Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων
Εργασία 2

Χριστοφορίδης Χρήστος – ΑΕΜ 10395
christoscs@ece.auth.gr
14/05/2024

Θέμα 1

Αρχικά πρέπει να φέρω το σύστημα $\dot{x}=-\alpha x+bu$ στην κατάλληλη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Έστω $\alpha_m > 0$ τότε:

$$\dot{x}=-\alpha x+bu \Rightarrow \dot{x}+\alpha_m x=\alpha_m x-\alpha x+bu \Rightarrow \dot{x}+\alpha_m x=(\alpha_m-\alpha)x+bu$$

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace και έχω:

$$sx+\alpha_m x=(\alpha_m-\alpha)x+bu \Rightarrow x(s+\alpha_m)=(\alpha_m-\alpha)x+bu$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{s+\alpha_m}[(\alpha_m-\alpha)x+bu]$$

Έστω λοιπόν:

$$\theta^*=\left[(\alpha_m-\alpha) \quad b\right]^T=\left[\theta_1 \quad \theta_2\right]^T$$

$$\text{και} \quad \varphi=\left[(\frac{1}{s+\alpha_m})x \quad (\frac{1}{s+\alpha_m})u\right]^T=\left[\varphi_1 \quad \varphi_2\right]^T \quad \text{οπότε}$$

$$x=\theta^{*T}\varphi$$

Φτιάχνω το σύστημα εκτίμησης που θα είναι: $\hat{x}=\hat{\theta}^T\varphi$, όπου $\hat{\theta}$ είναι το διάνυσμα με τις εκτιμήσεις των παραμέτρων. Επομένως το σφάλμα εξόδου-αναγνώρισης είναι:

$$e=x-\hat{x} \Rightarrow e=x-\hat{\theta}^T\varphi \Rightarrow e=(\theta^*-\hat{\theta})^T\varphi$$

$$\Rightarrow e=-\tilde{\theta}^T\varphi, \quad \text{όπου} \quad \tilde{\theta}=\hat{\theta}-\theta^*$$

Ορίζω τη συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση $K(\hat{\theta})=\frac{e^2}{2}=\frac{(x-\hat{\theta}^T\varphi)^2}{2}$

Σύμφωνα με τη μέθοδο της κλίσης έχω $\dot{\hat{\theta}}=-\gamma\nabla K$, με $\nabla K=-e\varphi$ δηλαδή:

$\dot{\hat{\theta}}=\gamma e\varphi$ με $\gamma>0$. Από όλα τα παραπάνω(με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace) παίρνω τελικά το σύστημα:

$$\begin{cases} \dot{x}=-\alpha x+bu \\ \dot{\varphi}_1=-\alpha_m\varphi_1+x \\ \dot{\varphi}_2=-\alpha_m\varphi_2+u \\ \dot{\hat{\theta}}_1=\gamma e\varphi_1 \\ \dot{\hat{\theta}}_2=\gamma e\varphi_2 \\ \dot{\hat{x}}=-\hat{\alpha}\hat{x}+\hat{b}u=-(\alpha_m-\hat{\theta}_1)\hat{x}+\hat{\theta}_2 u \end{cases}$$

Ορίζω εξισώσεις κατάστασης του συστήματος και έχω:

$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\hat{\theta}_1 \\ x_3=\hat{\theta}_2 \\ x_4=\varphi_1 \\ x_5=\varphi_2 \\ x_6=\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=\dot{x}=-\alpha x_1+bu \\ \dot{x}_2=\dot{\hat{\theta}}_1=\gamma e\varphi_1=\gamma e x_4 \\ \dot{x}_3=\dot{\hat{\theta}}_2=\gamma e\varphi_2=\gamma e x_5 \\ \dot{x}_4=\dot{\varphi}_1=-\alpha_m\varphi_1+x=-\alpha_m x_4+x_1 \\ \dot{x}_5=\dot{\varphi}_2=-\alpha_m\varphi_2+u=-\alpha_m x_5+u \\ \dot{x}_6=\dot{\hat{x}}=(\hat{\theta}_1-\alpha_m)\hat{x}+\hat{\theta}_2 u=(x_2-\alpha_m)x_6+x_3 u \end{cases}$$

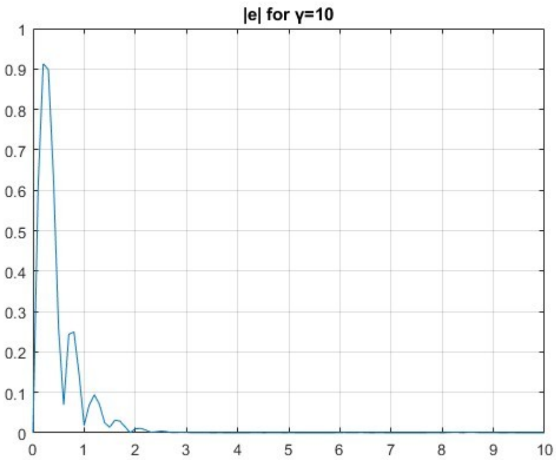
Για το σφάλμα e έχω $e=x-\hat{x}=x_1-x_6$ οπότε οι εξισώσεις κατάστασης τελικά γίνονται:

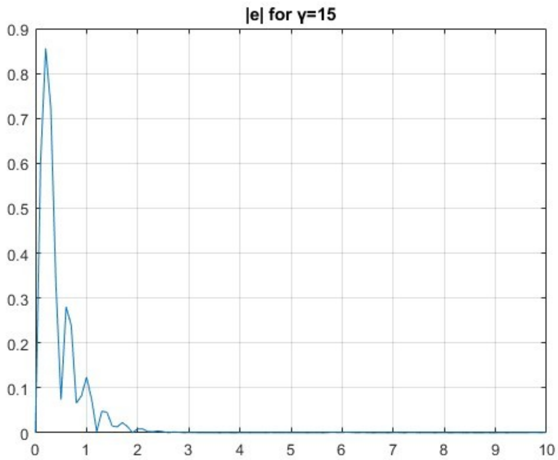
$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + bu \\
\dot{x}_2 = \gamma x_4 (x_1 - x_6) \\
\dot{x}_3 = \gamma x_5 (x_1 - x_6) \\
\dot{x}_4 = -\alpha_m x_4 + x_1 \\
\dot{x}_5 = -\alpha_m x_5 + u \\
\dot{x}_6 = (x_2 - \alpha_m) x_6 + x_3 u
\end{cases}
$$

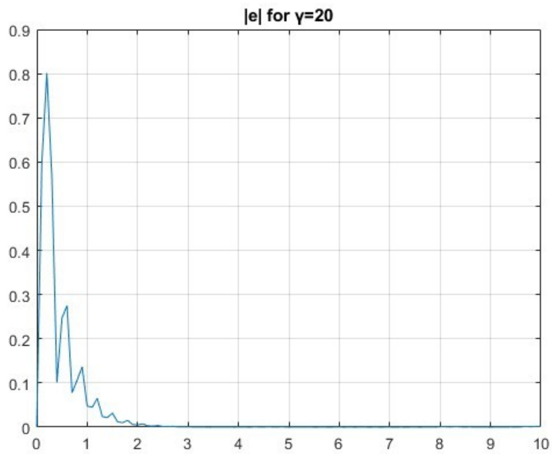
Για να βρω τις εκτιμήσεις των άγνωστων παραμέτρων αρκεί να λύσω το παραπάνω σύστημα με είσοδο i) u(t) = 5 και ii) u(t) = 5sin(2t) χρησιμοποιώντας κατάλληλα γ και α_m σε κάθε περίπτωση.

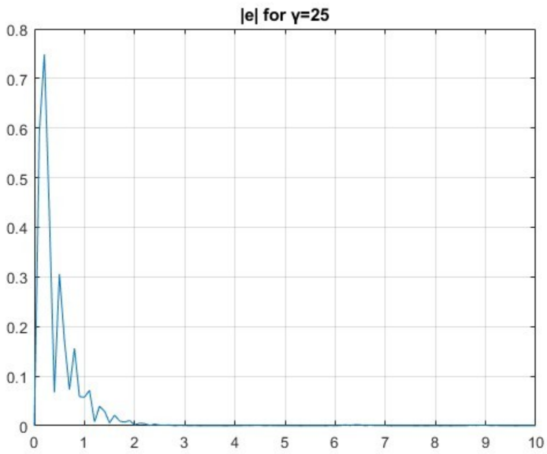
I) u(t) = 5

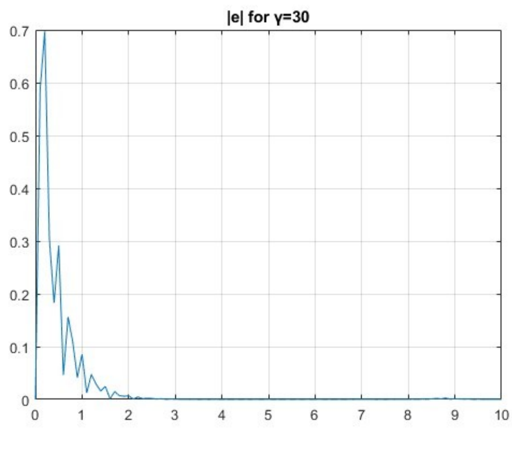
<u>Για να επιλέξω γ</u> βάζω α_m = 5 και τρέχω τον αλγόριθμο για διάφορες τιμές του γ (10,15,20,25,30,35). Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις του σφάλματος για τις διάφορες τιμές του γ.

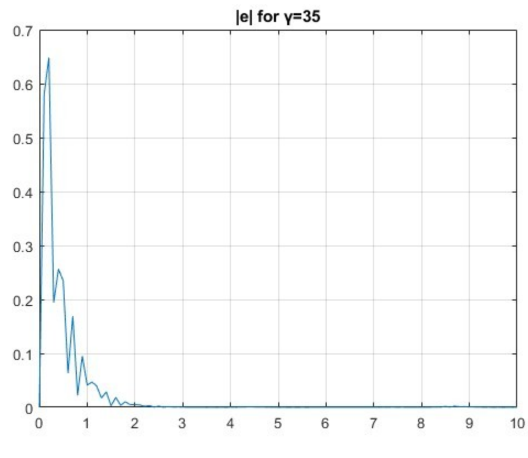






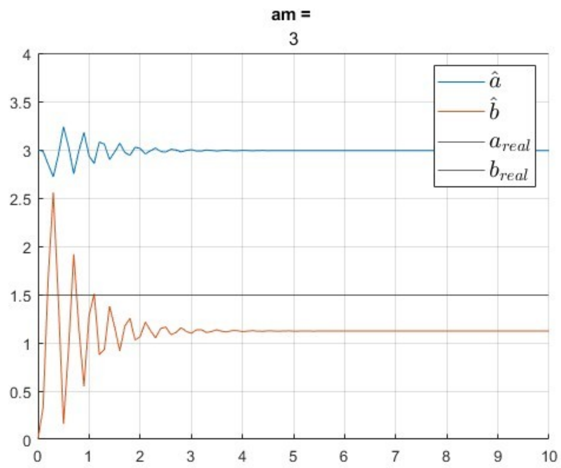


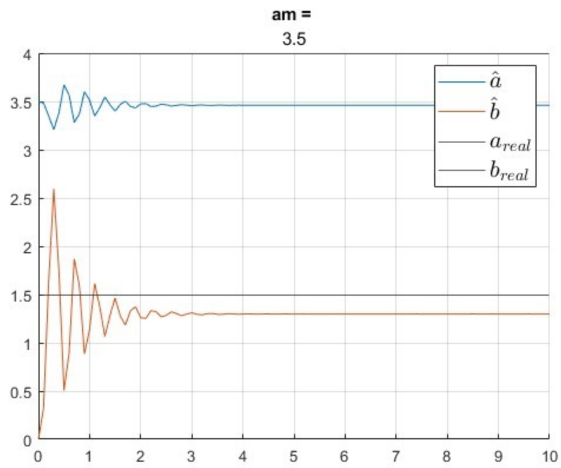


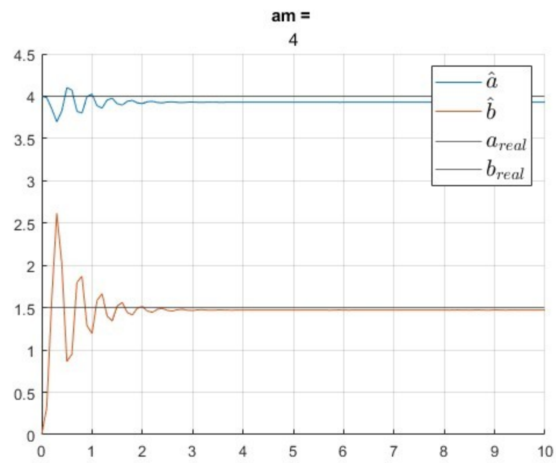


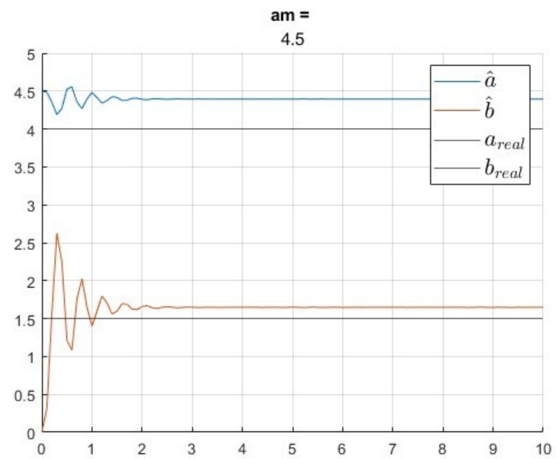
Παρατηρώ λοιπόν πως όσο μεγαλώνει το γ τόσο γρηγορότερα μηδενίζει το σφάλμα. Επομένως επιλέγω γ = 35.

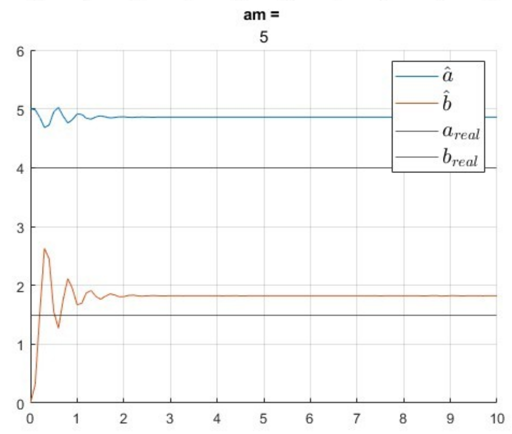
<u>Για να επιλέξω α_m</u> βάζω γ = 35 και ακολουθώ την ίδια διαδικασία με πριν για διάφορες τιμές του α_m (3,3.5,4,4.5,5).

