Σφάλματα και Γραφικές Παραστάσεις

Χρήστος Μαργιώλης – 19390133

Νοέμβριος 2019

1. Εισαγωγή

Σφάλμα είναι η απόκλιση που υπάρχει – μετά από μετρήσεις – ανάμεσα στην αληθινή και τις μετρούμενες τιμές. Η ύπαρξη σφαλμάτων είναι σχεδόν δεδομένη, εφόσον είναι αδύνατη η επίτευξη εύρεσης της αληθινής τιμής με απόλυτη ακρίβεια, έχοντας υπόψη το γεγονός οτι υπάρχουν παράγοντες όπως τα όργανα μετρήσεων, η θερμοκρασία, η μεταβολή της επιτάχυνσης της βαρύτητας (g) κ.α που μπορούν να επηρεάσουν τις εκάστοτε μετρήσεις και έτσι να μην είναι εφικτή μια απολύτως ακριβής μέτρηση. Αυτό σημαίνει οτι είναι αδύνατο να μην υπάρξουν σφάλματα – ακόμα και μετά από πολλές μετρήσεις – όμως, όσο περισσότερες μετρήσεις πραγματοποιούνται, τόσο πιο καλά γίνεται να προσεγγιστεί η *πραγματική τιμή*. Έτσι, είναι σημαντικό να περιλαμβάνεται και η τιμή του σφάλματος όταν αναπαριστάται μια μετρούμενη τιμή – ο τρόπος αναπαράστασης είναι $\bar{x} \pm \sigma(\bar{x})$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή των μετρήσεων και $\sigma(\bar{x})$ το σφάλμα της μέσης τιμής.

Σημαντικά ψηφία είναι τα ψηφία που απαιτούνται για την ακριβή καταγραφή ενός αριθμού μετά από μετρήσεις. Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων *καθορίζεται* από την ακρίβεια του οργάνου μέτρησης που χρησιμοποιείται – δηλαδή από το πόση ακρίβει διαθέτει το εκάστοτε όργανο μέτρησης.

Εφόσον έχει βρεθεί το σφάλμα, ειναι σημαντικό να δημιουργεί μια γραφική αναπάρασταση των μετρήσεων, συμπεριλαμβανομένου των σφαλμάτων. Για να δημιουργήσουμε μια *γραφική παράσταση*, η οποία θα δείχνει τα σφάλματα, καθώς και την κλίση της καμπύλης που δημιουργείται, πρέπει να αναπαραστήσουμε όλα τα πειραματικά σημεία με τα σφάλματά τους, και να χαράξουμε μια ευθεία που θα περνάει όσο το δυνατόν γίνεται πιο κοντά και ανάμεσα στα πειραματικά σημεία. Τέλος, πρέπει να βρεθεί η κλίση της ευθείας.

2. Πειραματική μέθοδος

Για την εύρεση των μέσων τιμών χρησιμοποιείται η σχέση $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, όπου n το πλήθος των μετρήσεων που έχουν πραγματοποιηθεί, και x_i οι μετρήσεις. Το σφάλμα μέσων τιμών προκύπτει από την σχέση $\sigma(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (\Delta x_i)^2}{n(n-1)}}$, όπου $\Delta x_i = \bar{x} - x_i$. Επίσης χρησιμοποιείται και η σχέση $\sigma\% = \frac{\sigma(\bar{x})}{\bar{x}} \cdot 100$ για την εύρεση του σφάλματος επί τοις εκατό. Τέλος, το εμβαδόν της μέση τιμής της επιφάνειας A θα προκύψει από την σχέση $\bar{A} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ αφού πρώτα βρεθούν οι μέσες τιμές του x και του y αντίστοιχα.

Τέλος, εφαρμόζεται η γραμμικοποίηση στις 2 τελευταίες ασκήσεις.

3. Αποτελέσματα

3.1 **Άσκηση 1** – Σημαντικά ψηφία

976.45 : **5** σημαντικά ψηφία
86400 : **3** σημαντικά ψηφία
5280 : **3** σημαντικά ψηφία
4.00×10^2 : **3** σημαντικά ψηφία
10 : **1** σημαντικό ψηφίο
6400 : **2** σημαντικά ψηφία
0.00094 : **2** σημαντικά ψηφία
0.640 : **3** σημαντικά ψηφία

3.2 **Άσκηση 2** – Στρογγυλοποίηση αριθμών στα 2 σημαντικά ψηφία

8.314 : 8.3
1.03 : 1.0
2.045 : 2.0
99.5 : 10x10
4.00123×10^3 : 4.0×10^3
9.9999 : 10
55.5555 : 56
1.024 : 1.0

