Aus den bisherigen Ergebnissen können wir aber mithilfe des Zwischenwertsatzes schließen, dass es eine Nullstelle echt kleiner als x_1 geben muss, eine zwischen 0 und x_2 und eine weitere echt größer als x_2 geben muss. Da f wegen des Fundamentalsatzes der Algebra aber nicht mehr als drei komplexe Nullstellen (also auch nicht mehr als drei reelle) haben kann, folgt, dass dies alle Nullstellen von f sind. Alle Nullstellen sind verschieden.
- Daraus ergibt sich qualitativ folgendes Bild:

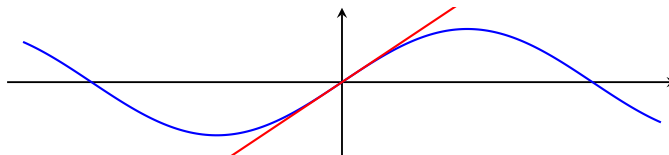


6.4 Die Regel von L'Hôpital

Das Ziel dieses letzten Abschnitts ist es, eine Methode zu finden, mit der zum Beispiel die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x},$$

einfach berechnet werden können. Betrachtet man im Fall des ersten Grenzwerts oben die Funktionen $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto x$ in der Nähe von Null,



so kommt man auf die Idee, dass der Grenzwert 1 ist (wie wir aus dem Beweis von Satz 5.3.7 wissen), weil beide Funktionen in Null die gleiche Steigung haben. Wir vermuten dass Grenzwerte wie oben durch Differenzieren von Zähler und Nenner bestimmt werden können.

Satz 6.4.1. (Regel von L'Hôpital) ³ Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte

- (i) $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$,
- (ii) $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \overline{\mathbb{R}} \left(= \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \right)$ existiert.

Dann existiert $x_0 \in [a, b)$, sodass für all $x \in (x_0, b)$ die Ungleichung $g'(x) \neq 0$ gilt. Es gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bemerkungen 6.4.2. 1. Eine analoge Aussage gilt für $x \rightarrow a$.

- 2. Wollen wir den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ bestimmen, so müssen wir L'Hôpital erst für $\frac{\sin x}{x}|_{(-\pi/2, 0)}$ und dann für $\frac{\sin x}{x}|_{(0, \pi/2)}$ anwenden und dann die beiden Grenzwerte vergleichen.
- 3. Es muss (ii) nur in der Nähe von b gelten, weil wir das Intervall (a, b) anpassen können.
- 4. Ein heuristisches Verständnis liefert die folgende Überlegung: wenn $b \in \mathbb{R}$ liegt und die beiden Funktionen f und g in b differenzierbar sind und $f(b) = g(b) = 0$ gilt, kann man schreiben

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(b)}{x-b}}{\frac{g(x)-g(b)}{x-b}}$$

Wir erwarten dann, dass die rechte Seite für $x \rightarrow b$ gegen $\frac{f'(b)}{g'(b)}$ konvergiert nach Definition der Ableitung.

Beweis. Wir behandeln nur den einfachsten Fall, bei dem $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt. Wir überlegen uns zunächst, dass $g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv sein muss. Denn gäbe es $x_1 \neq x_2$ mit $g(x_1) = g(x_2)$, so hätte nach dem Satz von Rolle g' eine Nullstelle zwischen x_1 und x_2 , im Widerspruch zu Voraussetzung (ii).

Somit ist g strikt wachsend oder strikt fallend. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass g fällt; andernfalls ersetzen wir g durch $-g$. Wegen $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ muss dann $g(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$ gelten.

³Nach Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital (1661–1704), der laut [13, Seite 443] diese Regel von Johann Bernoulli gekauft haben soll.

Sei nun $x \in (a, b)$. Wir definieren

$$\tilde{f} : [x, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \xi = b \\ f(\xi), & \text{falls } \xi \in [x, b), \end{cases}$$

und g setzt man ebenso zu \tilde{g} fort. \tilde{f} und \tilde{g} erfüllen dann die Voraussetzungen des verallgemeinerten Mittelwertsatzes 6.1.6(iii). Wir finden einen Zwischenwert $t \in (x, b)$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(b)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(b)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

(Nach unserer Vorüberlegung ist der Quotient wohldefiniert.) Ist nun x_n eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow b$ mit $x_n \in (a, b)$, so gilt auch für die Folge der zugehörigen Zwischenwerte $t_n \rightarrow b$ und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(t_n)}{g'(t_n)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

□

Wir schreiben im Folgenden manchmal $\frac{0}{0}$ beziehungsweise $\frac{\infty}{\infty}$, um anzudeuten, welchen der beiden Fälle in Bedingung (i) der L'Hôpital'schen Regel wir benutzen.

Beispiele 6.4.3.

1. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1,$$

wobei wir den $\frac{0}{0}$ -Fall der Regel von L'Hôpital anwenden können, weil der Grenzwert des Quotienten rechts existiert und die Ableitung des Nenners ungleich Null ist.

2. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

wobei wir den $\frac{\infty}{\infty}$ -Fall der Regel von L'Hôpital anwenden können, da der Grenzwert des Quotienten rechts existiert und die Ableitung des Nenners ungleich Null ist. Interpretation: für $x \rightarrow \infty$ geht der Logarithmus langsamer gegen ∞ als die lineare Funktion $x \mapsto x$.

3. Wir rechnen zunächst

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Wir sehen, dass die Exponentialfunktion für $x \rightarrow \infty$ stärker wächst als die lineare Funktion $x \mapsto x$. Wir rechnen nun weiter

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = 0.$$

Induktiv zeigt man

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und schließt, dass die Exponentialfunktion für $x \rightarrow \infty$ schneller wächst als jede Polynomfunktion.

4. Wir wenden den ‘ $\frac{\infty}{\infty}$ ’-Fall von L’Hôpital an und rechnen

$$\lim_{x \searrow 0} x \log x = \lim_{x \searrow 0} \frac{\log x}{1/x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{(\log x)'}{(1/x)'} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \searrow 0} (-x) = 0.$$

Interpretation: für $x \rightarrow 0$ geht der Logarithmus langsamer gegen $-\infty$ als x gegen Null.

Durch Anwenden der Exponentialfunktion, die stetig ist, erhalten wir

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{x \log x} = e^0 = 1.$$

Bemerkung 6.4.4. Man kann andere Fälle durch Umformungen auf die Fälle ‘ $\frac{0}{0}$ ’ und ‘ $\frac{\infty}{\infty}$ ’ zurückführen. Konvergiert $f(x)$ zum Beispiel gegen 0 und $g(x)$ gegen ∞ , so kommen wir mit

$$\underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{‘0 \cdot \infty’} = \frac{f(x)}{\underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{‘\frac{0}{\infty}’}}$$

wieder in einen Standardfall der L’Hôpital’schen Regel zurück.

Seien Sie bitte vorsichtig, dass Sie L’Hôpital nur anwenden, wenn die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind. So ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{4x} = \frac{1}{4},$$

aber

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Aber $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ und $\lim_{x \rightarrow 1} 4x = 4$ sind ungleich 0 und ∞ , so dass Bedingung (i) aus Satz 6.4.1 verletzt ist.

7 Das Riemann-Integral

Im gesamten Kapitel seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$.

7.1 Treppenfunktionen

Definition 7.1.1. Eine Abbildung $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine Treppenfunktion, falls eine (endliche) Partition oder Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ existiert, sodass $\varphi|_{(x_{k-1}, x_k)}$ für jedes $k = 1, \dots, n$ konstant ist. Wir setzen

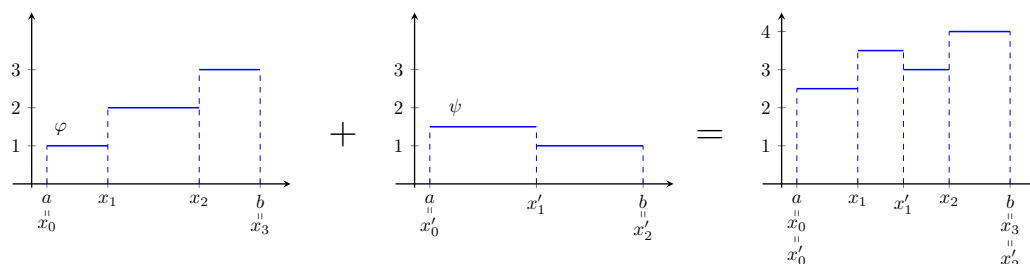
$$T[a, b] := \{\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}$$

und nennen $T[a, b]$ den Raum der Treppenfunktionen.

Satz 7.1.2. Die Menge $T[a, b] \subset \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$ ist ein Untervektorraum des \mathbb{R} -Vektorraums aller Funktionen von $[a, b]$ nach \mathbb{R} . Insbesondere gilt:

- (i) $0 \in T[a, b]$.
- (ii) $\varphi, \psi \in T[a, b] \implies \varphi + \psi \in T[a, b]$,
- (iii) $\varphi \in T[a, b], \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda\varphi \in T[a, b]$,

Ein Beispiel zum Punkt (ii) ist:



Beweis. (i) und (iii) sind offensichtlich.

(ii) Was wir brauchen ist eine *gemeinsame Verfeinerung der Partitionen*: Es sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Partition für φ und $a = x'_0 < x'_1 < \dots < x'_m = b$ eine Partition für ψ . Wir wählen nun $a = t_0 < t_1 < \dots < t_\ell = b$, sodass

$$\{t_0, t_1, \dots, t_\ell\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \cup \{x'_0, x'_1, \dots, x'_m\}$$

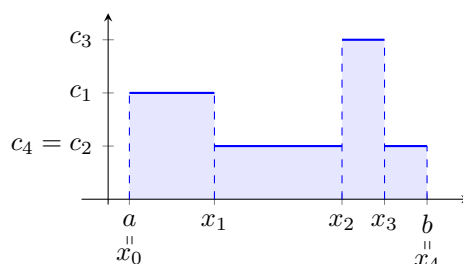
gilt. Dann sind φ und ψ auf allen Intervallen (t_{j-1}, t_j) für $j = 1, \dots, \ell$ jeweils konstant und daher ist $\varphi + \psi$ dort ebenfalls konstant. Also ist $\varphi + \psi \in T[a, b]$. \square

Definition 7.1.3. (Integral einer Treppenfunktion) Es sei $\varphi \in T[a, b]$ gegeben durch die Partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $\varphi|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k$ für $k = 1, \dots, n$. Dann definieren wir

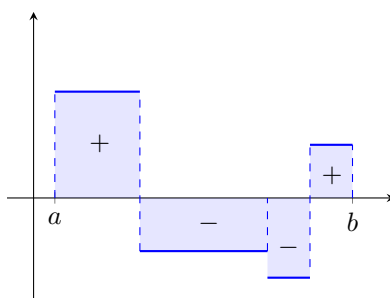
$$\int_a^b \varphi(x) \, dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1}).$$

Bemerkungen 7.1.4.

- Wir haben die folgende Interpretation:

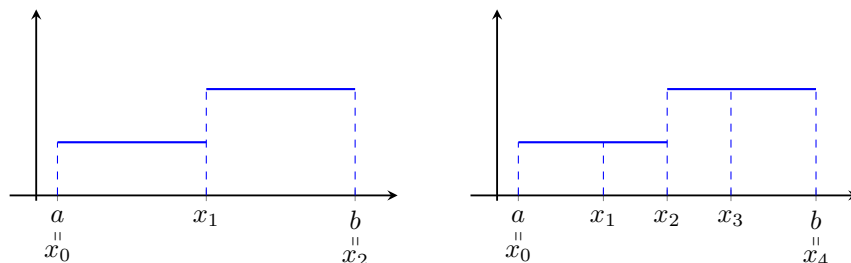


Falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ (oder zumindest $c_k \geq 0$ in der Notation von 7.1.3) gilt, dann kann $\int_a^b \varphi(x) \, dx$ als Fläche zwischen der x -Achse und dem Graphen von φ interpretiert werden.



Falls φ auf Teilintervallen der Partition negativ ist, dann zählen wir die entsprechenden Flächen mit negativem Vorzeichen.

- In Definition 7.1.3 definieren wir $\int_a^b \varphi(x) dx$ für $\varphi \in T[a, b]$, indem wir eine Partition auswählen — es ist aber natürlich so, dass es für jede Treppenfunktion φ stets mehrere Partitionen gibt, z.B.



Es muss also gezeigt werden, dass $\int_a^b \varphi(x) dx$ unabhängig von der Wahl der Partition ist, um zu garantieren, dass $\int_a^b \varphi(x) dx$ wohldefiniert ist. Es seien dazu

$$Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{und} \quad Z': a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

Partitionen für $\varphi \in T[a, b]$ mit $\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = c_i$ und $\varphi|_{(t_{j-1}, t_j)} = c'_j$ für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$. Nur für den Moment definieren wir

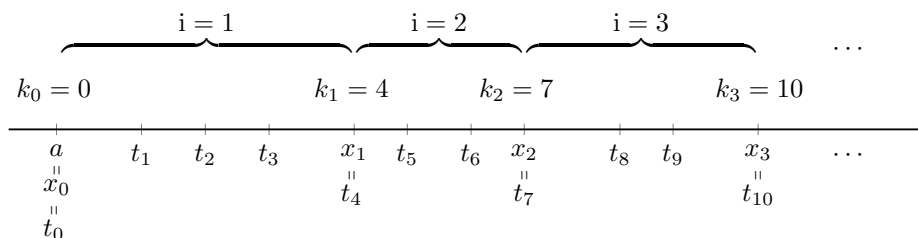
$$\int_Z \varphi := \sum_{i=0}^n c_i(x_i - x_{i-1}), \quad \int_{Z'} \varphi := \sum_{j=0}^m c'_j(t_j - t_{j-1})$$

und behaupten $\int_Z \varphi = \int_{Z'} \varphi$.

1. Wir nehmen zunächst an, dass jeder Punkt von Z auch in Z' vorkommt. D.h. für jedes i gibt es ein k_i mit $x_i = t_{k_i}$, und wir haben also

$$x_{i-1} = t_{k_{i-1}} < t_{k_{i-1}+1} < \dots < t_{k_i} = x_i,$$

woraus folgt $c'_j = c_i$ für $k_{i-1} < j \leq k_i$ und $i = 1, \dots, n$.



Nun erhalten wir mithilfe einer Teleskopsumme für die vierte Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_{Z'} \varphi &= \sum_{j=1}^m c'_j(t_j - t_{j-1}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=k_{i-1}+1}^{k_i} c_i(t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i(t_{k_i} - t_{k_{i-1}+1}) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \int_Z \varphi. \end{aligned}$$

2. Falls Z und Z' beliebige Partitionen sind, wähle Z'' , sodass alle Punkte von Z in Z'' vorkommen und auch alle Punkte von Z' in Z'' vorkommen (gemeinsame Verfeinerung wie im Beweis von Satz 7.1.2(ii)). Dann kann zweimal (1) benutzt werden, um zu sehen, dass

$$\int_{Z'} \varphi = \int_{Z''} \varphi = \int_Z \varphi$$

gilt.

Satz 7.1.5. Es seien $\varphi, \psi \in T[a, b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

- (i) $\int_a^b (\varphi + \psi)(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx,$
- (ii) $\int_a^b (\lambda\varphi)(x) dx = \lambda \int_a^b \varphi(x) dx,$
- (iii) $\varphi \leq \psi \implies \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx.$

Beweis. Der Beweis von Bemerkung 7.1.4 hat gezeigt, dass wir annehmen können, dass φ und ψ durch dieselbe Partition definiert sind. Hat man das einmal, so sind alle drei Aussagen mit einer einfachen Rechnung zu prüfen. \square

7.2 Riemann-Integrierbarkeit

Definition 7.2.1. (Ober- und Unterintegral) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} \int_a^b {}^*f(x) dx &:= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f \right\} && \text{Oberintegral} \\ \int_a^b {}_*f(x) dx &:= \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} && \text{Unterintegral} \end{aligned}$$

Wegen der Monotonie für Treppenfunktionen aus Satz 7.1.5(iii) gilt dann $\int_a^b {}^*f(x) dx \leq \int_a^b {}_*f(x) dx$.

Beispiele 7.2.2.

- 1. Für eine Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ gilt offensichtlich $\int_a^b {}^*\varphi(x) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$.
- 2. Für die Dirichletfunktion $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $k(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $k(x) = 0$ sonst gilt für das Unterintegral $\int_0^1 {}_*k(x) dx = 0$ und für das Oberintegral $\int_0^1 {}^*k(x) dx = 1$.

Definition 7.2.3. Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, oder kurz R-integrierbar, falls $\int_a^b {}^*f(x) dx = \int_a^b {}_*f(x) dx$ gilt. Ist dies der Fall, so definieren wir das Riemann-Integral, oder kurz R-Integral, von f als

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b {}^*f(x) dx.$$

Beispiel 7.2.4. Aus den Beispielen 7.2.2 folgt sofort: alle Treppenfunktionen sind R-integrierbar. Die Dirichletfunktion ist nicht R-integrierbar.

Bemerkungen 7.2.5.

- (i) Es gibt noch andere Integralbegriffe neben dem Riemann-Integral und mit einigen davon wird dann z.B. die Dirichletfunktion integrierbar. Wenn klar ist, dass wir über Riemann-integrierbarkeit sprechen (und in dieser Vorlesung tun wir das stets), dann lassen wir ‘Riemann-’ bzw. ‘R-’ weg.
- (ii) Für die ‘Integrationsvariable’ können wir auch andere Buchstaben benutzen. Es ist üblich diese, und dann auch das dx , ganz wegzulassen:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\varepsilon) d\varepsilon = \int_a^b f.$$

Insbesondere ist ‘ dx ’ hier erst einmal nur ein Symbol, welches anzeigt, welcher Buchstabe die Variable ist, z.B. ist ja $\int_0^1 te^x dx = t(e-1)$ aber $\int_0^1 te^x dt = \frac{1}{2}e^x$. Die Symbole ‘ dx ’ oder ‘ dt ’ alleine sind nicht definiert.

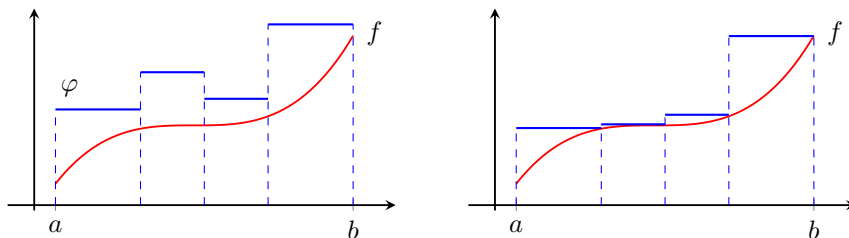
- (iii) Man kann zeigen, dass gilt

$$\int_a^b {}^*f(x) dx = \inf \{ \mathcal{O}_{f,Z} \mid Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \},$$

wobei

$$\mathcal{O}_{f,Z} = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{x \in (x_{i-1}, x_i)} f(x) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

die *Obersumme* von f zur Zerlegung Z von $[a, b]$ ist. Eine analoge Aussage gilt für $\int_a^b {}_*k(x) dx$ mit den *Untersummen* $\mathcal{U}_{f,Z}$. Der Unterschied z.B. zwischen dem Infimum der Obersummen und dem Oberintegral ist, dass wir für das Oberintegral das Infimum über die Integrale *aller* Treppenfunktionen $\varphi \geq f$ nehmen — und daher auch solche vorkommen, die ‘weit weg’ von f sind. Nach Definition können wir jede Obersumme auch als Integral einer Treppenfunktion (mit Zerlegung Z und Stufenhöhen $c_k := \sup_{x \in (x_{k-1}, x_k)} f(x)$) lesen. Wir nehmen dann ebenfalls ein Infimum über Integrale von Treppenfunktionen die größer gleich f sind — aber eben nur solche die schon ‘nah’ an f dran liegen:



Das Ergebnis stimmt überein, weil wir eben nur solche Treppenfunktionen weglassen, die ohnehin keinen Einfluss auf das Infimum haben.

Satz 7.2.6. (‘Einquetschkriterium’) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann R-integrierbar, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b]: \varphi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx < \varepsilon.$$

Beweis. ‘ \implies ’ Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann existieren Infimum und Supremum und stimmen überein. Wir setzen

$$R_0 := \sup \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \leq f \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi \mid f \leq \psi \right\} \in \mathbb{R}.$$

Nach Definition von Supremum und Infimum existieren für jedes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f$ und $\psi \geq f$ mit

$$R_0 - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b \varphi < R_0 \quad \text{und} \quad R_0 < \int_a^b \psi < R_0 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus folgt

$$\int_a^b \psi < R_0 + \frac{\varepsilon}{2} < \left(\int_a^b \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon.$$

‘ \impliedby ’ Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\varphi \leq f \leq \psi$ in $T[a, b]$ mit $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$. Aus der Ungleichung $\varphi \leq f \leq \psi$ folgt

$$\int_a^b \varphi \leq \sup \left\{ \int_a^b \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \leq f \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b *_f \stackrel{\text{def}}{=} \inf \left\{ \int_a^b \tilde{\psi} \mid f \leq \tilde{\psi} \right\} \leq \int_a^b \psi,$$

und dann mit der zweiten Ungleichung $T[a, b]$ mit $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$

$$\left| \int_a^b *_f - \int_a^b *_f \right| \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon. \quad (*)$$

Gilt (*) aber für jedes $\varepsilon > 0$, dann kann die linke Seite, die unabhängig von ε ist, nur gleich Null sein. Damit sind dann Ober- und Unterintegral gleich, und f nach Definition 7.2.3 ist R-integrierbar. \square

Satz 7.2.7. Sei $-\infty < a < b < +\infty$. Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem abgeschlossenen Intervall ist integrierbar.

