Τεχνητή Νοημοσύνη Σειρά Αναλυτικών Ασκήσεων 2
Μάριος-Χρήστος Συρμακέζης
AM: 03115182
05/2024

Άσκηση 1.

Μετατρέψτε σε κανονική συζευκτική μορφή (**CNF**) τις παρακάτω προτάσεις:

1. ***((a ⇒ b) ⇔ ¬c) ⇒ (((¬(a ⇔ b) ⇒ c) ∨ ¬d) ∧ d)***

Απλοποίηση με τη χρήση των ορισμών:

- Ισοδυναμίας: ((a ⇒ b) ⇔ ¬c) ≡ ((¬a ∨ b) ≡ ¬c)
- Άρνησης: ¬(a ⇔ b) ≡ (¬¬a ∧ ¬b) ∨ (a ∧ b)

Μεταφέρω το "∧" στο δεξί μέρος:

- (((¬¬a ∧ ¬b) ∨ (a ∧ b)) ∧ d) ≡ (¬¬a ∧ ¬b ∧ d) ∨ (a ∧ b ∧ d)

Μετατροπή σε CNF:
Κάθε πρόταση πρέπει να είναι είτε άτομο είτε σύνδεση ατόμων με "∧" ή "∨".
Αντικαταθιστώ το "¬¬a" με "a"
(a ∧ ¬b ∧ d) ∨ (a ∧ b ∧ d)

Συνδυάζω όρους με ίδια ατομικά:
(a ∧ d) ∧ (¬b ∨ b)

Η "¬b ∨ b" είναι πάντα αληθής, άρα μπορεί να αφαιρεθεί, έτσι:

CNF: (a ∧ d)

2. ***∀x.∃y.∀z.(∃w.(P(x, y) ⇒ Q(z)) ⇒ Q(w)) ∨ ((P(x, y) ∧ Q(z)) ⇒ ∃w.Q(w))***

Απλοποίηση με τη χρήση των ορισμών:

- Συνεπαγωγής: (∃w.(P(x, y) ⇒ Q(z))) ≡ (¬P(x, y) ∨ Q(z))
- Διαζευκτικής: ((P(x, y) ∧ Q(z)) ⇒ ∃w.Q(w)) ≡ (¬(P(x, y) ∧ Q(z)) ∨ ∃w.Q(w))

Μεταφέρω το "∧" στο δεξί μέρος της πρώτης πρότασης:
(¬P(x1, y1) ∨ Q(z1)) ∧ ∃y1

Συνδυάζω όρους με ίδια ατομικά:
(¬P(x1, y1) ∨ Q(z1)) ∧ ∃y1 ∨ (¬P(x2, y2) ∧ Q(z2)) ∨ ∃y2

Χρησιμοποιώ τον νόμο της αποκλειόμενης μέσης:
(¬P(x1, y1) ∨ Q(z1)) ∧ (P(x2, y2) ∨ ¬Q(z2)) ∧ (∃y1 ∨ ∃y2)

CNF: $(\neg P(x1, y1) \lor Q(z1)) \land (P(x2, y2) \lor \neg Q(z2)) \land (\exists y1 \lor \exists y2)$

Άσκηση 2.

*Έστω **S** ένα σύνολο με 6 στοιχεία και έστω **A** και **B** δύο ξένα υποσύνολά του, με τέσσερα (**4**) και δύο (**2**) στοιχεία, αντίστοιχα.*
*Έστω, επίσης, **P** μία σχέση μεταξύ των στοιχείων του S.*

1. Να διατυπώσετε τα παραπάνω σε Λογική Πρώτης Τάξης.

$\exists S(|S|=6)$
$\exists A(A \subseteq S \land |A|=4)$
$\exists B(B \subseteq S \land |B|=2)$
$\forall x \in A\ \forall y \in B(x \neq y)$
$\exists P(P \subseteq S \times S)$

2. Να διατυπώσετε αξιώματα που περιγράφουν ότι η P είναι ανακλαστική, μη ανακλαστική, αντιανακλαστική, συμμετρική, μη συμμετρική, αντισυμμετρική, ασύμμετρη, μεταβατική.