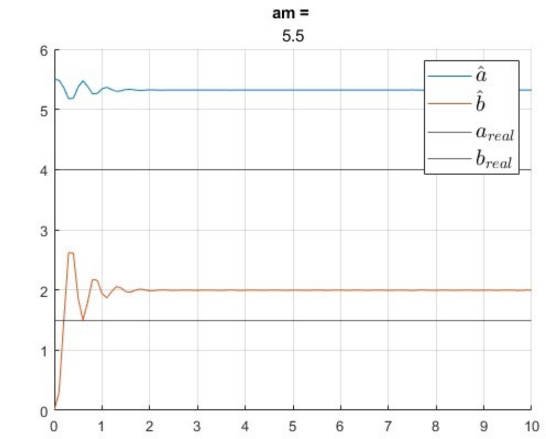












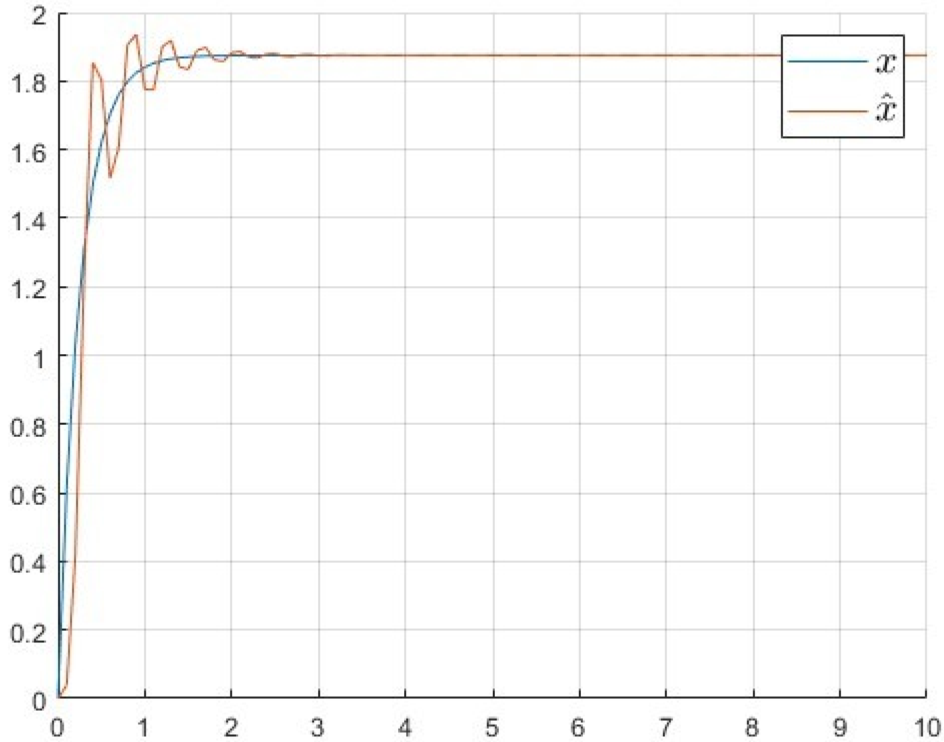
Παρατηρώντας και πάλι τα πειραματικά αποτελέσματα επιλέγω α_m = 4.

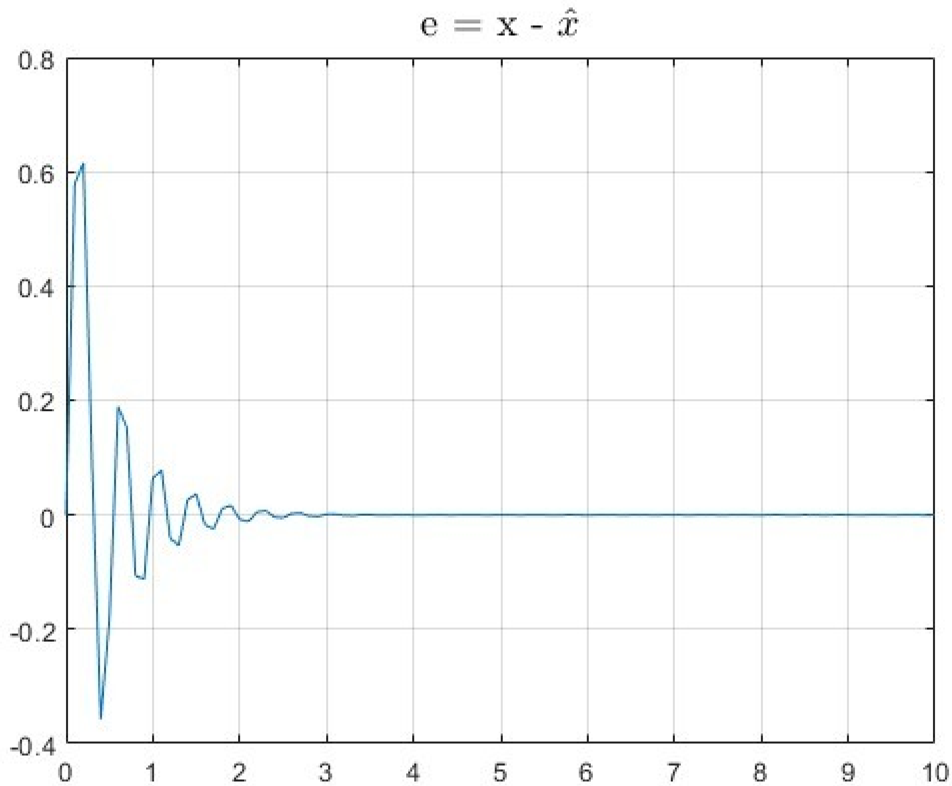
Οι εκτιμήσεις για τα α και b υπολογίζονται μέσω του $\hat{\theta}$ από τους ακόλουθους τύπους:

$\hat{\theta}_1 = \alpha_m - \hat{\alpha} \Rightarrow \hat{\alpha} = \alpha_m - \hat{\theta}_1 = \alpha_m - x_2$

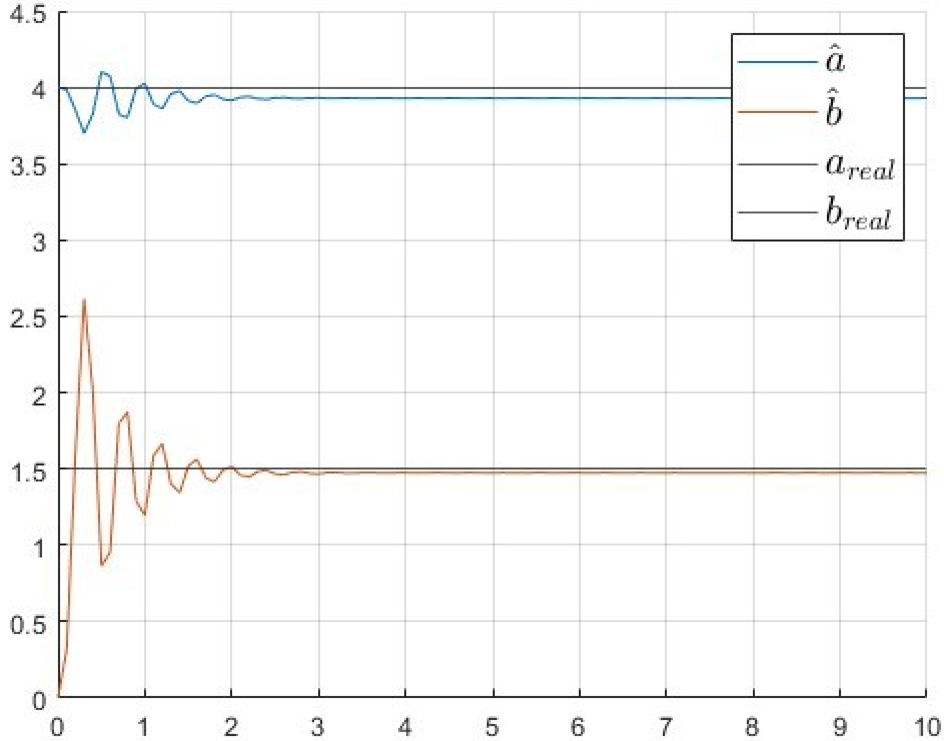
$\hat{\theta}_2 = \hat{b} \Rightarrow \hat{b} = x_3$

Άρα για γ = 35 και $\alpha_{m,}$ = 4 έχω:

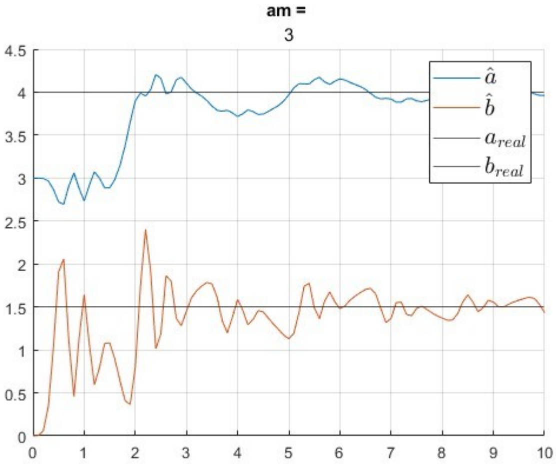


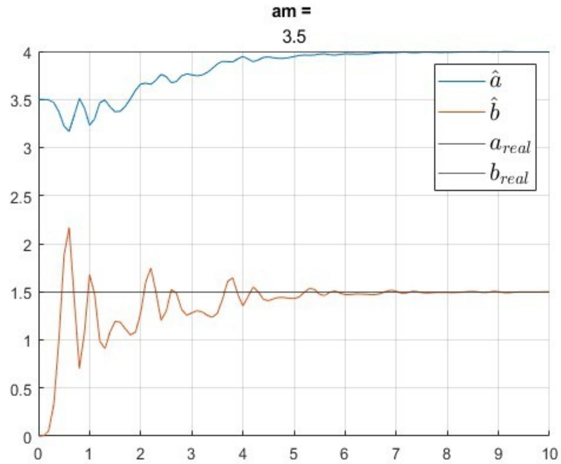


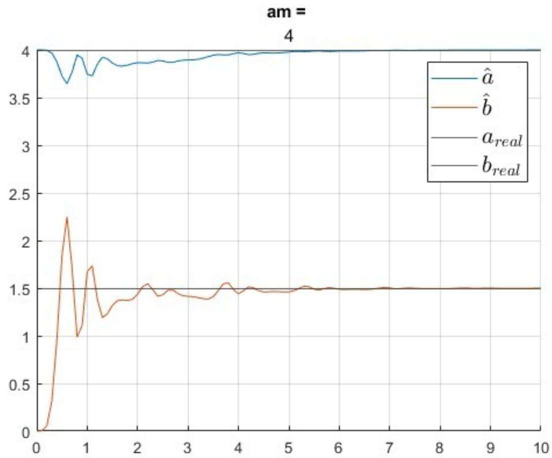
ii)

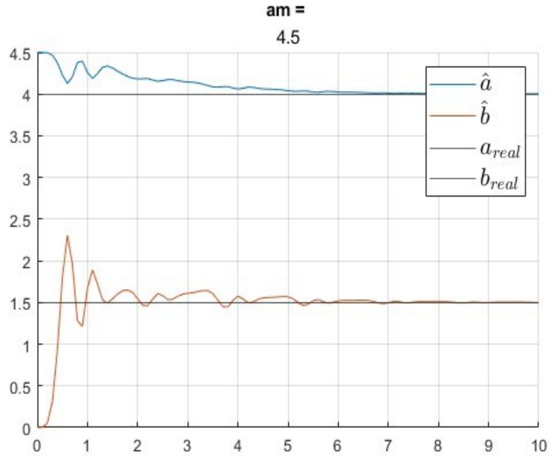


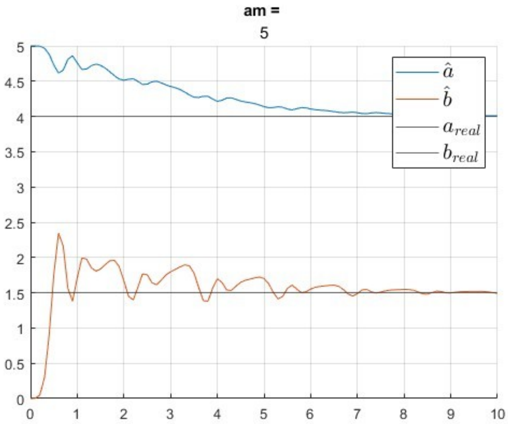
Ακολουθώ την ίδια διαδικασία και πάλι για u(t) = 5sin(2t)
Τα συμπεράσματα για το γ είναι όμοια με πριν για αυτό επιλέγω και πάλι γ = 35.
Για να επιλέξω το $α_m$ τρέχω και πάλι τον αλγόριθμο για διάφορες τιμές του $α_m$ (3,3.5,4,4.5,5,5.5) με γ = 35 όπως και πριν,με το καινούριο u, και έχω τα παρακάτω αποτελέσματα:

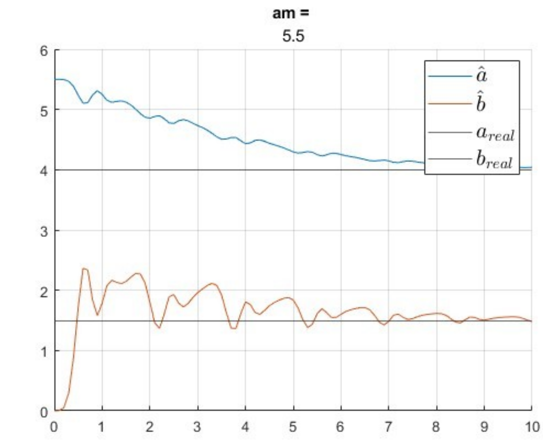






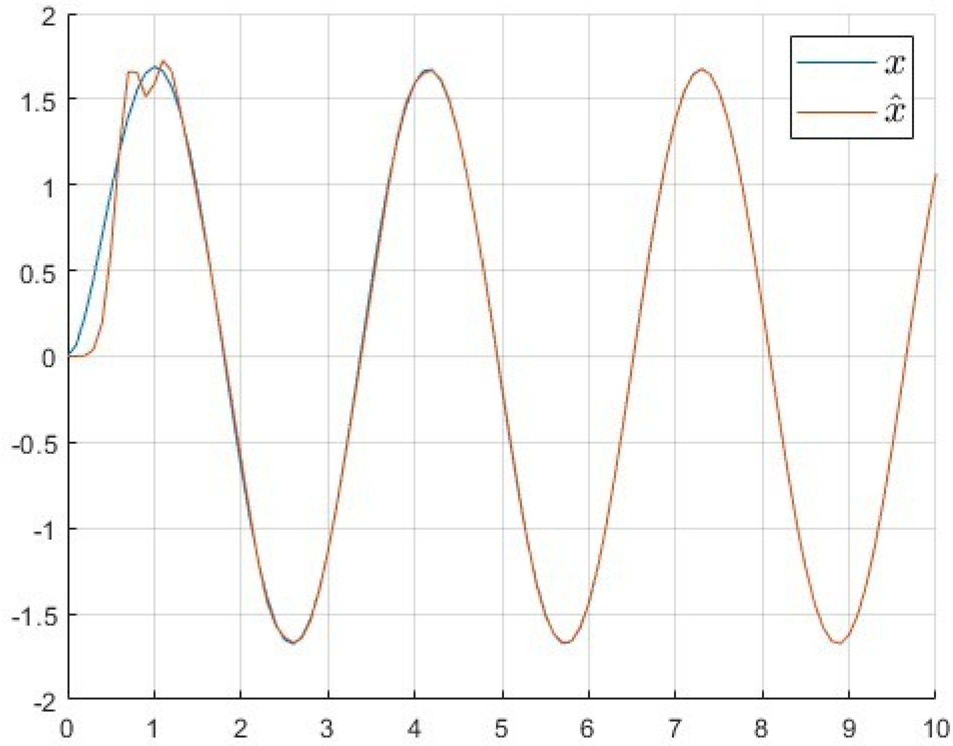




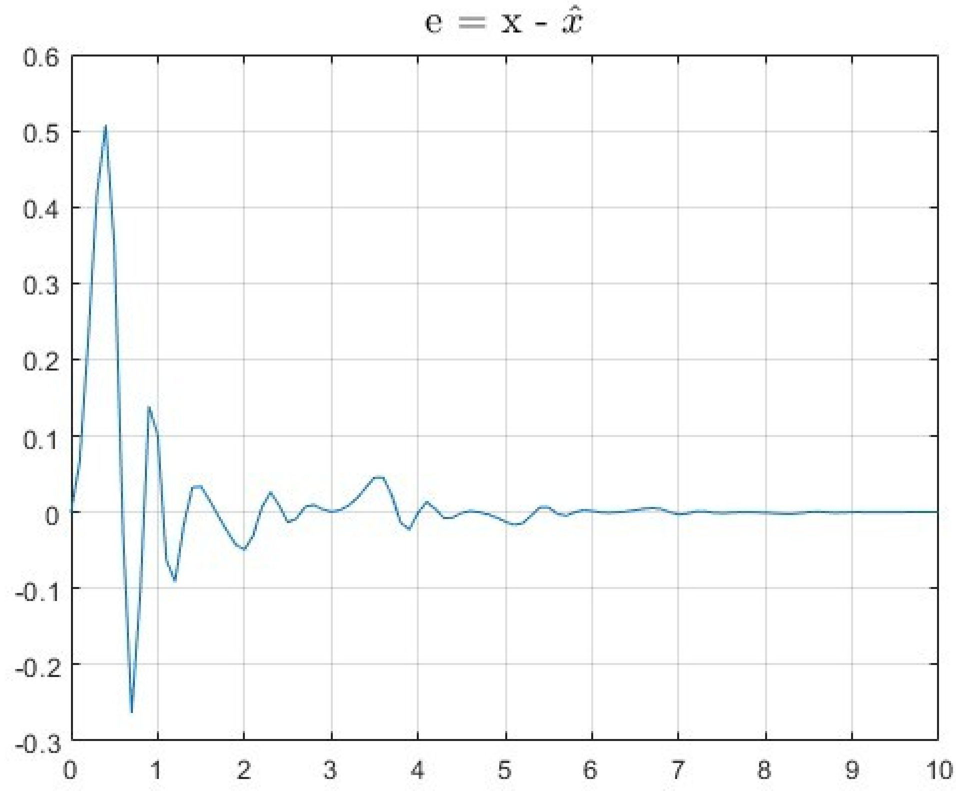


Επομένως από τα παραπάνω επιλέγω α_m=4.

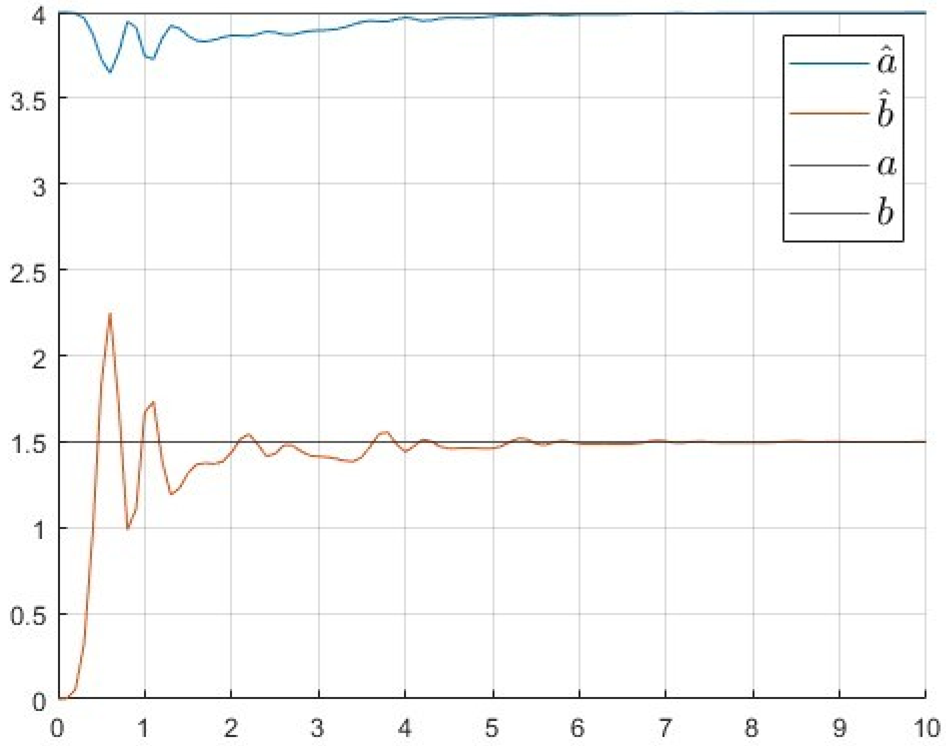
Οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι οι παρακάτω:



2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
x
$\hat{x}$



e = x - $\hat{x}$
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



<u>Θέμα 2</u>

i) <u>Παράλληλη Δομή</u>

Το σύστημα είναι: $\dot{x} = -\alpha x + bu = -\theta_1^* x + \theta_2^* u$, $x(0) = 0$. Άρα το σύστημα αναγνώρισης παράλληλης δομής για την εκτίμηση της εξόδου είναι:

$\dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u$, $\hat{x}(0) = 0$. Επομένως για το σφάλμα e της εκτίμησης έχω:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\theta_1^* x + \theta_2^* u + \hat{\theta}_1 \hat{x} - \hat{\theta}_2 u \Rightarrow \dot{e} = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\theta_1^* x + \hat{\theta}_1 \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u \pm \theta_1^* \hat{x}$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\theta_1^* (x - \hat{x}) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1^*) \hat{x} - (\hat{\theta}_2 - \theta_2^*) u$$

$$\Rightarrow \dot{e} = -\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u, \text{ με } \tilde{\theta}_1 = \hat{\theta}_1 - \theta_1^* \text{ και } \tilde{\theta}_2 = \hat{\theta}_2 - \theta_2^*$$

Ορίζω συνάρτηση Lyapunov την παρακάτω:

$$V = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2\gamma_1} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2} \tilde{\theta}_2^2 \geq 0, \text{ για } \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

$$\Rightarrow \dot{V} = e\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\Rightarrow \dot{V} = e(-\theta_1^* e + \tilde{\theta}_1 \hat{x} - \tilde{\theta}_2 u) + \frac{1}{\gamma_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -\theta_1^* e^2 + \tilde{\theta}_1 (e\hat{x} + \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{\theta}}_1) - \tilde{\theta}_2 (eu - \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{\theta}}_2)$$

$$\text{Επιλέγω} \begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e \hat{x}, & \gamma_1 > 0 \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u, & \gamma_2 > 0 \end{cases}$$

Οπότε τελικά έχω: $\dot{V}=-\theta_1^{*}e^2\leq 0.$

Επομένως από θεώρημα Lyapunov και λήμμα Barbalat το μοντέλο εκτίμησης συγκλίνει στο πραγματικό σύστημα. Παίρνω λοιπόν τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης:

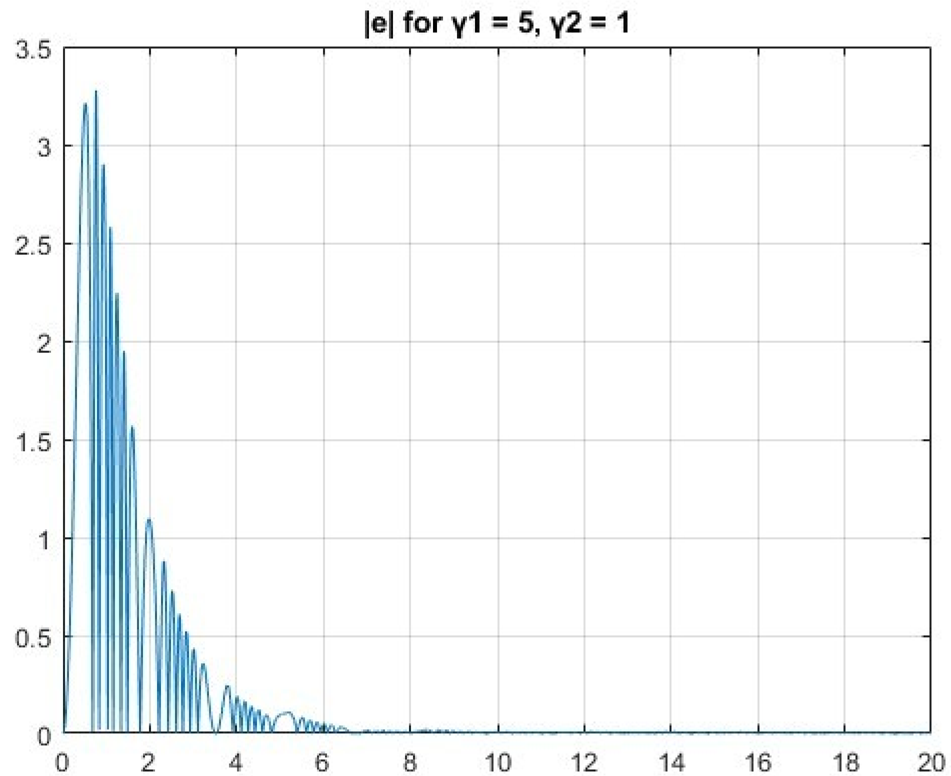
$$\begin{cases} x_1=x \\ x_2=\hat{\theta}_1 \\ x_3=\hat{\theta}_2 \\ x_4=\hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=\dot{x}=-\alpha x+bu=-\alpha x_1+bu \\ \dot{x}_2=\dot{\hat{\theta}}_1=-\gamma_1 e\,\hat{x}=-\gamma_1 e\,x_4 \\ \dot{x}_3=\dot{\hat{\theta}}_2=\gamma_2 eu \\ \dot{x}_4=\dot{\hat{x}}=-\hat{\theta}_1\hat{x}+\hat{\theta}_2 u=-x_2 x_4+x_3 u \end{cases}$$

Για το σφάλμα e επειδή υπάρχει θόρυβος n ισχύει: $e=x+n-\hat{x}=x_1+n-x_4$

Άρα οι εξισώσεις κατάστασης για την παράλληλη δομή τελικά είναι:

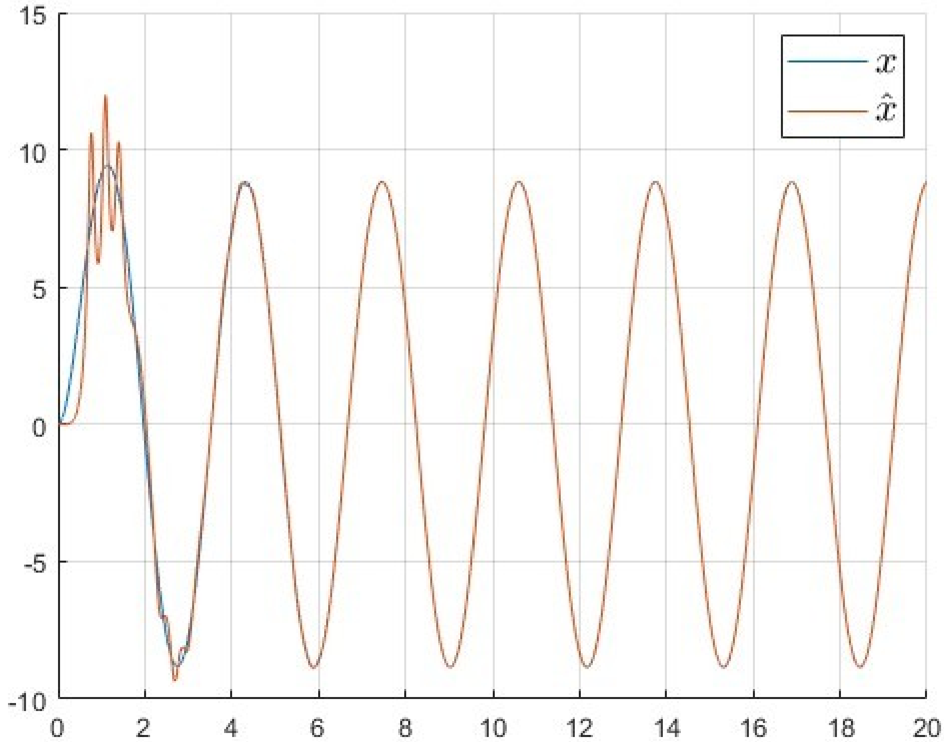
$$\begin{cases} \dot{x}_1=-\alpha x_1+bu \\ \dot{x}_2=-\gamma_1 x_4(x_1+n-x_4) \\ \dot{x}_3=\gamma_2 u(x_1+n-x_4) \\ \dot{x}_4=-x_2 x_4+x_3 u \end{cases}$$

Αρχικά τρέχω τον αλγόριθμο χωρίς θόρυβο και για διάφορες τιμές των γ_1 και γ_2 και κοιτάζω την απόλυτη τιμή του σφάλματος, για να καταλήξω στα βέλτιστα. Τελικά καταλήγω στα $\gamma_1 = 5$ και $\gamma_2 = 1$. Παραθέτω ενδεικτικά το διάγραμμα για τις συγκεκριμένες τιμές (στο .m αρχείο υπάρχει ο κώδικας που δοκίμασε διάφορες τιμές).

