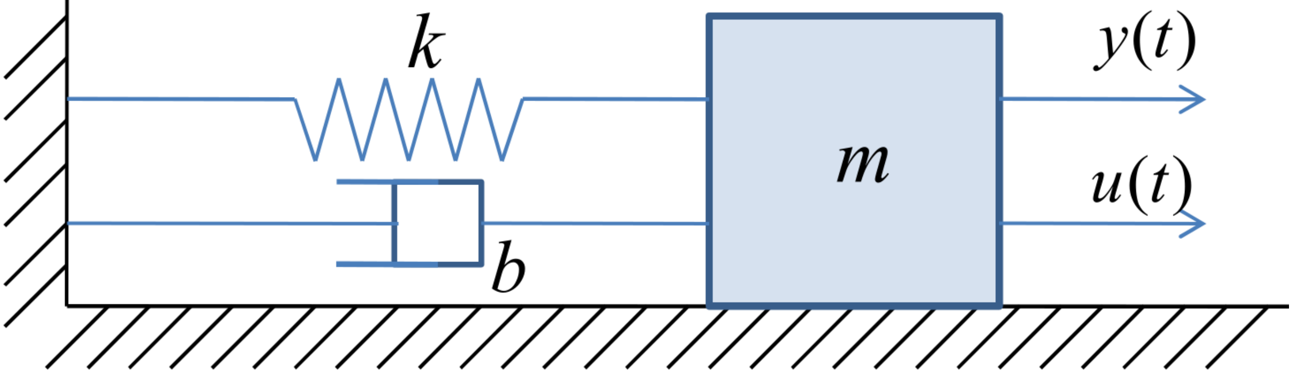
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων
Εργασία 1

Χριστοφορίδης Χρήστος – ΑΕΜ 10395
christoscs@ece.auth.gr

12/04/2024

Θέμα 1



Σχήμα 1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

1)

Η δύναμη F_s που ασκεί το ελατήριο στην μάζα m έχει μέτρο:

$$F_s = ky$$

Η δύναμη F_d που ασκεί ο αποσβεστήρας στην μάζα m έχει μέτρο:

$$F_d = b\frac{dy}{dt} = b\dot{y}$$

Στην μάζα ασκείται επίσης και η εξωτερική δύναμη u. Συνεπώς από τον δεύτερο νόμου του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F = m\frac{d^2y}{dt} = m\ddot{y} \Rightarrow u - ky - b\dot{y} = m\ddot{y} \Rightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u$$

$$\text{ή αλλιώς:}$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0 u \quad (1)$$

$$\text{με} \quad a_1 = \frac{b}{m}, a_2 = \frac{k}{m} \quad \text{και} \quad b_0 = \frac{1}{m}$$

Το παραπάνω μαθηματικό μοντέλο περιγράφει την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Η (1) παίρνει την μορφή $y^{(2)} = \theta^{*T}\Delta \ (2)$ όπου $\theta^* = [a_1 \ \ a_2 \ \ b_0]^T$ και $\Delta = [-\dot{y} \ \ -y \ \ u]^T$. Τα μόνα μετρήσιμα σήματα είναι το u και το y επομένως χρησιμοποιώ ευσταθές φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)}$ με $\Lambda(s) = (s+p_1)(s+p_2) = s^2 + (p_1+p_2)s + p_1 p_2$ όπου Λ(s) ευσταθές πολυώνυμο του s δηλαδή $Re\{p_1,p_2\} < 0$, οπότε τελικά παίρνω την επιθυμητή μορφή $y = \theta_\lambda^T \zeta \ (3)$

όπου:

$$\theta_\lambda = [\theta_1^{*T} - \lambda^T \ \ \theta_2^{*T}]^T \quad \text{με} \quad \theta_1^* = [a_1 \ \ a_2]^T, \theta_2^* = b_0 \quad \text{και} \quad \lambda = [\lambda_1 \ \ \lambda_2] = [p_1 + p_2 \ \ p_1 p_2]$$

$$\Rightarrow \theta_\lambda = [a_1 - \lambda_1 \ \ a_2 - \lambda_2 \ \ b_0]^T$$

$$\Rightarrow \theta_\lambda = [\frac{b}{m} - (p_1 + p_2) \ \ \frac{k}{m} - p_1 p_2 \ \ \frac{1}{m}]$$

και:

$$\zeta=[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \quad \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u]=[-\frac{[s \;\; 1]}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u]=[-\frac{s}{\Lambda(s)}y \quad -\frac{1}{\Lambda(s)}y \quad \frac{1}{\Lambda(s)}u]$$

$$\Rightarrow \zeta=[-\frac{s}{s^2+(p_1+p_2)s+p_1 p_2}y \quad -\frac{1}{s^2+(p_1+p_2)s+p_1 p_2}y \quad \frac{1}{s^2+(p_1+p_2)s+p_1 p_2}u]$$

2) Για να χρησιμοποιήσω την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων m,b και k, πρέπει το σύστημα μου να είναι στην μορφή $y=\theta^T\varphi$. Θέτοντας στην (3) όπου $\theta_\lambda = \theta$ και όπου $\zeta = \varphi$ παίρνω ακριβώς αυτή την μορφή. Έστω ότι κάνω N στο πλήθος μετρήσεις για την μετατόπιση (y) και για την εξωτερική δύναμη (u), δηλαδή θα έχω:

$Z_N=[u(1) \;\; y(1) \;\; u(2) \;\; y(2) \;\; \ldots \;\; u(N) \;\; y(N)]$

Θεωρώντας ως y(t) την έξοδο του πραγματικού συστήματος την χρονική στιγμή t και ως $\hat{y}(t,\theta)$ την έξοδο του μοντέλου μου για κάποιο διάνυσμα παραμετροποίησης θ την ίδια χρονική στιγμή, ορίζω το σφάλμα πρόβλεψης την χρονική στιγμή t ως:

$e(t,\theta)=y(t)-\hat{y}(t,\theta)$

Έστω διάνυσμα $Y(t)=[y(1) \;\; y(2) \;\; \cdots \;\; y(N)]^T$ το οποίο προκύπτει από τις μετρήσεις της εξόδου-μετατόπισης και ένας πίνακας Φ που αποτελείται από τις συνιστώσες του φ για κάθε μέτρηση δηλαδή:

$$\Phi=\begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1(N) & \varphi_2(N) & \varphi_3(N) \end{bmatrix}$$

οπότε το σφάλμα γίνεται $e=Y-\Phi\theta$ που είναι διανυσματικό λόγω του πλήθους των μετρήσεων. Εφαρμόζω την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων οπότε ψάχνω θ_0 τέτοιο ώστε:

$$\theta_0=\arg\min_\theta \frac{|e|^2}{2}=\arg\min_\theta \frac{e^T e}{2}$$

Δηλαδή παίρνω συνάρτηση $V_N=\left|\frac{Y-\Phi\theta}{2}\right|^2$.

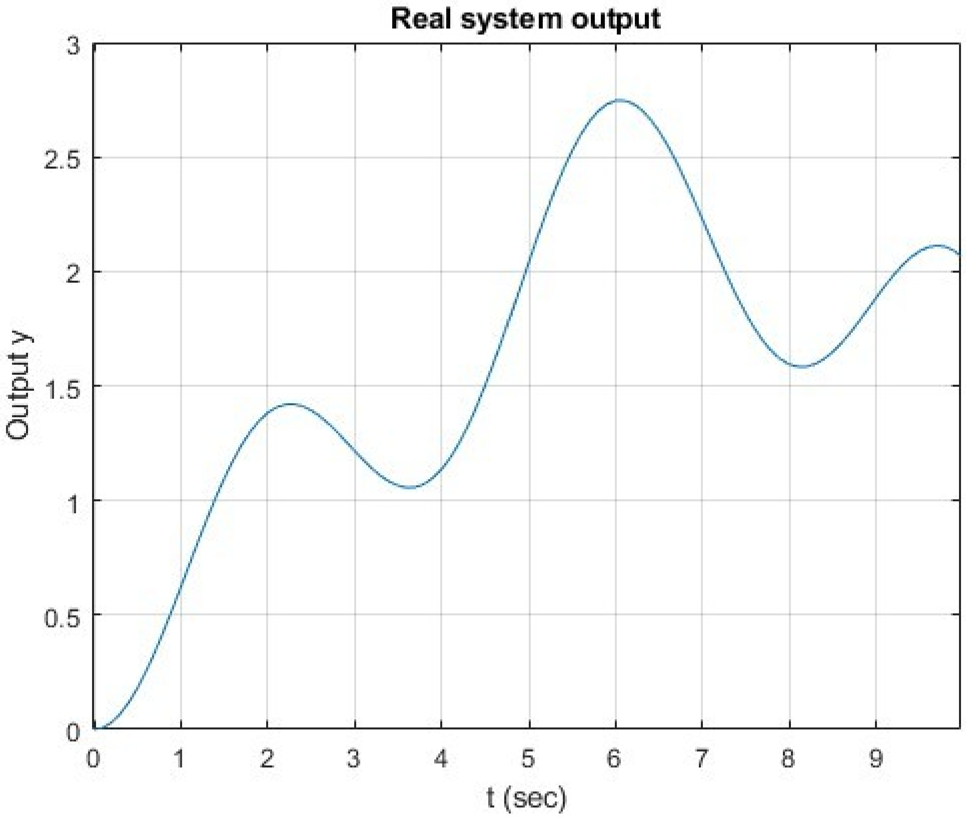
Για να βρω το ελάχιστο (το θ_0 που ψάχνω) λύνω την εξίσωση:

$$\frac{\partial V_N}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\theta_0}=0 \;\; \Rightarrow (Y-\Phi\theta)^T(-\Phi)\Big|_{\theta=\theta_0}=0 \;\; \Rightarrow -Y^T\Phi+\theta_0^T\Phi^T\Phi$$

$$\Rightarrow \theta_0^T(\Phi^T\Phi)=Y^T\Phi \quad (4)$$

Το θ_0 που προκύπτει από την λύση του παραπάνω συστήματος είναι και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων m,b και k, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το μέτρο του σφάλματος.

3)Προσομοιώνω το παραπάνω σύστημα με τα πραγματικά δεδομένα που μου δίνονται στην εκφώνηση, χρησιμοποιώντας την συνάρτηση ode45, για να λύσω την διαφορική εξίσωση και επομένως παίρνω το Y. Το διάγραμμα που προκύπτει από την προσομοίωση είναι το παρακάτω:



Σχήμα 2: Έξοδος πραγματικού συστήματος στο διάστημα [0 10s].