3.3 **Άσκηση 3** – Επιστημονική αναπαράσταση μεγεθών

Εφόσον έχουνε γίνει 10 μετρήσεις, ισχύει ο κανόνας οτι για $n<25$ θα έχουμε μόνο 1 σημαντικό ψηφίο, οπότε:

1. $\bar{x}=2.345167243\,mm$ και $\sigma(\bar{x})=0.0554231\,mm$ θα γίνει

$$\bar{x}\pm\sigma(\bar{x})=(2.3\pm0.06)mm$$

2. $\bar{u}=89.7652\,ms^{-1}$ και $\sigma(\bar{u})=0.99999\,ms^{-1}$ θα γίνει

$$\bar{u}\pm\sigma(\bar{u})=(89\pm1)\,ms^{-1}$$

3.4 **Άσκηση 4** – Μετρήσεις

α/α	$\boldsymbol{x(cm)}$	$\boldsymbol{\bar{x}(cm)}$	$\boldsymbol{\Delta x_i=\bar{x}-x_i(cm)}$	$\boldsymbol{(\Delta x_i)^2(cm^2)}$
1	56.8		-0.14	0.02
2	56.9		-0.24	0.06
3	56.2	56.66	0.46	0.21
4	56.5		0.16	0.03
5	56.9		-0.24	0.06

Πίνακας 1.1

Η μέση τιμή είναι $\bar{x}=56.66\,cm$ και το σφάλμα της μέσης τιμής είναι $\sigma(\bar{x})=0.137840488\,cm$. Επομένως, $\bar{x}\pm\sigma(\bar{x})=(56.66\pm0.14)\,cm$ **.** Το $\sigma\%=0.2432765$ και έτσι έχουμε οτι $\bar{x}\pm\sigma\%=(56.66\pm0{,}24)\%$.

α/α	$y(cm)$	$\bar{y}(cm)$	$\Delta x_i = \bar{y} - y_i(cm)$	$(\Delta y_i)^2(cm^2)$
1	17.1		0.2	0.04
2	17.4		-0.1	0.01
3	17.2	17.3	0.1	0.01
4	17.5		-0.2	0.04
5	17.3		0	0

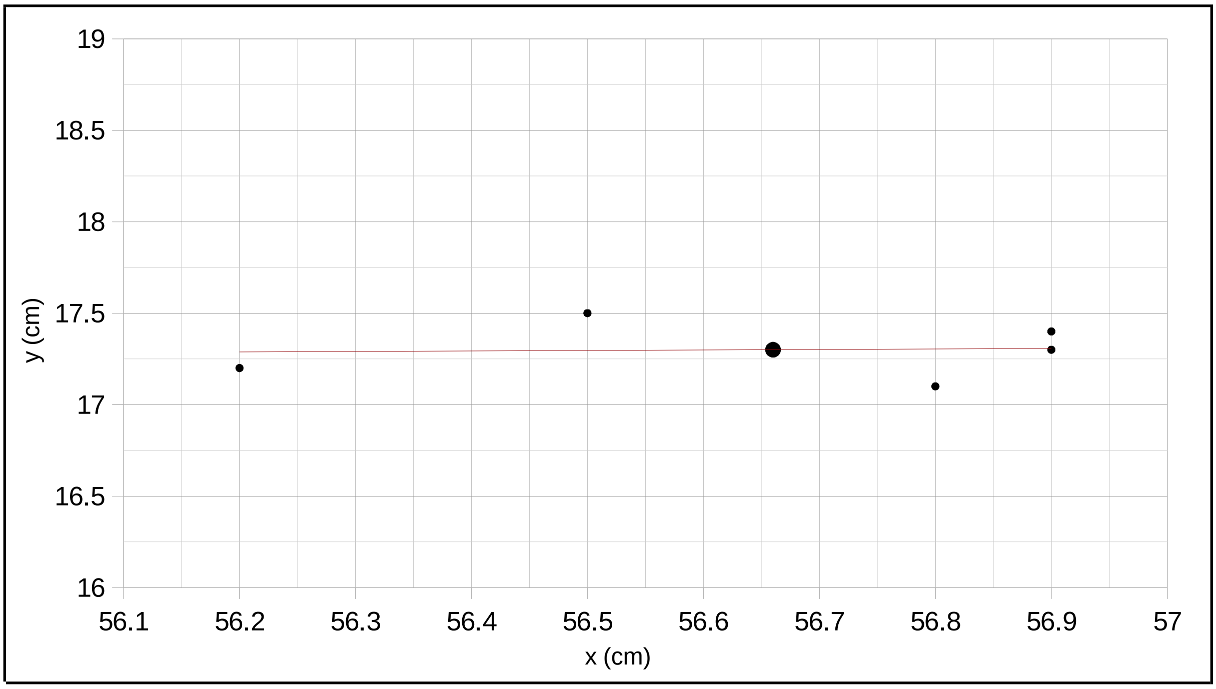
Πίνακας 1.2

Ομοίως, βρίσκουμε οτι $\bar{y} \pm \sigma(\bar{y}) = (17.3 \pm 0.1)cm$ και $\bar{y} \pm \sigma\% = (17.3 \pm 0.4)\%$.