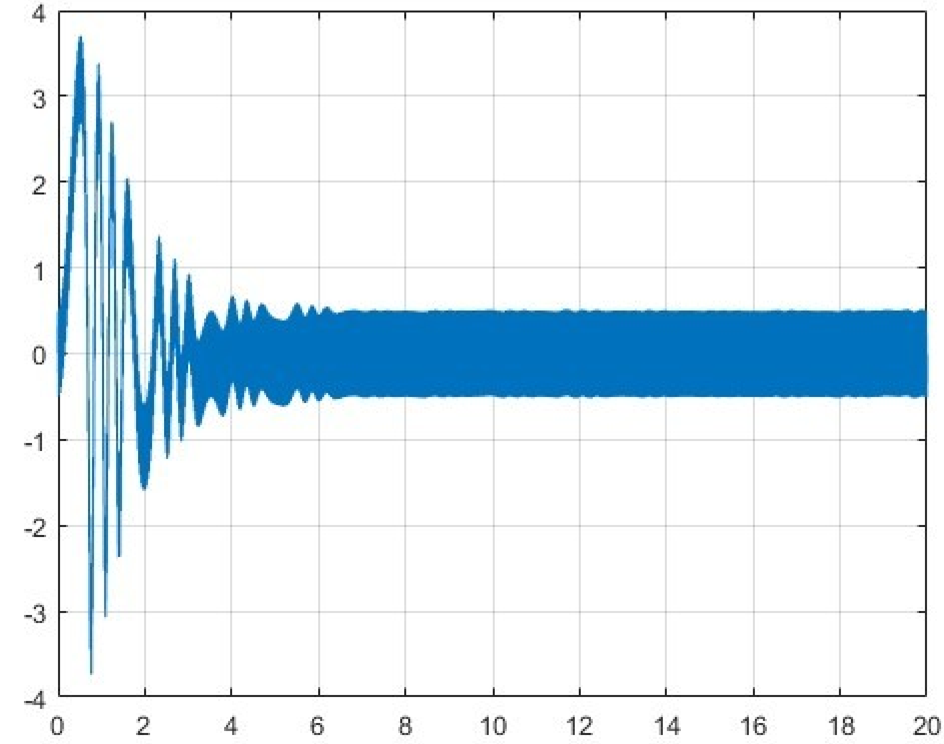


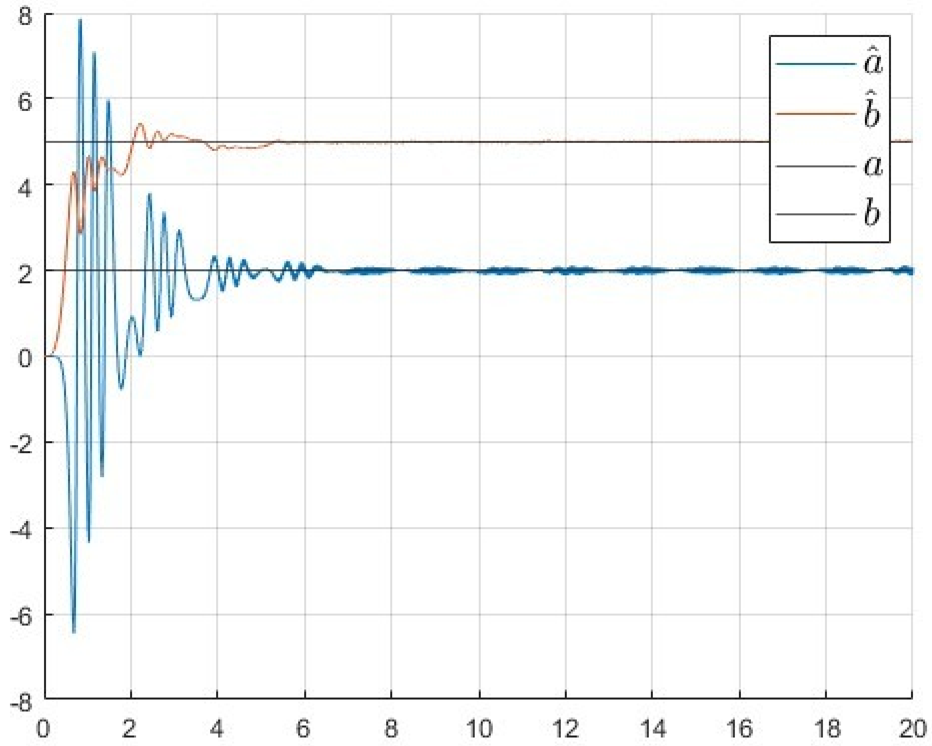
Εφόσον επιλέχτηκαν τα γ_1 και γ_2 προσθέτω τον θόρυβο στον αλγόριθμο και παρακάτω φαίνονται οι επιθυμητές γραφικές παραστάσεις.

(Ισχύει ότι: $\hat{\alpha}=\hat{\theta}_1$ και $\hat{b}=\hat{\theta}_2$)



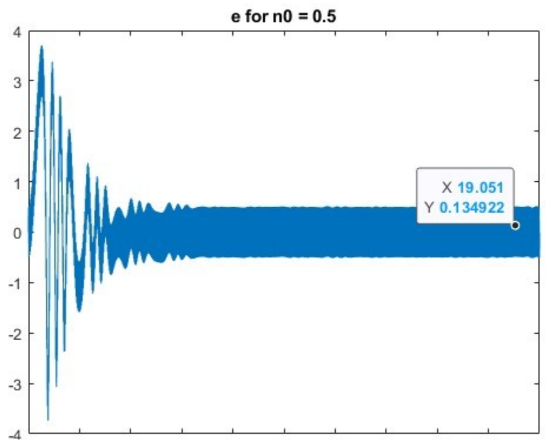
$\mathrm{e} = \mathrm{x} - \hat{x}$

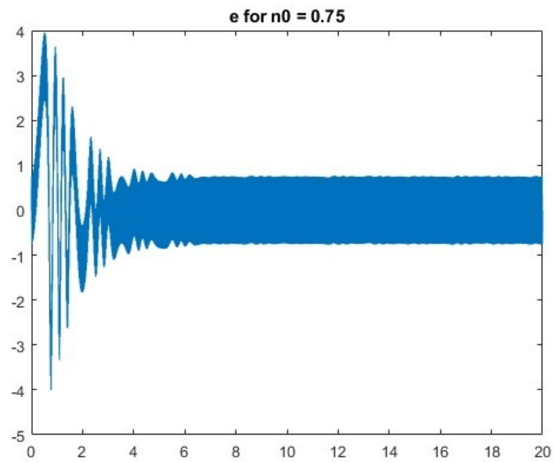


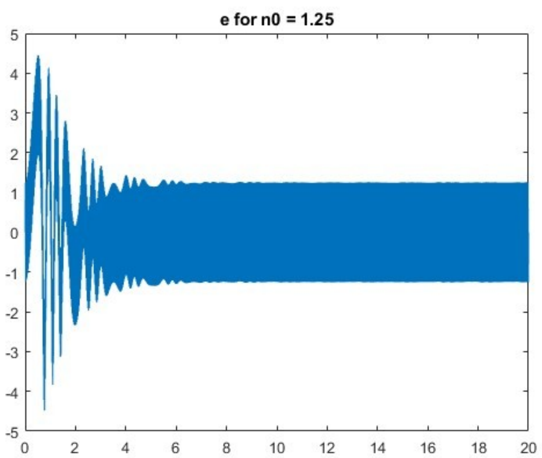


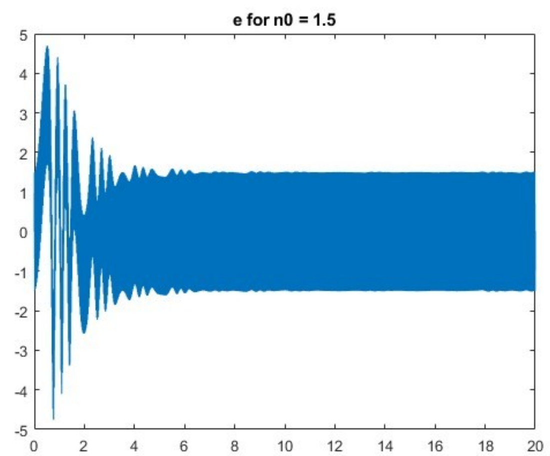
<u>Επίδραση στο σφάλμα για αλλαγές του n_0 του θορύβου κρατώντας την συχνότητα f=40.</u>

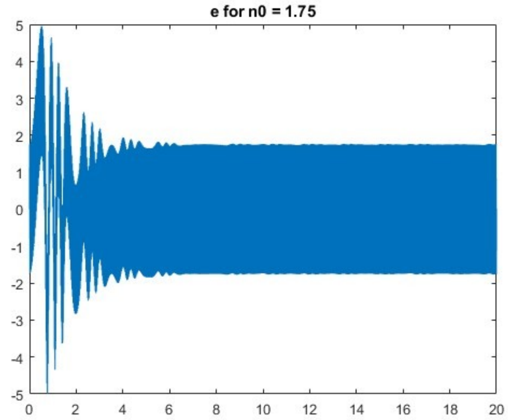
Όπως φαίνεται στα διαγράμματα παρακάτω το σφάλμα αυξάνεται σημαντικά για αυξήσεις του n_0 κυρίως όταν αυτό περάσει την μονάδα. Παρατηρούμε ότι από τα 0.75 στα 1.25 έχουμε σημαντική αύξηση του σφάλματος, ενώ από το 1.5 στα 2 η διαφορά στην αύξηση του σφάλματος είναι αρκετά μικρότερη.

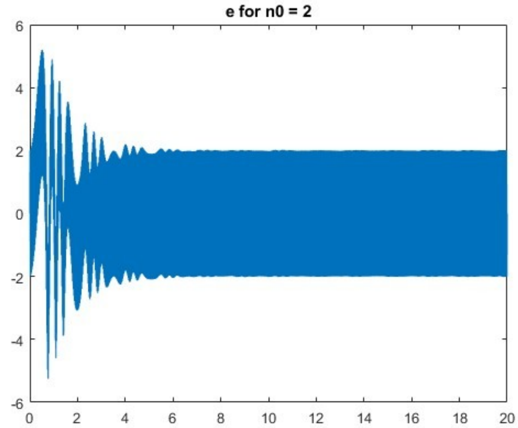






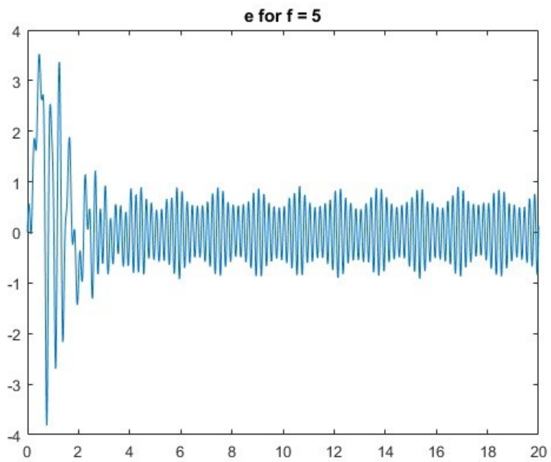


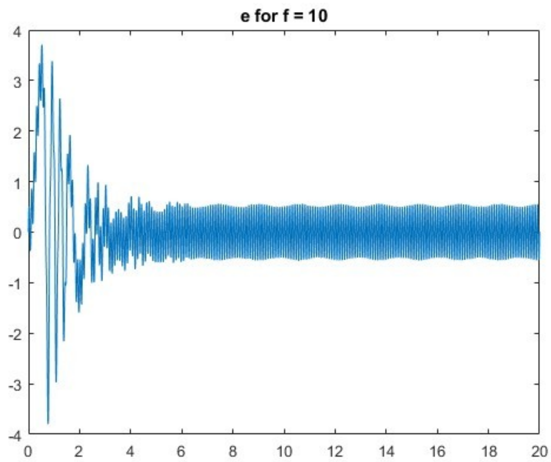


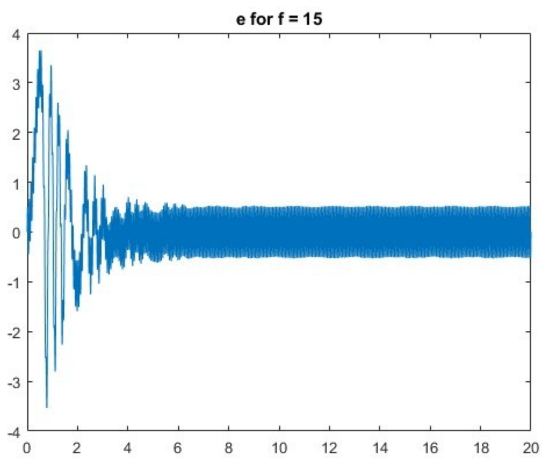


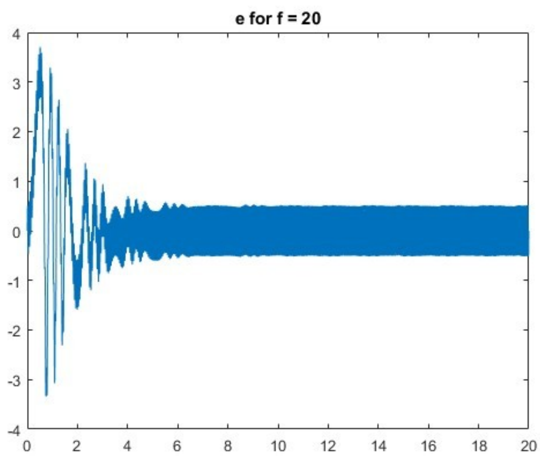
Επίδραση στο σφάλμα για μεταβολές της συχνότητας f κρατώντας το n_0 σταθερό στα 0.5

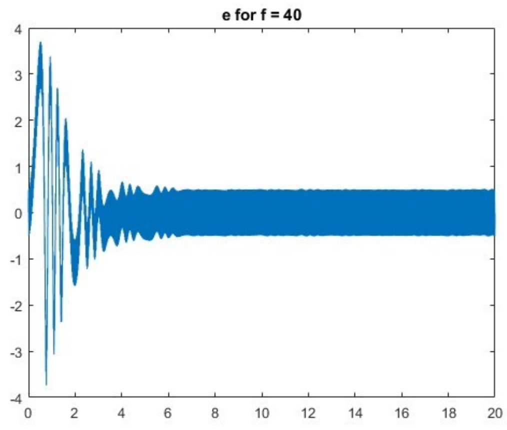
Παρατηρώ ότι το σφάλμα αλλάζει για μεταβολές τις συχνότητες όχι τόσο σημαντικά όμως όσο άλλαζε με μεταβολές του n_0. Αξίζει να σημειωθεί πως μεγαλύτερη αύξηση είχαμε για μικρές τιμές της συχνότητας πχ f = 5, όπως φαίνεται και στα διαγράμματα παρακάτω.

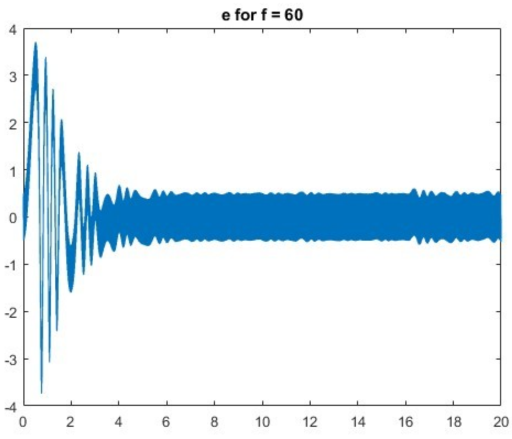












ii) Μεικτή Δομή

Λειτουργώ με όμοιο τρόπο με την παράλληλη δομή με διαφορά πως για το σύστημα $\dot{x}=-\alpha x+bu=-\theta_1^* x+\theta_2^* u,\;\; x(0)=0,$ θεωρώ σύστημα αναγνώρισης μικτής δομής το παρακάτω:

$$\dot{\hat{x}}=-\hat{\theta}_1 x+\hat{\theta}_2 u+\theta_m(x-\hat{x})$$

Για το σφάλμα λοιπόν έχω:

$$e=x-\hat{x}\Rightarrow\dot{e}=\dot{x}-\dot{\hat{x}}$$
$$\Rightarrow\dot{e}=-\theta_1^* x+\theta_2^* u+\hat{\theta}_1 x-\hat{\theta}_2 u-\theta_m(x-\hat{x})\Rightarrow\dot{e}=(\hat{\theta}_1-\theta_1^*)x-(\hat{\theta}_2-\theta_2^*)u-\theta_m e$$
$$\Rightarrow\dot{e}=-\theta_m e+\tilde{\theta}_1 x-\tilde{\theta}_2 u,\;\; \text{με}\;\; \tilde{\theta}_1=\hat{\theta}_1-\theta_1^* \;\; \text{και} \;\; \tilde{\theta}_2=\hat{\theta}_2-\theta_2^*$$

Επιλέγω ξανά συνάρτηση Lyapunov $V=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2+\frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2\;\geq 0,\;\;$ για $\;\gamma_1,\gamma_2>0$