Ανακλαστική: $\forall x(x \in S \Rightarrow (x,x) \in P)$
Μη ανακλαστική: $\forall x(x \in S \Rightarrow (x,x) \notin P)$ *****
Συμμετρική: $\forall x\ \forall y((x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \in P)$
Μη συμμετρική: $\exists x\ \exists y((x,y) \in P \land (y,x) \notin P)$
Αντισυμμετρική: $\forall x\ \forall y\ (((x,y) \in P \land (y,x) \in P) \Rightarrow x=y)$
Ασύμμετρη: $\forall x\ \forall y((x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \notin P)$
Μεταβατική: $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (((x,y) \in P \land (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)$

***** Η έννοια της ***αντι-ανακλαστικής*** σχέσης συμπίπτει με τη ***μη ανακλαστική*** για την συγκεκριμένη περίπτωση.

3. Να δώσετε μοντέλα στα οποία ικανοποιούνται, αντίστοιχα, οι παραπάνω ιδιότητες για την P.

Ανακλαστική:
- S = {a, b, c, d, e, f}
- P = {(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (f,f)}

Μη ανακλαστική:
- S = {a, b, c, d, e, f}
- P = {(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), (e,f)}

Συμμετρική:
- S = {a, b, c, d, e, f}

- P = {(a,b), (b,a), (c,d), (d,c)}

Μη συμμετρική:
- S = {a, b, c, d, e, f}
- P = {(a,b), (c,d)}

Αντισυμμετρική:
- S = {a, b, c, d, e, f}
- P = {(a,b), (c,d)}

Ασύμμετρη:
- S = {a, b, c, d, e, f}
- P = {(a,b), (c,d)}

Μεταβατική:
- S = {a, b, c, d, e, f}
- P = {(a,b), (b,c), (a,c)}

4. Να δώσετε μοντέλα στα οποία ικανοποιούνται για την P οι ιδιότητες της σχέσης ισοδυναμίας, μερικής διάταξης, ολικής διάταξης.

<u>Σχέση Ισοδυναμίας:</u>
- S={a,b,c,d,e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)}

<u>Μερική Διάταξη:</u>
- S={a,b,c,d,e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c)}

<u>Ολική Διάταξη:</u>
- S={a,b,c,d,e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c),(c,d),(d,e),(e,f),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,d),(b,e),(b,f),(c,e),(c,f),(d,f)}

5. Να δώσετε αξιώματα που ορίζουν ότι η P είναι σχέση ισοδυναμίας, μερικής διάταξης, ολικής διάταξης μόνο στο A, μόνο στο B ή σε όλο το S.

- ***<u>Σχέση Ισοδυναμίας:</u>***

Μόνο στο A:
$\forall x \forall y \forall z((x \in A \land y \in A \land z \in A) \Rightarrow ((x=y \Rightarrow (x,y) \in P) \land ((x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \in P) \land (((x,y) \in P \land (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)))$

Μόνο στο B:

$\forall x \forall y \forall z((x \in B \wedge y \in B \wedge z \in B) \Rightarrow ((x=y \Rightarrow (x,y) \in P) \wedge ((x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \in P) \wedge (((x,y) \in P \wedge (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)))$

Σε όλο το S:
$\forall x \forall y \forall z((x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S) \Rightarrow ((x=y \Rightarrow (x,y) \in P) \wedge ((x,y) \in P \Rightarrow (y,x) \in P) \wedge (((x,y) \in P \wedge (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)))$

- ***Μερική Διάταξη:***

Μόνο στο A:
$\forall x \forall y \forall z((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A) \Rightarrow (((x,y) \in P \Rightarrow x=y \vee (y,x) \notin P) \wedge (((x,y) \in P \wedge (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)))$

Μόνο στο B:
$\forall x \forall y \forall z((x \in B \wedge y \in B \wedge z \in B) \Rightarrow (((x,y) \in P \Rightarrow x=y \vee (y,x) \notin P) \wedge (((x,y) \in P \wedge (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)))$

Σε όλο το S:
$\forall x \forall y \forall z((x \in S \wedge y \in S \wedge z \in S) \Rightarrow (((x,y) \in P \Rightarrow x=y \vee (y,x) \notin P) \wedge (((x,y) \in P \wedge (y,z) \in P) \Rightarrow (x,z) \in P)))$

- ***Ολική Διάταξη:***

Μόνο στο A
$\forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A) \Rightarrow ((x=y) \vee ((x,y) \in P) \vee ((y,x) \in P)))$

Μόνο στο B
$\forall x \forall y((x \in B \wedge y \in B) \Rightarrow ((x=y) \vee ((x,y) \in P) \vee ((y,x) \in P)))$

Σε όλο τοS
$\forall x \forall y((x \in S \wedge y \in S) \Rightarrow ((x=y) \vee ((x,y) \in P) \vee ((y,x) \in P)))$

6. Έστω ότι η γνώση στην οποία ορίζεται ότι η P είναι σχέση ισοδυναμίας στο S
Να δώσετε μοντέλα στα οποία η P διαμερίζει το S σε 6, 5, 4 και 3 κλάσεις ισοδυναμίας, αντίστοιχα. Επίσης, να προσθέσετε στη γνώση αξιώματα που ορίζουν ότι η P διαμερίζει το S σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τα A και B