Beweis. Wir wollen die Bedingung im Einteilungskriterium aus Satz 7.2.6 prüfen. Dazu behaupten wir

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \varphi, \psi \in T[a, b]: \varphi \leq f \leq \psi \text{ und } \forall x \in [a, b]: |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon.$$

Nach Satz 3.2.8 ist die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sogar gleichmäßig stetig. Wir wissen also, dass

$$(\circ) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b]: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

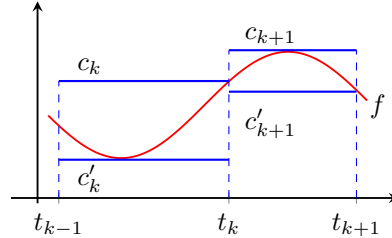
gilt. Wir zeigen finden nun Treppenfunktionen wie in (*) gefordert. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ wie in (\circ). Wähle dann $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$ gilt und definiere $t_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ für $k = 0, \dots, n$. Das liefert eine äquidistante Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ des Intervalls $[a, b]$. Setze nun

$$c_k := \sup_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x) \quad \text{und} \quad c'_k := \inf_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x)$$

für $k = 1, \dots, n$. Da f stetig ist, können wir den Extremalsatz 3.2.2 anwenden und finden $\xi_k, \xi'_k \in [t_{k-1}, t_k]$, sodass $c = f(\xi_k)$ und $c'_k = f(\xi'_k)$ gilt. Da $|\xi_k - \xi'_k| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$ gilt, folgt mit der gleichmäßigen Stetigkeit (\circ), dass

$$|f(\xi_k) - f(\xi'_k)| = |c_k - c'_k| < \varepsilon$$

für jedes $k = 1, \dots, n$ gilt. Jetzt definieren wir an den Unterteilungspunkten $\varphi(t_k) := \psi(t_k) := f(t_k)$ für $k = 0, \dots, n$ und $\varphi(x) := c'_k, \psi(x) = c_k$ für $x \in (t_{k-1}, t_k), k = 1, \dots, n$.



Es gelten also beide Bedingungen in (*). Wir folgern nun daraus die Bedingung im Einquetschkriterium 7.2.6: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle nach (*) Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi(x) - \varphi(x) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \psi(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \int_a^b \theta(x) dx = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

wobei wir erst die Additivität aus 7.1.5(i) und dann die Monotonie 7.1.5(iii) mit der konstanten Funktion $\theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\theta(x) := \frac{\varepsilon}{b-a}$ benutzt haben. Beachten Sie, dass die Monotonie- und Additivitätsaussage aus Satz 7.1.5 anwendbar sind, da wir oben ausschließlich Treppenfunktionen integriert haben. \square

Satz 7.2.8. Jede monotone Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. Es sei f wachsend; für fallende f geht das Argument analog. Wir prüfen wieder das Einquetschkriterium aus Satz 7.2.6: Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$. Setze $t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ für $k = 0, \dots, n$. Jetzt definieren wir

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= f(t_{k-1}) \text{ für } x \in [t_{k-1}, t_k) \text{ und } k = 1, \dots, n, \\ \psi(x) &:= f(t_k) \text{ für } x \in [t_{k-1}, t_k) \text{ und } k = 1, \dots, n, \\ \varphi(b) &:= \psi(b) := f(b). \end{aligned}$$

Dann sind $\varphi, \psi \in T[a, b]$ Treppenfunktionen. Da f wachsend ist, gilt $\varphi \leq f \leq \psi$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi &= \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) - f(t_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} (f(t_n) - f(t_0)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

und das Einquetschkriterium aus Satz 7.2.6 impliziert nun, dass f integrierbar ist. \square

7.3 Eigenschaften des Integrals

Satz 7.3.1. (Linearität und Monotonie des Integrals) Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind $f + g$ und λf integrierbar und es gilt:

$$(i) \quad \int_a^b (f + g)(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx,$$

$$(ii) \quad \int_a^b (\lambda f)(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$(iii) \quad f \leq g \implies \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Das Integral ist also für integrierbare Funktionen linear und monoton.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Monotonie (iii). Es gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= \sup \{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \} \\ &\leq \sup \{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq g \} = \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

Für die Linearität (i) und (ii) benutzen wir wieder das Einguetschkriterium aus Satz 7.2.6:

(i) Es sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in T[a, b]$ mit $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und $\int_a^b \psi_j - \int_a^b \varphi_j < \frac{\varepsilon}{2}$ für $j = 1, 2$. Dann gilt

$$\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2 \quad \text{und} \quad \int_a^b \psi_1 + \psi_2 - \int_a^b \varphi_1 + \varphi_2 < \varepsilon,$$

wobei wir für die zweite Ungleichung Satz 7.1.5 benutzen können, weil wir hier nur Treppenfunktionen betrachten. Da $\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2 \in T[a, b]$ gilt, haben wir gezeigt, dass $f + g$ integrierbar ist. Jetzt zeigen wir die Gleichung in (i) durch Abschätzen, nämlich zuerst nach oben:

$$\begin{aligned} \int_a^b f + g - \int_a^b f - \int_a^b g &\leq \int_a^b \psi_1 + \psi_2 - \int_a^b \varphi_1 - \int_a^b \varphi_2 \\ &= \int_a^b \psi_1 + \int_a^b \psi_2 - \int_a^b \varphi_1 - \int_a^b \varphi_2 \\ &= \int_a^b \psi_1 - \varphi_1 + \int_a^b \psi_2 - \varphi_2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

und dann nach unten in analoger Weise

$$\int_a^b f + g - \int_a^b f - \int_a^b g > -\varepsilon,$$

wobei wir jeweils im ersten Schritt den Teil (iii) des aktuellen Satzes benutzt haben, den wir ja bereits gezeigt haben, und danach die Rechenregeln aus Satz 7.1.5 für Treppenfunktionen. Zusammen erhalten wir also

$$\forall \varepsilon > 0: \quad -\varepsilon < \int_a^b f + g - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) < \varepsilon$$

und das geht nur, wenn der mittlere Term verschwindet, woraus die Gleichung

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

folgt.

(ii) Wir teilen den Beweis in vier Teile, in denen wir verschiedene Werte von λ betrachten.

1. Für $\lambda = 0$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt.
2. Für $\lambda = -1$ haben wir

$$\begin{aligned} \int_a^b {}^* -f &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq -f \} \\ &= \sup \{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], -\varphi \geq f \} \\ &= \sup \{ - \int_a^b \psi \mid \psi \in T[a, b], \psi \geq f \} \\ &= - \inf \{ \int_a^b \psi \mid \psi \in T[a, b], \psi \geq f \} \\ &= - \int_a^b {}^* f(x) \, dx \\ &= - \int_a^b f, \end{aligned}$$

wobei wir Satz 7.1.5 benutzt haben, sowie dass $\psi \mapsto -\psi$ eine Bijektion von $T[a, b]$ auf sich selbst ist. Analog zeigt man, dass $\int_a^b {}^*(-f) = - \int_a^b f$ gilt, woraus folgt, dass $\int_a^b {}^*(-f) = \int_a^b {}^*(-f)$ gilt, also mit der Funktion f auch die Funktion $-f$ integrierbar ist mit $\int_a^b (-f) = - \int_a^b f$.

3. Es sei $\lambda > 0$. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Dann folgt

$$\lambda\varphi \leq \lambda f \leq \lambda\psi \quad \text{und} \quad \int_a^b \lambda\psi - \int_a^b \lambda\varphi < \varepsilon,$$

wobei wir für die zweite Ungleichung Satz 7.1.5(ii) verwenden können, da $\lambda\psi$ und $\lambda\varphi$ Treppenfunktionen sind. Aus dem Einquetsungskriterium aus Satz 7.2.6 folgt, dass mit der Funktion f auch die Funktion λf integrierbar ist. Nun können wir ausrechnen (mit der Substitution $\psi := \frac{1}{\lambda}\varphi$ bzw. $\varphi = \lambda\psi$)

$$\begin{aligned} \int_a^b \lambda f &= \sup \{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq \lambda f \} \\ &= \sup \{ \int_a^b \lambda\psi \mid \lambda\psi \in T[a, b], \lambda\psi \leq \lambda f \} \\ &= \lambda \sup \{ \int_a^b \psi \mid \psi \in T[a, b], \psi \leq f \}, \end{aligned}$$

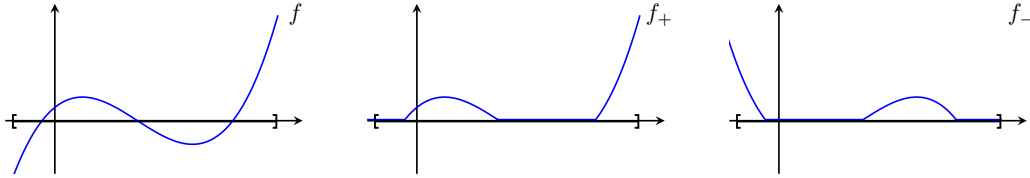
wobei wir erst benutzt haben, dass λf integrierbar ist, und dann, dass $\psi \mapsto \lambda\psi$ eine Bijektion $T[a, b] \rightarrow T[a, b]$ ist.

4. Der Fall $\lambda < 0$ folgt aus der Kombination von 2. und 3.

□

Definition 7.3.2. Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir den *Positivteil* $f_+: D \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Negativteil* $f_-: D \rightarrow \mathbb{R}$ von f als

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad f_-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$



Wir beachten, dass Positivteil $f_+ \geq 0$ und Negativteil $f_- \geq 0$ nicht-negative Funktionen sind. Ferner gilt

$$f = f_+ - f_- \quad \text{und} \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Satz 7.3.3. Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

(i) Der Positivteil f_+ und der Negativteil f_- sind integrierbar. Es gilt $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq$

$$\int_a^b |f(x)| dx,$$

(ii) Für $p \in [1, \infty)$ ist $|f|^p$ integrierbar,

(iii) Das Produkt $f \cdot g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.

Beweis. (i) Wir fangen mit dem Positivteil f_+ an: Nach Voraussetzung finden wir für $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi \leq f \leq \psi$ mit $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$. Dann folgt $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und $\varphi_- \geq f_- \geq \psi_-$. Nun haben wir

$$\varepsilon > \int_a^b \psi - \varphi = \int_a^b \psi_+ - \psi_- - (\varphi_+ - \varphi_-) = \int_a^b (\psi_+ - \varphi_+) + (\varphi_- - \psi_-) \geq \int_a^b \psi_+ - \varphi_+,$$

also ist f_+ nach dem Einguetschkriterium aus Satz 7.2.6 integrierbar. Analog zeigt man, dass f_- integrierbar ist. Da $|f| = f_+ + f_-$ ist, folgt mit Satz 7.3.1, dass $|f|$ integrierbar ist. Wegen $f \leq |f|$, $-f \leq |f|$ folgt auch mit Satz 7.3.1

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{sowie} \quad -\int_a^b f = \int_a^b -f \leq \int_a^b |f|$$

und damit

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Zu (ii):

1. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $0 \leq f \leq 1$ gilt, und prüfen wieder das Einguetschkriterium 7.2.6. Es sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$ und $\int_a^b \psi - \varphi < \frac{\varepsilon}{p}$. Dann gilt $\varphi^p, \psi^p \in T[a, b]$ und $\varphi^p \leq f^p \leq \psi^p$.

Es sei $x \in [a, b]$. Falls $\varphi(x) < \psi(x)$ gilt, betrachten wir die Funktion

$$g: [\varphi(x), \psi(x)] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(y) = y^p.$$

Die Funktion g ist stetig und auf dem offenen Intervall $(\varphi(x), \psi(x))$ differenzierbar, d.h. wir können den Mittelwertsatz 6.1.5 anwenden und finden $\xi \in (\varphi(x), \psi(x))$ mit

$$\frac{\psi(x)^p - \varphi(x)^p}{\psi(x) - \varphi(x)} = \frac{g(\psi(x)) - g(\varphi(x))}{\psi(x) - \varphi(x)} = g'(\xi) = p\xi^{p-1} \leq p,$$

wobei wir im letzten Schritt $0 < \xi \leq 1$ benutzt haben. Es gilt also $\psi(x)^p - \varphi(x)^p \leq p(\psi(x) - \varphi(x))$. Falls $\varphi(x) = \psi(x)$ ist, gilt die Gleichung trivialerweise. Wir haben also

$$\psi(x)^p - \varphi(x)^p \leq p(\psi(x) - \varphi(x))$$

für alle $x \in [a, b]$. Es folgt mit der Monotonie aus Satz 7.3.1

$$\int_a^b \psi^p - \varphi^p \leq \int_a^b p(\psi - \varphi) < p \cdot \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$$

und wegen des Einquetsungskriteriums 7.2.6 ist f^p integrierbar.

2. Es sei jetzt f beliebig. Im Fall der Funktion, die konstant gleich Null ist, die Aussage trivialerweise erfüllt und auch bereits in Teil (1) enthalten. Wir können daher $f \not\equiv 0$ annehmen. Dann gilt $0 < s := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty$, da f als R-integrierbare Funktion nach Definition beschränkt ist. Wir setzen

$$\tilde{f}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{f}(x) := \frac{|f(x)|}{s}.$$

Dann gilt $0 \leq \tilde{f} \leq 1$ und nach 1. ist \tilde{f}^p integrierbar. Dann ist aber auch $|f|^p = s^p \tilde{f}^p$ nach Satz 7.3.1 integrierbar.

Teil (iii) folgt aus (ii) mit $f \cdot g = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$. □

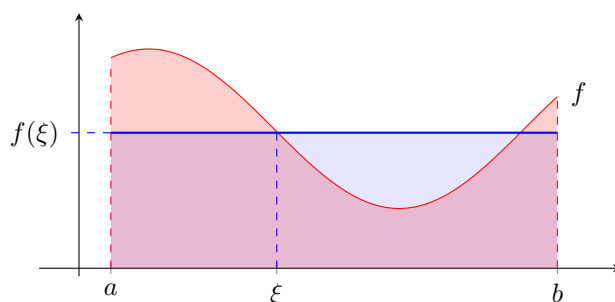
Satz 7.3.4. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung) Es seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei f stetig und $g \geq 0$ sei integrierbar. Dann existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

Ist $g \equiv 1$, so erhalten wir als Spezialfall den (einfachen) Mittelwertsatz der Integralrechnung: Für eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existiert $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a).$$

Eine Veranschaulichung für den Fall $f \geq 0$:



Die Fläche unter dem Graphen ist gleich der Fläche des Rechtecks, wobei dessen Höhe als Funktionswert auftritt.

Beweis. Wir setzen $m := \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ und $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Dann gilt $mg \leq fg \leq Mg$ und wegen der Monotonie und Linearität des Integrals aus Satz 7.3.1 ferner $m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g$. Mit dem Zwischenwertsatz 3.1.13 angewandt auf die stetige Funktion $[m, M] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \int_a^b g$ folgt, dass ein $\mu \in [m, M]$ existiert mit

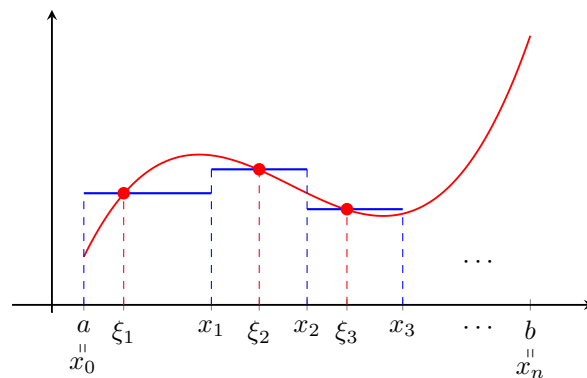
$$\int_a^b fg = \mu \cdot \int_a^b g.$$

Nochmalige Anwendung des Zwischenwertsatzes, diesmal auf die stetige Funktion f zeigt, dass ein $\xi \in [a, b]$ existiert mit $f(\xi) = \mu$. \square

Bemerkung 7.3.5. Um Integrale auszurechnen, ist die reine Definition sehr ungünstig, denn wir müssen stets Infima/Suprema über beliebige Zerlegungen nehmen. Das Konzept der Riemannsummen wird dieses Problem lösen.

Definition 7.3.6. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

- (i) Das n -Tupel reeller Zahlen $\xi = (\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ heißt ein der Zerlegung zugehöriger Zwischenvektor, falls $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gilt für $i = 1, \dots, n$.
- (ii) $\mathcal{R}(Z, \xi, f) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ heißt die Riemannsumme von f bezüglich der Zerlegung Z und des Zwischenvektors ξ .



- (iii) $\mu(Z) := \max_{i=1, \dots, n} (x_i - x_{i-1})$ heißt die Feinheit der Zerlegung Z .
- (iv) Eine Folge von Zerlegungen $(Z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$, d.h.

$$Z^{(k)}: a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < x_2^{(k)} < \dots < x_{n_k}^{(k)} = b$$

heißt Zerlegungsnullfolge, falls für die Feinheit $\mu(Z^{(k)}) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$ gilt.

Satz 7.3.7. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}(Z^{(k)}, \xi^{(k)}, f) = \int_a^b f(x) \, dx$$

für jede Zerlegungsnullfolge $(Z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und jede Folge von zugehörigen Zwischenvektoren $(\xi^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$.

Beispiel 7.3.8. $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

Da die Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ stetig (und auch monoton) ist, folgt, dass f integrierbar ist. Wir können also Satz 7.3.7 benutzen.

Wir definieren äquidistante Zerlegungen

$$Z^{(k)} : 0 = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_k^{(k)} = 1$$

mit Feinheit $\frac{1}{k}$ für $k \geq 1$, d.h.

$$x_i^{(k)} := \frac{i}{k}$$

für $i = 0, \dots, k$. Dann wählen wir Zwischenvektoren $\xi^{(k)}$ mit

$$\xi_i^{(k)} := x_i^{(k)},$$

also jeweils den rechten Randpunkt des jeweiligen Intervalls. Dies liefert eine Zerlegungsnullfolge und eine Folge von zugehörigen Zwischenvektoren. Nun berechnen wir die zugehörigen Riemannsummen und dann deren Grenzwert

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Z^{(k)}, \xi^{(k)}, f) &= \sum_{i=1}^k f(\xi_i^{(k)})(x_i^{(k)} - x_{i-1}^{(k)}) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} \left(\frac{i}{k} - \frac{i-1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^k i \\ &= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{k+1}{k} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

welcher nach Satz 7.3.7 gerade der Wert des gesuchten Integrals ist.

Beweis. (von Satz 7.3.7) Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Wir behaupten

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall Z \text{ mit } \mu(Z) < \delta \forall \xi: \left| \mathcal{R}(Z, \xi, f) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt sofort Satz 7.3.7, denn für eine Zerlegungsnullfolge $(Z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und jedes gegebene $\varepsilon > 0$ kann $\delta > 0$ wie in $(*)$ gewählt werden. Dann kann $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(Z^{(k)}) < \delta$ für $k \geq k_0$ gefunden werden, sodass also für diese $k \geq k_0$ dann gerade $\left| \mathcal{R}(Z, \xi, f) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$ gilt, was die in Satz 7.3.7 behauptete Konvergenz zeigt.

Der Beweis ist einfacher für stetige Funktionen, da er in diesem Fall dem Beweis von Satz 7.2.7 ähnelt. Wir behandeln daher diesen Fall zuerst. Sei $\varepsilon > 0$. Da f stetig und das Intervall $[a, b]$ kompakt ist, ist nach Satz 3.2.8 die Funktion f gleichmäßig stetig. Es gilt also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b]: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad (*)$$

Sei nun $Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine beliebige Zerlegung mit Feinheit $\mu(Z) = \max_i(x_i - x_{i-1}) < \delta$. Setze

$$c_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \quad \text{und} \quad c'_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Nach dem Extremalsatz 3.2.2 werden diese Werte angenommen, es existieren also $\alpha_i, \beta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $f(\alpha_i) = c_i$ und $f(\beta_i) = c'_i$. Dann gilt wegen $|\alpha_i - \beta_i| < \delta$ und der gleichmäßigen Stetigkeit (*)

$$|c_i - c'_i| = |f(\alpha_i) - f(\beta_i)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Sei nun $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ein beliebiger Zwischenvektor zu der Zerlegung Z . Definiere eine Treppenfunktion $F \in T([a, b])$ durch

$$F(x) = f(\xi_i) \quad \text{für} \quad x \in (x_{i-1}, x_i].$$

Nach Konstruktion ist dann das Integral über die Treppenfunktion F die Riemannsumme von f zu der Zerlegung Z und dem Zwischenvektor ξ :

$$\int_a^b F = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{R}(Z, \xi, f).$$

Außerdem gilt wegen $c'_i \leq f(\xi_i) \leq c_i$ punktweise die Ungleichung $|F(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Damit folgt

$$|\mathcal{R}(Z, \xi, f) - \int_a^b f| = \left| \int_a^b F - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b F - f \right| \leq \int_a^b |F - f| \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \int_a^b 1 = \varepsilon.$$

Nun zu einem Beweis, der Stetigkeit nicht voraussetzt:

Ist $f \equiv 0$, dann sind alle Riemannsummen, unabhängig von Zerlegung und Zwischenvektor, Null. Folglich steht auf beiden Seiten der behaupteten Gleichung Null.

Es sei also jetzt $f \not\equiv 0$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen gemäß des Einguetschkriteriums Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \frac{\varepsilon}{2}$. Für φ und ψ finden wir dann eine gemeinsame Partition $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$. Dies ist die erste Partition, die im Beweis auftritt.

Da f als R-integrierbare Funktion beschränkt ist, gilt $0 < M := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| < \infty$ und damit $-M \leq \pm f \leq M$. Wir setzen $\delta := \frac{\varepsilon}{4Mm} > 0$. Es sei nun $Z : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine beliebige Partition mit Feinheit $\mu(Z) < \delta$ und sei $\xi = (\xi_k)_{k=1, \dots, n}$ ein beliebiger zugehöriger Zwischenvektor. Man beachte, dass hier eine weitere, zweite Partition auftritt.