Παραγωγίζω όμοια με πριν και έχω:

$$\dot{V}=e\dot{e}+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$
$$\Rightarrow\dot{V}=e(-\theta_m e^2+\tilde{\theta}_1 x-\tilde{\theta}_2 u)+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$
$$\Rightarrow\dot{V}=-\theta_m e^2+\tilde{\theta}_1 e x-\tilde{\theta}_2 eu+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\text{Επιλέγω}\;\begin{cases}\dot{\hat{\theta}}_1=-\gamma_1 ex,\;\;\gamma_1>0\\ \dot{\hat{\theta}}_2=\gamma_2 eu,\;\;\gamma_2>0\end{cases}$$

Επομένως για τους ίδιους λόγους που εξηγήθηκαν στην παράλληλη δομή το μοντέλο εκτίμησης συγκλίνει στο πραγματικό σύστημα. Οι εξισώσεις κατάστασης που προκύπτουν είναι οι εξής:

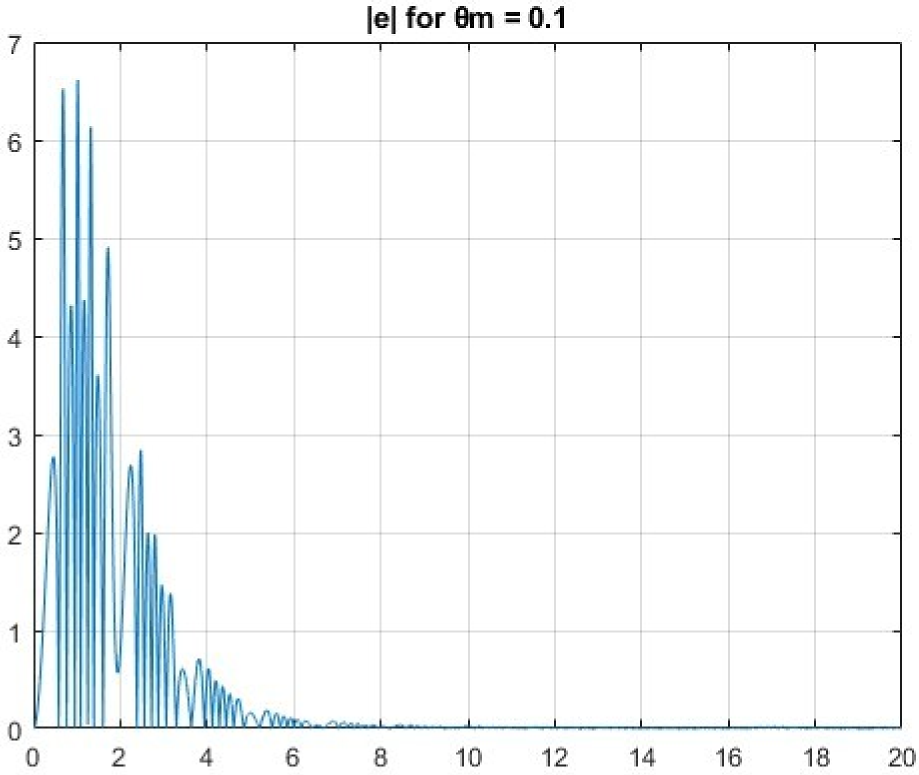
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -\alpha x + bu = -\alpha x_1 + bu \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 ex = -\gamma_1 ex_1 \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 eu \\ \dot{x}_4 = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 \hat{x} + \hat{\theta}_2 u + \theta_m (x - \hat{x}) = -x_2 x_4 + x_3 u + \theta_m e \end{cases}$$

Για το σφάλμα e επειδή υπάρχει θόρυβος n ισχύει: $e = x + n - \hat{x} = x_1 + n - x_4$

Άρα οι εξισώσεις κατάστασης για την μικτή δομή τελικά είναι:

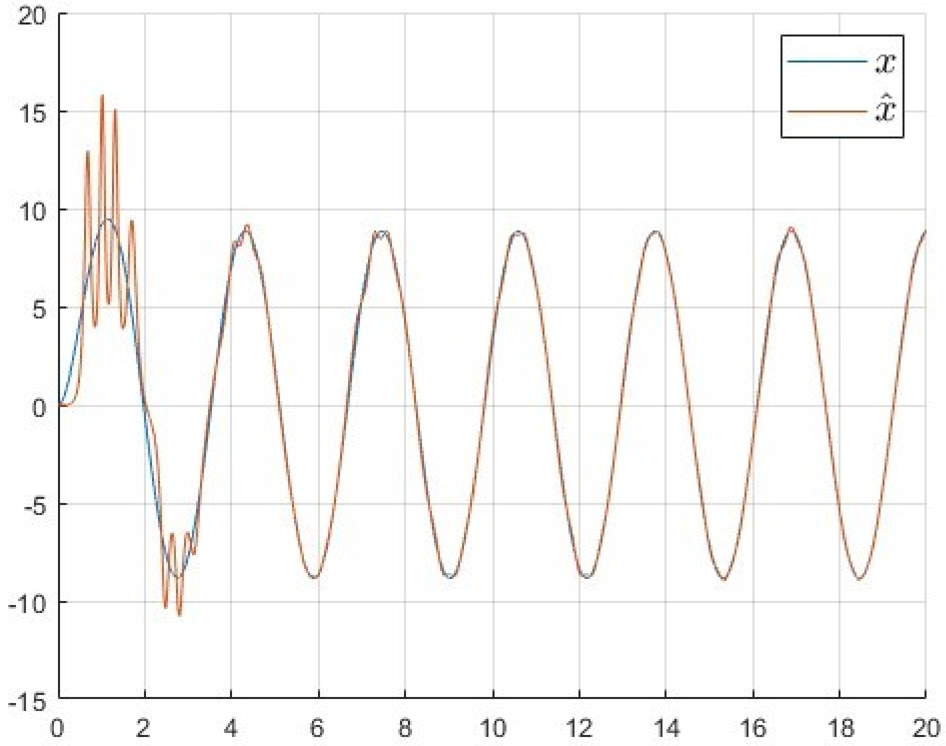
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha x_1 + bu \\ \dot{x}_2 = -\gamma_1 (x_1 + n)(x_1 + n - x_4) \\ \dot{x}_3 = \gamma_2 u (x_1 + n - x_4) \\ \dot{x}_4 = -x_2 x_4 + x_3 u + \theta_m (x_1 + n - x_4) \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσω $\gamma_1 = 5$ και $\gamma_2 = 1$,όπως και στην παράλληλη δομή, και τρέχοντας τον αλγόριθμο χωρίς θόρυβο για διάφορες τιμές του θ_m καταλήγω στο $\theta_m = 0.1$. Παραθέτω ενδεικτικά το διάγραμμα τις απόλυτης τιμής του σφάλματος για την συγκεκριμένη τιμή.

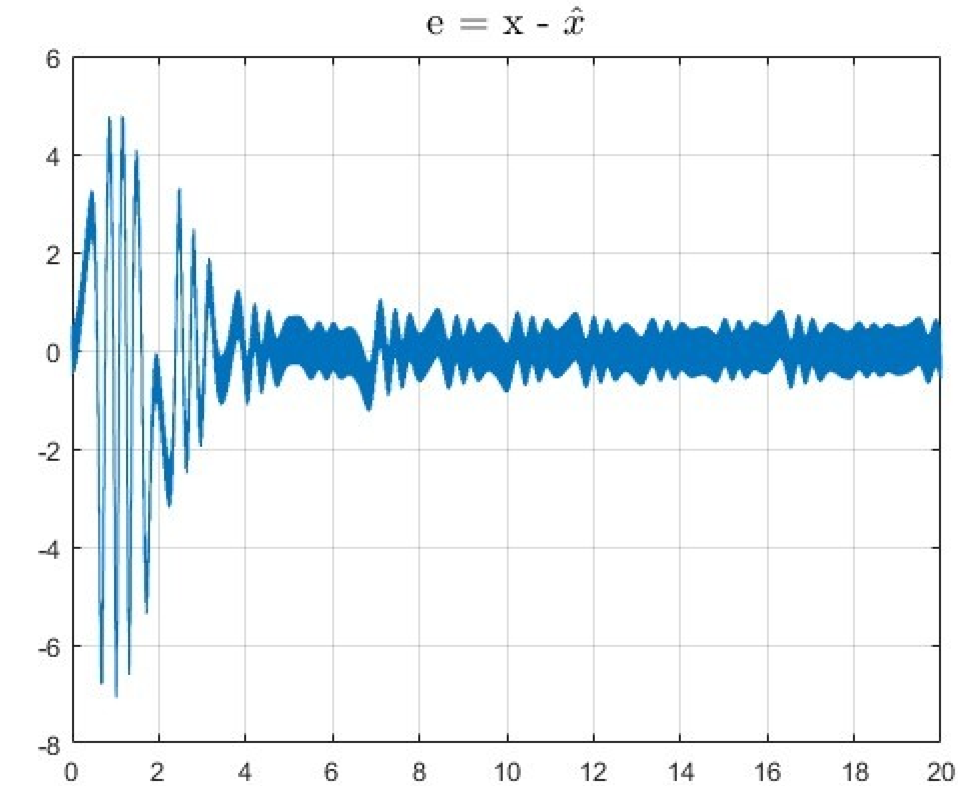


Εφόσον έγινε επιλογή των παραμέτρων τρέχω τον αλγόριθμο με θόρυβο και παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται:

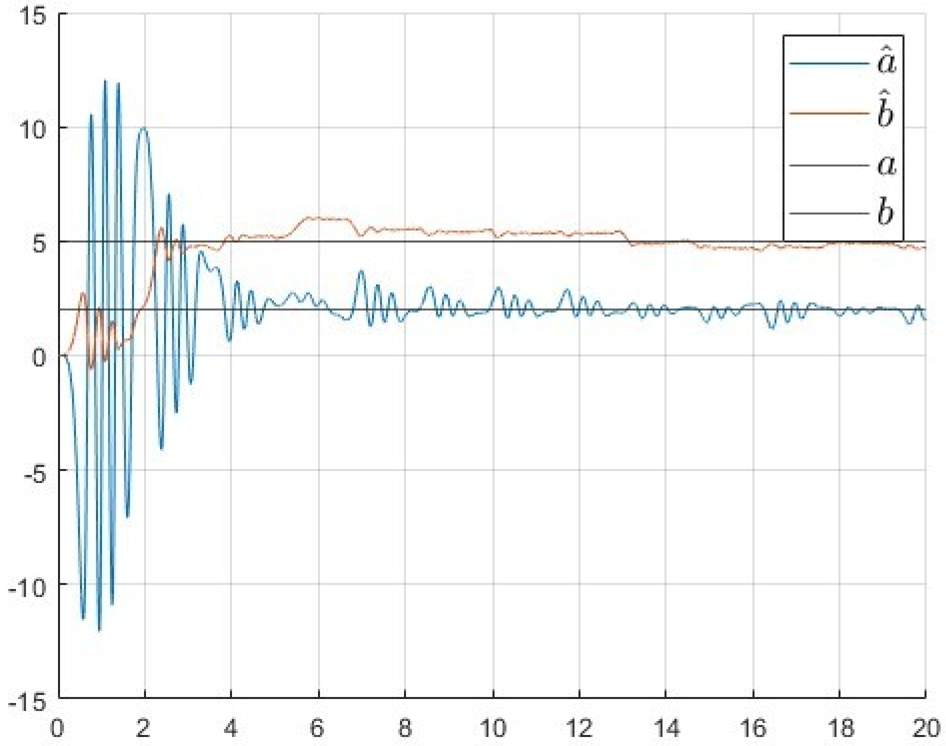
(Ισχύει και πάλι ότι $\hat{a} = \hat{\theta}_1$ και $\hat{b} = \hat{\theta}_2$)



x
$\hat{x}$
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20



e = x - $\hat{x}$
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20



Παρατηρώ ότι οι εκτιμήσεις των α,b δεν είναι καλές όταν χρησιμοποιώ μικτή δομή, συγκριτικά με την παράλληλη δομή. Αυτό συμβαίνει επειδή στην μικτή δομή ο θόρυβος εμφανίζεται στο τετράγωνο και όχι στην πρώτη όπως γίνεται στην παράλληλη δομή. Για αυτό οι εκτιμήσεις δεν είναι τόσο καλές και παρατηρείται ισχυρότερο σφάλμα.

Με αλλαγές στον θόρυβο (όπως και προηγουμένως) προκύπτουν παρόμοια συμπεράσματα με την διαφορά ότι τώρα στην μικτή δομή είναι σαφώς πιο έντονη η επιρροή του θορύβου.

<u>Θέμα 3</u>

i) <u>Παράλληλη Δομή</u>

Έχω το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu$, $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$. Για τις εκτιμήσεις θα χρησιμοποιήσω εκτιμητή πραγματικού χρόνου με την μέθοδο Lyapunov με παράλληλη δομή. Άρα το σύστημα αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$

Για το σφάλμα ισχύει:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} \Rightarrow \dot{e} = Ax + Bu - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u$$

Προσθαφαιρέτω τον όρο $A\hat{x}$ και άρα έχω:

$$\dot{e} = A(x - \hat{x}) - (\hat{A} - A)\hat{x} - (\hat{B} - B)u$$

$$\Rightarrow \dot{e} = Ae - \widetilde{A}\hat{x} - \widetilde{B}u, \text{ με } \widetilde{A} = \hat{A} - A \text{ και } \widetilde{B} = \hat{B} - B$$

Ορίζω συνάρτηση Lyapunov την παρακάτω:

$$V = e^T Pe + tr\left\{\frac{\tilde{A}^T P \tilde{A}}{\gamma_1}\right\} + tr\left\{\frac{\tilde{B}^T P \tilde{B}}{\gamma_2}\right\},$$ όπου tr{.} το ίχνος του πίνακα, $\gamma_1,\gamma_2 > 0$ και $P = P^T > 0$.

Παραγωγίζω την παραπάνω και έχω:

$$\dot{V} = \dot{e}^T Pe + e^T P\dot{e} + tr\left\{\frac{\dot{\tilde{A}}^T P \tilde{A}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}\right\} + tr\left\{\frac{\dot{\tilde{B}}^T P \tilde{B}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}\right\}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = e^T\left(PA + A^T P\right)e - 2e^T P\tilde{A}\hat{x} - 2e^T P\tilde{B}u + tr\left\{2\frac{\tilde{A}^T P \dot{\hat{A}}}{\gamma_1} + 2\frac{\tilde{B}^T P \dot{\hat{B}}}{\gamma_2}\right\}$$

Αφού $P=P^T>0$ και A αρνητικά ημιορισμένος πίνακας ισχύει ότι:

$$PA + A^T P = -I$$

και από τις ιδιότητες της συνάρτησης ίχνους καταλήγω ότι:

$$e^T P\tilde{A}\hat{x} = tr\left\{\tilde{A}^T P E\hat{x}^T\right\}$$

$$e^T P\tilde{B}u = tr\left\{\tilde{B}^T Peu^T\right\}$$

Άρα τελικά έχω:

$$\dot{V} = -e^T e + 2\,tr\left\{\frac{\tilde{A}^T P \dot{\hat{A}}}{\gamma_1} - \tilde{A}^T Pe\hat{x}^T + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\hat{B}}}{\gamma_2} - \tilde{B}^T Peu^T\right\}$$

$$\text{Επομένως}\quad\text{επιλέγω}\quad \begin{cases}\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e\hat{x}^T \\ \dot{\hat{B}} = \gamma_2 eu^T\end{cases}$$

$$\text{Έτσι}: \quad \dot{V} = -e^T e \le 0.$$

Επομένως για τους ίδιους λόγους που εξηγήθηκαν και στο Θέμα 2 το μοντέλο εκτίμησης συγκλίνει στο πραγματικό σύστημα. Τώρα μένει να βρω τις εξισώσεις κατάστασης.