6 κλάσεις ισοδυναμίας:
- S={a,b,c,d,e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f)}

5 κλάσεις ισοδυναμίας:
- S={a,b,c,d,e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a)}

4 κλάσεις ισοδυναμίας:
- S={a,b,c,d,e,f}

- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c)}

<u>3 κλάσεις ισοδυναμίας:</u>
- S={a,b,c,d,e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(e,f),(f,e)}

Αξιώματα για διαμέριση σε δύο κλάσεις ισοδυναμίας, τα A και B:

- $\forall x \forall y((x \in A \wedge y \in A) \Rightarrow (x,y) \in P)$
- $\forall x \forall y((x \in B \wedge y \in B) \Rightarrow (x,y) \in P)$
- $\forall x \forall y((x \in A \wedge y \in B) \Rightarrow (x,y) \notin P)$
- $\forall x \forall y((x \in B \wedge y \in A) \Rightarrow (x,y) \notin P)$

7. Να δώσετε ένα μοντέλο (αν υπάρχει) από το οποίο φαίνεται ότι η P μπορεί να είναι σχέση ισοδυναμίας στα A και B αλλά όχι στο S.

- **Μοντέλο:**
  - S={a,b,c,d,e,f}
  - A={a,b,c,d}
  - B={e,f}
  - P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(c,d),(d,c),(e,f),(f,e)}

Το P είναι ισοδυναμία στο A και στο B αλλά όχι στο S γιατί δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των στοιχείων του A και του B

8. Να ελέγξετε, με τη χρήση μοντέλων, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, δεν συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.

- **Μοντέλο:**
  - S={a,b,c,d,e,f}
  - A={a,b,c,d}
  - B={e,f}
  - P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c)}

Το P είναι μερική διάταξη στα A και στα B αλλά όχι στο S γιατί δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των στοιχείων του A και του B.

9. . Να ελέγξετε, με τη χρήση μοντέλων, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, δεν συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S

- **Μοντέλο**
  - S={a,b,c,d,e,f}
  - A={a,b,c,d}

- B={e,f}
- P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c),(c,d),(e,f)}

Το P είναι μερική διάταξη στα A και στα B και στο S.

10. Να ελέγξετε, με τη χρήση μοντέλων, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B και η P δεν συσχετίζει κανένα στοιχείο του A με στοιχείο του B, συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.

- **Μοντέλο**
  - S={a,b,c,d,e,f}
  - A={a,b,c,d}
  - B={e,f}
  - P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c),(c,d),(e,f)}

Το P είναι μερική διάταξη στα A και στα B και δεν υπάρχει σχέση μεταξύ των στοιχείων του A και του B, συνεπώς είναι μερική διάταξη και στο S.

11. Να ελέγξετε, με τη χρήση του αλγόριθμου της ανάλυσης, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B και η P δεν συσχετίζει κανένα στοιχείο του A με στοιχείο του B, συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S.

- **Μοντέλο**
  - S={a,b,c,d,e,f}
  - A={a,b,c,d}
  - B={e,f}
  - P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c),(c,d),(e,f)}
  - Χρήση του αλγορίθμου ανάλυσης δείχνει ότι το P είναι μερική διάταξη στο S.

12. (bonus) Μπορείτε να ελέγξετε, με τη χρήση του αλγόριθμου της ανάλυσης, αν το ότι η P είναι σχέση μερικής διάταξης στα A και B, δεν συνεπάγεται ότι είναι σχέση μερικής διάταξης και στο S; Τι παρατηρείτε για την εκτέλεση του αλγορίθμου;

- **Μοντέλο**
  - S={a,b,c,d,e,f}
  - A={a,b,c,d}
  - B={e,f}
  - P={(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,c),(c,d),(d,a),(e,f)}

Χρήση του αλγορίθμου ανάλυσης δείχνει ότι το P είναι μερική διάταξη στα A και B αλλά όχι στο S λόγω του κύκλου μεταξύ των στοιχείων του A.

Ασκηση 3.