Als nächstes schreiben wir die Riemannsumme als Integral einer Treppenfunktion F , vgl. das Bild in 7.3.6(ii). Definiere hierzu

$$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) := \begin{cases} f(a), & \text{für } x = a \\ f(\xi_i), & \text{für } x \in (x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Dann gilt $F \in T[a, b]$ und

$$\int_a^b F = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \mathcal{R}(Z, \xi, f)$$

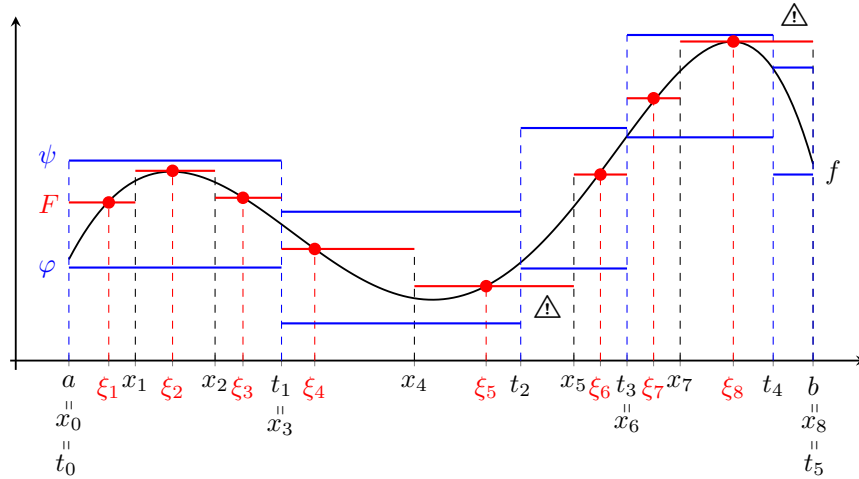
und außerdem $-M \leq \pm F \leq M$. Um $(*)$ zu zeigen, müssen wir also

$$(+)\quad \left| \int_a^b F - \int_a^b f \right| < \varepsilon \quad \text{bzw.} \quad -\varepsilon < \int_a^b F - \int_a^b f < \varepsilon$$

zeigen. Dafür muss $\int_a^b F$ abgeschätzt werden.

Wir unterscheiden zwei Sorten von Intervallen für die x -Partition von $[a, b]$:

1. Ist $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_{j-1}, t_j]$ für ein $1 \leq i \leq n$ und ein $1 \leq j \leq m$, so gilt die Abschätzung $\varphi \leq F \leq \psi$ auf $[x_{i-1}, x_i]$.
2. Den zweiten Intervalltyp veranschaulichen wir im folgenden Bild.



An den mit einem Ausrufezeichen markierten Stellen (genauer für $x \in [t_2, x_5]$ und $x \in [t_4, x_8]$) ist die Ungleichung $\varphi(x) \leq F(x) \leq \psi(x)$ *nicht* erfüllt und wir können daher nicht $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b F \leq \int_a^b \psi$ schließen.

Überlappen die Intervalle wie bei den Ausrufezeichen, so kann wie erwähnt $F(x) \leq \varphi(x)$ oder $F(x) \geq \psi(x)$ an manchen Stellen x vorkommen. Hier gilt dann aber

$$-M \leq F \leq M, \quad -M \leq -f \leq M \quad \text{und} \quad \varphi \leq f \leq \psi,$$

also durch Addieren der drei Ungleichungen

$$\varphi - 2M \leq F \leq \psi + 2M.$$

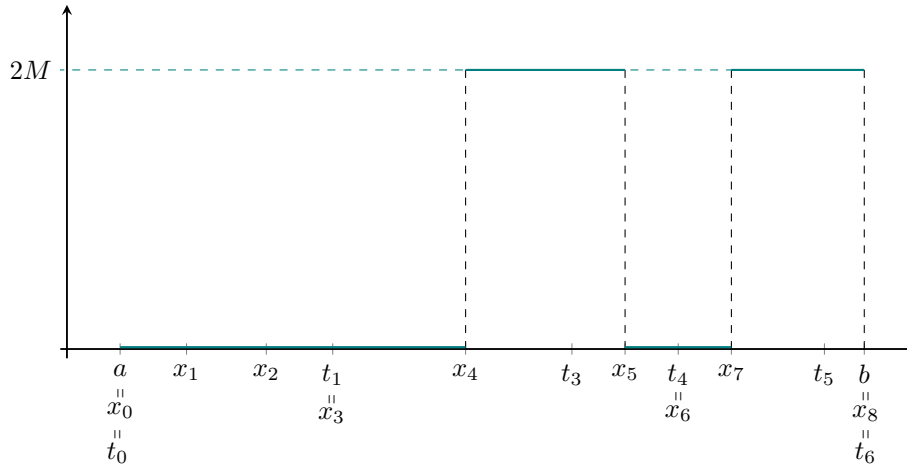
Wir definieren nun

$$A := \bigcup_{\substack{i=1, \dots, n \text{ s.d. } \exists 1 \leq j \leq m: \\ [x_{i-1}, x_i] \subset [t_{j-1}, t_j]}} [x_{i-1}, x_i]$$

d.h. wir vereinigen alle Intervalle des ersten Typs der Zerlegung Z . Weiter definieren wir

$$S: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad S(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in A, \\ 2M, & \text{falls } x \in [a, b] \setminus A \end{cases}$$

und bemerken $S \in T[a, b]$, sowie $\varphi - S \leq F \leq \psi + S$ auf $[a, b]$: Auf den Intervallen vom Typ (1) gilt $\varphi \leq F \leq \psi$ und S ist Null; auf Intervallen vom Typ (2) erledigt S für uns die Korrektur mit $\pm 2M$. Wir brauchen also eine Abschätzung für $\int_a^b S$:



In der Tat gilt

$$\int_a^b S(x) dx = \text{Summe über die Intervalle vom Typ (2) \cdot 2M,}$$

wobei wir die Länge der Intervalle durch die Feinheit $\mu(Z)$ und daher durch δ abschätzen können. Um die Anzahl der Intervalle vom Typ (2) festzustellen, müssen wir die Frage stellen, für wieviele $i = 1, \dots, n$ es kein $j \in \{1, \dots, m\}$ gibt mit $[x_{i-1}, x_i] \subset [t_{j-1}, t_j]$. Dies sind aber genau diejenigen Indizes i , für die mindestens ein $t_j \in (x_{i-1}, x_i)$ liegt und da es nur m -viele Werte t_j gibt, kann letzteres höchstens m -mal passieren, und wir können abschätzen

$$\int_a^b S(x) dx \leq m \cdot \delta \cdot 2M \leq m \cdot \frac{\varepsilon}{4Mm} \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt nun

$$\int_a^b F - \int_a^b f \leq \int_a^b \psi + S - \int_a^b f \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und analog

$$\int_a^b F - \int_a^b f \geq -\varepsilon$$

also die Aussage in (+). □

Bemerkungen 7.3.9.

1. Bei allen technischen Details behalten Sie die Idee im Kopf, dass man durch Treppenfunktionen von oben und unten approximiert und dann die Z -Partitionen so fein macht, dass der Beitrag der Intervalle vom Typ (2) beliebig klein wird.
2. Es gilt auch die Umkehrung von Satz 7.3.7, d.h. wenn $R_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass für jede Zerlegungsnullfolge $(Z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ und jede Folge von zugehörigen Zwischenvektoren $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{R}(Z^{(k)}, \xi^{(k)}, f) = R_0$ gilt, dann ist f R-integrierbar und es gilt $\int_a^b f = R_0$.

Satz 7.3.10. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $a < c < b$. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn $f|_{[a, c]}$ und $f|_{[c, b]}$ beide integrierbar sind. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Beweis. Für einen kurzen Beweis betrachten wir die charakteristischen Funktionen $1_{[a,c]}$, $1_{[c,b]}$ und $1_{(a,b]}$, die als Treppenfunktionen integrierbar sind. Nach Satz 7.3.3(iii) sind als Produkte auch die Funktionen $f(x)1_{[a,c]}$ und $f(x)1_{[c,b]}$ integrierbar. Wir beachten, dass

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x)1_{[a,c]} dx \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x)1_{[c,b]} dx$$

gilt. Da außerdem für die charakteristischen Funktionen $1_{[a,c]} + 1_{[c,b]} = 1_{[a,b]}$ gilt, können wir rechnen:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b f(x)1_{[a,b]} dx = \int_a^b f(x)(1_{[a,c]} + 1_{[c,b]}) dx \\ &= \int_a^b f(x)1_{[a,c]} dx + \int_a^b f(x)1_{[c,b]} dx \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

wobei wir die Additivität des Integrals aus Satz 7.3.3 benutzt haben.

Wir geben auch einen elementaren Beweis, der zeigt, dass die Aussage des Satzes praktisch aus der Definition, bzw. dem sehr nah an der Definition liegenden Einguetschkriterium aus Satz 7.2.6, folgt.

Wir überlegen uns zuerst die Äquivalenz. Ist f integrierbar, so existieren für vorgegebenes $\varepsilon > 0$ nach dem Einguetschkriterium 7.2.6 Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon.$$

Dann sind aber auch $\varphi|_{[a,c]}, \psi|_{[a,c]} \in T[a, c]$, es gilt $\varphi|_{[a,c]} \leq f|_{[a,c]} \leq \psi|_{[a,c]}$ und aus

$$\int_a^c \psi|_{[a,c]} - \int_a^c \varphi|_{[a,c]} = \int_a^c \psi - \int_a^c \varphi \leq \int_a^c \psi - \int_a^c \varphi + \underbrace{\int_c^b \psi - \int_c^b \varphi}_{\geq 0} = \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$$

folgt die Integrierbarkeit von $f|_{[a,c]}$, wieder aus dem Einguetschkriterium 7.2.6. Für $f|_{[c,b]}$ argumentiert man analog.

Sind für die Umkehrung $f|_{[a,c]}$ und $f|_{[c,b]}$ beide integrierbar, so können wir das Einguetschkriterium 7.2.6 zweimal anwenden und für gegebenes $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi_1, \psi_1 \in T[a, c]$ und $\varphi_2, \psi_2 \in T[c, b]$ mit $\varphi_1 \leq f|_{[a,c]} \leq \psi_1$, $\varphi_2 \leq f|_{[c,b]} \leq \psi_2$ und

$$\int_a^c \psi_1 - \int_a^c \varphi_1 < \varepsilon/2 \quad \text{sowie} \quad \int_c^b \psi_2 - \int_c^b \varphi_2 < \varepsilon/2$$

finden. Nun definiert man $\varphi, \psi \in T[a, b]$ als

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{für } x \in [a, c], \\ \varphi_2(x) & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{und} \quad \psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) & \text{für } x \in [a, c], \\ \psi_2(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann folgt mit dem Einguetschkriterium 7.2.6, dass f integrierbar ist, da $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi = \int_a^c \psi_1 + \int_c^b \psi_2 - \int_a^c \varphi_1 - \int_c^b \varphi_2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

In der folgenden Rechnung benutzen wir für die dritte Gleichung, dass jede Treppenfunktion in $T[a, b]$ eine Darstellung hat, in der c als Punkt in der Zerlegung vorkommt:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= \sup \left\{ \int_a^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi \mid \varphi \in T[a, b], \varphi \leq f \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_a^c \varphi_1 + \int_c^b \varphi_2 \mid \varphi_1 \in T[a, c], \varphi_2 \in T[c, b], \varphi_1 \leq f|_{[a, c]}, \varphi_2 \leq f|_{[c, b]} \right\} \\
&= \sup \left\{ \int_a^c \varphi_1 \mid \varphi_1 \in T[a, c], \varphi_1 \leq f|_{[a, c]} \right\} + \sup \left\{ \int_c^b \varphi_2 \mid \varphi_2 \in T[c, b], \varphi_2 \leq f|_{[c, b]} \right\} \\
&= \int_a^c f + \int_c^b f.
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Gleichung gezeigt. Da das Argument für das Oberintegral genau so funktioniert, hat man auf diese Weise auch nochmal die Rückrichtung der Äquivalenz gezeigt. \square

Definition 7.3.11. Wir definieren $\int_a^a f(x) dx := 0$ und für $a > b$ setzen wir

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx.$$

7.4 Differentiation und Integration

In diesem Abschnitt ist $I \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall und wir nehmen an, dass I mindestens zwei Punkte enthält.

Satz 7.4.1. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$. Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned}
F: I &\rightarrow \mathbb{R} \\
F(x) &:= \int_a^x f(t) dt
\end{aligned}$$

differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Beweis. Für $x \in I$ und $h \neq 0$, sodass $x + h \in I$ ist, gilt

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

wobei wir für die Zusammenfassung der Integrale Satz 7.3.10 benutzt haben. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 7.3.4, angewandt auf die stetige Funktion f , folgt nun

$$\forall h \exists \xi_h \in [x, x+h] \text{ (bzw. } \xi_h \in [x+h, x]) : \int_x^{x+h} f(t) dt = h \cdot f(\xi_h)$$

und damit

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x),$$

wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass f nach Voraussetzung stetig ist. \square

Definition 7.4.2. Eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion der Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, falls $F' = f$ gilt.

Satz 7.4.3. Es sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist auch $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Stammfunktion von f , wenn $F - G$ konstant ist.

Beweis. ‘ \Leftarrow ’ Es sei $F - G \equiv c$ mit $c \in \mathbb{R}$ fest. Dann gilt $G' = (F - c)' = F' = f$.

‘ \Rightarrow ’ Es sei G Stammfunktion. Dann gilt $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ und mit Korollar 6.1.8 folgt, dass die Differenz $F - G$ konstant ist. \square

Satz 7.4.4. (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und F sei eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Ohne Einschränkung gelte $a < b$. Es sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Einquetsungskriterium 7.2.6 existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi < \varepsilon$. Es sei $Z: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine gemeinsame Zerlegung für die beiden Treppenfunktionen φ und ψ . Für jedes $k = 1, \dots, n$ wenden wir nun den Mittelwertsatz 6.1.5 auf die Funktion $F: [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$ an und finden diesem zufolge $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ mit

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Dann folgt mit einem Teleskopsummenargument

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Weil φ, ψ Treppenfunktionen sind und $\varphi \leq f \leq \psi$ gilt, erhalten wir als nächstes die Ungleichungen

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}_{=F(b)-F(a)} \leq \sum_{k=1}^n \psi(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \psi.$$

Schließlich folgt daraus

$$-\varepsilon \leq \int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \leq F(b) - F(a) - \int_a^b f \leq \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \varepsilon.$$

Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, muss der mittlere Term verschwinden, also $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ sein. \square

Bemerkungen 7.4.5.

1. Häufig schreibt man $F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b$.
2. Manchmal schreibt man $\int f(x) \, dx = F(x)$ als Abkürzung für ‘ F ist Stammfunktion von f ’. Beachten Sie, dass dann auch gilt $\int f(x) \, dx = F(x) + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Dies so zu schreiben ist daher formal nicht korrekt, aber üblich. Außerdem ist bei dieser Schreibweise der Definitionsbereich von f nicht angegeben, d.h. man kann leicht Fehler machen. Zum Beispiel ist

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log x + c \quad \text{auf } (0, \infty) \quad \text{aber} \quad \int \frac{1}{x} \, dx = \log(-x) + c \quad \text{auf } (-\infty, 0).$$

Überzeugen Sie sich durch Ableiten von diesen Gleichungen.

3. Wenn $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, dann impliziert Satz 7.4.1, dass f eine Stammfunktion hat, die dann in $C^1(I)$ liegt. In vielen Büchern wird der Hauptsatz so formuliert und durch die Formel

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

ausgedrückt.

4. Vorsicht: Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ impliziert die Integrierbarkeit von f *nicht*, dass f eine Stammfunktion hat. Zum Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

auf jedem Intervall $[0, x]$ für $x \geq 0$ und $[x, 0]$ für $x < 0$ integrierbar mit

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = |x|.$$

Diese Funktion ist aber nicht differenzierbar in 0 und daher keine Stammfunktion im Sinn von Definition 7.4.2.

5. Vorsicht: Falls f eine Stammfunktion besitzt, dann impliziert dies *nicht*, dass f integrierbar ist. Zum Beispiel ist die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos 1/x^2 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

für alle x differenzierbar, aber die Ableitung $f'(x)$ ist nur über solche Intervalle integrierbar, die die Null nicht enthalten.

Beispiele 7.4.6. 1. $f(x) = x^n$, $n \neq -1$. Dann ist $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ eine Stammfunktion und wir erhalten zum Beispiel sofort: $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Zum Definitionsbereich: für $n \in \mathbb{N}$ kann man als Definitionsbereich jedes beliebige Intervall nehmen. Für negative ganzzahlige n darf das Intervall die Null nicht enthalten. Ist n keine ganze Zahl, so kann man zum Beispiel ein Intervall wählen, das Teilmenge von $\mathbb{R}_{>0}$ ist. Man kann aber in Spezialfällen auch negative x erlauben, z.B. wenn man $x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$ liest, muss dann aber bei der Formel für die Stammfunktion eventuell nochmal nachbessern.

2. Für $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ ist die Funktion $F(x) = \log x$ eine Stammfunktion. Das impliziert sofort $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \log x$ für alle $x > 0$.
3. $\int_1^5 \frac{1}{10-x} dx = (-1) \log(10-x) \Big|_1^5 = -(\log(10-5) - \log(10-1)) = \log(\frac{9}{5})$, wobei man hier so vorgehen kann: man versucht die Stammfunktion zu erraten (wobei man vielleicht den Faktor -1 erstmal nicht errät), und dann durch Ableiten aber sieht, dass man ein Minus zu viel bekommt, was man durch den Faktor -1 korrigiert.

Bemerkungen 7.4.7.

1. Mit dem was wir in vorhergehenden Kapiteln über Ableitungen gelernt haben, können wir jetzt eine Liste elementarer Stammfunktionen für Polynome, sin, cos, exp etc aufstellen.
2. Linearkombinationen können als $\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$ integriert werden.

3. Bei Kompositionen oder Produkten kann manchmal eine Stammfunktion geraten werden, wie in Beispiel 7.4.6.3, oder es können die zwei folgenden Integrationsregeln verwendet werden. Aber auch hier muss man oft raten oder Verschiedenes ausprobieren. Es gibt keinen Algorithmus, der Sie immer zum Erfolg führt.

Wir bringen auch noch eine Folge der Kettenregel aus Satz 5.3.2:

Satz 7.4.8. (Substitutionsregel) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine C^1 -Abbildung mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Beweis. Es sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f . Sie existiert nach Satz 7.4.1, weil f nach Voraussetzung stetig ist. Dann gilt mit der Kettenregel 5.3.2

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

und weiter durch zweimalige Anwendung des Hauptsatzes 7.4.4, nämlich erst auf $(F \circ \varphi)'$ und dann auf f , folgt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{7.4.4}{=} (F \circ \varphi)(t) \Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \stackrel{7.4.4}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

□

Beispiele 7.4.9. 1. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2t \cos(t^2) dt &= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt && (f(x) := \cos(x), \varphi(t) := t^2) \\ &= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(\sqrt{\frac{\pi}{2}})} f(x) dx && \text{(Substitutionsregel)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1. \end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2t+1)^2 dt &= \frac{1}{2} \int_1^2 2(2t+1)^2 dt && (\text{nahrhafte Eins } 1 = \frac{1}{2} \cdot 2) \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt && (f(x) := x^2, \varphi(t) := 2t+1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi(1)}^{\varphi(2)} f(x) dx && \text{(Substitutionsregel)} \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 x^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_3^5 = \frac{49}{3}. \end{aligned}$$

Man muss, bzw. kann, manche Integrale durch geschicktes Umschreiben erst auf die Form bringen, die für die Anwendung der Substitutionsregel nötig ist. Dies gilt nicht nur im Sinne, dass Konstanten ergänzt werden, sondern kann auch von x abhängige Terme umfassen.

Bemerkung 7.4.10. Ein sehr effizienter Weg die Integrale aus 7.4.9 aufzuschreiben, ist die folgende, oft von Anwendern benutzte, Methode

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2t \cos(t^2) dt = \int_{x(0)}^{x(\sqrt{\frac{\pi}{2}})} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x := t^2 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2t \\ \Rightarrow dx = 2t dt, \end{array}$$

wobei wir von links nach rechts die $2t dt$ durch dx ersetzen. Im zweiten Beispiel:

$$\int_1^2 (2t+1)^2 dt = \int_{x(1)}^{x(2)} x^2 \frac{dx}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_3^5 = \frac{49}{3}.$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x := 2t+1 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 2 \\ \Rightarrow dt = \frac{dx}{2}, \end{array}$$

wo wir $dt = \frac{dx}{2}$ einsetzen. Beachten Sie hierbei aber:

- Links ist x eine Funktion, rechts eine Variable; dies nennt man im Englischen ‘abuse of notation’.
- Auflösen von $\frac{dx}{dt} = \dots$ nach dx oder dt ist eine formale Rechnung; was dx und dt einzeln bedeuten, haben wir gar nicht definiert und wir wissen daher schon gar nicht, ob wir mit diesen Ausdrücken Bruchrechnen dürfen.
- Insbesondere das zweite Beispiel suggeriert, dass wir so jedes Integral einer Verkettung behandeln können, da wir nicht auf eine bestimmte Form des Integranden angewiesen sind, sondern durch die formale Rechnung mit dt und dx immer das, was fehlt, automatisch herausbekommen. Dies ist aber nicht so.
- Aufgrund der letzten beiden Punkte ist die obige Methode sehr mit Vorsicht zu genießen.

Bemerkung 7.4.11. Wir können die Substitutionsregel aus Satz 7.4.8 auch dazu benutzen, um Stammfunktionen zu bestimmen, weil $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion ist, wenn f stetig ist:

$$\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int \cos u du = \frac{1}{2} \sin u + C = \frac{1}{2} \sin x^2 + C,$$

wobei wir hier mit $u := x^2$ substituiert haben und dann am Ende wieder re-substituieren müssen. Vorsicht! In der Rechnung oben ist verschleiert, dass u eine Funktion von x ist.

Beim Bestimmen von Stammfunktionen kann man am Ende durch Ableiten sehr leicht prüfen, ob tatsächlich eine Stammfunktion vorliegt. Tut man dies, so ist dies als Beweis ausreichend. Es ist nebensächlich, wie man die Stammfunktion gefunden hat.

Wir gewinnen auch noch aus der Produktregel 5.3.1 für die Differentiation eine Integrationsregel:

Satz 7.4.12. (Partielle Integration) Es seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei C^1 -Abbildungen. Dann gilt für $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Beweis. Wir setzen $F := fg$. Dann gilt mit der Produktregel aus Satz 5.3.1 $F' = f'g + fg'$ und daher

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b F' = F|_a^b = fg|_a^b,$$

wobei die vorletzte Gleichung aus dem Hauptsatz 7.4.4 folgt. Umstellen liefert die behauptete Gleichung. \square

Beispiel 7.4.13. Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^x x^2 \, dx &= e^x x^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x 2x \, dx \\ &= e^1 1^2 - e^0 0^2 - 2 \int_0^1 e^x x \, dx \\ &= e - 2 \left(e^x x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x 1 \, dx \right) \\ &= e - 2(e^1 1 - e^0 0 - e^x \Big|_0^1) = e - 2(e - e + 1) = e - 2 \end{aligned}$$

Bemerkungen 7.4.14.