$x(cm)$	$y(cm)$	A	$\bar{A}$
56.8	17.1	971.28	
56.9	17.4	990.06	
56.2	17.2	966.64	980.22
56.5	17.5	988.75	
56.9	17.3	984.75	
56.66	17.3		

Πίνακας 1.3

Επομένως, $\bar{A} = 980.22 cm^2$ και $\sigma(\bar{A}) = 4.766798716$, οπότε $\bar{A} \pm \sigma(\bar{A}) = (980.22 \pm 5) cm^2$.
Έτσι, $\bar{A} \pm \sigma\% = (980.22 \pm 0.5)\%$.



Σχήμα 1.1

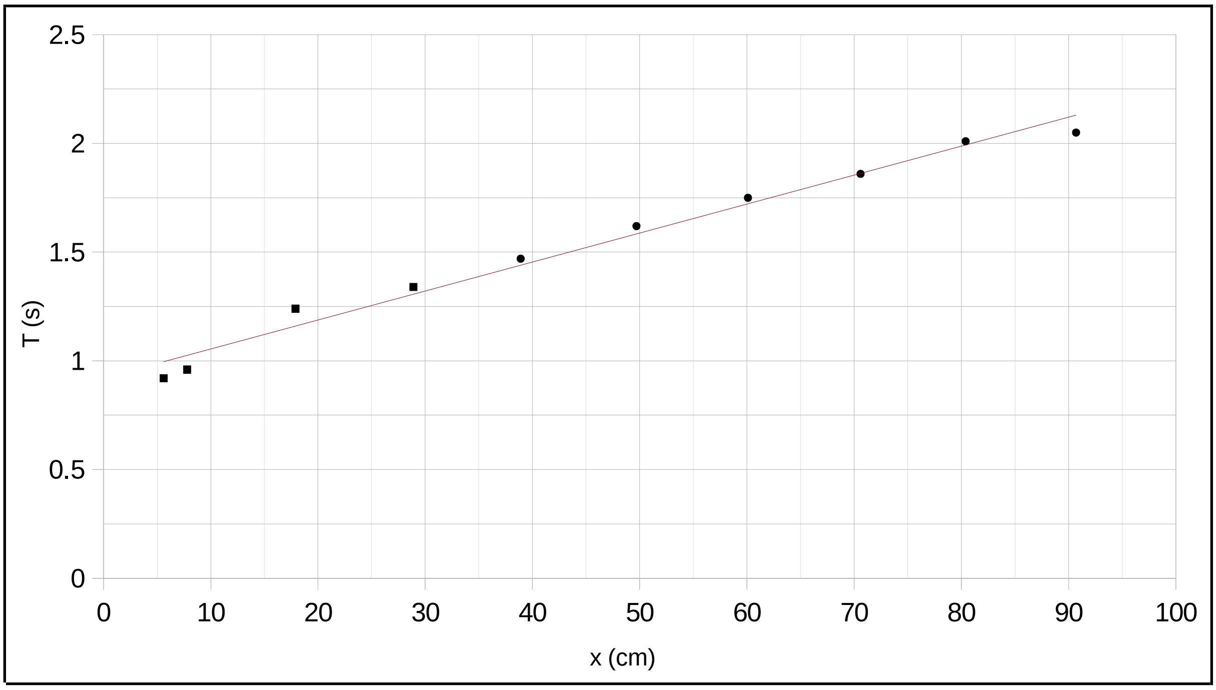
3.5 **Άσκηση 5** – Εκκρεμές

$x(cm)$	$\bar{x}(cm)$	$T(s)$	$\bar{T}(s)$
90.7		2.05	
80.4		2.01	
70.6		1.86	
60.1		1.75	
49.7	45.06	1.62	1.522
38.9		1.47	
28.9		1.34	
17.9		1.24	
7.8		0.96	
5.6		0.92	

Πίνακας 2.1

Γραμμικοποιώντας την αρχική σχέση $T=2\pi\sqrt{\frac{(x+a)}{g}}$ βρίσκουμε ότι $T^2=4\pi^2\frac{(x+\alpha)}{g}\Rightarrow T^2=\frac{(4\pi^2)}{g}\cdot x+\frac{(4\pi^2)}{g}\cdot\alpha$ και έτσι μπορούμε να λύσουμε σύστημα με 2 αγνώστους ώστε να βρούμε το α και το g . Αντικαθιστούμε το T και το x με τις μέσες τιμές τους, δηλαδή $\bar{T}$ και $\bar{x}$ αντίστοιχα.