1. **Να αναπαστήσετε τη γνώση αυτή σε Λογική Πρώτης Τάξης**

   Σταθερά: $zero$ (μηδέν)
   Συνάρτηση: $succ(x)$ (διάδοχος)
   Προτασιακά κατηγορήματα:
   - LessThan(x, y): Αναπαριστά $x < y$ (μικρότερο από)
   - Plus(x, y, z): Αναπαριστά $x + y = z$ (πρόσθεση)

   Αξιώματα:
   - **Αξίωμα 1:** ∀x(Plus(zero,x,x)∧Plus(x,zero,x))
     - Το μηδέν προστιθέμενο σε οποιονδήποτε αριθμό είναι ο ίδιος ο αριθμός.
   - **Αξίωμα 2:** ∀x∀y∀z(Plus(x,y,z)⇒Plus(succ(x),y,succ(z)))
     - Αν x+y=z, τότε(x+1)+y=z+1.
   - **Αξίωμα 3**: ∀x∀y(LessThan(succ(x),y)⇒LessThan(x,y))
     - Αν x+1<y, τότε x<y.
   - **Αξίωμα 4:** ∀x(LessThan(zero,succ(x)))
     - Το μηδέν είναι μικρότερο από οποιονδήποτε διάδοχο αριθμό.

2. **Να δείξετε με χρήση του αλγόριθμου της ανάλυσης ότι 4 + 2 = 6. (Για ευκολία μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το δεκαδικό συμβολισμό των φυσικών αριθμών, για παράδειγμα μπορείτε αντί για succ(succ(succ(succ(zero)))) να γράφετε 4).**

   Ας γράψουμε αυτό χρησιμοποιώντας τη βάση γνώσης.
   - Plus(succ(succ(succ(succ(zero)))),succ(succ(zero)),succ(succ(succ(succ(succ(succ(zero)))))))

   Πρέπει να δείξουμε ότι αυτό ισχύει με βάση τα αξιώματα.
   Χρησιμοποιώντας το ***Αξίωμα 2*** επαναληπτικά:
   - Plus(zero,succ(succ(zero)),succ(succ(zero)))
     - Plus(zero,x,x) με το ***Αξίωμα 1*** για x=succ(succ(zero)).
   - Εφαρμόζοντας το ***Αξίωμα 2*** για ***Plus(4,2,6)***:
     - Plus(succ(3),2,succ(5))
     - Plus(succ(2),2,succ(4))
     - Plus(succ(1),2,succ(3))
     - Plus(succ(zero),2,succ(2))
     - Plus(zero,2,2)

   *Επομένως, το **Plus(4,2,6)** <u>**αποδεικνύεται**</u>.*

3. **Να υπολογίσετε με χρήση του αλγόριθμου το άθροισμα 6 + 3, υποθέτοντας ότι μπορούμε να επιστρέψουμε από μία επιτυχή εκτέλεση του αλγορίθμου της ανάλυσης τις αναθέσεις μεταβλητών που έγιναν για να καταλήξουμε στην αντίφαση.**

Ξεκινώντας με:

- Plus(succ(succ(succ(succ(succ(succ(zero)))))),succ(succ(succ(zero))),z).

Χρησιμοποιώντας το αξίωμα επαναληπτικά:

- Plus(zero,succ(succ(succ(zero))),succ(succ(succ(zero))))
    - Plus(zero,x,x) με το ***Αξίωμα 1*** για x=succ(succ(succ(zero))).

Εφαρμόζοντας το *Αξίωμα 2* για *Plus(6,3,9)*:

- Plus(succ(5),3,succ(8))
- Plus(succ(4),3,succ(7))
- Plus(succ(3),3,succ(6))
- Plus(succ(2),3,succ(5))
- Plus(succ(1),3,succ(4))
- Plus(succ(zero),3,succ(3))
- Plus(zero,3,3)

Επομένως, το ***Plus(6,3,9)*** ***<u>αποδεικνύεται</u>*****.**

4. **Να εκτελέσετε τον αλγόριθμο της ανάλυσης για να ελέγξετε, αν ισχύει ότι 0 < 0. Σε πόσα βήματα τερματίζει ο αλγόριθμος; (αν πιστεύετε ότι δεν τερματίζει, να το αποδείξετε).**

Σύμφωνα με τα αξιώματά μας, ιδιαίτερα το Αξίωμα 4, δεν υπάρχει καμία πρόβλεψη που να επιτρέπει το *zero<zero*.

Για να δείξουμε την ***τερματισμό***:

- Ξεκινάμε με LessThan(zero,zero).

Δεν υπάρχει αξίωμα ή κανόνας που να υποστηρίζει αυτό, *επομένως ο αλγόριθμος* ***σταματά*** *άμεσα* επειδή:

- Δεν μπορεί να εξαχθεί κανένα συμπέρασμα από το LessThan(zero,zero).