Φιλτράροντας, δημιουργώντας τον πίνακα Φ και λύνοντας την εξίσωση (4) προκύπτουν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων m,b και k συγκεκριμένα από τους τύπους:

$$\hat{m}=\frac{1}{\theta_0(3)}$$

$$\hat{k}=\hat{m}\left(\theta_0(2)+p_1 p_2\right)$$

$$\hat{b}=\hat{m}\left(\theta_0(1)+p_1+p_2\right)$$

Πρέπει λοιπόν να επιλέγω τους πόλους p_1 και p_2 του φίλτρου. Λύνοντας αλγοριθμικά τις παραπάνω εξισώσεις για διάφορες τιμές των p_1 και p_2 (μέσω MATLAB) καταλήγω στην επιλογή $p_1 = p_2 = 1$ και οπότε παίρνω:

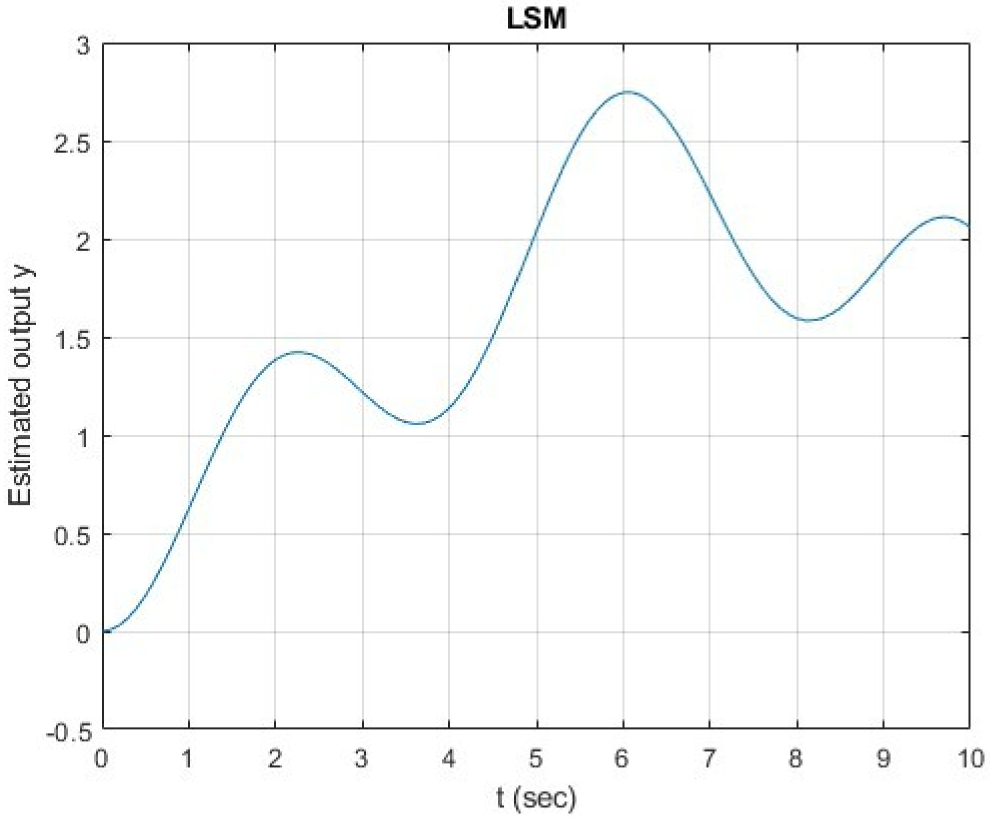
$$\hat{m}=8.4905$$

$$\hat{k}=2.0003$$

$$\hat{b}=0.6403$$

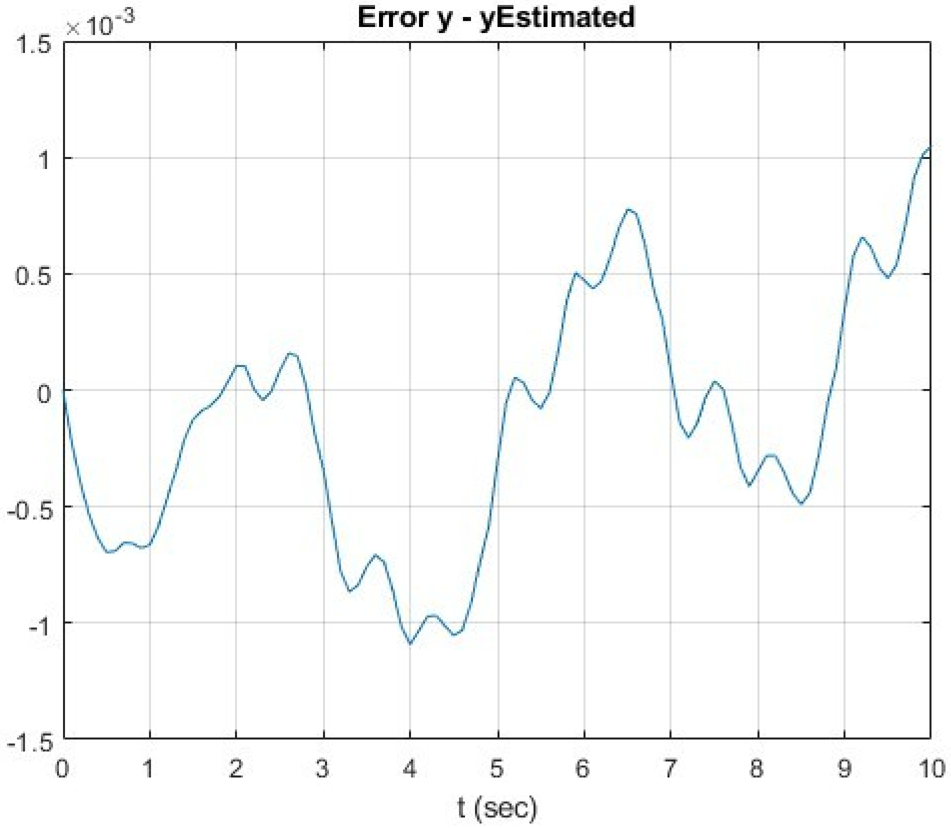
που είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές.

Η έξοδος $\hat{y}$ που προκύπτει από την μέθοδο των ελάχιστων τετραγώνων είναι η παρακάτω:



Σχήμα 3: Έξοδος μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων στο διάστημα [0 10s].