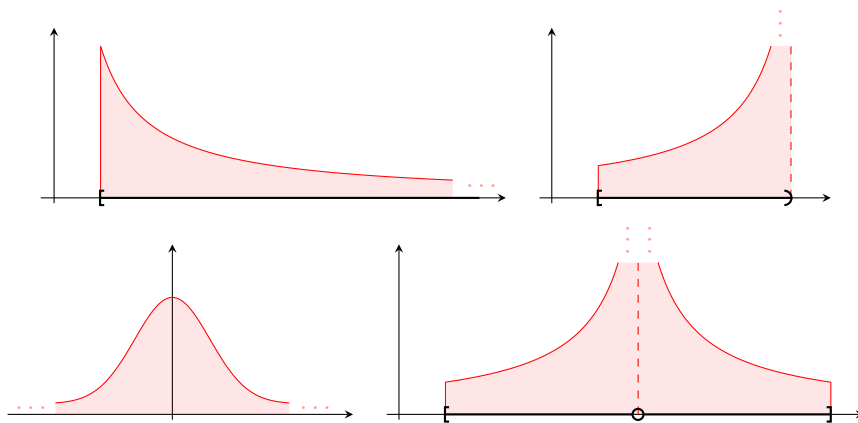
1. Es ist egal ob man mit $g'f$ oder $f'g$ anfängt. Wichtig ist, dass wir mit partieller Integration die Ableitung von einem Faktor auf den anderen hinüberschieben können.
2. Die Wahl am Anfang sollte schon so gemacht werden, dass das neue Integral einfacher zu berechnen ist als das alte. Wählt man in Beispiel 7.4.13 $f(x) = x^3/3$ und $g(x) = e^x$, dann erhält man

$$\int_0^1 e^x x^2 \, dx = e^x x^3/3 \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x x^3/3 \, dx.$$

Dies ist zwar korrekt, aber es hilft nicht bei der Berechnung.

7.5 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir Integrale beschränkter Funktionen über beschränkten abgeschlossenen Intervallen definiert und berechnet. Jetzt erweitern wir dies und behandeln zum Beispiel Integrale von Funktionen wie unten.



Definition 7.5.1. Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, sodass $f|_{[a,R]}$ für jedes $a < R < \infty$ R-integrierbar ist. Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert in \mathbb{R} existiert. Wir nennen dann $\int_a^\infty f(x) dx$ ein uneigentliches Integral. Manchmal sagen wir, dass das *Integral konvergiert*, wenn der obige Grenzwert existiert.

Beispiele 7.5.2.

1. Für $s > 1$ gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R x^{-s} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_1^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{R^{s-1}} - 1 \right) = \frac{1}{s-1}.$$

2. Dagegen konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ nicht: $\int_1^R \frac{1}{x} dx = \log R - \log 1 = \log R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty$

Definition 7.5.3. Es sei $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a < b$ in \mathbb{R} und sei $f|_{[a+\varepsilon, b]}$ R-integrierbar für alle $0 < \varepsilon < b - a$. Wir definieren

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Funktionen $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem halboffenen Intervall $[ab)$ behandeln wir analog.

Beispiele 7.5.4.

1. Für $s < 1$ gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-s} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{1-s} (1 - \varepsilon^{1-s}) = \frac{1}{1-s}.$$

2. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ konvergiert nicht: $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \log 1 - \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} \infty$.

Definition 7.5.5. Es sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und sei $f|_{[\alpha, \beta]}$ R-integrierbar für alle $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Es sei $c \in (a, b)$ beliebig. Wir definieren

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x) dx + \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x) dx,$$

falls beide Grenzwert (in \mathbb{R}) existieren. Beachten Sie, dass Definition 7.3.11 in diesem Fall sicherstellt, dass $\int_a^b f(x) dx$ unabhängig von der Wahl von c ist.

Beispiel 7.5.6. Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\arctan x \Big|_{-R}^0 \right) + \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\arctan x \Big|_0^R \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\arctan R + \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan R = \pi. \end{aligned}$$

Die letzte verbleibende Definition ('Singularität in der Mitte') und weitere Beispiele behandeln wir auf dem Übungsblatt. Dort sehen wir auch, dass im Gegensatz zu Beispiel 7.5.2.2 und Beispiel 7.5.4.2, wo die Integrale immerhin *uneigentlich* gegen $+\infty$ konvergieren, auch Divergenz eintreten kann.

8 Euklidische und unitäre Räume

8.1 Skalarprodukte und Normen

Im Folgenden sei V stets ein Vektorraum über einem der Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, denn wir wollen Normen erhalten, die nicht-negative Werte annehmen. Wir setzen am Anfang nicht voraus, dass V endlich-dimensional ist.

Definition 8.1.1. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $\langle -, - \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$, $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$ mit folgenden Eigenschaften:

(SP1) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}, u, v_1, v_2 \in V: \langle u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \rangle = \alpha_1 \langle u, v_1 \rangle + \alpha_2 \langle u, v_2 \rangle$ (Linearität im 2. Argument),

(SP2) $\forall u, v \in V: \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (Symmetrie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. Hermitezität ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)),

(SP3) $\forall v \in V: \langle v, v \rangle \geq 0$ und $(\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0)$ (Positive Definitheit).

Man beachte, dass die Hermitezität (SP2) impliziert, dass $\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$ reell ist.

Ist $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , so heißt das Paar $(V, \langle -, - \rangle)$ Skalarproduktraum. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ spricht man von euklidischen Räumen, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von unitären Räumen. Häufig schreibt man auch nur ‘Es sei V ein Skalarproduktraum’, ohne das Skalarprodukt explizit anzugeben.

Beispiele 8.1.2.

1. $V = \mathbb{R}^n$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ der reellen Zahlen mit

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^n u_i v_i. \quad (\text{Standardskalarprodukt des } \mathbb{R}^n)$$

2. $V = \mathbb{C}^n$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle := \sum_{i=1}^n \bar{u}_i v_i. \quad (\text{Standardskalarprodukt des } \mathbb{C}^n)$$

3. Die reellwertigen stetigen Funktionen $V = C([a, b], \mathbb{R})$ bilden einen Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; mit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \, dx$$

ist dies ebenfalls ein Skalarproduktraum. Hier zeigt man $\langle f, f \rangle = 0 \implies f = 0$ mithilfe der Stetigkeit von f . Alle anderen Eigenschaften folgen direkt aus den Rechenregeln für das Riemann-Integral aus Kapitel 7.

Bemerkungen 8.1.3.

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt auch im 1. Argument linear, weil

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle &\stackrel{(\text{SP2})}{=} \langle v, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle \\ &\stackrel{(\text{SP1})}{=} \alpha_1 \langle v, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle v, u_2 \rangle \\ &\stackrel{(\text{SP2})}{=} \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \alpha_2 \langle u_2, v \rangle. \end{aligned}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist ein Skalarprodukt im 1. Argument *konjugiert-linear*, d.h. Skalare können heraus- bzw. hineingezogen werden, müssen aber dabei komplex konjugiert werden:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v \rangle &\stackrel{(\text{SP2})}{=} \overline{\langle v, \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \rangle} \\ &\stackrel{(\text{SP1})}{=} \overline{\alpha_1 \langle v, u_1 \rangle + \alpha_2 \langle v, u_2 \rangle} \\ &= \overline{\alpha_1} \overline{\langle v, u_1 \rangle} + \overline{\alpha_2} \overline{\langle v, u_2 \rangle} \\ &\stackrel{(\text{SP2})}{=} \overline{\alpha_1} \langle u_1, v \rangle + \overline{\alpha_2} \langle u_2, v \rangle. \end{aligned}$$

- Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt eine Bilinearform, für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ spricht man von einer Sesquilinearform (sesqui = eineinhalb).
- Je nach Literatur wird Linearität im 1. Argument gefordert und es folgt dann die (konjugierte) Linearität im 2. Argument.

Neben dem Begriff des Skalarprodukts spielt der Begriff der Norm eine wichtige Rolle:

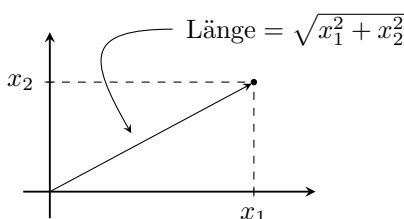
Definition 8.1.4. Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, falls gilt:

- (N1) $\forall v \in V$ gilt $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (Positive Definitheit),
- (N2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in V$ gilt $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$ (Homogenität),
- (N3) $\forall u, v \in V: \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Dreiecksungleichung).

Beispiel 8.1.5. Auf \mathbb{R}^n ist

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \quad (*)$$

eine Norm; in \mathbb{R}^2 (oder \mathbb{R}^3) kann die Norm von $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ als Länge des Vektors x interpretiert werden:



Das hatten wir uns in Abschnitt 1.2 schon für den \mathbb{R}^3 angesehen.

Dass $\|x\|$ in (*) tatsächlich eine Norm definiert, kann man direkt nachrechnen. Wir machen dies aber hier nicht, weil es auch sofort aus dem nächsten Satz folgt.

Satz 8.1.6. Es sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Skalarproduktraum. Dann gilt

- (i) Es gilt die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung: für alle $u, v \in V$ gilt $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ mit $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$.
- (ii) Die Funktion $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$ definiert eine Norm auf V .

Im Spezialfall des \mathbb{R}^3 hatten wir die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung in Korollar 1.2.6 behandelt.

Beweis. • Wir zeigen zunächst die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung: ist $v = 0$, dann sind beide Seiten Null, und es gilt sogar Gleichheit.

Es sei also $v \neq 0$. Setze $z := u - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v$, d.h. $u = z + \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v$. Wir benutzen, dass das Skalarprodukt im 1. Argument konjugiert linear ist, und erhalten

$$(*) \quad \langle z, v \rangle = \left\langle u - \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v, v \right\rangle = \langle u, v \rangle - \frac{\overline{\langle v, u \rangle}}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0.$$

Mit der Linearität im 2. Argument gilt außerdem

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \langle u, u \rangle = \left\langle z + \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v, z + \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \left\langle z, \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle + \left\langle \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v, z \right\rangle + \left\langle \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v, \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} v \right\rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \underbrace{\frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle z, v \rangle + \frac{\overline{\langle v, u \rangle}}{\langle v, v \rangle} \langle v, z \rangle}_{\stackrel{(*)}{=0}} + \frac{\overline{\langle v, u \rangle}}{\langle v, v \rangle} \frac{\langle v, u \rangle}{\langle v, v \rangle} \langle v, v \rangle \\ &= \|z\|^2 + \frac{|\langle v, u \rangle|^2}{\langle v, v \rangle^2} \langle v, v \rangle \geq \frac{|\langle v, u \rangle|^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit der positiven Zahl $\|v\|^2$ und anschließendes Wurzelziehen zeigt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$. Man beachte, dass wir hier nicht vorausgesetzt haben, dass V endliche Dimension hat.

- Wir zeigen nun (ii): Da nach (SP3) $\langle v, v \rangle \geq 0$ ist, folgt zunächst, dass $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert ist und nach Definition nur nichtnegative Werte annimmt. Gilt $0 = \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, so muss $\langle v, v \rangle = 0$ sein und dann nach (SP3) also $v = 0$. Es gilt also (N1).

Für (N2) rechnen wir: $\|\alpha v\|^2 = \langle \alpha v, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \alpha \langle v, v \rangle = |\alpha|^2 \|v\|^2$. Durch Wurzelziehen folgt (N2).

Für (N3) benutzen wir die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = |\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle| \\ &\leq \|u\|^2 + |\langle u, v \rangle| + |\langle v, u \rangle| + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2, \end{aligned}$$

wobei die erste Abschätzung die Dreiecksungleichung für den Betrag komplexer Zahlen ist und die zweite die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung. Wurzelziehen zeigt nun die Dreiecksungleichung $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ in (N3). □

Bemerkung 8.1.7. Wir betrachten über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ die Folgen

$$V = \ell^2 = \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

Dazu überlegen wir uns, dass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$ in \mathbb{C} konvergiert, wenn die Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in ℓ^2 liegen. Es gilt wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n |\bar{x}_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

für alle n . Also ist die Reihe beschränkt, also absolut konvergent. Wir setzen

$$\langle (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} \bar{x}_i y_i$$

Sind $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in ℓ^2 , so folgt wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 8.1.6

$$\langle x + y, x + y \rangle \leq (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Damit liegt auch $x + y \in \ell^2$; für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ liegt αx offensichtlich in $\ell^2 \subset \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Also ist ℓ^2 ein (unendlich-dimensionaler) Skalarproduktraum, der Hilbert'scher Folgenraum.

Bemerkungen 8.1.8.

- In jedem Skalarproduktraum gilt die Parallelogrammgleichung

$$\forall u, v \in V: \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Man überlege sich, warum die Gleichung Parallelogrammgleichung heißt.

- In euklidischen/unitären Räumen gelten die Polarisationsidentitäten. Es gilt für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$$

und für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u - iv\|^2 - i\|u + iv\|^2)$$

Dies zeigen wir in einer Aufgabe.

8.2 Orthogonalität

Definition 8.2.1. Sei V ein Skalarproduktraum.

- Zwei Vektoren $u, v \in V$ heißen orthogonal, falls $\langle u, v \rangle = 0$ gilt.
- Für eine Teilmenge $M \subset V$ heißt $M^\perp := \{u \in V \mid \forall m \in M: \langle m, u \rangle = 0\}$ das orthogonale Komplement von M .
- Eine endliche oder abzählbare Menge $(v_i)_{i \in I} \subset V$ heißt Orthonormalsystem, falls gilt

$$\forall i, k \in I: \langle v_i, v_k \rangle = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiele 8.2.2.

1. In \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n jeweils mit dem Standardskalarprodukt bilden die Einheitsvektoren (e_1, \dots, e_n) jeweils ein Orthonormalsystem.
2. Im Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 ist die Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, wobei die 1 an der i -ten Stelle steht, ein Orthonormalsystem.
3. Im Funktionenraum $C[-\pi, \pi]$ der stetigen Funktionen mit Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ bilden die Funktionen

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x,$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \quad f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3x, \dots$$

ein Orthonormalsystem.

Lemma 8.2.3. Es sei V ein Skalarproduktraum. Dann gilt:

- (i) Für alle Teilmengen $M \subset V$ ist $M^\perp = \{u \in V \mid \forall m \in M: \langle m, u \rangle = 0\}$ ein Untervektorraum von V .
- (ii) Jedes Orthonormalsystem von V ist eine linear unabhängige Menge. (Eine unendliche Menge $X \subset V$ ist linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von X linear unabhängig ist.)
- (iii) Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum und (v_1, \dots, v_n) ein Orthonormalsystem. Dann ist (v_1, \dots, v_n) eine Basis von V .

Den Beweis behandeln wir auf einem Übungsblatt. □

Definition 8.2.4. Basen, die gleichzeitig ein Orthonormalsystem bilden, nennen wir Orthonormalbasen.

Satz 8.2.5. Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum und es sei (v_1, \dots, v_n) eine Orthonormalbasis.

- (i) Jeder Vektor $v \in V$ hat die eindeutige Darstellung

$$v = \sum_{k=1}^n \langle v_k, v \rangle v_k$$

bzgl. der Orthonormalbasis. Die Koeffizienten sind also durch die Skalarprodukte $\langle v_k, v \rangle$ gegeben.

- (ii) Für $u, v \in V$ gilt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_k, v \rangle = \sum_{k=1}^n \langle u, v_k \rangle \langle v_k, v \rangle.$$

- (iii) Für $v \in V$ gilt die Parseval'sche Gleichung

$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^n |\langle v_k, v \rangle|^2.$$

Beweis. (i) Wir wissen, dass wir v nach jeder Basis von V und damit auch nach der gegebenen Orthonormalbasis eindeutig entwickeln können. Es sei also $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ mit geeigneten $c_i \in \mathbb{K}$. Dann folgt für $1 \leq i \leq n$

$$\langle v_i, v \rangle = \left\langle v_i, \sum_{k=1}^n c_k v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \underbrace{\langle v_i, v_k \rangle}_{=\delta_{ik}} = c_i.$$

(ii) Mit der Darstellung von v aus (i) für die erste Gleichung folgt

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \langle v_k, u \rangle v_k, \sum_{j=1}^n \langle v_j, v \rangle v_j \right\rangle = \sum_{k,j=1}^n \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_j, v \rangle \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = \sum_{k=1}^n \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_k, v \rangle.$$

(iii) Schließlich gilt als Spezialfall mit $u = v$ von (ii):

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{\langle v_k, v \rangle} \langle v_k, v \rangle = \sum_{k=1}^n |\langle v_k, v \rangle|^2.$$

□

Satz 8.2.6. (Satz über die Orthogonalprojektion) Es sei V ein Skalarproduktraum, es sei (v_1, \dots, v_ℓ) ein Orthonormalsystem und W sei der ℓ -dimensionale Untervektorraum von V , der von den Vektoren v_1 bis v_ℓ erzeugt wird, also $W := \text{Span}\{v_1, \dots, v_\ell\}$. Dann gilt:

(i) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $v = w + w^\perp$ mit $w \in W$ und $w^\perp \in W^\perp$. Genauer gilt

$$w := \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, v \rangle v_k \quad \text{und somit} \quad w^\perp := v - w.$$

(ii) Die Abbildung

$$P: V \rightarrow V \quad \text{mit} \quad Pv := w$$

ist linear. Sie ist idempotent, d.h. es gilt $P^2 = P$. Ferner ist $\text{Bild } P = W$. Man nennt P die orthogonale Projektion auf W .

(iii) Es gilt $\langle Pu, v \rangle = \langle u, Pv \rangle$ für alle $u, v \in V$.

(iv) Es gilt $\|v - Pv\| = \min \{ \|v - w\| \mid w \in W \}$ für jedes $v \in V$.

Beweis. • (i) Da $w \in W$ nach Definition von W gilt, muss für die Existenz der Zerlegung nur gezeigt werden, dass $w^\perp \in W^\perp$ liegt. Das ist nach Definition genau dann der Fall, wenn $\langle u, w^\perp \rangle = 0$ für alle $u \in W$ gilt. Wir nehmen also einen beliebigen Vektor $u \in W$ und entwickeln diesen mit Satz 8.2.5(i) nach der Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_ℓ) von W ,

$$u = \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, u \rangle v_k.$$

Ferner ist

$$w^\perp = v - w = v - \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, v \rangle v_k,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}
\langle u, w^\perp \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, u \rangle v_k, v - \sum_{j=1}^{\ell} \langle v_j, v \rangle v_j \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_k, v \rangle - \sum_{k,j=1}^{\ell} \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_j, v \rangle \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{=\delta_{kj}} \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_k, v \rangle - \sum_{k=1}^{\ell} \overline{\langle v_k, u \rangle} \langle v_k, v \rangle = 0,
\end{aligned}$$

womit die Existenz der orthogonalen Zerlegung $v = w + w^\perp$ gezeigt ist.

- Um die Eindeutigkeit der Zerlegung zu zeigen, nehmen wir an, dass neben bereits hergeleiteten Zerlegung $v = w + w^\perp$ eine weitere Zerlegung $v = u + u^\perp$ mit $u \in W$ und $u^\perp \in W^\perp$ existiert. Dann folgt

$$(*) \quad 0 = v - v = w + w^\perp - (u + u^\perp) = \underbrace{w - u}_{\in W} + \underbrace{w^\perp - u^\perp}_{\in W^\perp}$$

Damit gilt $w^\perp - u^\perp = -(w - u) \in W \cap W^\perp$. Nun ist aber $W \cap W^\perp = \{0\}$. Denn sei $w \in W \cap W^\perp$. Dann ist $\|w\|^2 = \langle w, w \rangle = 0$ und (N1) impliziert $w = 0$.

- (ii) Die Abbildung $P = \sum_{i=1}^{\ell} \langle v_i, - \rangle v_i$ ist linear, da das Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ im zweiten Argument linear ist. Dass $P^2 = P$ gilt, rechnen wir für $v \in V$ nach:

$$\begin{aligned}
P^2 v &= P(Pv) = P\left(\sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, v \rangle v_k\right) = \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, v \rangle P v_k \\
&= \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, v \rangle \sum_{j=1}^{\ell} \langle v_j, v_k \rangle v_j = \sum_{k=1}^{\ell} \langle v_k, v \rangle v_k = Pv.
\end{aligned}$$

Aus der Definition von P folgt sofort $\text{Bild } P \subseteq W$. Surjektivität folgt aus

$$P v_k = \sum_{i=1}^{\ell} \langle v_i, v_k \rangle v_i = v_k,$$

weil P die Identität auf dem Unterraum W ist.

- (iii) Es seien $u, v \in V$ beliebig. Entsprechend (i) zerlegen wir $v = w + w^\perp$ und $u = x + x^\perp$ mit $w, x \in W$ und $w^\perp, x^\perp \in W^\perp$. Dann gilt

$$\langle Pu, v \rangle = \langle x, w + w^\perp \rangle = \langle x, w \rangle + \underbrace{\langle x, w^\perp \rangle}_{=0} = \langle x, w \rangle + \underbrace{\langle x^\perp, w \rangle}_{=0} = \langle x + x^\perp, w \rangle = \langle u, Pv \rangle,$$

wobei wir benutzt haben, dass $Pv = w$ und $Pu = x$ gilt und dass $\langle y, z \rangle = 0$ falls $y \in W$ und $z \in W^\perp$ sind (oder umgekehrt).

- (iv) $Pv \in W$ impliziert offensichtlich die Ungleichung $\|v - Pv\| \geq \inf\{\|v - u\| \mid u \in W\}$. Es muss also

$$\|v - Pv\| \leq \|v - u\| \quad \text{für alle } u \in W \quad (*)$$

gezeigt werden.