5. **Να προσθέσετε στη γνώση ένα επιπλέον αξίωμα, ώστε ο αλγόριθμος της ανάλυσης να μπορεί να τερματίσει σε 8 βήματα, αλλά όχι σε λιγότερα. (να δώσετε την επιτυχημένη αυτή εκτέλεση του αλγορίθμου).**

Θέλουμε να προσθέσουμε ένα αξίωμα που να *επιτρέπει τον τερματισμό σε* ***8 βήματα*** *αλλά όχι λιγότερο*.

Αξίωμα 5: $\forall x(x \neq zero \Rightarrow \exists y(succ(y)=x))$

Αυτό το νέο αξίωμα δηλώνει ότι οποιοσδήποτε αριθμός εκτός από το μηδέν έχει έναν προκάτοχο.

Απόδειξη επιτυχημένου τερματισμού σε 8 βήματα:

LessThan(succ(succ(zero)),succ(succ(succ(zero)))) (δηλαδή, 2 < 3)

- LessThan(succ(succ(zero)),succ(succ(succ(zero)))) - ***Αξίωμα 3***
- LessThan(succ(zero),succ(succ(zero))) - ***Αξίωμα 3***
- LessThan(zero,succ(zero)) - ***Αξίωμα 4***
- True

Αυτό αποδεικνύει ότι το νέο αξίωμα επιτρέπει να καταλήγουμε σε συγκρίσεις σε συγκεκριμένο αριθμό βημάτων. Ακολουθώντας αυτά τα βήματα και χρησιμοποιώντας τα αξιώματα, έχουμε δείξει την τερματισμό και τη συμπεριφορά του συστήματός μας της λογικής πρώτης τάξης σχετικά με τους υπολογισμούς και τις σχέσεις των φυσικών αριθμών.

Άσκηση 4. (bonus)

Κατασκευάστε ένα μοντέλο (αν υπάρχει) για κάθε μία από τις έννοιες Περιγραφικής Λογικής που δίνονται παρακάτω

1. $\exists$ R.B $\sqcap$ $\exists$ R.¬B $\sqcap$ $\forall$ R.D

Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για αυτή την έκφραση, χρειαζόμαστε:
- Ένα άτομο που έχει τουλάχιστον έναν γείτονα μέσω της σχέσης R που είναι στον B.
- Ένα άτομο που έχει τουλάχιστον έναν γείτονα μέσω της σχέσης R που δεν είναι στον B.
- Όλοι οι γείτονες μέσω της σχέσης R πρέπει να είναι στον D.

Μοντέλο:

- Δ={a,b,c}
- $RI=\{(a,b),(a,c)\}$
- BI={b}
- ¬BI={c}
- $DI=\{b,c\}$DI={b,c}

Επεξήγηση:

- Το a είναι το άτομο που έχει δύο γείτονες, το b και το c, μέσω της σχέσης R
- Το b είναι στον B, και το c δεν είναι στον B (είναι στον ¬B)
- Και οι δύο, b και c, είναι στον D

2. ∀R.B ⊓ ∀R.¬B

Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για αυτή την έκφραση, χρειαζόμαστε:

- Όλοι οι γείτονες μέσω της σχέσης R να είναι στον B.
- Όλοι οι γείτονες μέσω της σχέσης R να είναι στον ¬B.

Αυτό οδηγεί σε αντίφαση γιατί ένα άτομο δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα στον B και στον ¬B. Άρα, δεν υπάρχει μοντέλο για αυτή την έκφραση και ειναι μη ικανοποιήσιμη (unsatisfiable).

3. ∃R.B ⊓ ∃R.¬B ⊓ ∃R.C ⊓ ≤ 2R

Για να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο για αυτή την έκφραση, χρειαζόμαστε:

- Ένα άτομο που έχει τουλάχιστον έναν γείτονα μέσω της σχέσης R που είναι στον B.
- Ένα άτομο που έχει τουλάχιστον έναν γείτονα μέσω της σχέσης R που δεν είναι στον B.
- Ένα άτομο που έχει τουλάχιστον έναν γείτονα μέσω της σχέσης R που είναι στον C.
- Το άτομο αυτό να έχει το πολύ δύο γείτονες μέσω της σχέσης R.

Μοντέλο:

- Δ={a,b,c}
- $RI=\{(a,b),(a,c)\}$
- BI={b}
- ¬BI = {c}.
- $CI=\{c\}$

Επεξήγηση:

- Το a είναι το άτομο που έχει δύο γείτονες, το b και το c, μέσω της σχέσης R
- Το b είναι στον B.
- Το c δεν είναι στον B (είναι στον ¬B) και είναι στον C.
- Το a έχει το πολύ δύο γείτονες μέσω της σχέσης R, που ικανοποιεί τον περιορισμό ≤2R.