Αρχικά από το πραγματικό σύστημα έχω:

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_1 \\ b_2\end{bmatrix}u$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u\end{cases}$$

Όμοια από το σύστημα αναγνώρισης προκύπτει ότι:

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11}\hat{x}_1 + \hat{a}_{12}\hat{x}_2 + \hat{b}_1 u \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21}\hat{x}_1 + \hat{a}_{22}\hat{x}_2 + \hat{b}_2 u\end{cases}$$

Από την σχέση $\dot{\hat{A}} = \gamma_1 e\hat{x}^T$ προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{a}}_{11} & \dot{\hat{a}}_{12} \\ \dot{\hat{a}}_{21} & \dot{\hat{a}}_{22} \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \gamma_1 \begin{bmatrix} \hat{x}_1 (x_1 - \hat{x}_1) & \hat{x}_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \hat{x}_1 (x_2 - \hat{x}_2) & \hat{x}_2 (x_2 - \hat{x}_2) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{a}}_{11} = \gamma_1 \hat{x}_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{a}}_{12} = \gamma_1 \hat{x}_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{a}}_{21} = \gamma_1 \hat{x}_1 (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{\hat{a}}_{22} = \gamma_1 \hat{x}_2 (x_2 - \hat{x}_2) \end{cases}$$

Ενώ από την σχέση $\dot{\hat{B}} = \gamma_2 e u^T$ έχω ότι:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{b}}_1 \\ \dot{\hat{b}}_2 \end{bmatrix} = \gamma_2 u \begin{bmatrix} x_1 - \hat{x}_1 \\ x_2 - \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

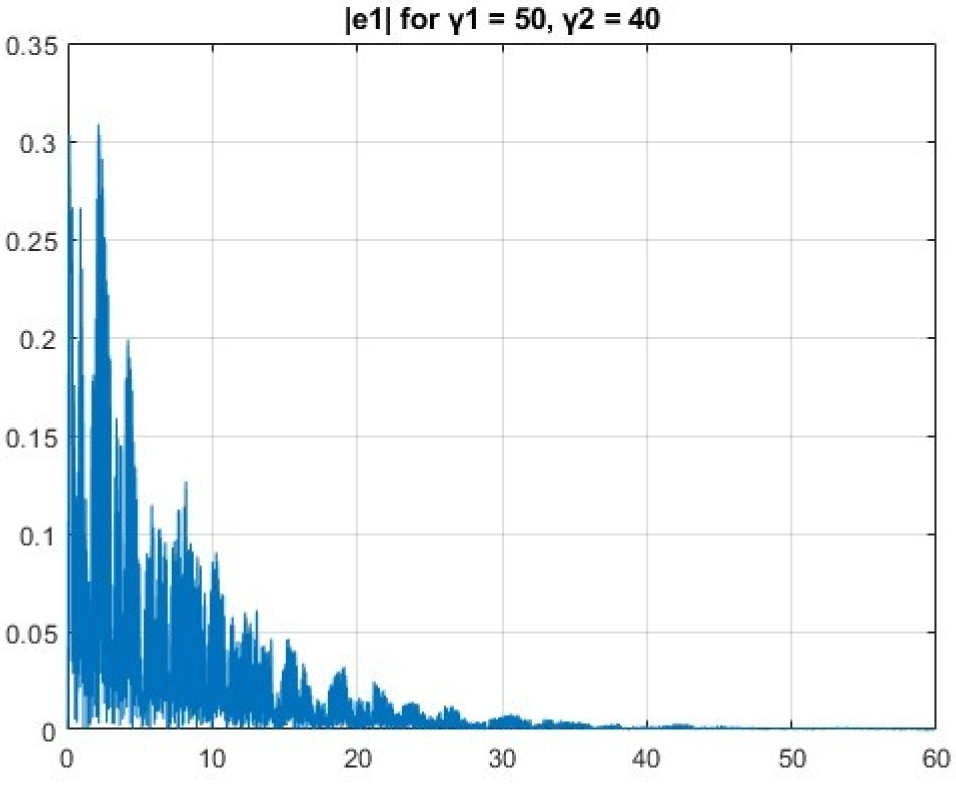
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{b}}_1 = \gamma_2 u (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{b}}_2 = \gamma_2 u (x_2 - \hat{x}_2) \end{cases}$$

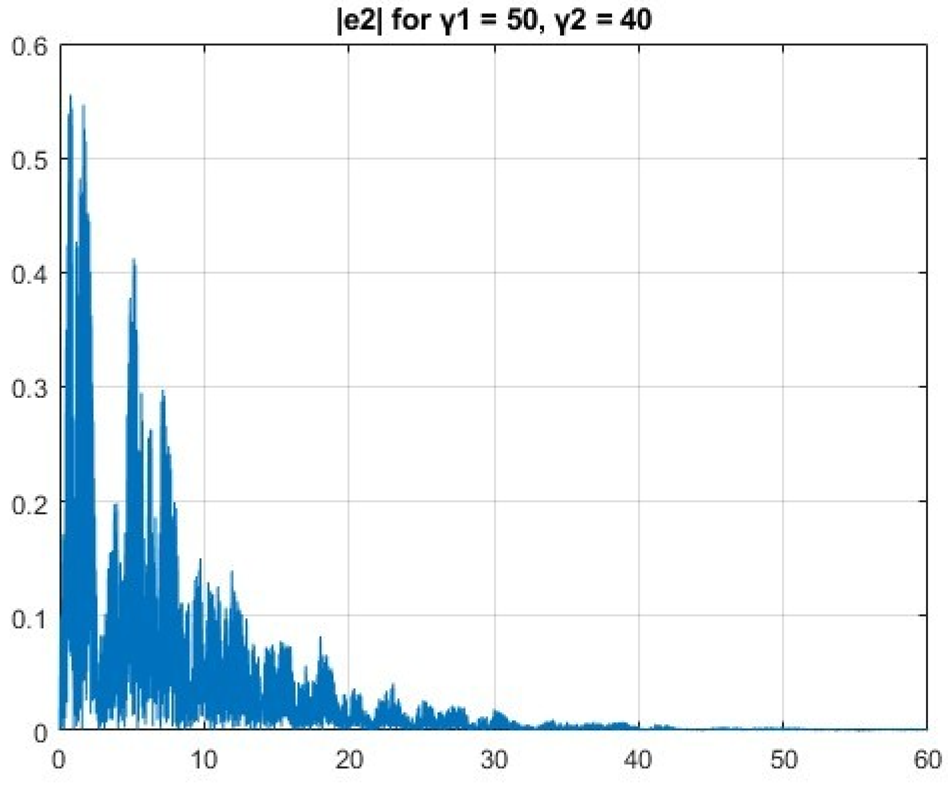
Από τις παραπάνω σχέσεις λοιπόν παίρνω τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \hat{a}_{11} \\ y_4 = \hat{a}_{12} \\ y_5 = \hat{a}_{21} \\ y_6 = \hat{a}_{22} \\ y_7 = \hat{b}_1 \\ y_8 = \hat{b}_2 \\ y_9 = \hat{x}_1 \\ y_{10} = \hat{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 u \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 u \\ \dot{y}_3 = \dot{\hat{a}}_{11} = \gamma_1 \hat{x}_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{y}_4 = \dot{\hat{a}}_{12} = \gamma_1 \hat{x}_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{y}_5 = \dot{\hat{a}}_{21} = \gamma_1 \hat{x}_1 (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_6 = \dot{\hat{a}}_{22} = \gamma_1 \hat{x}_2 (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_7 = \dot{\hat{b}}_1 = \gamma_2 u (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{y}_8 = \dot{\hat{b}}_2 = \gamma_2 u (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_9 = \dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11} \hat{x}_1 + \hat{a}_{12} \hat{x}_2 + \hat{b}_1 u \\ \dot{y}_{10} = \dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21} \hat{x}_1 + \hat{a}_{22} \hat{x}_2 + \hat{b}_2 u \end{cases}$$

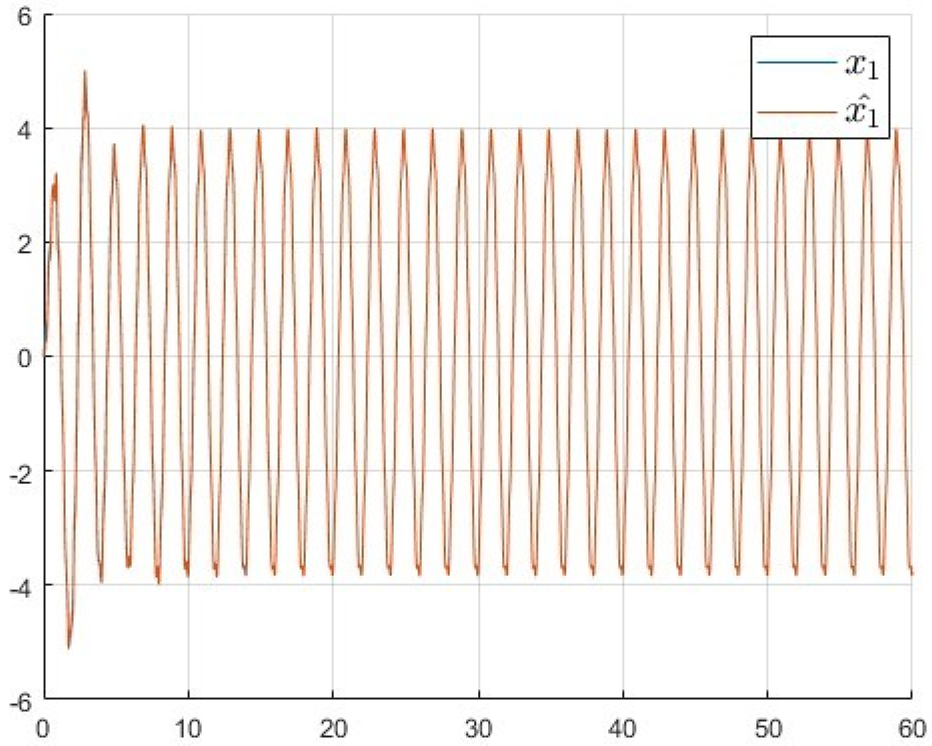
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1 u \\ \dot{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2 u \\ \dot{y}_3 = \gamma_1 y_9 (y_1 - y_9) \\ \dot{y}_4 = \gamma_1 y_{10} (y_1 - y_9) \\ \dot{y}_5 = \gamma_1 y_9 (y_2 - y_{10}) \\ \dot{y}_6 = \gamma_1 y_{10} (y_2 - y_{10}) \\ \dot{y}_7 = \gamma_2 u (y_1 - y_9) \\ \dot{y}_8 = \gamma_2 u (y_2 - y_{10}) \\ \dot{y}_9 = y_3 y_9 + y_4 y_{10} + y_7 u \\ \dot{y}_{10} = y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_8 u \end{cases}$$

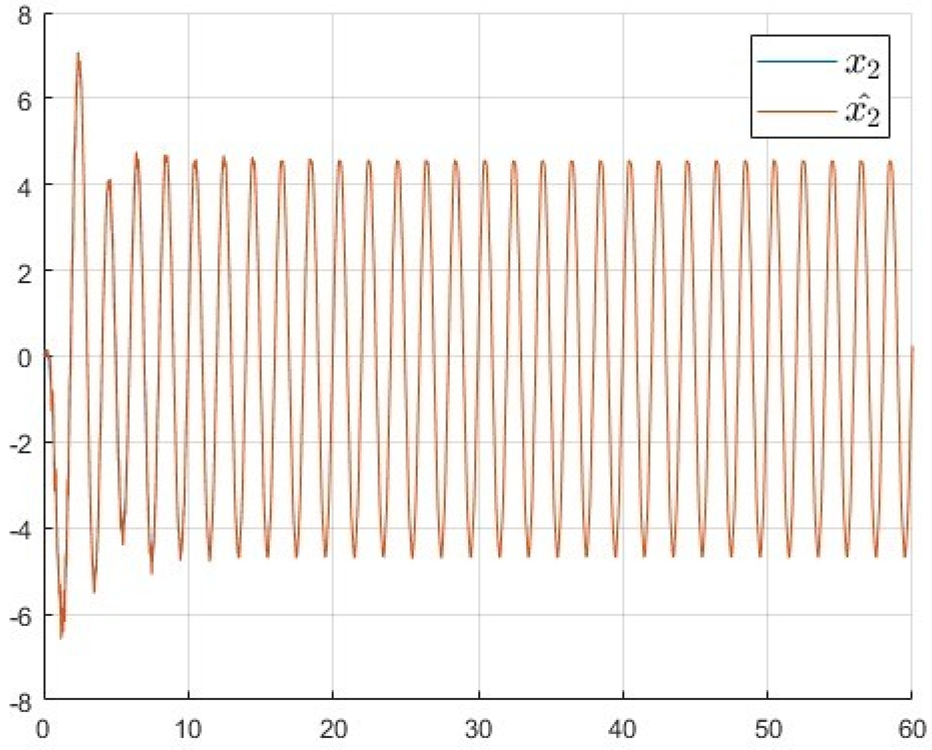
Αρχικά τρέχω τον αλγόριθμο για διάφορες τιμές των γ_1,γ_2 (10,20,30,40,50) και κοιτάζω την απόλυτη τιμή των σφαλμάτων, για να καταλήξω στα βέλτιστα. Τελικά καταλήγω στα γ_1 = 50 και γ_2 = 40. Παραθέτω ενδεικτικά τα διαγράμματα των σφαλμάτων για τις συγκεκριμένες τιμές (στο .m αρχείο υπάρχει ο κώδικας που δοκίμασε διάφορες τιμές).