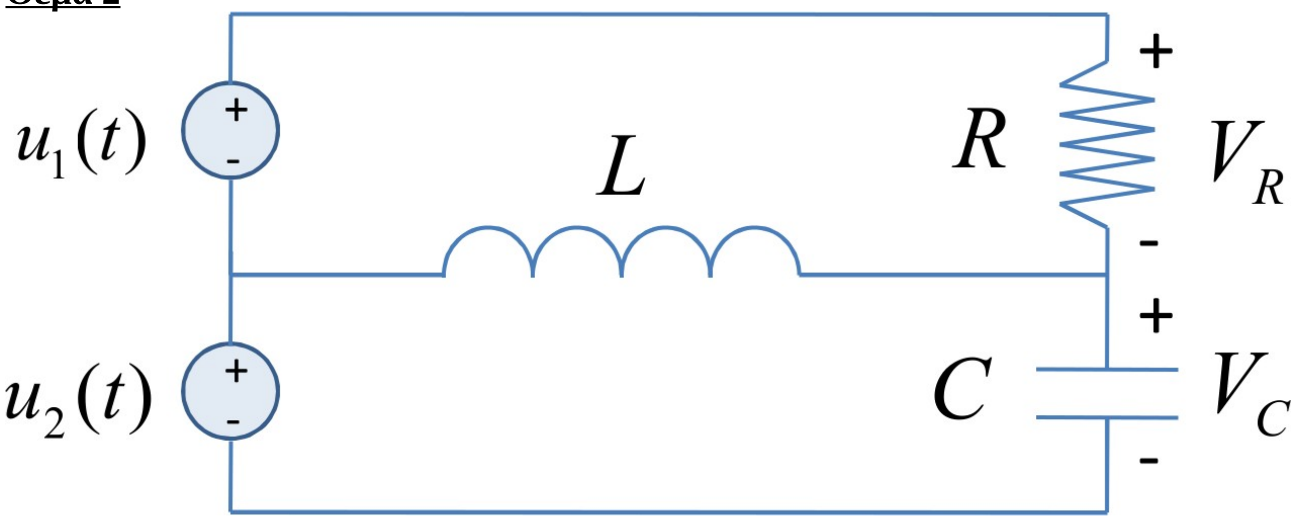
Παρατηρώ λοιπόν πως οι δύο απεικονίσεις σχεδόν συμπίπτουν, πράγμα που φαίνεται και από την απεικόνιση του σφάλματος $e = y(t) - \hat{y}(t)$ παρακάτω:



Σχήμα 4: Σφάλμα $e = y(t) - \hat{y}(t)$ στο διάστημα [0 10s].

Όπως φαίνεται και από την τελευταία απεικόνιση το σφάλμα που προκύπτει είναι της τάξης 10^{-3} , επομένως η εκτίμηση είναι πολύ κοντά στο πραγματικό σύστημα.

Θέμα 2



Σχήμα 5: Κύκλωμα RLC.

1) Αρχικά πρέπει να βρω την διαφορική εξίσωση του συστήματος, χρησιμοποιώντας γνωστούς κανόνες ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Έστω λοιπόν B1 ο πάνω βρόχος, B2 ο κάτω βρόχος και B3 ο υπερβρόχος του συστήματος. Από νόμο τάσεων του Kirchhoff έχω:

$$B_1 : u_1 = V_R + L\dot{I}_1 - L\dot{I}_2 \quad \text{όπου}\; I_1 = \frac{V_R}{R} \quad \text{και}\; I_2 = C\dot{V}_C \quad \text{άρα}$$

$$\Rightarrow u_1 = V_R + \frac{L}{R}\dot{V}_R - LC\ddot{V}_C \quad (1)$$

$$B_2 : u_2 = L\dot{I}_2 - L\dot{I}_1 + V_c = LC\ddot{V}_C - \frac{L}{R}\dot{V}_R + Vc \quad (2)$$

$$B_3 : u_1 + u_2 = V_R + V_C \quad (3)$$

Λύνω την σχέση (3) ως προς V_R και αντικαθιστώ στην (1) οπότε έχω:

$$u_1 = u_1 + u_2 - V_C + \frac{L}{R}(\dot{u}_1 + \dot{u}_2 - \dot{V}_C) - LC\ddot{V}_C$$

$$\Rightarrow LC\ddot{V}_C + \frac{L}{R}\dot{V}_C + V_C = \frac{L}{R}\dot{u}_1 + \frac{L}{R}\dot{u}_2 + u_2$$

$$\Rightarrow \ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u}_1 + \frac{1}{RC}\dot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_2 \quad (4)$$

Όμοια λύνω την (3) ως προς V_C και αντικαθιστώ στην (1):

$$u_1 = V_R + \frac{L}{R}\dot{V}_R - LC(\ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 - \ddot{V}_R)$$

$$\Rightarrow LC\,\ddot{V}_R + \frac{L}{R}\dot{V}_R + V_R = LC\,\ddot{u}_1 + LC\,\ddot{u}_2 + u_1$$

$$\Rightarrow \ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R = \ddot{u}_1 + \ddot{u}_2 + \frac{1}{LC}u_1 \quad (5)$$

Εφαρμόζω Μ/Σ Laplace και στα δύο μέρη της (4) θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες:

$$s^2 V_C(s) + \frac{s}{RC}V_C(s) + \frac{1}{LC}V_C(s) = \frac{s}{RC}u_1(s) + \frac{s}{RC}u_2(s) + \frac{1}{LC}u_2(s)$$

$$\Rightarrow V_C(s)\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = \frac{s}{RC}u_1(s) + \left(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right)u_2(s)$$

$$\Rightarrow V_C(s)\,\frac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}u_1(s) + \frac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}u_2(s) \quad (6)$$

Όμοια και για την (5):

$$s^2 V_R(s) + \frac{s}{RC}V_R(s) + \frac{1}{LC}V_R(s) = s^2 u_1(s) + s^2 u_2(s) + \frac{1}{LC}u_1(s)$$

$$\Rightarrow V_R(s)\left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) = \left(s^2 + \frac{1}{LC}\right)u_1(s) + s^2 u_2(s)$$

$$\Rightarrow V_R(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}u_1(s) + \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}u_2(s) \quad (7)$$

Από (6) και (7) παίρνω τον παρακάτω πίνακα:

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{s}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \dfrac{\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \\ \dfrac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} & \dfrac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

Όποτε ο πίνακας μεταφοράς είναι :

$$H(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{\frac{s}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} & \dfrac{\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \\ \dfrac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} & \dfrac{s^2}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \end{bmatrix}$$

Επομένως για να εκτιμήσω τον πίνακα μεταφοράς του κυκλώματος αρκεί να εκτιμήσω τις παραμέτρους R,L και C.