Sei $w \in W$ beliebig. Dann folgt aus $x := v - Pv \in W^\perp$ nach (i) und $y := Pv - w \in W$, dass $\langle x, y \rangle = \langle v - Pv, Pv - w \rangle = 0$. Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|\underbrace{(v - Pv)}_{=:x} + \underbrace{(Pv - w)}_{=:y}\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{=0} + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2 = \|v - Pv\|^2. \end{aligned}$$

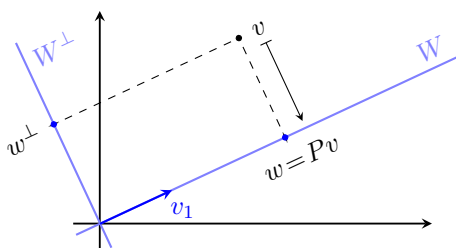
Dies liefert nach Wurzelziehen genau die Ungleichung in (*). Damit haben wir

$$\|v - Pv\| = \inf\{\|v - u\| \mid u \in W\}.$$

Insbesondere ist das Infimum ein Minimum, weil $Pv \in W$ gilt.

□

Bemerkung 8.2.7. 1. In $V = \mathbb{R}^2$ und für $\ell = 1$ haben wir die folgende Veranschaulichung:



Der Unterraum $W = \text{Span}\{v_1\}$ ist eine Ursprungsgerade und W^\perp die Ursprungsgerade senkrecht auf der Geraden W . Die Abbildung P schickt dann einen Punkt $v \in \mathbb{R}^2$ auf genau den Punkt $w \in W$ der *senkrecht* unter v liegt. Der Vektor $v - w$ kann als Pfeil vom Punkt w zum Punkt v interpretiert werden. Weil $\langle w, v - w \rangle = \langle w, w^\perp \rangle = 0$ gilt, steht dieser Vektor senkrecht auf W .

Satz 8.2.6 sagt nun insbesondere noch, dass sich nichts mehr ändert, wenn man $w = Pv$ ein zweites Mal projiziert und dass $w = Pv$ genau der Punkt auf der Ursprungsgeraden W ist, der minimalen Abstand zu v hat.

2. Im Raum \mathbb{R}^3 und für $W = \text{Span}\{v_1\}$ eindimensional, ist W^\perp genau die Ebene durch den Ursprung, die von der Geraden W senkrecht durchstoßen wird, also w als Normalenvektor hat.
3. Im Raum \mathbb{R}^3 und für $W = \text{Span}\{v_1, v_2\}$ zweidimensional, also für eine Ebene durch den Ursprung, ist W^\perp genau die Ursprungsgerade die senkrecht auf der Ebene W steht.

Satz 8.2.8. (Gram–Schmidt–Orthonormalisierungsverfahren) Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum. Dann gilt:

- (i) V besitzt eine Orthonormalbasis.
- (ii) Jedes Orthonormalsystem (v_1, \dots, v_ℓ) lässt sich zu einer Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_n) ergänzen.

Beweis. Wir zeigen die folgende Aussage (*): Zu einem System linear unabhängiger Vektoren u_1, \dots, u_m in V existiert stets ein Orthonormalsystem (v_1, \dots, v_m) mit gleichem Erzeugnis, also $\text{Span}\{u_1, \dots, u_m\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$.

Dann folgt (i), indem wir eine beliebige Basis (u_1, \dots, u_n) von V wählen und dann (*) im Spezialfall $m = n$ von (*) anwenden. Um (ii) zu sehen, ergänzen wir die nach Lemma 8.2.3(ii) linear unabhängige Familie v_1, \dots, v_ℓ mit Hilfe des Basisergänzungssatzes zu einer Basis von V . Dann wenden wir das folgende Verfahren an, von dem wir sehen werden, dass es die Vektoren v_1, \dots, v_ℓ des Orthonormalsystems unverändert lässt:

1. Da die Familie (u_1, \dots, u_m) linear unabhängig ist, ist $u_1 \neq 0$ und

$$v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1$$

ist wohldefiniert und hat Norm 1. Außerdem gilt $\text{Span}\{u_1\} = \text{Span}\{v_1\}$.

2. Es sei P_1 die orthogonale Projektion auf $W_1 := \text{Span}\{u_1\} = \text{Span}\{v_1\}$. Dann gilt nach Satz 8.2.6(i) $u_2 - P_1 u_2 \in W^\perp$. Es gilt $u_2 - P_1 u_2 \neq 0$, da u_1, u_2 linear unabhängig sind. Wir setzen also

$$v_2 := \frac{u_2 - P_1 u_2}{\|u_2 - P_1 u_2\|}$$

und erhalten einen Vektor mit Norm 1 und $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Da v_1, v_2 als Linearkombinationen von u_1 und u_2 definiert wurden, gilt $\text{Span}\{v_1, v_2\} \subset \text{Span}\{u_1, u_2\}$. Offenbar ist umgekehrt u_1 ein Vielfaches von v_1 und wegen

$$u_2 = \|u_2 - P_1 u_2\| v_2 + P_1 u_2$$

auch u_2 eine Linearkombination von v_1, v_2 , so dass auch $\text{Span}\{u_1, u_2\} \subseteq \text{Span}\{v_1, v_2\}$ gilt.

⋮

- (m) Angenommen, die Vektoren v_1, \dots, v_{m-1} eines Orthonormalsystems sind bereits konstruiert. Es sei dann P_{m-1} die orthogonale Projektion auf $W_{m-1} := \text{Span}\{u_1, \dots, u_{m-1}\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$. Dann ist $u_m - P_{m-1} u_m \in W_{m-1}^\perp$ und $u_m - P_{m-1} u_m \neq 0$. Wir setzen

$$v_m := \frac{u_m - P_{m-1} u_m}{\|u_m - P_{m-1} u_m\|}$$

und erhalten einen Vektor mit Norm 1, $\langle v_m, v_k \rangle = 0$ für $k = 1, \dots, m-1$ und $\text{Span}\{u_1, \dots, u_m\} = \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$.

□

Wir betrachten noch einmal die Situation von Satz 8.2.6 unter der Zusatzannahme $n := \dim V < \infty$. Mit Hilfe von Satz 8.2.8(ii) ergänzen wir das Orthonormalsystem v_1, \dots, v_ℓ zu einer Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_n) . Dann wird das orthogonale Komplement W^\perp gerade von den Vektoren $v_{\ell+1}, \dots, v_n$ aufgespannt. Dies klärt die Frage, wie man W^\perp bestimmen kann, vgl. auch das Bild in Bemerkung 8.2.7.

8.3 Adjungierte Abbildungen

Bemerkungen 8.3.1. Jetzt und im Folgenden sei $(V, \langle -, - \rangle)$ stets ein n -dimensionaler Skalarproduktraum. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:

- (i) $\text{End}(V) = \{T: V \rightarrow V \mid T \text{ linear}\}$. Dies sind die linearen Selbstabbildungen, die *Endomorphismen* von V . Summe und Komposition von Endomorphismen sind Endomorphismen. Es gilt $\dim_K \text{End}(V) = n^2$.
- (ii) $V^* = \{f: V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ linear}\}$ heißt Dualraum; seine Elemente heißen Funktionale oder Linearformen auf V . Ist V endlich-dimensional, so gilt $\dim_K V = \dim_K V^*$. Es gilt $\dim_K V^* = \dim_K V = n$.
- (iii) Da das Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ im 2. Argument linear ist, ist für festes $u \in V$ die Abbildung $f_u: V \rightarrow \mathbb{K}$, $f_u(v) := \langle u, v \rangle$ eine Linearform. Der nächste Satz zeigt, dass in der Tat alle Linearformen von dieser Form sind.

Satz 8.3.2. (Satz von Riesz; endlichdimensionale Version) Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum und $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Linearform. Dann existiert genau ein $u \in V$ mit $f(v) = \langle u, v \rangle$ für alle $v \in V$.

Beweis. Es sei (v_1, \dots, v_n) eine Orthonormalbasis von V . Wir wissen aus der Mathematik 2, dass eine Linearform f als lineare Abbildung eindeutig bestimmt ist durch die Werte auf dieser Orthonormalbasis. Es sei $\alpha_i := f(v_i) \in \mathbb{K}$. Wenn wir einen beliebigen Vektor $v \in V$ nach der Orthonormalbasis entwickeln, $v = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$ mit $\beta_i \in \mathbb{K}$, so folgt

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \beta_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i.$$

Wir setzen $u := \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i v_i \in V$. Dann gilt

$$\langle u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i.$$

Daraus folgt, dass der Vektor $u := \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i v_i$ die gewünschte Eigenschaft hat.

Er ist außerdem eindeutig: Es sei $\tilde{u} \in V$ ein weiterer Vektor mit $f_{\tilde{u}} = f$. Dann gilt

$$\forall v \in V: \langle \tilde{u}, v \rangle = f(v) = \langle u, v \rangle,$$

woraus folgt, dass $\langle \tilde{u} - u, v \rangle = 0$ gilt für alle $v \in V$, also insbesondere $\langle \tilde{u} - u, \tilde{u} - u \rangle = 0$. Wegen (SP3) bzw. (N1) erzwingt dies $\tilde{u} - u = 0$. \square

Satz 8.3.3. (Adjungierte lineare Abbildung) Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum. Zu jedem $T \in \text{End}(V)$ existiert genau ein $T^{ad} \in \text{End}(V)$ mit der Eigenschaft

$$\forall u, v \in V: \langle u, Tv \rangle = \langle T^{ad}u, v \rangle.$$

Die Abbildung $T \mapsto T^{ad}$ von $\text{End}(V)$ in sich hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, T, S \in \text{End}(V): (\alpha T + S)^{ad} = \bar{\alpha} T^{ad} + S^{ad}$,
- (ii) $\forall T, S \in \text{End}(V): (T \circ S)^{ad} = S^{ad} \circ T^{ad}$,

(iii) $\forall T \in \text{End}(V): T^{adad} = T$.

Definition 8.3.4. Die Abbildung T^{ad} wie in Satz 8.3.3 heißt die zu T adjungierte Abbildung.

Beweis. Es sei $u \in V$ fest. Wir betrachten die Linearform

$$g: V \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{mit} \quad g(v) := \langle u, Tv \rangle.$$

Dann ist $g \in V^*$ und nach dem Satz von Riesz 8.3.2 existiert genau ein Vektor $u' \in V$ mit $g = \langle u', - \rangle$, also

$$\forall v \in V: \langle u, Tv \rangle = \langle u', v \rangle.$$

Wir können also eine Abbildung $T^{ad}: V \rightarrow V$ definieren durch $T^{ad}u := u'$ und müssen jetzt prüfen, dass T^{ad} eine lineare Abbildung ist. Dies machen wir wieder mit der Äquivalenz, die wir im Beweis von Satz 8.3.2 benutzt haben:

$$x = y \iff \forall v \in V: \langle x, v \rangle = \langle y, v \rangle.$$

Es seien $\alpha \in \mathbb{K}$, $u, w \in V$ fest. Für alle $v \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} \langle T^{ad}(\alpha u + w), v \rangle &= \langle \alpha u + w, Tv \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle u, Tv \rangle + \langle w, Tv \rangle \\ &= \bar{\alpha} \langle T^{ad}u, v \rangle + \langle T^{ad}w, v \rangle \\ &= \langle \alpha T^{ad}u + T^{ad}w, v \rangle \end{aligned}$$

also $T^{ad}(\alpha u + w) = \alpha T^{ad}u + T^{ad}w$.

(i)–(iii) beweist man ähnlich; dies behandeln wir in der Lernwerkstatt. \square

Bemerkung 8.3.5. Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum und sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis. Dann ist die darstellende Matrix von $T \in \text{End}(V)$ nach dem Hauptsatz aus Abschnitt 1.1

$$M_{\mathcal{B}}(T) = [(Tb_1)_{\mathcal{B}} \cdots (Tb_n)_{\mathcal{B}}] =: \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =: A \quad \text{und} \quad Tb_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} b_i.$$

Daraus folgt

$$\langle b_j, Tb_k \rangle = \left\langle b_j, \sum_{i=1}^n a_{ik} b_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_{ik} \langle b_j, b_i \rangle = a_{jk}.$$

Mit dieser Formel können wir die Einträge der Darstellungsmatrix von T berechnen, solange wir eine Orthonormalbasis benutzen. Wir werden ab jetzt das in Skalarprodukträumen immer tun.

Es sei nun $B := M_{\mathcal{B}}(T^{ad})$. Dann gilt mit dieser Formel

$$b_{jk} = \langle b_j, T^{ad}b_k \rangle = \overline{\langle T^{ad}b_k, b_j \rangle} = \overline{\langle b_k, Tb_j \rangle} = \bar{a}_{kj},$$

d.h. $B = \bar{A}^t$ über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ bzw. $B = A^t$ über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ist also $T \in \text{End}(V)$ bezüglich einer Orthonormalbasis durch eine Matrix A dargestellt, so kann die Darstellungsmatrix der adjungierten Abbildung T^{ad} bezüglich der gleichen Orthonormalbasis durch Transponieren und Konjugieren bestimmt werden, bzw. nur durch Transponieren, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist.

Definition 8.3.6. Es sei $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Dann bezeichnet \bar{A}^t die hermitesch konjugierte Matrix oder auch die adjungierte Matrix.

Definition 8.3.7. Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum. Ein Endomorphismus $T \in \text{End}(V)$ heißt

- (i) normal, falls $T \circ T^{ad} = T^{ad} \circ T$ gilt, also falls T und T^{ad} kommutieren,
- (ii) selbstadjungiert, falls $T = T^{ad}$ gilt,
- (iii) unitär ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. orthogonal ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) falls $T^{ad} = T^{-1}$ gilt,
- (iv) isometrisch, falls $\|Tv\| = \|v\|$ für alle $v \in V$ gilt.

Ein Beispiel für einen selbstadjungierten Endomorphismus ist eine orthogonale Projektion P , denn nach Satz 8.2.6(iii) gilt $\langle Pu, v \rangle = \langle u, Pv \rangle$ für alle $u, v \in V$.

Bemerkung 8.3.8. Mit 8.3.3 ergeben sich für die oben definierten Eigenschaften für die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ bezüglich einer Orthonormalbasis \mathcal{B} :

$$\begin{array}{lll} T \text{ normal } (\mathbb{K} = \mathbb{C}) & \iff & \overline{A}^t A = A \overline{A}^t \quad \text{normale} \\ T \text{ normal } (\mathbb{K} = \mathbb{R}) & \iff & A^t A = A A^t \quad \text{Matrix} \end{array}$$

$$T \text{ selbstadjungiert } (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \iff A = \overline{A}^t \quad \text{selbstadjungierte oder hermitesche Matrix}$$

$$T \text{ selbstadjungiert } (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \iff A = A^t \quad \text{symmetrische Matrix}$$

$$\begin{array}{lll} T \text{ unitär } (\mathbb{K} = \mathbb{C}) & \iff & \overline{A}^t = A^{-1} \quad \text{unitäre Matrix} \\ T \text{ orthogonal } (\mathbb{K} = \mathbb{R}) & \iff & A^t = A^{-1} \quad \text{orthogonale Matrix} \end{array}$$

Satz 8.3.9. Es sei V ein n -dimensionaler Skalarproduktraum.

- (i) Selbstadjungierte und unitäre/orthogonale Abbildungen sind stets normal.
- (ii) $T \in \text{End}(V)$ ist isometrisch genau dann, wenn $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$ für alle $u, v \in V$ gilt.
- (iii) Unitäre/orthogonale Abbildungen sind stets isometrisch.

Beweis. (i) Ein Endomorphismus kommutiert mit sich selbst und, wenn er invertierbar ist, mit seinem Inversen, da $T \circ T^{-1} = \text{id}_V = T^{-1} \circ T$ gilt.

(ii) ‘ \Leftarrow ’ Es gilt insbesondere $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \|Tv\|^2$ woraus durch Wurzelziehen die Behauptung folgt.

‘ \Rightarrow ’ Wir benutzen die Polarisationsidentität aus Bemerkung 8.1.8 und führen den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ aus. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ müssen unten jeweils **die letzten zwei Terme** in der Klammer weggelassen werden:

$$\begin{aligned}
\langle Tu, Tv \rangle &= \frac{1}{4} (\|T(u+v)\|^2 - \|T(u-v)\|^2 + i\|T(u-iv)\|^2 - i\|T(u+iv)\|^2) \\
&= \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u-iv\|^2 - i\|u+iv\|^2) \\
&= \langle u, v \rangle.
\end{aligned}$$

(iii) Es gilt $\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv \rangle = \langle T^{ad}Tv, v \rangle = \langle T^{-1}Tv, v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$. □

Satz 8.3.10. Es sei $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$.

- (i) Die Matrix A ist genau dann unitär/orthogonal, wenn die Spalten (äquivalent die Zeilen) eine Orthonormalbasis von \mathbb{K}^n bzgl. des Standardskalarprodukts bilden.
- (ii) Wenn A unitär/orthogonal ist, gilt $|\det A| = 1$.
- (iii) Wenn A unitär/orthogonal ist, dann haben alle Eigenwerte von A den Betrag 1. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so heißt dies, dass die Eigenwerte nur -1 oder 1 sein können.

Beweis. (i) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ und somit } \overline{A}^t = \begin{pmatrix} \overline{a}_{11} & \cdots & \overline{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{1k} & \cdots & \overline{a}_{nk} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{a}_{1n} & \cdots & \overline{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wir rechnen:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{a}_{jk} a_{ji} = \underbrace{(\overline{a}_{1k} \cdots \overline{a}_{nk})}_{k\text{-te Zeile von } \overline{A}^t} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}}_{i\text{-te Spalte von } A} = (\overline{A}^t A)_{ki}$$

Ist A unitär, so ist die rechte Seite gleich $(\mathbb{I}_n)_{ki} = \delta_{ki}$, also bilden die Spalten von A eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts auf \mathbb{C}^n . Bilden umgekehrt die Spalten von A eine Orthonormalbasis, so ist die linke Seite gleich δ_{ik} , also gilt $\overline{A}^t A = \mathbb{I}_n$ und die Matrix ist unitär. Für die Zeilen nutzt man $A \overline{A}^t = \mathbb{I}_n$ aus und geht analog vor. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ersetzt man \overline{A}^t durch A^t .

(ii) Es gilt

$$1 = \det \mathbb{I}_n = \det \overline{A}^t A = \det \overline{A}^t \det A = \overline{\det A^t} \det A = \overline{\det A} \det A = |\det A|^2$$

für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lassen Sie die komplexe Konjugation weg.

(iii) Wenn A unitär bzw. orthogonal ist, dann folgt mit Satz 8.3.9(iii), dass die Abbildung $A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$ isometrisch ist. Es sei nun $\lambda \in \sigma(A)$ und u ein zugehöriger Eigenvektor. Dann gilt $\|u\| = \|Au\| = \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ und folglich $|\lambda| = 1$. □

9 Eigenwerte und Normalformen in Spezialfällen

Wir hatten im vorigen Abschnitt spezielle Arten von Endomorphismen kennengelernt. In diesen Fällen kann man Aussagen über deren Eigenwerte treffen, sowie in günstigen Fällen etwas zur Diagonalisierbarkeit sagen.

9.1 Der selbstadjungierte Fall

Im Folgenden sei stets $(V, \langle -, - \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum und $T: V \rightarrow V$ linear und selbstadjungiert, das heißt es gilt $T = T^{ad}$. Das ist äquivalent zu $\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle$ für alle $u, v \in V$.

Satz 9.1.1. Es seien T und V wie oben. Dann gilt:

- (i) Jeder Eigenwert von T ist reell⁴.
- (ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.

Beweis. (i) Es sei $Tu = \lambda u$ mit $u \neq 0$. Dann gilt einerseits

$$\langle u, Tu \rangle = \langle u, \lambda u \rangle = \lambda \langle u, u \rangle$$

und andererseits, weil T selbstadjungiert ist,

$$\langle u, Tu \rangle = \langle Tu, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \bar{\lambda} \langle u, u \rangle.$$

Also gilt $(\bar{\lambda} - \lambda) \langle u, u \rangle = 0$. Da u ein Eigenvektor ist, gilt $\langle u, u \rangle \neq 0$, also folgt $\lambda = \bar{\lambda}$.

(ii) Es gelte $Tu = \lambda u$ und $Tv = \mu v$ mit $\lambda \neq \mu$ und $u \neq 0 \neq v$. Dann gilt wieder einerseits

$$\langle u, Tv \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle \quad (*)$$

und andererseits, weil T selbstadjungiert ist,

$$\langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle \stackrel{(i)}{=} \lambda \langle u, v \rangle. \quad (**)$$

Zieht man $(**)$ von $(*)$ ab, so folgt $(\mu - \lambda) \langle u, v \rangle = 0$. Da nach Voraussetzung $\mu - \lambda \neq 0$ ist, muss $\langle u, v \rangle = 0$ sein. \square

Lemma 9.1.2. Es sei $V \neq \{0\}$ ein endlich-dimensionaler Skalarproduktraum. Dann hat jede selbstadjungierte lineare Abbildung einen Eigenvektor zu einem reellen Eigenwert.

Beweis.

1. Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, hat also mindestens eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$. Diese ist ein Eigenwert, also nach Satz 9.1.1 reell. Es gibt einen Eigenvektor zum Eigenwert λ .
2. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ wählen wir eine Orthonormalbasis \mathcal{B} in V . Dann ist $A := M_{\mathcal{B}}(T) \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Fassen wir A als komplexe Matrix in $\text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ auf, dann ist sie hermitesch; es gilt also $A = \overline{A}^t$. Damit ist $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, x \mapsto Ax$ selbstadjungiert und hat nach 1. mindestens einen reellen Eigenwert. Das charakteristische Polynom $\text{Ch}_A \in \mathbb{R}[X]$ hat also eine reelle Nullstelle. Damit hat T einen reellen Eigenwert. \square

Indem wir darstellende Matrizen betrachten, erhalten wir:

Korollar 9.1.3. Jede hermitsche komplexe Matrix und jede symmetrische reelle Matrix hat einen reellen Eigenwert.

⁴Über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist diese Aussage nach Definition wahr, aber über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ natürlich nicht!

Bemerkung 9.1.4. Vorsicht: Komplexe symmetrische Matrizen haben nicht unbedingt einen reellen Eigenwert. Zum Beispiel hat $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ offenbar keinen reellen Eigenwert.

Lemma 9.1.5. Es sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $T \in \text{End}(V)$ sei selbstadjungiert. Es sei weiter $U \subset V$ ein Unterraum, der bzgl. T *invariant* ist, d.h. es gilt $TU \subset U$. Dann gilt auch $TU^\perp \subset U^\perp$, d.h. auch das orthogonale Komplement U^\perp ist T -invariant. Die beiden Einschränkungen $T|_U$ sowie $T|_{U^\perp}$ sind wieder selbstadjungiert.