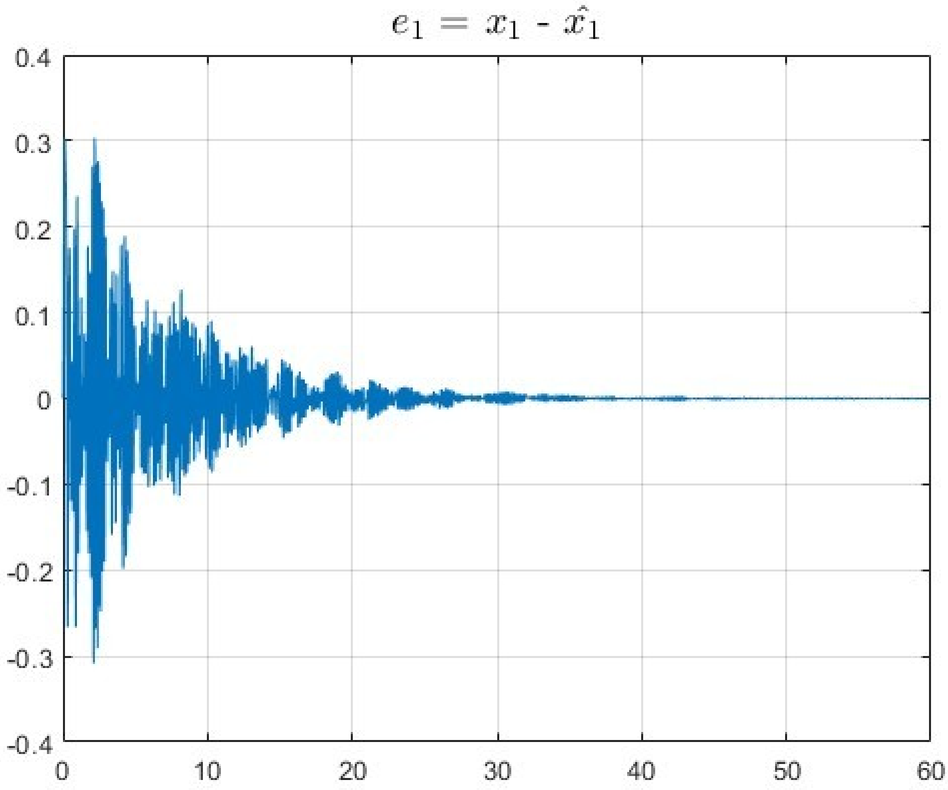




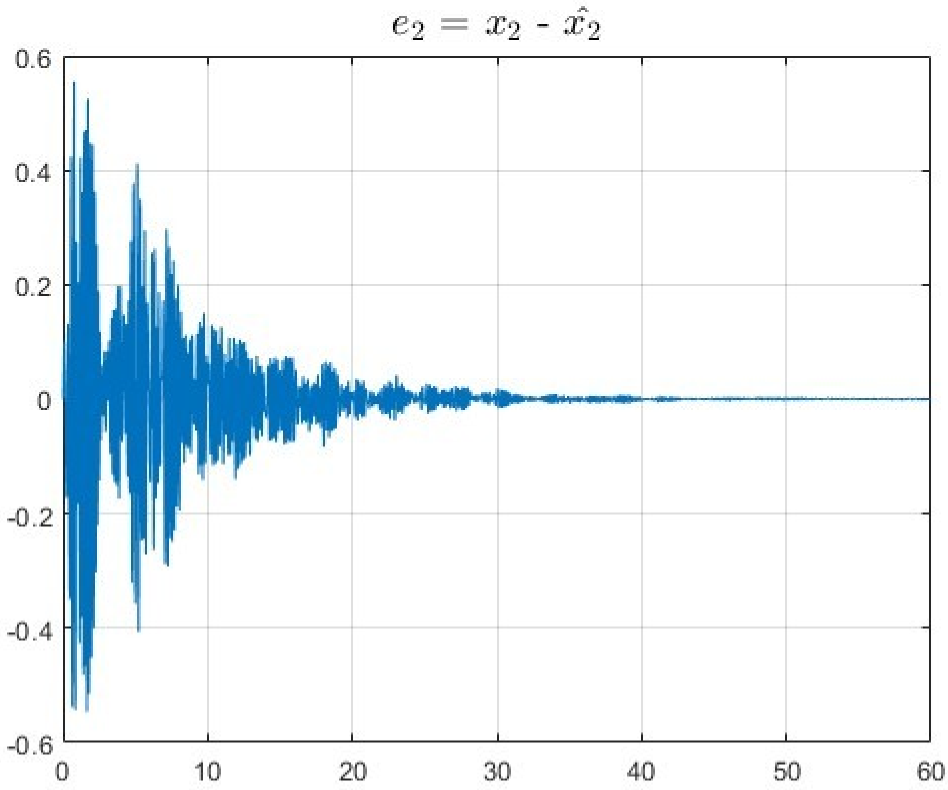
Παρακάτω φαίνονται όλες οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις για τις παραπάνω τιμές των γ.



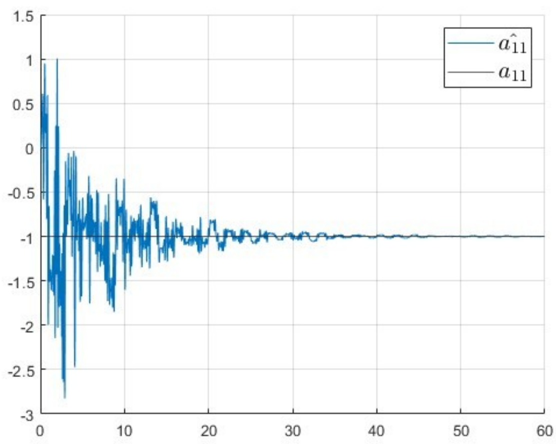




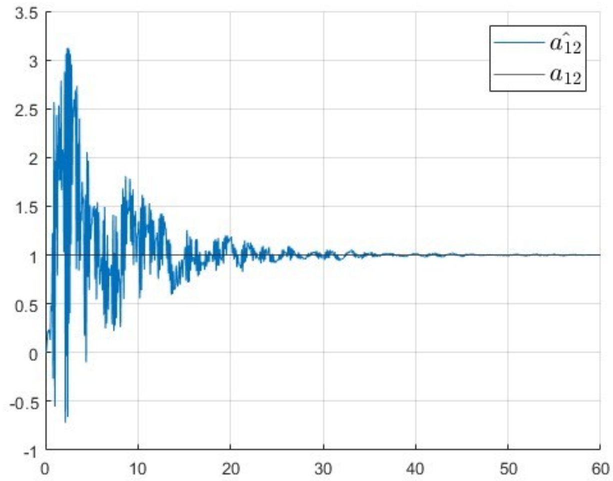
$e_1 = x_1 - \hat{x_1}$
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0
10
20
30
40
50
60



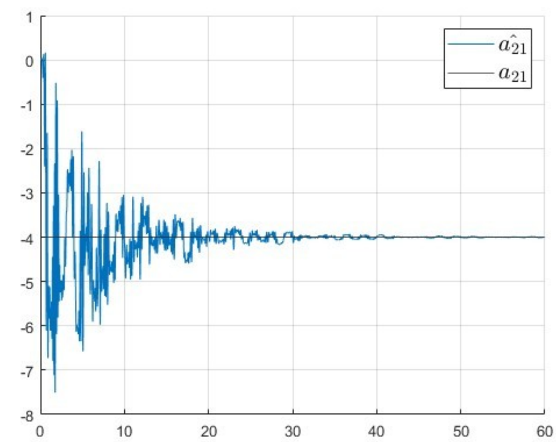
$e_2 = x_2 - \hat{x_2}$
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
10
20
30
40
50
60



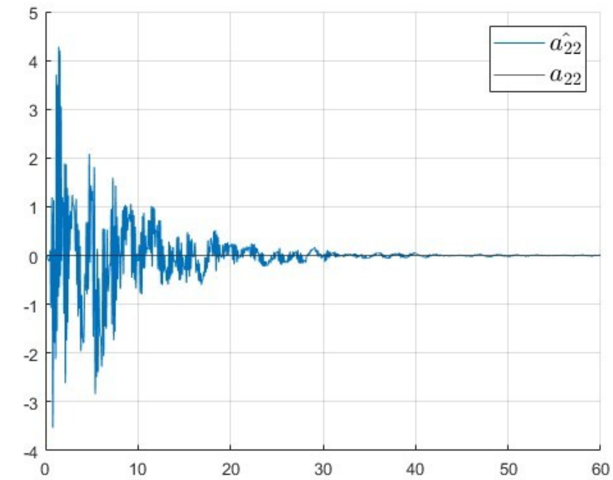
$\hat{a_{11}}$
a_{11}



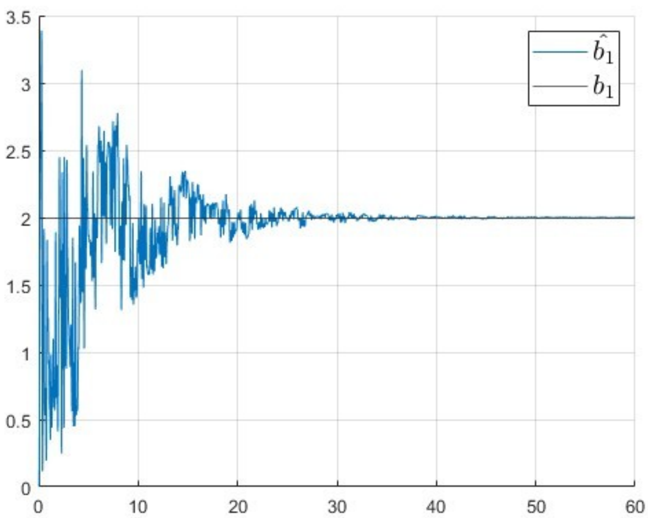
$\hat{a_{12}}$
a_{12}



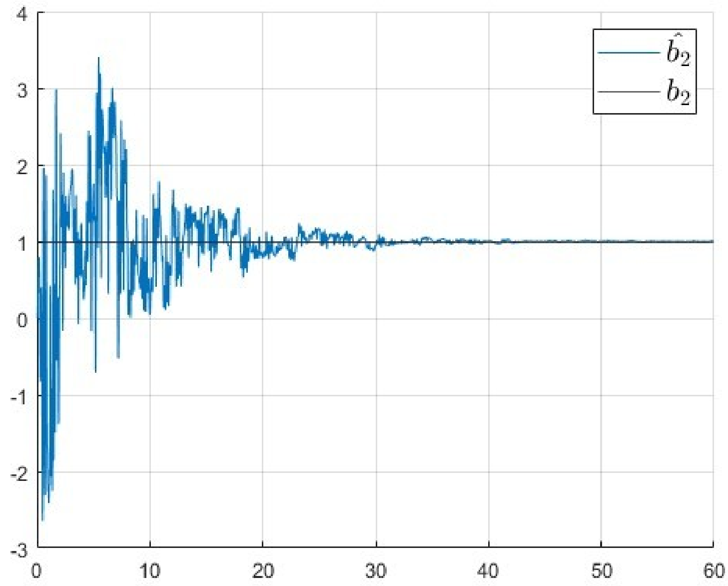
$\hat{a_{21}}$
a_{21}



$\hat{a_{22}}$
a_{22}



$\hat{b_1}$
b_1



ii) <u>Μεικτή Δομή</u>

Έχω το σύστημα $\dot{x} = Ax + Bu,\ \ x_1(0)=0,\ \ x_2(0)=0.$ Για τις εκτιμήσεις θα χρησιμοποιήσω εκτιμητή πραγματικού χρόνου με την μέθοδο Lyapunov μεικτής δομής. Άρα το σύστημα αναγνώρισης είναι:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}x + \hat{B}u - \Theta_m e$$

όπου $\Theta_m = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix}$. Για το σφάλμα ισχύει:

$$e = x - \hat{x} \Rightarrow \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - \hat{A}x - \hat{B}u + \Theta_m e$$

$$\Rightarrow \dot{e} = \Theta_m e - \tilde{A}x - \tilde{B}u,\ \ \text{με}\ \ \tilde{A} = \hat{A} - A\ \ \text{και}\ \ \tilde{B} = \hat{B} - B$$

Όπως και στην παράλληλη δομή επιλέγω συνάρτηση Lyapunov την:

$$V = e^T P e + tr\left\{\frac{\tilde{A}^T P \tilde{A}}{\gamma_1}\right\} + tr\left\{\frac{\tilde{B}^T P \tilde{B}}{\gamma_2}\right\}$$

Οπότε παραγωγίζοντας παίρνω:

$$\dot{V} = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} + tr\left\{\frac{\dot{\tilde{A}}^T P \tilde{A}}{\gamma_1} + \frac{\tilde{A}^T P \dot{\tilde{A}}}{\gamma_1}\right\} + tr\left\{\frac{\dot{\tilde{B}}^T P \tilde{B}}{\gamma_2} + \frac{\tilde{B}^T P \dot{\tilde{B}}}{\gamma_2}\right\}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = e^T(P\Theta_m + \Theta_m^T P)e - 2e^T P \tilde{A}x - 2e^T P \tilde{B}u + tr\left\{2\frac{\tilde{A}^T P \dot{\hat{A}}}{\gamma_1} + 2\frac{\tilde{B}^T P \dot{\hat{B}}}{\gamma_2}\right\}$$

Όμοια με πριν ισχύει ότι:

$$P\Theta_m + \Theta_m^T P = -I$$

$$e^T P \tilde{A}x = tr\{\tilde{A}^T P E x^T\}$$

$$e^T P \tilde{B}u = tr\{\tilde{B}^T P e u^T\}$$

Και άρα έχω:

$$\dot{V}=-e^{T}e+2\,tr\left\{\frac{\tilde{A}^{T}P\dot{\hat{A}}}{\gamma_1}-\tilde{A}^{T}Pe\,x^{T}+\frac{\tilde{B}^{T}P\dot{\hat{B}}}{\gamma_2}-\tilde{B}^{T}Peu^{T}\right\}$$

$$\text{Επομένως επιλέγω}\quad \begin{cases}\dot{\hat{A}}=\gamma_1 e\,x^{T}\\ \dot{\hat{B}}=\gamma_2 eu^{T}\end{cases}$$

Έτσι: $\dot{V}=-e^{T}e\leq 0$ προκειμένου το μοντέλο να συγκλίνει στο πραγματικό σύστημα σύμφωνα με τα θεωρήματα Barbalat και Lyapunov.

Εξάγω τις εξισώσεις κατάστασης με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως και στην παράλληλη δομή.