Επομένως, $a=0.163\,cm$ και $g=9.83\,m/s^2$.



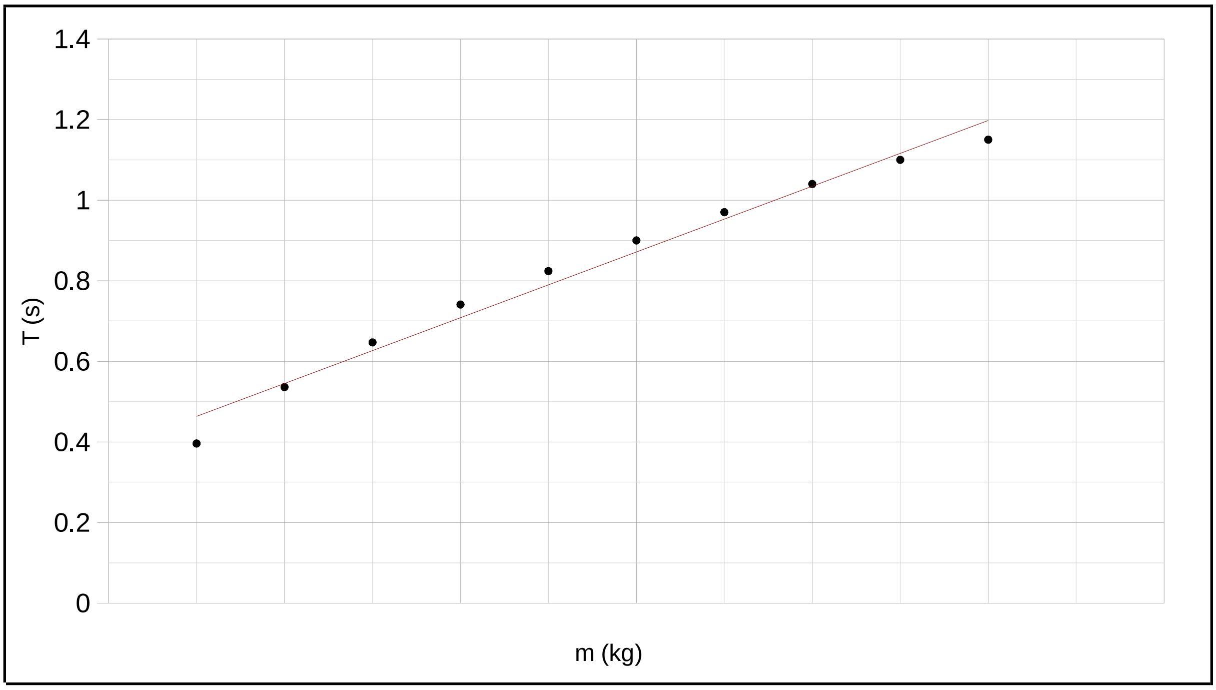
Σχήμα 2.1

3.6 **Άσκηση 6** – Ελατήριο

$m(kg)$	$T(s)$
0.05	0.396
0.10	0.536
0.15	0.647
0.20	0.741
0.25	0.824
0.30	0.900
0.35	0.970
0.40	1.04
0.45	1.10
0.50	1.15

Πίνακας 3.1

Όπως και στην παραπάνω άσκηση, αρχικά πρέπει να γραμμικοποιηθεί η δεδομένη σχέση, δηλαδή να είναι της μορφής $y=\alpha x+\beta$, οπότε $T=2\pi\sqrt{\frac{m+\frac{m_{\varepsilon\lambda}}{3}}{D}}\Rightarrow T^2=\frac{(4\pi^2)}{D}\cdot m+\frac{(4\pi^2)}{D}\cdot m_{\varepsilon\lambda}$.
Επομένως, $D=15$ και $m_{\varepsilon\lambda}=0.021\,kg$



Σχήμα 3.1

4. Συζήτηση

Ο σκοπός αυτής της εργασίας ήταν η κατανόηση βασικών εννοιών όπως τα σφάλματα, οι μέσες τιμές, και τα σημαντικά ψηφία, καθώς και η εξοικείωση με την δημιουργία γραφικών παράστασεων και την χρήση δεδομένων από πίνακες.

5. Πηγές

Φυσική για μηχανικούς και επιστήμονες – Serway & Jewett p.54
Σημαντικά ψηφία, στρογγυλοποιήσεις – Σπύρος Χόρτης p.1-4