Beweis. Es sei $v \in U^\perp$. Es gilt also $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in U$. Wir müssen zeigen, dass $Tv \in U^\perp$ ist, also dass $\langle u, Tv \rangle = 0$ ist für alle $u \in U$. Wir rechnen nach, dass für jedes $u \in U$ gilt

$$\langle u, Tv \rangle = \langle \underbrace{Tu}_{\in U}, v \rangle = 0,$$

weil U unter T invariant ist. Dass die Einschränkungen wieder selbstadjungiert sind, ist klar. \square

Satz 9.1.6. (Hauptsatz über selbstadjungierte lineare Abbildungen) Jede selbstadjungierte lineare Abbildung T auf einem endlich-dimensionalen Skalarproduktraum V ist diagonalisierbar. Der Skalarproduktraum V besitzt sogar eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $n := \dim V$.

$n = 1$: Hier ist die Aussage offensichtlich, denn alle linearen Abbildungen $V \rightarrow V$ sind von der Form $x \mapsto \lambda x$ mit einem $\lambda \in \mathbb{K}$.

$n - 1$ auf n : Es sei $n \geq 2$ und gelte die Aussage für $(n - 1)$ -dimensionale Vektorräume. Sei V ein Vektorraum mit Dimension n . Nach Lemma 9.1.2 existiert ein Eigenvektor v und wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\|v\| = 1$ gilt. Wir setzen $U := \text{Span}\{v\}$, also $\dim U = 1$. Für $u \in U$ gilt $Tu = \lambda u \in U$, wobei λ den zu v gehörigen Eigenwert bezeichne. Insbesondere ist also $TU \subset U$, also U ein T -invarianter Unterraum.

Nach Lemma 9.1.5 ist dann das orthogonale Komplement U^\perp ebenfalls ein T -invarianter Unterraum, also $TU^\perp \subset U^\perp$ und $T|_{U^\perp}$ ist selbstadjungiert. Außerdem ist $\dim U^\perp = n - 1$, d.h. nach Induktionsvoraussetzung existiert für U^\perp eine Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_{n-1}) aus Eigenvektoren zu $T|_{U^\perp}$, also auch zu T . Es folgt, dass (v_1, \dots, v_{n-1}, v) in V eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren ist. \square

Bemerkung 9.1.7. Es sei T selbstadjungiert, μ_1, \dots, μ_r die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T und $E_{\mu_1}, \dots, E_{\mu_r}$ die zugehörigen Eigenräume. Nach dem Hauptsatz 9.1.6 gibt es eine Basis von Eigenvektoren. Daher kann man jeden Vektor $v \in V$ eindeutig schreiben als

$$v = \sum_{i=1}^r w_i \quad \text{mit} \quad w_i \in E_{\mu_i}$$

Nach Satz 9.1.1(ii) sind die Vektoren w_1 und w_i für $i \geq 2$ senkrecht und somit auch w_1 und $\sum_{i=2}^r w_i$ senkrecht. Somit folgt aus dem Satz 8.2.6 über die orthogonale Projektion, dass $w_1 = P_1 v$, wobei P_1 die orthogonale Projektion auf E_{μ_1} ist. Genauso folgt $w_i = P_i v$. Also gilt

$$v = P_1 v + \dots + P_r v.$$

Es gilt $P_i v \in E_{\mu_i}$; damit ist $P_i v$ entweder Null oder ein Eigenvektor zum Eigenwert μ_i i. Anwenden von T liefert also

$$Tv = TP_1 v + \dots + TP_r v = \mu_1 P_1 v + \dots + \mu_r P_r v.$$

Da dies für jedes $v \in V$ gilt, können wir obiges auch schreiben als

$$T = \mu_1 P_1 + \dots + \mu_r P_r.$$

Dies wird die *Spektraldarstellung* von T genannt, denn die Menge der Eigenwerte $\{\mu_1, \dots, \mu_r\} = \sigma(T)$ wurde das Spektrum von T genannt.

9.2 Normalform symmetrischer und hermitescher Matrizen

Wir ziehen auch einige Schlussfolgerungen über hermitesche und symmetrische Matrizen:

Satz 9.2.1. (Satz über die Diagonalisierbarkeit hermitescher/symmetrischer Matrizen) Jede komplexe hermitesche bzw. reelle symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Genauer:

- (i) Für jede hermitesche Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ existiert eine *unitäre* Matrix $S \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, sodass $SAS^{-1} = S\overline{A}^t$ Diagonalgestalt hat.
- (ii) Für jede symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ existiert eine *orthogonale* Matrix $S \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$, sodass $SAS^{-1} = SAS^t$ Diagonalgestalt hat.

Beweis. Nach Bemerkung 9.1.7 existiert eine Orthonormalbasis (b_1, \dots, b_n) von \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren. Aus Kapitel 2 wissen wir, dass dann SAS^{-1} diagonal ist und dass die Spalten von S^{-1} gerade die Vektoren b_1, \dots, b_n der Orthonormalbasis sind. Nach Satz 8.3.10(i) ist S^{-1} dann unitär bzw. orthogonal, also gilt $\overline{S^{-1}}^t = (S^{-1})^{-1} = S$. Weil zweimaliges Konjugieren die Identität ist und ebenso zweimaliges Transponieren, ist dann auch S unitär bzw. orthogonal. \square

Bemerkung 9.2.2. Die Matrix S war weder in Kapitel 2 durch die Forderung, dass SAS^{-1} diagonal ist, eindeutig bestimmt, noch ist sie das in der Situation von Satz 9.2.1.

Beispiele 9.2.3.

- (i) Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ sind als hermitesche Matrizen diagonalisierbar nach Satz 9.2.1 und zwar ohne weitere Rechnung.
- (ii) Vorsicht: Satz 9.2.1 behauptet keine Äquivalenz. Zum Beispiel ist $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{C})$ bereits eine Diagonalmatrix, ohne hermitesch zu sein.

9.3 Normalformen normaler, unitärer und orthogonaler Endomorphismen

Für normale lineare Abbildungen in *komplexen* endlichdimensionalen Skalarprodukträumen gilt ein zum Hauptsatz 9.1.6 analoges Resultat:

Satz 9.3.1. Es sei V ein komplexer, endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $T \in \text{End}(V)$ sei normal, also $T^{ad} \circ T = T \circ T^{ad}$. Dann ist T diagonalisierbar.

Beweis. Da wir über \mathbb{C} arbeiten, hat das charakteristische Polynom Ch_T mindestens eine Nullstelle, also existiert mindestens ein Eigenwert λ , der aber – im Gegensatz zum Fall selbstadjungierter Abbildungen – nicht unbedingt reell ist. Der zugehörige Eigenraum $U := E_\lambda$ ist, wie jeder Eigenraum, unter T invariant. Wir zeigen jetzt, dass für eine normale Abbildung T der Eigenraum U auch T^{ad} -invariant ist, also $T^{ad}U \subset U$ gilt. Dafür rechnen wir mit $v \in U$:

$$Tv = \lambda v \xrightarrow{T^{ad}(\cdot)} T^{ad}(Tv) = \lambda(T^{ad}v) \xrightarrow{T^{ad} \circ T = T \circ T^{ad}} T(T^{ad}v) = \lambda(T^{ad}v),$$

also ist auch $T^{ad}v$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Also gilt $T^{ad}v \in E_\lambda = U$.

Wir zeigen jetzt, dass auch das orthogonale Komplement U^\perp unter T und T^{ad} invariant ist, dass also auch die Inklusionen $TU^\perp \subset U^\perp$ und $T^{ad}U^\perp \subset U^\perp$ gelten:

- Es sei $v \in U^\perp$, d.h. $\langle u, v \rangle = 0$ für alle $u \in U$. Dann gilt $\langle u, Tv \rangle = \langle T^{ad}u, v \rangle = 0$ für $u \in U$, da $T^{ad}u \in U$ gilt. Also folgt $Tv \in U^\perp$.

- Analog haben wir $\langle u, T^{ad}v \rangle = \langle Tu, v \rangle = 0$ für beliebiges $u \in U$, also $T^{ad}v \in U^\perp$.

Da auch die Einschränkung $T|_{U^\perp}^{U^\perp} \in \text{End}(U^\perp)$ normal ist, kann nun der Induktionsbeweis des Hauptsatzes 9.1.6 kopiert werden. \square

Bemerkung 9.3.2. Mit den Argumenten aus Satz 9.2.1 erhalten wir auch im Fall einer normalen komplexen Matrizen $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$, dass es eine unitäre Matrix S gibt, so dass SAS^{-1} Diagonalgestalt hat.

Beispiel 9.3.3. Satz 9.3.1 kann nur im komplexen Fall formuliert werden. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist normal und daher nach Satz 9.3.1 über \mathbb{C} diagonalisierbar. Sie hat aber komplexe Eigenwerte und kann daher über \mathbb{R} nicht diagonalisierbar sein.

Korollar 9.3.4. (i) Unitäre lineare Abbildungen sind stets diagonalisierbar, denn $U^{-1} = \overline{U}^{-t}$ und U kommutieren.

(ii) Unitäre Matrizen $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$ sind stets diagonalisierbar.

Bemerkung 9.3.5. Im reellen Fall sieht die Situation anders aus: Orthogonale Matrizen $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ sind im Allgemeinen nicht diagonalisierbar. So hat zum Beispiel die Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ für $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ keine reellen Eigenwerte: das charakteristische Polynom ist

$$\text{Ch}_A(X) = (\cos \theta - X)^2 + \sin^2 \theta = X^2 - 2 \cos \theta X + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = X^2 - 2 \cos \theta X + 1$$

und dies hat die Nullstellen $\cos \theta \pm i \sin \theta$. Die Nullstellen sind also für $\theta \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ nicht reell.

Die Matrix ist aber orthogonal, denn das Inverse zu einer Drehung um θ ist eine Drehung um $-\theta$ und es gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = A^t$$

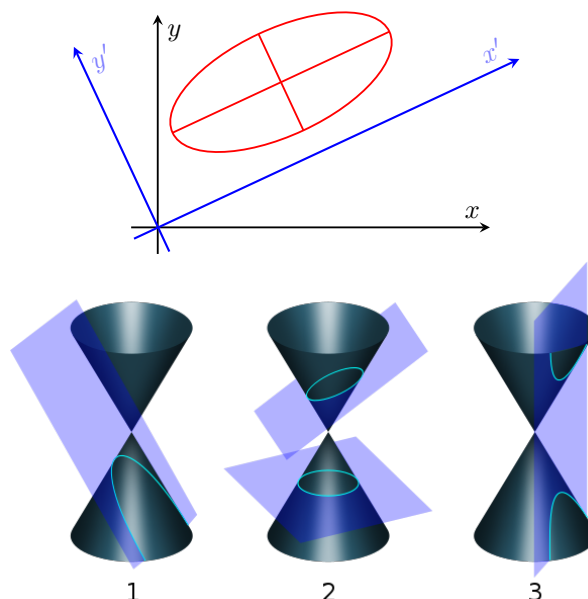
Die Normalform für orthogonale Matrizen ist daher etwas komplizierter:

Satz 9.3.6. Es sei $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$ orthogonal, wobei V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum ist. Dann gibt es eine Orthonormalbasis \mathcal{B} von V , so dass

$$M_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} E_r & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -E_s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & D_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_k \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $D_i = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}$ mit $\theta_i \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ eine Drehmatrix und $s, r, k \geq 0$. Man beachte, dass es für n ungerade wenigstens einen reellen Eigenwert und somit einen Eigenraum gibt. Für $n = 3$ und Eigenwert $+1$ ist die Drehachse eine Drehung. \square

Bemerkung 9.3.7. Orthogonale Diagonalisierbarkeit ist die zentrale Zutat bei der sogenannten *Hauptachsentransformation*, bei der man z.B. für eine Ellipse und allgemeinere Kegelschnitte dasjenige Koordinatensystem sucht, in welchem man die Halbachsen ablesen kann:



Quelle: wiki commons; https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conic_sections_with_plane.svg

Die Ellipse wird hierbei durch eine Gleichung $x^t A x = c$ beschrieben, in der eine symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ vorkommt. Die orthogonale Matrix entspricht einem Koordinatenwechsel, der die Ellipse nicht deformiert, weil Längen und Winkel unter orthogonalen Abbildungen erhalten bleiben, vgl. Satz 8.3.9.

9.4 Positive und negative Definitheit

Wichtig für das nächste Semester, und zwar bei der Extremwertberechnung von reellwertigen Funktionen in mehreren reellen Veränderlichen, sind die folgenden Begriffe:

Definition 9.4.1. Eine symmetrische Matrix $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ heißt

- (i) positiv semidefinit, in Zeichen $A \geq 0$, falls $\forall u \in \mathbb{R}^n: \langle u, Au \rangle \geq 0$,
- (ii) positiv definit, in Zeichen $A > 0$, falls $\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \langle u, Au \rangle > 0$,
- (iii) negativ semidefinit, in Zeichen $A \leq 0$, falls $\forall u \in \mathbb{R}^n: \langle u, Au \rangle \leq 0$,
- (iv) negativ definit, in Zeichen $A < 0$, falls $\forall u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}: \langle u, Au \rangle < 0$,
- (v) indefinit, falls $\exists u, v \in \mathbb{R}^n: \langle u, Au \rangle < 0 \wedge \langle v, Av \rangle > 0$.

Beispiele 9.4.2.

1. Ist $A = E_n$, so ist $\langle u, Au \rangle = \langle u, u \rangle \geq 0$ und $\langle u, Au \rangle = 0$ gilt genau dann wenn $u = 0$ ist, d.h. die Einheitsmatrix E_n ist positiv definit und $A = -E_n$ ist entsprechend negativ definit.
2. Für eine reelle Diagonalmatrix erhalten wir $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \lambda_3 u_3^2$$

und es folgt:

- A ist positiv semidefinit $\iff \forall i: \lambda_i \geq 0$.
- A ist positiv definit $\iff \forall i: \lambda_i > 0$.
- A ist negativ semidefinit $\iff \forall i: \lambda_i \leq 0$.
- A ist negativ definit $\iff \forall i: \lambda_i < 0$.
- A ist indefinit $\iff \exists \lambda_i < 0, \lambda_j > 0$.

Schließlich gilt der folgende

Satz 9.4.3. Es sei $A \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch; insbesondere gilt für das Spektrum $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $A \geq 0 \iff$ Alle Eigenwerte von A sind größer gleich Null.
2. $A > 0 \iff$ Alle Eigenwerte von A sind echt größer Null.

Entsprechende Aussagen gelten für $A < 0$, $A \leq 0$ und A indefinit.

Beweis. Nach dem Hauptsatz 9.1.6 existiert eine Orthonormalbasis (v_1, \dots, v_n) aus Eigenvektoren mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Wir stellen $u \in \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Basis dar, d.h. $u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Dann gilt

$$\langle u, Au \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j A v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i,$$

woraus mit Beispiel 9.4.2 beide Aussagen folgen. □

10 Gleichmäßige Konvergenz

Wir wiederholen den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenfolge und betrachten dann Eigenschaften wie Stetigkeit, Integrierbarkeit und Ableitbarkeit der Grenzfunktion.

10.1 Wiederholung

Wiederholung 10.1.1. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Folge von Funktionen (oder auch Funktionenfolge). Es sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f , falls $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt, also

$$\forall x \in D, \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

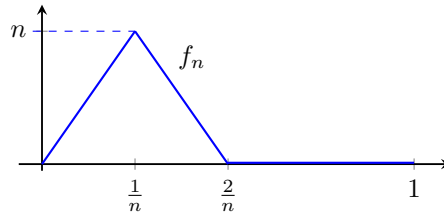
- (ii) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0, x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Bemerkung 10.1.2. Konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Funktion f , so auch punktweise gegen die gleiche Funktion f . Die Umkehrung gilt nicht. Wir nennen f in beiden Fällen die Grenzfunktion.

Beispiel 10.1.3. Für $n \geq 2$ definieren wir

$$f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{falls } \frac{2}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$



- Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f \equiv 0$: Ist $x = 0$, dann ist $f_n(x) = 0$ für alle $n \geq 2$, also gilt $f_n(x) \rightarrow 0$. Für $x > 0$ wählen wir $n_0 \geq \max\{2, \frac{2}{x}\}$. Für $n \geq n_0$ gilt dann $\frac{2}{n} \leq x$ und damit gilt $f_n(x) = 0$. Also $f_n(x) \rightarrow 0$ für jedes $x \in [0, 1]$.
- Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert *nicht* gleichmäßig gegen $f \equiv 0$: Wir zeigen

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \quad \exists n \geq n_0, x \in [0, 1]: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Es sei $\varepsilon = 1$. Für n_0 beliebig setzen wir $n := n_0$ und $x := \frac{1}{n_0}$. Dann gilt $|f_n(x) - f(x)| = |f_{n_0}(\frac{1}{n_0}) - 0| = n_0 \geq 1 = \varepsilon$.

- Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in der Tat gegen keine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig: Gäbe es eine solche Funktion, so würde $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere punktweise gegen f konvergieren und dann wäre $f \equiv 0$.

Definition 10.1.4. Es sei $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wir definieren

$$\|f\|_\infty := \sup \{|f(x)| \mid x \in D\} = \sup_{x \in D} |f(x)| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

und nennen $\|f\|_\infty$ die Supremumsnorm von f (über D).

Bemerkungen 10.1.5.

- f ist genau dann auf D beschränkt, wenn $\|f\|_\infty < \infty$.
- Der Vektorraum der beschränkten Funktionen auf D wird so zum normierten Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$.
- f_n konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f , wenn $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$. A priori ist $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$. Deshalb ist die Aussage hier so zu verstehen, dass insbesondere ein n_0 existiert, sodass $\|f_n - f\|_\infty < \infty$ für $n \geq n_0$ gilt.

10.2 Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Satz 10.2.1. Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktionenfolge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und alle Funktionen f_n stetig sind, dann ist die Grenzfunktion f ebenfalls stetig.

Beweis. Es sei $x_0 \in D$. Wir müssen zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wissen:

- Wenn f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, so gilt: $\exists n_0 \forall \tilde{x} \in D: |f_{n_0}(\tilde{x}) - f(\tilde{x})| < \frac{\varepsilon}{3}$.
- Insbesondere für diesen Index n_0 ist die Funktion f_{n_0} stetig. Daher existiert $\exists \delta > 0 \forall x \in D: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

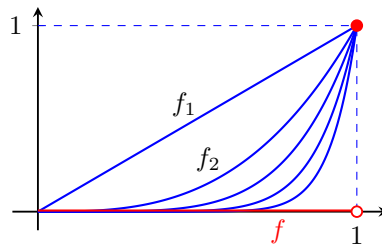
Wir wählen nun $\delta > 0$ wie oben und geben uns $x \in D$ beliebig mit $|x - x_0| < \delta$ vor. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Hat man nur punktweise Konvergenz, so stimmt es im Allgemeinen *nicht*, dass sich Stetigkeit von den Funktionen f_n auf die Grenzfunktion f überträgt:

Beispiel 10.2.2. Für $n \geq 1$ definieren wir $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = x^n$.



Es liegt punktweise Konvergenz vor: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{für } x = 1 \end{cases} =: f(x).$

Gleichmäßige Konvergenz kann nicht gelten, denn die Grenzfunktion f ist nicht stetig. Bei gleichmäßiger Konvergenz würde aber mit Satz 10.2.1 die Stetigkeit von f folgen. Direkt kann man argumentieren, dass es für jedes $\varepsilon < 1$ und n beliebig ein $x \in [0, 1)$ gibt, sodass $|f_n(x) - f(x)| = x^n \geq \varepsilon$ gilt.

10.3 Gleichmäßige Konvergenz und Integration

Satz 10.3.1. Es sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge stetiger Funktionen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die dann nach Satz 10.2.1 stetig ist. Dann gilt für die Integrale

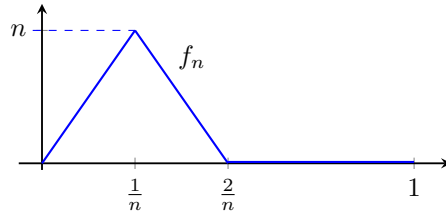
$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx.$$

Beweis. Wir bemerken, dass sowohl die Grenzfunktion f als auch die Funktionen f_n als stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall R-integrierbar sind. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b f_n(x) \, dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| \, dx \\ &\leq (b - a) \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - f_n(x)| \\ &= (b - a) \|f - f_n\|_{\infty} \xrightarrow{10.1.5(ii)} 0. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 10.3.2. Satz 10.3.1 besagt, dass bei *gleichmäßig* konvergenten Folgen stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen Grenzwert und Integral vertauscht werden können ($\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$). Liegt nur punktweise Konvergenz vor, so ist das im Allgemeinen falsch:

Als Gegenbeispiel betrachten wir wieder die Funktionenfolge $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ aus Beispiel 10.1.3:



Dann ist $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0$, aber

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 2 \int_0^{1/n} n^2 x dx = 2n^2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1/n} = 1,$$

also $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 1$.