Για να εκτιμήσω τις παραπάνω παραμέτρους θα εφαρμόσω την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων όπως και στην προηγούμενη άσκηση στην εξίσωση (4) θέτοντας ως έξοδο y = V_C δηλαδή έχω:

$$\ddot{y}+\frac{1}{RC}\dot{y}+\frac{1}{LC}y=\frac{1}{RC}\dot{u}_1+\frac{1}{RC}\dot{u}_2+\frac{1}{LC}u_2$$

Θέλω να φέρω το σύστημα στην μορφή $y^{(2)}=\theta^{*T}\Delta,$ όπου:

$$\theta^*=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC}\end{bmatrix}^T \text{ και}$$

$$\Delta=\begin{bmatrix}-\dot{y} & -y & \dot{u}_1 & u_1 & \dot{u}_2 & u_2\end{bmatrix}^T$$

Χρησιμοποιώ ευσταθές φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)}$ όπου $\Lambda(s)=s^2+(p_1+p_2)s+p_1p_2$ με p_1,p_2 οι πόλοι που τοποθετώ στο αριστερό ημιεπίπεδο για λόγους ευστάθειας.

Φιλτράροντας λοιπόν παίρνω $y=\theta_\lambda^T\zeta,$ όπου:

$$\theta_\lambda=\begin{bmatrix}\frac{1}{RC}-(p_1+p_2) & \frac{1}{LC}-p_1p_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC}\end{bmatrix}^T \text{ και}$$

$$\zeta=\begin{bmatrix}-\frac{[s\quad 1]}{s^2+(p_1+p_2)s+p_1p_2}y & \frac{[s\quad 1]}{s^2+(p_1+p_2)s+p_1p_2}u_1 & \frac{[s\quad 1]}{s^2+(p_1+p_2)s+p_1p_2}u_2\end{bmatrix}$$

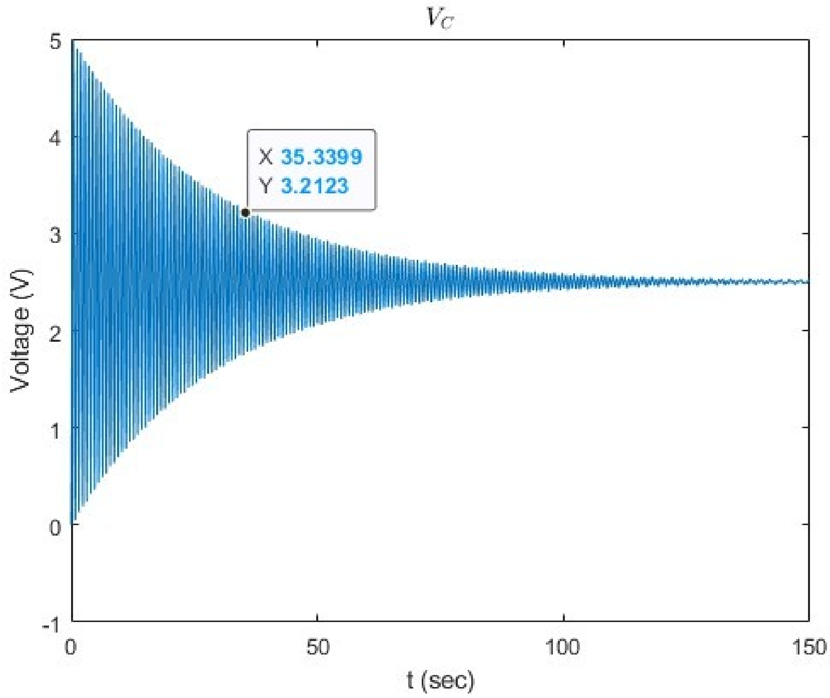
Το διάνυσμα Y, ο πίνακας Φ και η λύση της εξίσωσης $\theta_0^T(\Phi^T\Phi)=Y^T\Phi$ (που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση V_N) ακολουθούν την ίδια διαδικασία με την προηγούμενη άσκηση.

Επιλογή πόλων του φίλτρου: Ψάχνω να βρω πόλους τέτοιους ώστε το 1^o , το 3^o και το 5^o στοιχείο του διανύσματος θ^* να είναι πολύ κοντά, όπως επίσης και το 2^o με το 6^o, και το 4^o στοιχείο να είναι κοντά στο μηδέν. Πειραματικά επιλέγω $p_1 = p_2 = 50$. Λύνοντας, λοιπόν, την παραπάνω εξίσωση με τα δεδομένα που μου δίνονται (στο v.p) υπολογίζω τον πίνακα θ_0 και επομένως και τον θ^* και παίρνω:

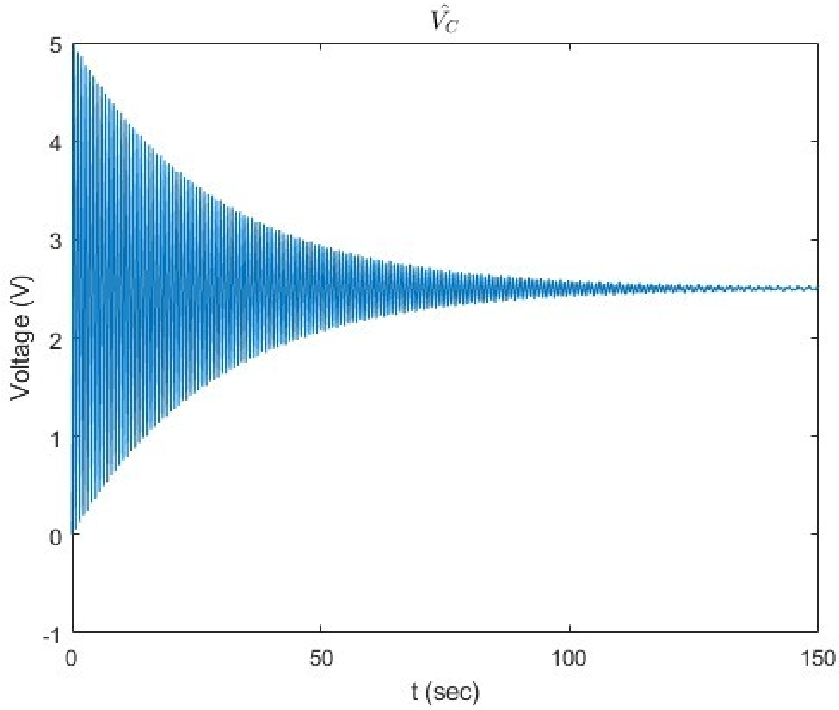
RC = 14.4 ή $\frac{1}{RC}=0.0694$ και LC = 0.016 ή $\frac{1}{LC}=62.5$ και άρα ο πίνακας μεταφοράς του κυκλώματος είναι:

$$H(s)=\begin{bmatrix} \frac{0.0694s}{s^2+0.0694s+62.5} & \frac{0.0694s+62.5}{s^2+0.0694s+62.5} \\ \frac{s^2+62.5}{s^2+0.0694s+62.5} & \frac{s^2}{s^2+0.0694s+62.5} \end{bmatrix}$$

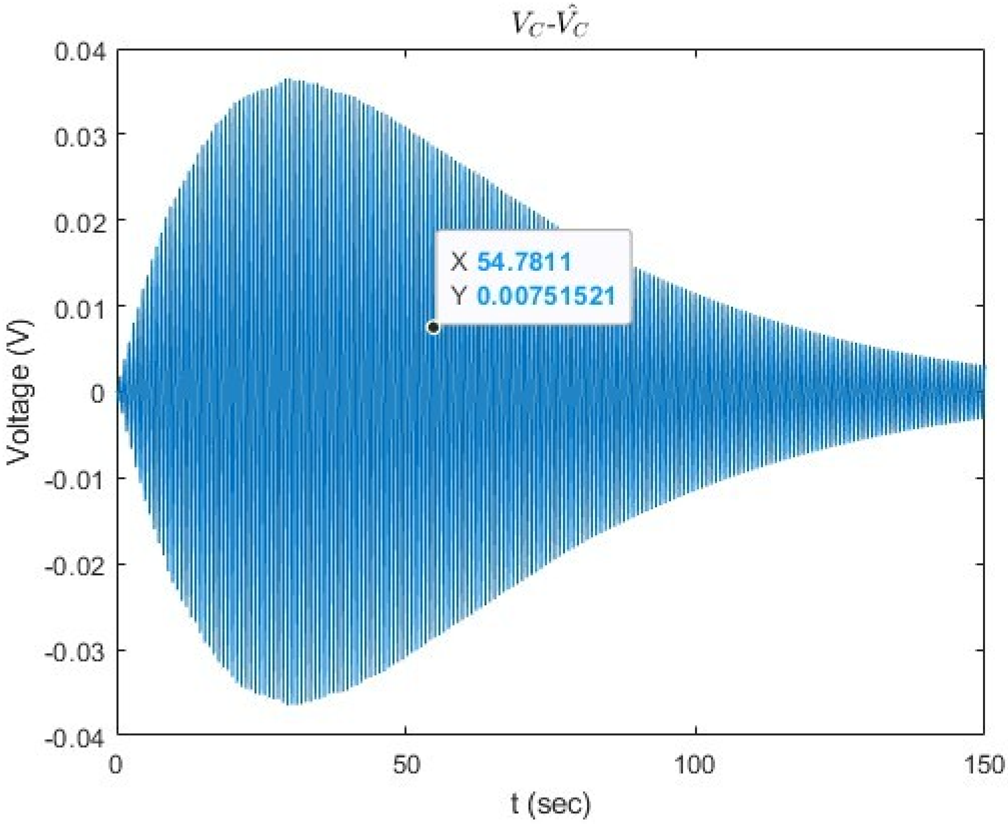
Ο υπολογισμός της $\hat{V}_C$ γίνεται με χρήστη της ode45 και με τις παραμέτρους που εκτίμησα, ενώ αυτός της $\hat{V}_R$ μέσω της σχέσης $\hat{V}_R=u_1+u_2-\hat{V}_C$.
Παρακάτω παραθέτω τις γραφικές παραστάσεις που ζητούνται:



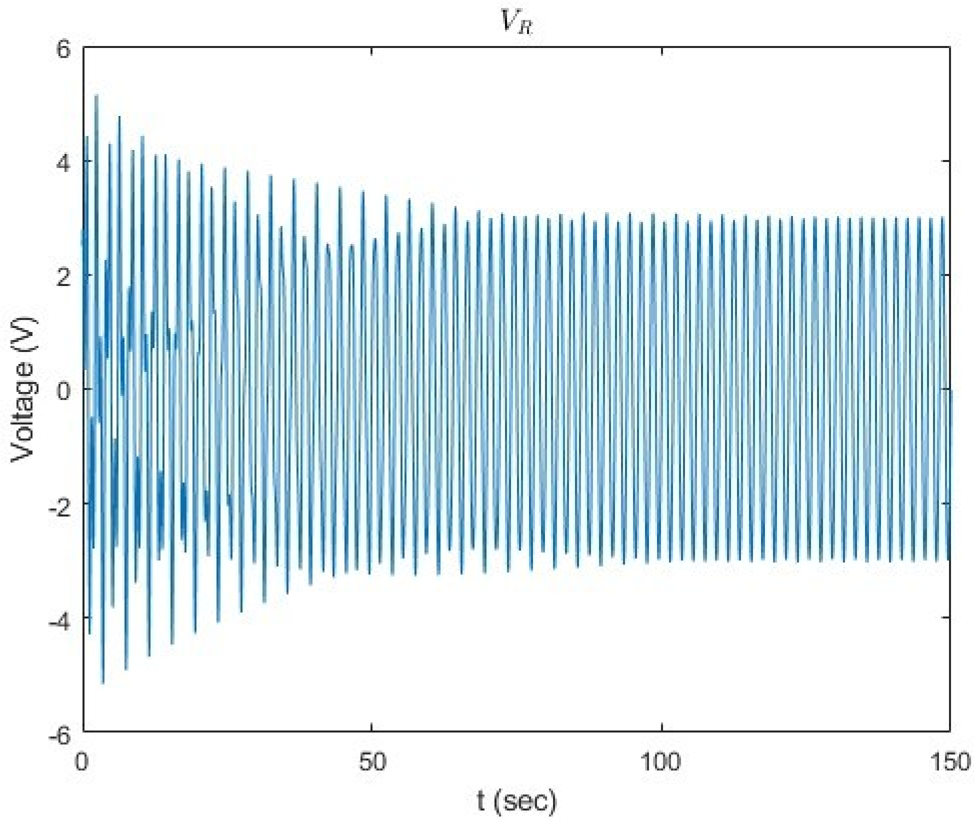
Σχήμα 6: Έξοδος V_C από τις μετρήσεις (στο ν.p).



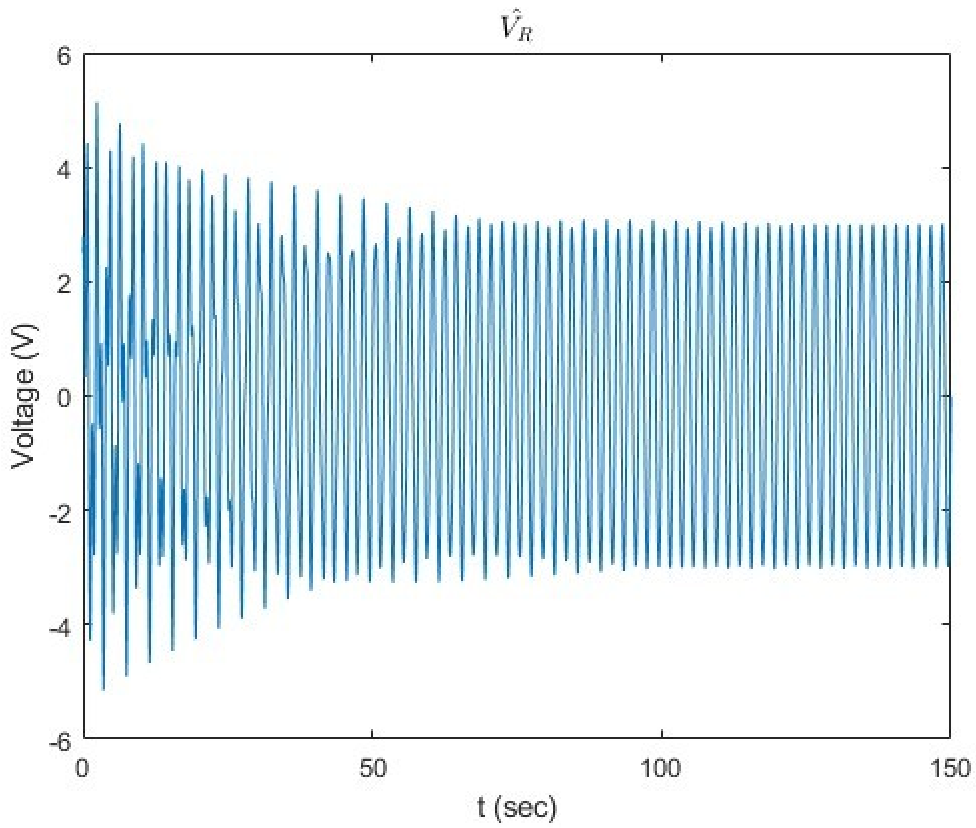
Σχήμα 7: Έξοδος μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{V}_C$.