10.4 Gleichmäßige Konvergenz und Ableitungen

Satz 10.4.1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n \in C^1[a, b]$. Es konvergiere die Funktionenfolge f_n *punktweise* gegen eine Grenzfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Folge f'_n der Ableitungsfunktionen konvergiere *gleichmäßig* gegen eine Grenzfunktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $f \in C^1[a, b]$ und für $x \in [a, b]$ gilt $f'(x) = g(x)$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Grenzfunktion g nach Satz 10.2.1 stetig ist. Da die Ableitungsfunktionen f'_n als stetig vorausgesetzt wurden, können wir für jedes n den Hauptsatz 7.4.4 der Differential- und Integralrechnung anwenden, d.h. wir bekommen für jedes $x \in [a, b]$ die Gleichung

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt.$$

Hier nehmen wir nun den Grenzwert $n \rightarrow \infty$. Dann gilt wegen der punktweisen Konvergenz $f_n(x) \rightarrow f(x)$ und $f_n(a) \rightarrow f(a)$. Da die Folge der Ableitungsfunktionen f'_n nach Voraussetzung gleichmäßig gegen g konvergiert, folgt mit Satz 10.3.1 für jedes $x \in [a, b]$, dass $\int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt$ gilt. Zusammen erhalten wir also die Gleichung für jedes $x \in [a, b]$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

Durch Differenzieren erhalten wir

$$f'(x) = 0 + \frac{d}{dx} \left(\int_a^x g(t) dt \right) = g(x),$$

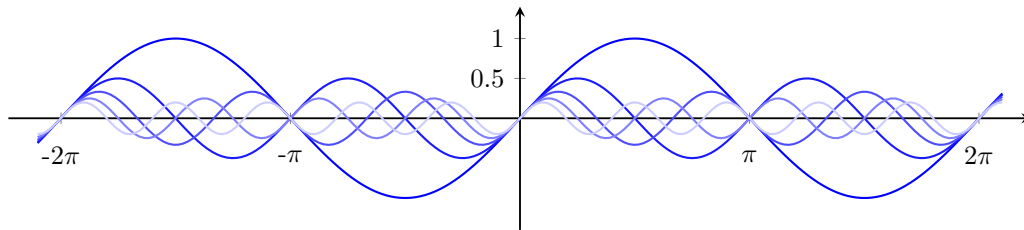
weil nach Satz 7.4.1 die Funktion $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$ Stammfunktion von g ist. □

Bemerkung 10.4.2. Satz 10.4.1 besagt, dass Grenzwert und Ableitung bei einer Folge stetig differenzierbarer Funktionen vertauscht werden können

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x) \quad ,$$

falls die Folge selbst punktweise und die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert. Gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst ist hierfür nicht hinreichend:

Es sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$ für $n \geq 1$. Im Bild sind wachsende Indizes durch heller werdendes Blau angedeutet, d.h. die dunkelblaue Funktion ist $f_1(x) = \sin(x)$, die nächsthellere ist $f_2(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ usw.:



Da $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\frac{1}{n} \sin(nx)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, folgt mit Satz 10.2.1, dass f_n gleichmäßig gegen die Nullabbildung konvergiert.

Andererseits gilt $f'_n(0) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. nicht einmal $f'_n(0) \rightarrow f'(0)$ gilt.

10.5 Gleichmäßige Konvergenz und Potenzreihen

Wir bringen hier einige Überlegungen zu Potenzreihen, die ja Grenzfunktionen polynomialer Funktionen sind.

Ist $R > 0$ der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$, dann konvergiert die Reihe auf jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ *gleichmäßig* gegen die Grenzfunktion $f: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$. Da jede Partialsumme

$$f_n := \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k$$

ein Polynom ist, kann man aus Satz 10.2.1 die Stetigkeit der Grenzfunktion schließen und mit Satz 10.3.1 über $[a, b]$ wie oben gliedweise integrieren. In der Tat kann man auch gliedweise differenzieren: Auf $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ ist die Polynomfunktion f_n stetig differenzierbar und

$$f'_n(x) = \sum_{k=0}^n k c_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) c_{k+1} (x - x_0)^k =: \sum_{k=0}^{n-1} b_k (x - x_0)^k$$

sind Partialsummen einer neuen Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

welche ebenfalls den Konvergenzradius R hat. In der Tat gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_k|} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1} \left(\sqrt[k+1]{|c_{k+1}|} \right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{R},$$

weil nach dem Satz von Cauchy-Hadamard $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k+1]{|c_{k+1}|} = \frac{1}{R}$ gilt, sowie für $k \rightarrow \infty$

$$\sqrt[k]{k+1} = (k+1)^{1/k} = \exp\left(\frac{\log(k+1)}{k}\right) \rightarrow 1$$

und $\frac{k+1}{k} \rightarrow 1$ konvergieren. Damit folgt, dass die Potenzreihe $g := \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n$ gleichmäßig auf jedem Intervall $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ konvergiert, und wir können Satz 10.4.1 anwenden. Induktiv folgt, dass jede (reelle) Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradius $R > 0$ auf dem Intervall $(x_0 - R, x_0 + R)$ eine C^∞ -Funktion definiert.

11 Taylorentwicklung

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ im Folgenden ein offenes, nichtleeres Intervall. Bei der Taylorentwicklung approximiert man geeignete Funktionen durch Polynome.

11.1 Taylorpolynome und Restglieder

Satz 11.1.1. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Definition 11.1.2. Unter obigen Voraussetzungen nennt man

- (i) $T_n[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ das Taylorpolynom n -ter Ordnung von f im Punkt x_0 ,
- (ii) $R_n[f, x_0](x) := f(x) - T_n[f, x_0](x)$ das zugehörige Restglied, sowie
- (iii) $R_n[f, x_0](x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ die Integraldarstellung des Restglieds oder kurz das Integralrestglied.

Beweis. (von Satz 11.1.1) Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n .

Für den Induktionsanfang bei $n = 0$ haben wir für $f \in C^1(I)$ mit dem Hauptsatz 7.4.4 der Differential- und Integralrechnung die gewünschte Gleichung $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$.

Für den Induktionsschritt von n nach $n+1$ geben wir uns $f \in C^{n+2}(I)$ und $x_0 \in I$ vor und benutzen partielle Integration aus Satz 7.4.12, um das n -te Restglied umzuformen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt &= \frac{1}{n!} \left[\frac{-(x - t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}(t) \Big|_{x_0}^x - \int_{x_0}^x \frac{-(x - t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \right] \\ &= \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x - t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Nun gilt mit der Induktionsannahme und dieser Gleichung:

$$\begin{aligned}
f(x) &= T_n[f, x_0](x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\
&= T_n[f, x_0](x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\
&= T_{n+1}[f, x_0](x) + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt
\end{aligned}$$

□

Satz 11.1.3. (Lagrange–Restglied) Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann existiert ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Beweis. Wir benutzen den verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung 7.3.4 und finden ein ξ zwischen x_0 und x mit

$$\begin{aligned}
f(x) - T_n[f, x_0](x) &\stackrel{11.1.1}{=} \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\
&= f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \\
&= f^{(n+1)}(\xi) \left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_{x_0}^x \right) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}$$

□

Korollar 11.1.4. Ist $f \in C^{n+1}(I)$ und gilt $f^{(n+1)} \equiv 0$, dann ist f ein Polynom vom Grad kleiner gleich n .

Beweis. Das Lagrange-Restglied ist in diesem Fall konstant Null. Nach Satz 11.1.3 gilt $f = T_n[f, x_0]$, die Funktion stimmt mit ihrem Taylorpolynom vom Grad n überein. □

Bemerkung 11.1.5. (Fehlerabschätzung/Restgliedabschätzung) Das Lagrange-Restglied kann für gegebene I , f und x_0 abgeschätzt werden, um den Fehler zu kontrollieren, den man macht, wenn man f durch ein Taylorpolynom approximiert. Zum Beispiel ist das Taylorpolynom der Exponentialfunktion in $x_0 = 0$

$$T_n[\exp, 0](x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

und

$$\begin{aligned}
|e^x - T_n[\exp, 0](x)| &= |R_n[\exp, 0](x)| \leq \sup_{\xi \in [-|x|, |x|]} \left| \frac{\exp^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-0)^{n+1} \right| \\
&= \sup_{\xi \in [-|x|, |x|]} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}.
\end{aligned}$$

Dies liefert genau die Fehlerabschätzung, die wir bereits in der Mathematik 2 gezeigt und zum Beispiel in Beispiel 3.1.3.3 benutzt haben. Ähnliche Abschätzungen werden wir auch für \sin und \cos noch zeigen (siehe Beispiel 11.2.6). Interessanter ist hier aber natürlich, dass wir auch Funktionen, für die wir a priori keine Potenzreihendarstellung kennen, unter bestimmten Voraussetzungen trotzdem durch Taylorpolynome approximieren können. Ein Beispiel hierfür sehen wir in Beispiel 11.2.7.

Satz 11.1.6. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann gibt es eine Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in I$ gilt

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + \varphi(x)(x - x_0)^n \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

Beweis. Satz 11.1.3 über das Lagrange-Restglied mit $n - 1$ statt n liefert, dass für jedes $x \in I$ ein ξ zwischen x und x_0 existiert mit

$$\begin{aligned} f(x) - T_{n-1}[f, x_0](x) &= \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varphi(x)(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt eine Null ergänzt haben und für den dritten Schritt beachten, dass ξ von x abhängt, und wir damit $\varphi(x) := \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$ als Funktion von x betrachten können. Hierzu wählt man eine Funktion $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$, indem man für jedes $x \in I$ ein ξ mit dem Satz 11.1.3 über das Lagrange-Restglied auswählt, denn es könnte ja auch mehrere solcher ξ geben. Es folgt nun

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + \varphi(x)(x - x_0)^n.$$

Da ξ zwischen x_0 und x liegt, folgt $\xi \rightarrow x_0$ wenn $x \rightarrow x_0$. Also haben wir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{\xi \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt benutzen, dass $f^{(n)}$ in x_0 als stetig vorausgesetzt wurde. □

Definition 11.1.7. (Das Landau-Symbol „klein-o“) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g: (a, b) \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 \in [a, b]$. Wir schreiben $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ (gelesen „ f ist klein-o von g “), falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}: |x - x_0| < \delta \implies |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|.$$

Bemerkung 11.1.8.

(i) Ist $g(x) \neq 0$, so gilt

$$f(x) = o(g(x)) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Stellt man sich hier vor, dass $g(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$ gilt, dann bedeutet obiges, dass ebenfalls $f(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow x_0$ gilt und dass f echt schneller gegen Null konvergiert als g , denn der Quotient $\frac{f}{g}$ geht ja immer noch gegen Null.

(ii) Es gibt weitere Landau-Symbole und jeweils Versionen für $x \rightarrow \pm\infty$ statt $x \rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$. Im Folgenden meinen wir immer $x \rightarrow x_0$ und erwähnen dies daher nicht extra.

(iii) Ist g gegeben, so definiert die Bedingung in Definition 11.1.7 eigentlich eine Menge von Funktionen f mit $f = o(g)$. Insbesondere implizieren $f_1 = o(g)$ und $f_2 = o(g)$ nicht $f_1 = f_2$.

(iv) Mit dem Landau-Symbol lässt sich 11.1.6 als

$$f(x) = T_n[f, x_0](x) + o(|x - x_0|^n)$$

schreiben: Bis auf einen Fehlerterm, der für $x \rightarrow x_0$ echt schneller gegen Null geht als $|x - x_0|^n$, stimmt die Funktion f mit ihrem Taylorpolynom $T_n[f, x_0]$ überein. Man kann dies als eine Verallgemeinerung des Satzes 5.2.1 über die lineare Approximation ansehen.

11.2 Die Taylorreihe

Definition 11.2.1. Es sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann heißt die Potenzreihe

$$T[f, x_0](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

die Taylorreihe von f an der Stelle x_0 .

Bemerkung 11.2.2. Die natürliche Frage ist jetzt, ob $f = T[f, x_0]$ gilt. Klar ist, dass die Taylorreihe $T[f, x_0]$ genau für diejenigen $x \in I$ konvergiert, für die das Restglied $R_n[f, x_0](x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

Satz 11.2.3. Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in \mathbb{R}_{>0} \cup \{\infty\}$, d.h. $f: (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ ist wohldefiniert und nach den Überlegungen von Abschnitt 10.5 eine C^∞ -Funktion. Dann gilt für die Koeffizienten $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$ für $k \in \mathbb{N}$. Ferner gilt die Gleichheit von Funktionen $T[f, x_0] = f$ auf $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Beweis. Sukzessive Anwendung der Überlegungen aus Abschnitt 10.5 zeigt mit gliedweisem Ableiten

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) c_n (x - x_0)^{n-k}.$$

Auswerten an der Stelle $x = x_0$ impliziert $f^{(k)}(x_0) = k! c_k$, also $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$. Damit folgt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k = T[f, x_0](x)$$

für $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. □

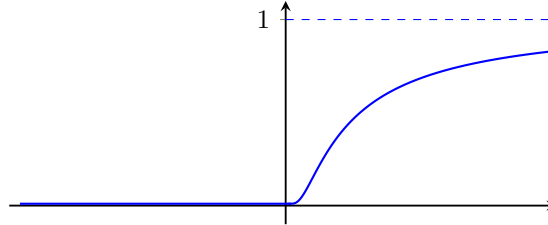
Bemerkung 11.2.4. Satz 11.2.3 besagt, dass bei Funktionen, die als Potenzreihe dargestellt werden können oder sogar über eine solche definiert wurden, die Taylorreihe wieder genau diese Reihe liefert.

Wie bei der Approximation auch ist aber die spannende Frage, ob man Funktionen, bei denen a priori keine Reihendarstellung bekannt ist, durch eine Taylorreihe darstellen kann. Man spricht dann davon, eine Funktion *in eine Taylorreihe zu entwickeln*. Die Approximation durch ein Taylorpolynom nennt man ebenfalls Taylorentwicklung.

Bemerkungen 11.2.5.

1. Das folgende Beispiel ist berühmt und Sie sollten sich dieses merken. Wir setzen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$



Wir haben in einer Aufgabe gezeigt, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ und dass $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt. Also hat die Taylorreihe $T[f, 0] = \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^k$ Konvergenzradius ∞ , aber $T[f, 0] \equiv 0 \neq f$.

2. Es gibt Beispiele von Funktionen, bei denen der Konvergenzradius der Taylorreihe Null ist, d.h. die Taylorreihe konvergiert nur in x_0 .

Beispiele 11.2.6.

1. Die Taylorreihe der Exponentialfunktion entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$ ist nach Satz 11.2.3

$$T[\exp, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x).$$

2. Die Taylorreihe der Exponentialfunktion in $x_0 \neq 0$ ist

$$T[\exp, x_0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{x_0}}{k!} (x - x_0)^k = e^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} = e^{x_0} e^{x - x_0} = \exp(x).$$

3. Die Taylorreihe des Sinus in $x_0 = 0$ ist nach Satz 11.2.3 oder direkt durch Berechnung der Ableitungen $\sin^{(k)}(0)$

$$T[\sin, 0](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!} (x - 0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x.$$

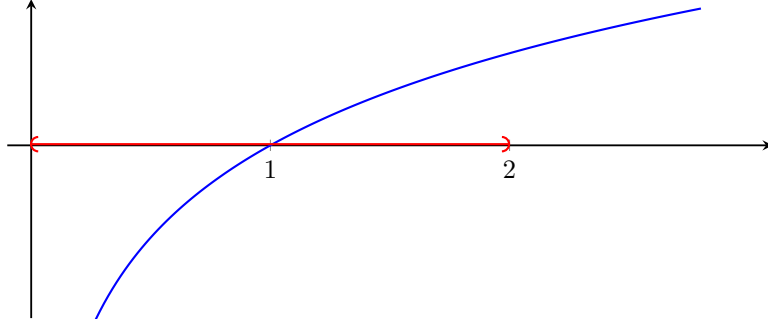
Das Lagrange-Restglied nach Satz 11.1.3 kann dann (mit ξ zwischen x und Null) wie folgt abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} |\sin x - T_{2n+1}[\sin, 0](x)| &= \left| \sin x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \\ &= |R_{2n+1}[\sin, 0](x)| \\ &= \frac{|\sin^{(2n+2)}(\xi)|}{(2n+2)!} |x|^{2n+2} \\ &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \end{aligned}$$

was fast das Gleiche liefert wie in Kapitel 5.

4. Für den Kosinus gilt Ähnliches.

Beispiel 11.2.7. Es sei $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Da wir \log als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert haben, haben wir für die Logarithmusfunktion a priori keine Potenzreihendarstellung. Aber \log ist eine C^∞ -Funktion. Wir entwickeln an der Stelle $x_0 = 1$.



Dann sind die Ableitungen

$$\begin{aligned}\log^{(0)} x &= \log x, \quad \log^{(1)} x = \frac{1}{x}, \quad \log^{(2)} x = -\frac{1}{x^2}, \quad \log^{(3)} x = \frac{2 \cdot 1}{x^3}, \\ \log^{(4)} x &= -\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{x^4}, \quad \log^{(5)} x = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{x^5}, \dots\end{aligned}$$

und damit erhält man die Taylorreihe

$$\begin{aligned}T[\log, 1](x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{k!} (x-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k.\end{aligned}$$

Man sieht nun, dass der Konvergenzradius dieser Reihe 1 ist. Zu klären bleibt, ob für $x \in (0, 2)$ auch $T[\log, 1](x) = \log x$ gilt, also Taylorreihe und Funktion übereinstimmen, was ja nach Bemerkung 11.2.5 nicht immer der Fall ist. In der Tat finden wir mit Satz 11.1.3 über das Lagrange-Restglied für $x \in (\frac{1}{2}, 2)$ ein ξ zwischen $x_0 = 1$ und x , sodass gilt

$$\begin{aligned}|R_n[\log, 1](x)| &= \left| \frac{\log^{(n)}(\xi)}{n!} (x-1)^n \right| \\ &= \left| \frac{(n-1)! \frac{1}{\xi^n}}{n!} (x-1)^n \right| \\ &= \frac{1}{n} \frac{|x-1|^n}{\xi^n} \\ &\leq \frac{1}{n} \rightarrow 0,\end{aligned}$$

Hierbei betrachtet man erst den Fall $1 < \xi < x < 2$, in dem $|x-1| < 1$ und $1 < \xi$ gilt, also $\frac{|x-1|}{\xi} \leq \frac{1}{1} = 1$. Im zweiten Fall $\frac{1}{2} < x < \xi < 1$ ist $|x-1| \leq \frac{1}{2}$ und $\xi > \frac{1}{2}$, also $\frac{|x-1|}{\xi} \leq \frac{1/2}{1/2} = 1$. Es folgt die Darstellung als Potenzreihe

$$\log x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

für $x \in (\frac{1}{2}, 2)$. Dies gilt aber auch für $x \in (0, 2)$, wie man folgendermaßen sieht: Mit $y := x - 1 \in (-1, 1)$ gilt

$$\log(x) = \log(1 + y) = \log(1 + t)|_0^y = \int_0^y \frac{1}{1+t} dt = \int_0^y \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k dt,$$

wobei wir im letzten Schritt eine Potenzreihe vorliegen haben, die auf $[-|y|, |y|]$ gleichmäßig konvergiert. Daher folgt mit Satz 10.3.1 nun

$$\log(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^y t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x-1)^k$$

tatsächlich für $x \in (0, 2)$ bzw.

$$\log(1 + y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k$$

für $y \in (-1, 1)$.

12 Gewöhnliche Differentialgleichungen

In diesem Kapitel behandeln wir Anwendungsprobleme, die wir mit sogenannten Differentialgleichungen untersuchen. Bei Funktionen, die von der Zeit abhängen, werden in Anwendungsfächern (Physik, Biologie, Chemie...) oft ein Punkt über dem Buchstaben, der die Funktion repräsentiert, gemacht statt des Striches, den wir bisher für die Ableitung benutzt haben.

12.1 Beispiele

Beispiel 12.1.1. Wir untersuchen das **Abkühlen von Kaffee**. Wir suchen die Temperatur $T(t)$ des Kaffees zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Wir nehmen das Folgende an:

- $T(0) = T_0$ bezeichne die Temperatur beim Aufgießen.
- Wir erwarten: die Funktion $T = T(t)$ fällt monoton.
- Wir erwarten: wartet man lange genug, so nimmt der Kaffee Raumtemperatur R_0 an, also $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = R_0$.
- Die Änderung der Temperatur $\dot{T}(t) = \frac{dT}{dt}(t)$ passiert schnell, wenn Differenz zur Raumtemperatur R_0 groß ist. Ist die Differenz klein, ändert sich die Temperatur des Kaffees langsamer. Daher nehmen wir an, dass $\dot{T}(t) = \kappa(T(t) - R_0)$ gilt mit $\kappa < 0$.
- Die Konstante κ kann durch ein Experiment bestimmt werden. Sie ist eine Größe, die wir der Kaffeetasse zuordnen können.

Wir suchen also eine Lösung $T: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$(\text{AWP}) \quad \begin{cases} \dot{T}(t) = \kappa(T(t) - R_0), \\ T(0) = T_0. \end{cases}$$

Beispiel 12.1.2. Wir suchen die Wasserhöhe $h(t)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$ in einer **Badewanne**. Wir nehmen das Folgende an:

- Die Wasserhöhe zum Zeitpunkt 0 sei bekannt: $h(0) = h_0$.
- Für $t \geq 0$ gilt nach dem Energieerhaltungssatz

$$m \cdot g \cdot h(t) = \frac{1}{2} m \cdot v(t)^2,$$

wobei m die Masse des Wassers in der Badewanne, g die Gravitationskonstante und v die Geschwindigkeit ist, mit der das Wasser ausströmt.

- Für t' nahe bei t mit $t' > t$ gilt $F \cdot (h(t) - h(t')) = f \cdot v(t) \cdot (t' - t)$ nach dem Satz über die Massenerhaltung, wobei F die Grundfläche der Badewanne und f die Fläche des Abflusses bezeichnet. Hieraus folgt durch Division durch $t' - t$ und durch F

$$\frac{h(t') - h(t)}{t' - t} = -\frac{f}{F} v(t) = -\frac{f}{F} \sqrt{2gh(t)}.$$

Durch Betrachtung des Grenzübergangs $t' \rightarrow t$ folgt also

$$\dot{h}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{h(t') - h(t)}{t' - t} = \alpha \sqrt{h(t)}.$$

- Die Konstante $\alpha < 0$ hängt von der Badewanne ab und kann durch ein Experiment bestimmt werden.

Wir suchen also eine Lösung $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ des

$$(AWP) \quad \begin{cases} \dot{h}(t) = \alpha \sqrt{h(t)}, \\ h(0) = h_0. \end{cases}$$

Beispiel 12.1.3. Wir suchen die Anzahl der Mitglieder $N(t)$ einer Population zum Zeitpunkt $t \geq 0$ und wollen dazu das **Populationswachstum** verstehen. Wir nehmen das Folgende an:

- Der Populationsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $N(0) = N_0$.
- Für $t \geq 0$ und kleines $\Delta t > 0$ ist die Änderung des Populationsbestands $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$ proportional zum Populationsbestand $N(t)$ und zum Änderungszeitraum Δt , also $\Delta N = \omega \cdot N(t) \cdot \Delta t$ mit $\omega \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\dot{N}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \omega N(t).$$

Stellen Sie sich vor, Sie zählen, wieviele Individuen in einem kurzen Zeitraum hinzukommen, z.B. wieviele Babys an einem Tag geboren werden. Wenn Sie dann statt einem Tag zwei oder drei Tage lang zählen, ist es naheliegend anzunehmen, dass sich die Zahl verdoppeln bzw. verdreifachen wird. Zählen Sie über den gleichen Zeitraum, wieviele Babys in Hamburg geboren werden, und dann, wieviele in Bayern, dann werden Sie naheliegenderweise annehmen, dass die Zahl sich um das 6.9-fache erhöhen sollte, wenn Bayern 6.9-mal so viele Einwohnerinnen hat wie Hamburg. Dieser Ansatz ignoriert natürlich weitere Einflüsse und ist nur ein Modell.