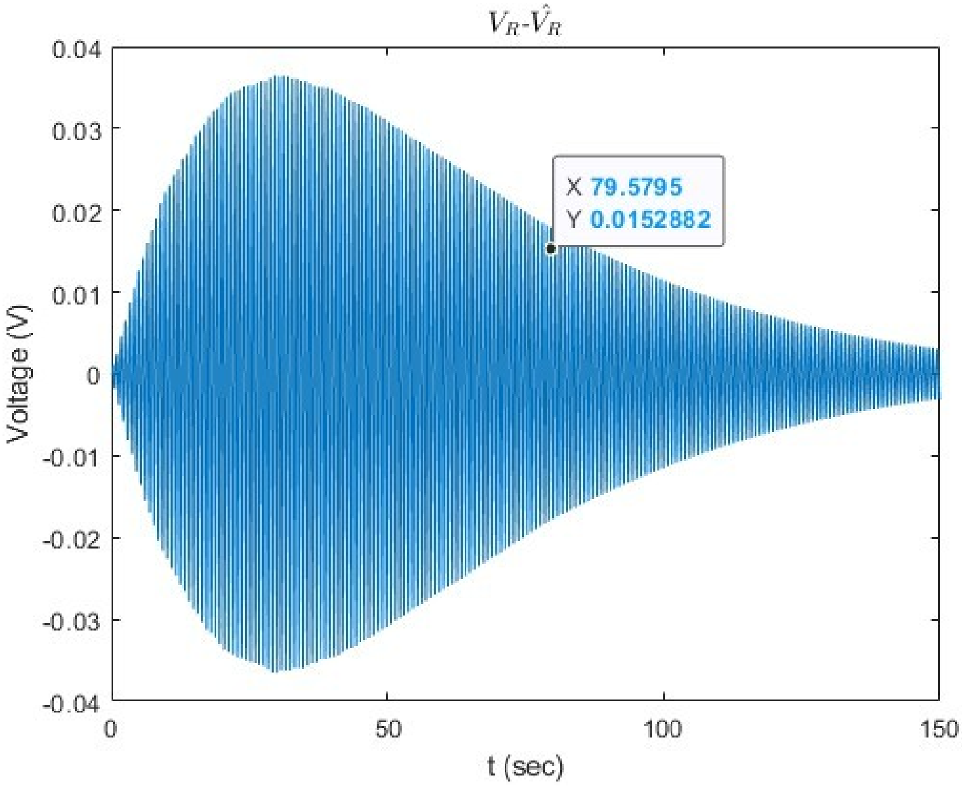
Σχήμα 8: Σφάλμα V_C ως προς τον χρόνο.



Σχήμα 9: Έξοδος V_R από τις μετρήσεις (στο ν.p).



Σχήμα 10: Έξοδος μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων $\hat{V}_R$.



Σχήμα 11: Σφάλμα V_R ως προς τον χρόνο.

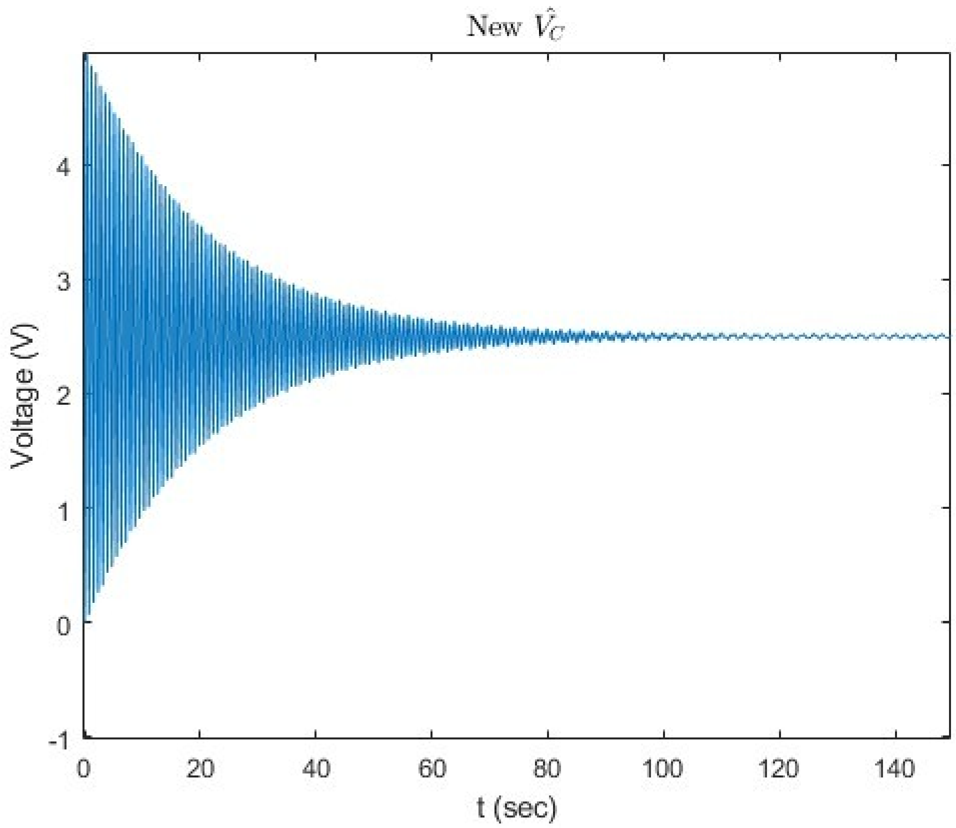
2) Θα προσθέσω σε 20 τυχαίες μετρήσεις της V_C ένα σφάλμα 50 φορές μεγαλύτερο από την πραγματική τιμής της V_C τις δεδομένες στιγμές για να παράξω τυχαία σφάλματα στις μετρήσεις μου. Στην συνέχεια θα ακολουθήσω την ίδια διαδικασία με πριν για να εκτιμήσω τις παραμέτρους μέσω τις μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι νέες εκτιμήσεις είναι οι εξής:

$$RC = 10.4702 \text{ ή } \frac{1}{RC} = 0.0955 \text{ και}$$

$$LC = 0.016 \text{ ή } \frac{1}{LC} = 62.5$$

Πρακτικά δηλαδή παρατηρώ ότι αλλάζει το RC ενώ το LC παραμένει το ίδιο.
Παρόλα αυτά,όπως φαίνεται και παρακάτω η εκτίμηση $\hat{V}_c$ δεν αλλάζει σημαντικά.



Σχήμα 12: Έξοδος μοντέλου εκτιμώμενων παραμέτρων με σφάλμα στην μέτρηση.