Wir suchen also eine Lösung $N: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ des

$$(AWP) \quad \begin{cases} \dot{N}(t) = \omega N(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

12.2 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Die obigen Beispiele lassen sich allesamt mit einer bestimmten Art von Differentialgleichungen beschreiben.

Definition 12.2.1. 1. Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = f(t, x)$$

mit einer gegebenen Funktion $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

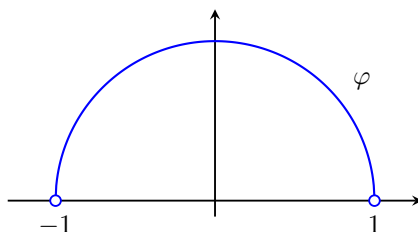
2. Unter einer Lösung verstehen wir eine Funktion $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R})$ mit einem Intervall I , und $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$.
3. Ist eine Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ gegeben, so fordern wir zusätzlich $t_0 \in I$ und $\varphi(t_0) = x_0$.

Beispiele 12.2.2. 1. Nach Satz 6.1.9 ist $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = N_0 e^{\omega t}$ die eindeutig bestimmte und auf ganz \mathbb{R} existierende Lösung des Anfangswertproblems für den Populationsbestand in Beispiel 12.1.3.

2. Das Anfangswertproblem $y' = \sqrt{y}$, $y(0) = 0$ für $y: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat zwei Lösungen $\varphi(x) \equiv 0$ und $\varphi(x) = \frac{x^2}{4}$. Dass dies Lösungen sind, überprüft man durch Differenzieren:

$$\varphi'(x) = \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}} = \sqrt{\varphi}.$$

3. Die Differentialgleichung $(y')^2 + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung.
4. Das Anfangswertproblem $y' = -\frac{x}{y}$, $y(0) = 1$ hat die Lösung $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$, die aber nur auf $(-1, 1)$ existiert:



Nun zur allgemeinen Theorie: Wir betrachten ein Anfangswertproblem der speziellen Form

$$(\text{AWP}) \quad \begin{cases} y' = g(x)h(y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

mit zwei gegebenen Funktionen $g = g(x)$ und $h = h(y)$. Solche Differentialgleichungen nennt man Differentialgleichungen mit getrennten Variablen und für geeignete g, h kann man sie mit der folgenden Methode der Trennung der Variablen lösen, die wir zunächst anhand eines Beispiels erklären.

Beispiele 12.2.3. (Methode der Trennung der Variablen)

1. Wir betrachten die Differentialgleichung $y' = xy$ mit Anfangsbedingung $y(0) = -1$.

(a) Wir formulieren die Gleichung um (für $y \neq 0$)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = x.$$

(b) Wir trennen die Variablen x und y und integrieren auf beiden Seiten: $\int \frac{1}{y} dy = \int x dx$.

(c) Wir ermitteln die Stammfunktionen: $\log |y| = \frac{x^2}{2} + c$ für eine Konstante c .

(d) Wir lösen nach y auf: $y = \pm e^{x^2/2+c} = \pm e^c e^{x^2/2} = C e^{x^2/2}$ mit einer neuen Konstante C .

(e) Wir wählen C so, dass die Anfangsbedingung erfüllt ist: $-1 = y(0) = C e^0 = C$.

(f) Wir rechnen nach, ob $y(x) := -e^{x^2/2}$ auf dem natürlichen Definitionsbereich, hier $x \in \mathbb{R}$, das Anfangswertproblem auch wirklich löst: $y'(x) = -x e^{x^2/2} = x \cdot y(x)$ und $y(0) = -1$. Wie schon bei der Bestimmung der Stammfunktion in Bemerkung 7.4.11 reicht hier diese Rechnung vollkommen aus, um zu zeigen, dass das Anfangswertproblem gelöst wurde; die Schritte 1.-5. sind rein heuristisch.

2. Wir lösen auch noch die Differentialgleichung $\dot{h}(t) = \alpha \sqrt{h(t)}$ für die Badewanne aus Beispiel 12.1.2: Wir trennen die Variablen (für $h \neq 0$)

$$\frac{dh}{h^{1/2}} = \alpha dt$$

und integrieren auf beiden Seiten:

$$\int \frac{dh}{h^{1/2}} = \alpha \int dt.$$

Die Stammfunktionen ergeben

$$2h^{1/2} = \alpha t + C$$

für eine Konstante C ; Auflösen nach h liefert

$$h(t) = \left(\frac{\alpha}{2}t + c\right)^2.$$

Wir wählen die Konstante c so, dass die Anfangsbedingung $h(0) = h_0$ erfüllt ist: $h(0) = c^2 = h_0$, also

$$h = \left(\frac{\alpha}{2}t + \sqrt{h_0}\right)^2.$$

Durch Differenzieren rechnet man nach, dass diese Funktion auf dem natürlichen Definitionsbereich $\mathbb{R}_{\geq 0}$ das Anfangswertproblem auch wirklich löst. Da $\alpha < 0$ ist, sieht man, dass die Badewanne in der endlichen Zeit $t = -\frac{2}{\alpha}\sqrt{h_0}$ leer läuft. Da die Füllhöhe $h(t)$ monoton sinkt, nimmt wegen der Differentialgleichung auch die Geschwindigkeit \dot{h} des Absinkens des Spiegels immer mehr ab.

Das die Methode der Trennung der Variablen funktioniert, zeigt der folgende Satz:

Satz 12.2.4. Es seien $g: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf offenen Intervallen und sei $h(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Es sei $(x_0, y_0) \in I \times J$. Definiere

$$G: I \rightarrow \mathbb{R}, G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt \quad \text{und} \quad H: J \rightarrow \mathbb{R}, H(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{h(t)} dt.$$

Es sei $I' \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $G(I') \subset H(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ des

$$(AWP) \quad \begin{cases} y' = g(x)h(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Für diese Lösung gilt $\varphi(I') \subset J$ und

$$\forall x \in I': H(\varphi(x)) = G(x). \quad (*)$$

Beweis.

1. Wir zeigen zuerst: Ist $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung des AWP, dann gilt (*). In der Tat gilt für alle $t \in I'$ dann $\varphi'(t) = g(t)h(\varphi(t))$, was durch Teilen durch $h(\varphi(t))$ zu

$$g(t) = \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))}$$

führt. Da nach Annahme $h(y) \neq 0$ ist für alle $y \in J$, ist dies wohldefiniert. Integration dieser Gleichung liefert dann für alle $x \in I'$:

$$\int_{x_0}^x g(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} dt = \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{1}{h(u)} du,$$

wobei wir im letzten Schritt die Substitutionsregel aus Satz 7.4.8 verwendet haben. Nach Voraussetzung ist $\varphi \in C^1(I')$ und $\frac{1}{h}$ ist stetig. Da der linke Ausdruck oben gerade $G(x)$ ist und der rechte $H(\varphi(x))$, haben wir also gezeigt, dass (*) für alle Lösungen des Anfangswertproblems gilt.

2. Jetzt zeigen wir die Eindeutigkeit: Für $y \in J$ gilt

$$H'(y) = \frac{d}{dy} \int_{y_0}^y \frac{1}{h(t)} dt = \frac{1}{h(y)} \neq 0,$$

d.h. H ist streng monoton und C^1 , besitzt also nach des Umkehrsatzes 3.1.15 eine stetig differenzierbare Umkehrfunktion $\phi: H(J) \rightarrow J$. Ist $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ nun eine Lösung des Anfangswertproblems, so folgt aus 1., dass (*) gilt, also $H(\varphi(x)) = G(x)$ für $x \in I'$ gilt. Nun wenden wir die Umkehrfunktion ϕ von H auf beiden Seiten an und erhalten

$$\varphi(x) = \phi(H(\varphi(x))) = \phi(G(x))$$

für alle $x \in I'$ und damit die Eindeutigkeit der Lösung φ .

3. Nun zur Existenz. Da wir nach Voraussetzung $G(I') \subset H(J)$ haben, können wir eine Funktion

$$\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{durch} \quad \varphi(x) := \phi(G(x))$$

definieren, wobei ϕ die Umkehrfunktion von H aus 2. ist. Dann wissen wir, dass $\varphi \in C^1$ ist, und erhalten

$$\varphi(x_0) = \phi(G(x_0)) = \phi(0) = y_0,$$

wobei wir im letzten Schritt $H(y_0) = 0$ benutzt haben, sowie

$$\varphi'(x) = \phi'(G(x))G'(x) = \frac{1}{H'(\phi(G(x)))}G'(x) = \frac{1}{\frac{1}{h(\varphi(x))}}g(x) = g(x)h(\varphi(x)).$$

Dies zeigt, dass die Funktion $\varphi: I' \rightarrow \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem löst. □

Definition 12.2.5. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ und seien $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = a(x)y + b(x)$$

eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Die lineare Differentialgleichung heißt homogen, falls $b \equiv 0$ ist und sonst inhomogen.

Die *homogene* Gleichung ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen, könnte also wie in Beispiel 12.2.3 mit Satz 12.2.4 behandelt werden. In der Tat kann man hier aber auch eine Lösung explizit direkt angeben:

Satz 12.2.6. Es sei I ein Intervall und $x_0 \in I$. Es sei $a: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf I und $x_0 \in I$. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ des homogenen linearen Anfangswertproblems

$$(AWP) \quad \begin{cases} y' = a(x)y \\ \varphi(x_0) = c, \end{cases}$$

nämlich

$$\varphi(x) := c \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right).$$

Beweis. Es gilt

$$\varphi'(x) = c \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right) \cdot a(x) = a(x)\varphi(x)$$

und

$$\varphi(x_0) = c \exp(0) = c,$$

so dass die angegebene Funktion φ eine Lösung des AWP ist. Es muss also nur die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt werden. Aus der gleichen Rechnung folgt, dass die Hilfsfunktion

$$\varphi_0(x) := \exp \left(- \int_{x_0}^x a(t) dt \right)$$

die Gleichung $\varphi'_0(x) = -a(x)\varphi_0(x)$ erfüllt. Es sei nun $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung $y' = a(x)y(x)$ mit Anfangsbedingung $\psi(x_0) = c$. Wir betrachten $\psi_0(x) := \psi(x)\varphi_0(x)$. Dann gilt mit der Produktregel

$$\psi'_0(x) = \psi'(x)\varphi_0(x) + \psi(x)\varphi'_0(x) = a(x)(\psi(x)\varphi_0(x) - \psi(x)\varphi_0(x)) = 0$$

für alle $x \in I$. Nach Korollar 6.1.8 ist die Funktion ψ_0 konstant und daher

$$\forall x \in I: \psi_0(x) = \psi_0(x_0) = \psi(x_0)\varphi_0(x_0) = c \exp(0) = c.$$

Da $\varphi_0 \neq 0$ gilt, erhalten wir

$$\psi(x) = \frac{\psi_0(x)}{\varphi_0(x)} = \frac{c}{\exp(-\int_{x_0}^x a(t) dt)} = c \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right) = \varphi(x)$$

für alle $x \in I$. □

Inhomogene Gleichungen löst man nach der Lösung der homogenen Gleichung mit einer Methode die als Variation der Konstanten bekannt ist.

Satz 12.2.7. Es seien $a, b: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$(\text{AWP}) \quad \begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ \varphi(x_0) = c, \end{cases}$$

nämlich

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \left(c + \int_{x_0}^x \varphi_0(t)^{-1} b(t) dt \right) \quad \text{mit} \quad \varphi_0(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right).$$

Beweis. Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung $y' = a(x)y$ sind alle von der Form $\varphi(x) = k\varphi_0(x)$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung machen wir den *Ansatz* $\varphi(x) := k(x)\varphi_0(x)$, d.h. wir ersetzen die Konstante k durch eine Funktion $k(x)$ und versuchen nun, $k(x)$ so zu bestimmen, dass φ die inhomogene Gleichung löst:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= k'(x)\varphi_0(x) + \varphi_0'(x)k(x) = k'(x)\varphi_0(x) + a(x)\varphi_0(x)k(x) \\ &= k'(x)\varphi_0(x) + a(x)\varphi(x) \stackrel{!}{=} a(x)\varphi(x) + b(x). \end{aligned}$$

Damit löst φ genau dann die inhomogene lineare Differentialgleichung, wenn

$$k'(x)\varphi_0(x) = b(x),$$

oder anders ausgedrückt wenn $k'(x) = \varphi_0(x)^{-1}b(x)$ gilt. Damit die Anfangsbedingung erfüllt ist, muss außerdem gelten $c = \varphi(x_0) = k(x_0) \cdot 1 = k(x_0)$. Der Hauptsatz 7.4.4 der Differential- und Integralrechnung zeigt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$k(x) = k(x_0) + \int_{x_0}^x k'(t) dt = \int_{x_0}^x \varphi_0(t)^{-1} b(t) dt + c.$$

Die Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems folgt, weil eine beliebige Lösung ψ als $\psi(x) = \tilde{k}(x)\varphi_0(x)$ mit $\tilde{k}(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi_0(x)}$ geschrieben werden kann. Der obige Beweis zeigt dann $\tilde{k}(x) = k(x)$ für $x \in I$. \square

Bemerkung 12.2.8. Man muss sich die Formeln aus Satz 12.2.6 und aus Satz 12.2.7 nicht merken.

1. Man löst erst die homogene Gleichung $y' = a(x)y$ durch Trennung der Variablen und findet eine Lösung $y_{\text{homog.}}$.
2. Dann macht man den Ansatz $y(x) = k(x) \cdot y_{\text{homog.}}(x)$ mit Variation der Konstanten und erhält eine Gleichung an $k(x)$, die man integriert, um die Lösung von $y' = a(x)y + b(x)$ zu erhalten.

Beispiel 12.2.9. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(\text{AWP}) \quad \begin{cases} y' = 2xy + x^3, \\ y(0) = c. \end{cases}$$

- Wir lösen die homogene Gleichung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \implies \int \frac{dy}{y} = \int 2x dx \implies \log|y| = x^2 + k \implies y_{\text{homog.}} = ke^{x^2}.$$

- Der Ansatz $y = k(x)e^{x^2}$ mit Variation der Konstanten liefert die Gleichung

$$y' = k'(x)e^{x^2} + k(x)2xe^{x^2} \stackrel{!}{=} 2xk(x)e^{x^2} + x^3.$$

Es folgt $k'(x)e^{x^2} = x^3$ und damit $k'(x) = x^3e^{-x^2}$. Integrieren, erst mit der Substitution $u = x^2$ und dann mit partieller Integration, liefert

$$\begin{aligned} k(x) &= \int x^3 e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int u e^{-u} du \\ &= \frac{1}{2} \left(u(-e^{-u}) - \int 1(-e^{-u}) du \right) \\ &= -\frac{1}{2} (u + 1) e^{-u} + \tilde{c} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} + \tilde{c}, \end{aligned}$$

wobei wegen $c = y(0) = k(0)e^0 = k(0) = -\frac{1}{2} + \tilde{c}$ folgt, dass $\tilde{c} = c + \frac{1}{2}$ gelten muss.

- Wir erhalten die Lösung

$$y(x) = \left(-\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2} + \frac{1}{2} + c \right) e^{x^2} = \left(\frac{1}{2} + c \right) e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 12.2.10. Die Differentialgleichung

$$\dot{T} = \kappa(T - R_0) \quad (*)$$

aus Beispiel 12.1.1 zur Kaffeetemperatur kann mit obiger Methode gelöst werden. Die homogene Gleichung $\dot{T} = \kappa T$ hat die Lösung $k \exp(\kappa t)$. Variation der Konstanten führt zum Ansatz $T(t) = k(t) \exp(\kappa t)$. Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung $(*)$ liefert

$$\dot{k} \exp(\kappa t) + k\kappa \exp(\kappa t) \stackrel{!}{=} \kappa T - \kappa R_0$$

oder $\dot{k} = -\kappa R_0 \exp(-\kappa t)$. Diese Gleichung hat die Lösung $k(t) = R_0 \exp(-\kappa t) + c$, so dass wir finden

$$T(t) = (c + R_0 \exp(-\kappa t)) \exp(\kappa t) = c \exp(\kappa t) + R_0$$

Der Anfangswert $T(0) = T_0$ liefert als Lösung $T(t) = (T_0 - R_0) \exp(\kappa t) + R_0$. Diese Funktion fällt wegen $\kappa < 0$ in der Tat monoton und nimmt für $t \rightarrow \infty$ den Wert R_0 an, wie wir erwartet haben.

Literatur

- [1] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer, 2014.
- [2] T. Bröcker, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Birkhäuser, 2004.
- [3] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Lamotke, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Zahlen*. Springer, 1992.

- [4] G. Fischer, *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Springer, 2019.
- [5] G. Fischer, B. Springborn, *Lineare Algebra*. Springer, 2020.
- [6] O. Forster, *Analysis 1*. Springer, 2015.
- [7] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm, H.-G. Weigand, *Didaktik der Analysis*. Springer, 2016.
- [8] H.-W. Henn, A. Filler, *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer, 2015.
- [9] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Vieweg+Teubner, 2009.
- [10] S. Hildebrandt, *Analysis 1*. Springer, 2006.
- [11] K. Jänich, *Lineare Algebra*. Springer, 2008.
- [12] K. Königsberger, *Analysis 1*. Springer, 2004.
- [13] Th. Sonar, *3000 Jahre Analysis*, Springer 2011.
- [14] W. Walter, *Analysis 1*. Springer, 2009.

Index

- Abbildung, 22
- Ableitung, 36
- adjungierte Abbildung, 93
- adjungierte Matrix, 93
- algebraische Vielfachheit, 16
- Anfangswertproblem, 112
- Arkustangens, 29

- Berührungspunkt, 25
- beschränkte Funktion, 30
- beschränktes Gebiet, 30
- Bildbereich, 22
- Bilinearform, 84
- Blockdiagonalform, 22

- Cauchy–Schwarz’sche–Ungleichung, 84
- Cauchy-Schwarz’sche Ungleichung, 7

- Definitionsbereich, 22
- Determinantenabbildung, 10
- diagonalisierbare Abbildung, 18
- diagonalisierbare Matrix, 18
- Differentialgleichungen mit getrennten Variablen, 114
- Differenzierbarkeit an einer Stelle, 36
- Differenzierbarkeit einer Funktion, 36
- Dualraum, 92

- Eigenraum, 16
- Eigenvektor, 16
- Eigenwert, 16
- Einschränkung einer Funktion, 24
- Entwicklungspunkt, 105
- euklidischer Raum, 83
- Extremum, 44

- Folgenkriterium für Stetigkeit, 26
- Folgenstetigkeit, 26
- Funktion, 22
- Funktional, 92
- Funktionenfolge, 101

- geometrische Vielfachheit, 16
- gewöhnliche Differentialgleichung, 114
- gleichmäßig stetige Funktion, 31
- gleichmäßige Konvergenz, 101
- Gram–Schmidt–Orthonormalisierungsverfahren, 86
- Grenzfunktion, 101
- Grenzwert einer Funktion, 25

- hermitesch konjugierte Matrix, 93
- hermitesche Matrix, 94
- Hilbert’scher Folgenraum, 86

- indefinite Matrix, 100
- Innenwinkel, 7
- Integraldarstellung des Restglieds, 106
- Integralrestglied, 106
- Isometrie, 94
- isomoterischer Endomorphismus, 94

- Jordansche Normalform, 22

- Kettenregel, 40
- Koeinschränkung einer Funktion, 24
- kompaktes Intervall, 30
- konkave Funktion, 48
- konvexe Funktion, 48
- Kreuzprodukt, 5

- Leibnizregel, 39
- lineare Differentialgleichung, 116
- Linearform, 92
- linksseitiger Grenzwert, 25
- lokales Maximum, 44
- lokales Minimum, 44

- mehrfache Differenzierbarkeit, 43
- Mittelwertsatz, 45

- negativ definite Matrix, 100
- negativ semidefinite Matrix, 100
- Norm, 84
- normale Matrix, 94
- normaler Endomorphismus, 94

- orthogonale Komplement, 86
- orthogonale Matrix, 94
- orthogonale Projektion, 88
- orthogonaler Endomorphismus, 94
- Orthogonalität von Vektoren, 86
- Orthonormalbasen, 87
- Orthonormalsystem, 86

- Parallelogrammgleichung, 86
- Parallelotop, 9

Parseval'sche Gleichung, 87
 Partielle Integration, 80
 Polarisationsidentität, 86
 positiv definite Matrix, 100
 positiv semidefinite Matrix, 100
 Produktregel, 39
 punktweise Konvergenz, 101

 Quotientenregel, 39

 rechtsseitiger Grenzwert, 25
 relatives Extremum, 44
 Restglied, 106
 Riemann-Integral, 62
 Riemannsumme, 70

 Sattelpunkt, 54
 Satz von Rolle, 45
 selbstadjungierte Matrix, 94
 selbstadjungierter Endomorphismus, 94
 Sesquilinearform, 84
 Skalarprodukt, 83
 Skalarproduktraum, 83
 Spat, 9
 Spatprodukt, 9
 Spektrum, 16
 Stammfunktion, 76
 stetige Differenzierbarkeit, 43
 Stetigkeit an einer Stelle, 23
 Stetigkeit einer Funktion, 23
 striktes Maximum, 44
 Substitutionsregel, 79
 Supremumsnorm, 102
 symmetrische Matrix, 94

 Taylorpolynom, 106
 Taylorreihe, 109
 Trennung der Variablen, 114
 Treppenfunktion, 59

 Umkehrsatz, 27
 uneigentliches Integral, 82
 unitäre Matrix, 94
 unitärer Endomorphismus, 94
 unitärer Raum, 83

 Variation der Konstanten, 117
 Vektorprodukt, 5
 Vorzeichenwechselkriterium, 48

 Wendepunkt, 54
 Wendestelle, 54

 Wertebereich, 22
 Zielbereich, 22
 Zwischenwertsatz, 26