Από το πραγματικό σύστημα έχω:

$$\dot{x}=Ax+Bu\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}u$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+b_1u\\ \dot{x}_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+b_2u\end{cases}$$

Ενώ από το σύστημα αναγνώρισης προκύπτει ότι:

$$\dot{\hat{x}}=\hat{A}\,x+\hat{B}\,u-\Theta_m e$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}_1\\ \dot{\hat{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{a}_{11} & \hat{a}_{12}\\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\hat{b}_1\\ \hat{b}_2\end{bmatrix}u-\begin{bmatrix}\theta_{11} & \theta_{12}\\ \theta_{21} & \theta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-\hat{x}_1\\ x_2-\hat{x}_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{\hat{x}}_1=\hat{a}_{11}x_1+\hat{a}_{12}x_2+\hat{b}_1u-\theta_{11}(x_1-\hat{x}_1)-\theta_{12}(x_2-\hat{x}_2)\\ \dot{\hat{x}}_2=\hat{a}_{21}x_1+\hat{a}_{22}x_2+\hat{b}_2u-\theta_{21}(x_1-\hat{x}_1)-\theta_{22}(x_2-\hat{x}_2)\end{cases}$$

Από την σχέση $\dot{\hat{A}}=\gamma_1 e\,x^{T}$ προκύπτει:

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{a}}_{11} & \dot{\hat{a}}_{12}\\ \dot{\hat{a}}_{21} & \dot{\hat{a}}_{22}\end{bmatrix}=\gamma_1\begin{bmatrix}x_1-\hat{x}_1\\ x_2-\hat{x}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}=\gamma_1\begin{bmatrix}x_1(x_1-\hat{x}_1) & x_2(x_1-\hat{x}_1)\\ x_1(x_2-\hat{x}_2) & x_2(x_2-\hat{x}_2)\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{\hat{a}}_{11}=\gamma_1x_1(x_1-\hat{x}_1)\\ \dot{\hat{a}}_{12}=\gamma_1x_2(x_1-\hat{x}_1)\\ \dot{\hat{a}}_{21}=\gamma_1x_1(x_2-\hat{x}_2)\\ \dot{\hat{a}}_{22}=\gamma_1x_2(x_2-\hat{x}_2)\end{cases}$$

Ενώ από την σχέση $\dot{\hat{B}}=\gamma_2 eu^{T}$ έχω ότι:

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{b}}_1\\ \dot{\hat{b}}_2\end{bmatrix}=\gamma_2u\begin{bmatrix}x_1-\hat{x}_1\\ x_2-\hat{x}_2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dot{\hat{b}}_1=\gamma_2u(x_1-\hat{x}_1)\\ \dot{\hat{b}}_2=\gamma_2u(x_2-\hat{x}_2)\end{cases}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις λοιπόν παίρνω τις εξισώσεις κατάστασης του συστήματος:

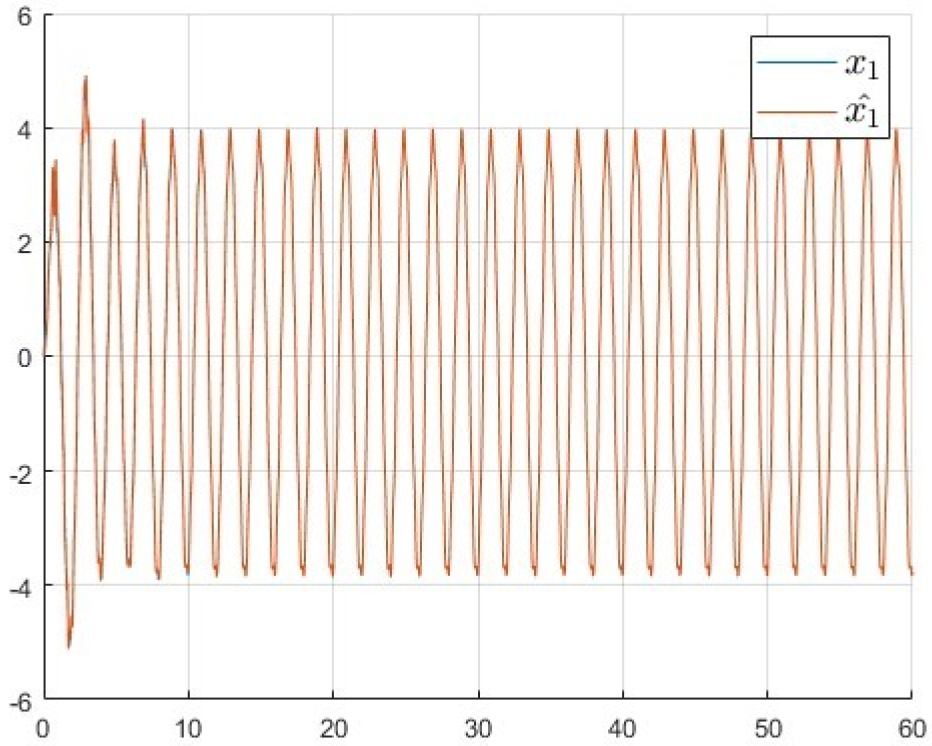
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \hat{a}_{11} \\ y_4 = \hat{a}_{12} \\ y_5 = \hat{a}_{21} \\ y_6 = \hat{a}_{22} \\ y_7 = \hat{b}_1 \\ y_8 = \hat{b}_2 \\ y_9 = \hat{x}_1 \\ y_{10} = \hat{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + b_1 u \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + b_2 u \\ \dot{y}_3 = \dot{\hat{a}}_{11} = \gamma_1 x_1 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{y}_4 = \dot{\hat{a}}_{12} = \gamma_1 x_2 (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{y}_5 = \dot{\hat{a}}_{21} = \gamma_1 x_1 (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_6 = \dot{\hat{a}}_{22} = \gamma_1 x_2 (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_7 = \dot{\hat{b}}_1 = \gamma_2 u (x_1 - \hat{x}_1) \\ \dot{y}_8 = \dot{\hat{b}}_2 = \gamma_2 u (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_9 = \dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11} x_1 + \hat{a}_{12} x_2 + \hat{b}_1 u - \theta_{11} (x_1 - \hat{x}_1) - \theta_{12} (x_2 - \hat{x}_2) \\ \dot{y}_{10} = \dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{21} x_1 + \hat{a}_{22} x_2 + \hat{b}_2 u - \theta_{21} (x_1 - \hat{x}_1) - \theta_{22} (x_2 - \hat{x}_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + b_1 u \\ \dot{y}_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + b_2 u \\ \dot{y}_3 = \gamma_1 y_1 (y_1 - y_9) \\ \dot{y}_4 = \gamma_1 y_2 (y_1 - y_9) \\ \dot{y}_5 = \gamma_1 y_1 (y_2 - y_{10}) \\ \dot{y}_6 = \gamma_1 y_2 (y_2 - y_{10}) \\ \dot{y}_7 = \gamma_2 (y_1 - y_9) u \\ \dot{y}_8 = \gamma_2 (y_2 - y_{10}) u \\ \dot{y}_9 = y_3 y_1 + y_4 y_2 + y_7 u - \theta_{11} (y_1 - y_9) - \theta_{12} (y_2 - y_{10}) \\ \dot{y}_{10} = y_5 y_1 + y_6 y_2 + y_8 u - \theta_{21} (y_1 - y_9) - \theta_{22} (y_2 - y_{10}) \end{cases}$$

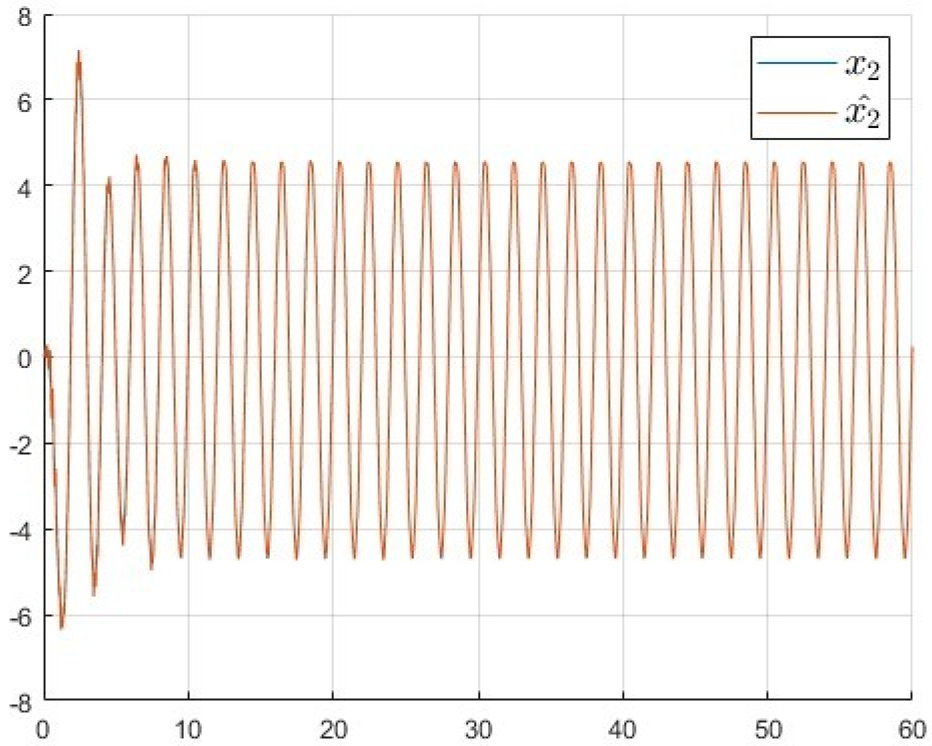
Όπως και στην παράλληλη δομή επιλέγω $\gamma_1 = 50$ και $\gamma_2 = 40$. Τρέχοντας πειραματικά τον αλγόριθμο για διάφορες τιμές των $\theta_{i,j}$ καταλήγω στις παρακάτω τιμές για τον Θ_m που έχω ικανοποιητικά αποτελέσματα.

$$\Theta_m = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

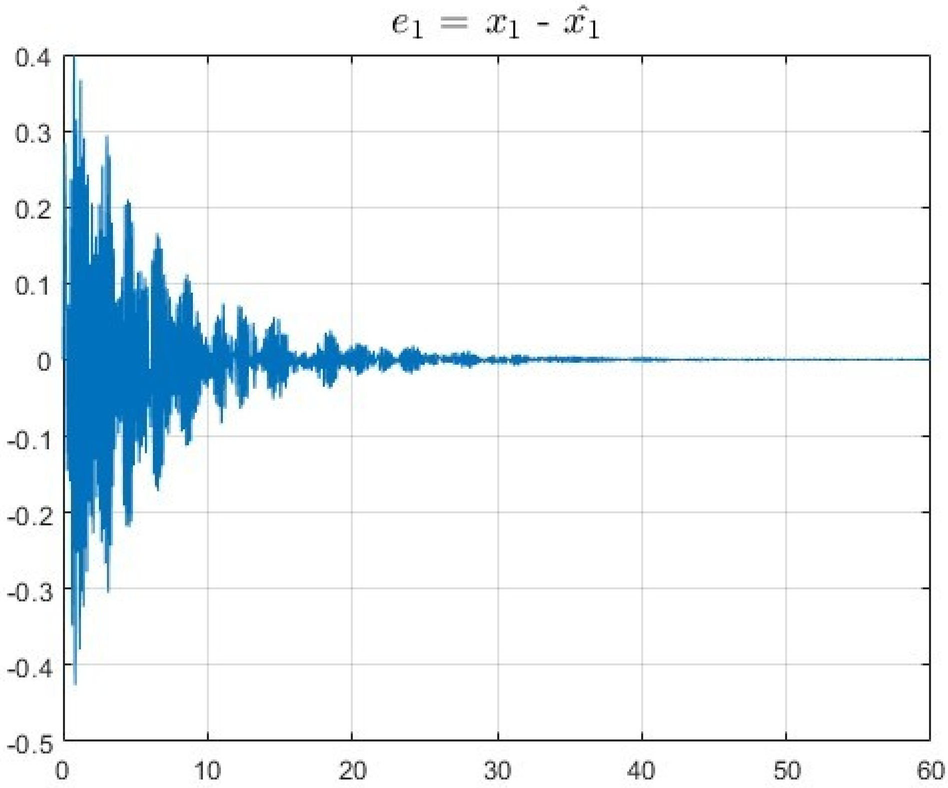
Τα ζητούμενα διαγράμματα παρακάτω είναι με βάση αυτές τις τιμές.

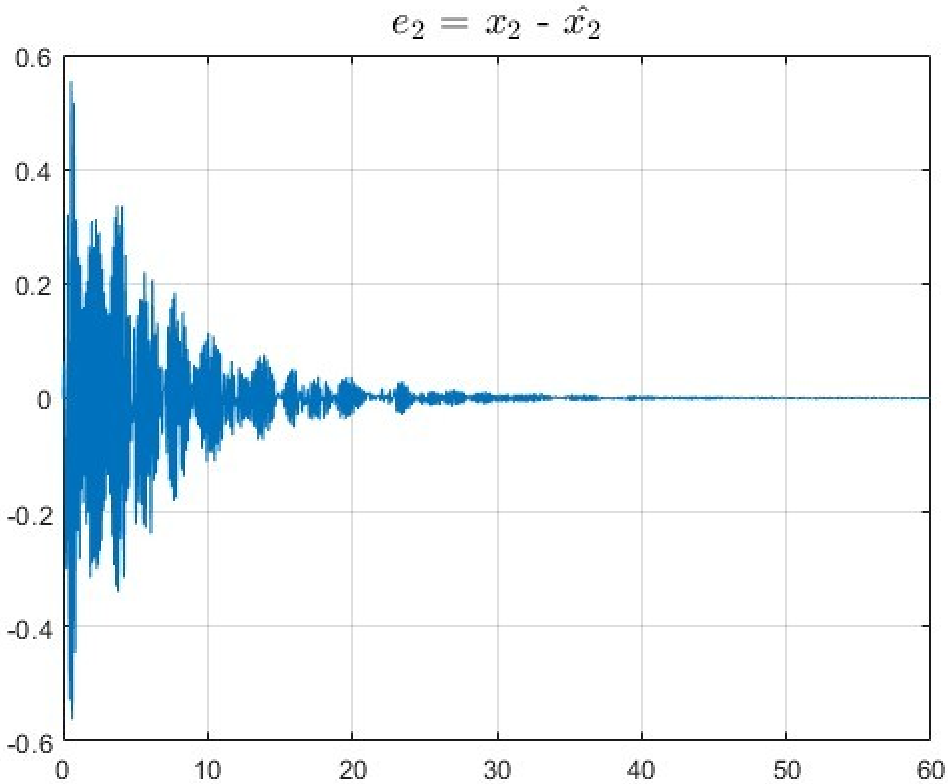


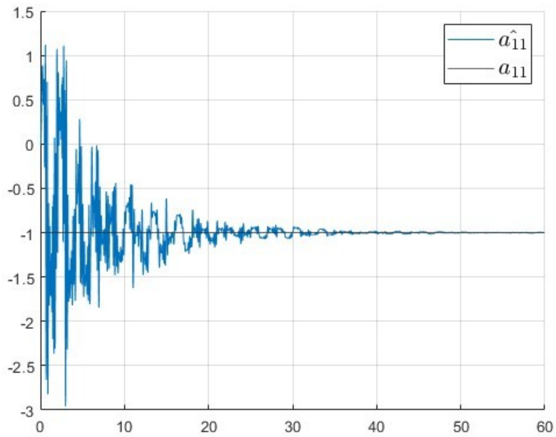
6
4
2
0
-2
-4
-6
0
10
20
30
40
50
60
x_1
$\hat{x_1}$

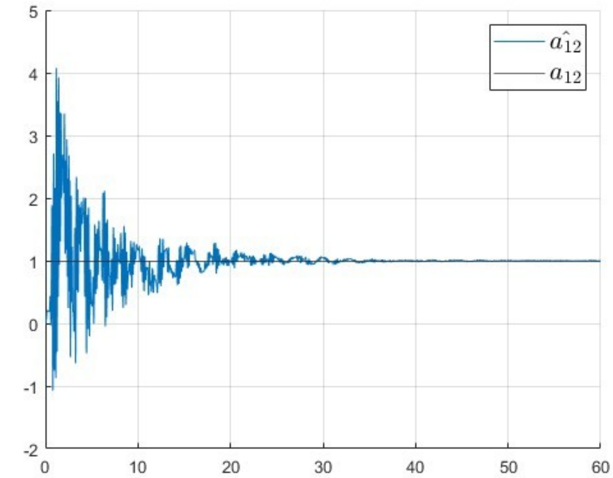


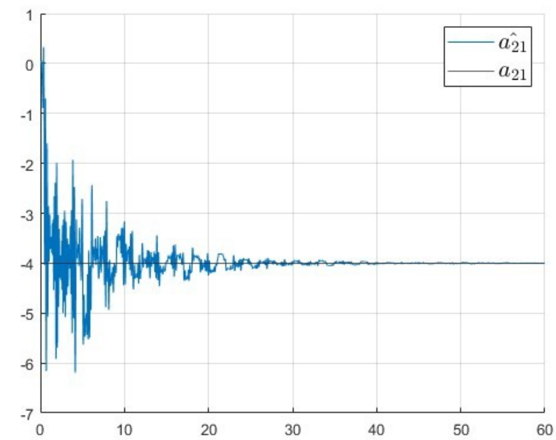
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
0
10
20
30
40
50
60
x_2
$\hat{x_2}$

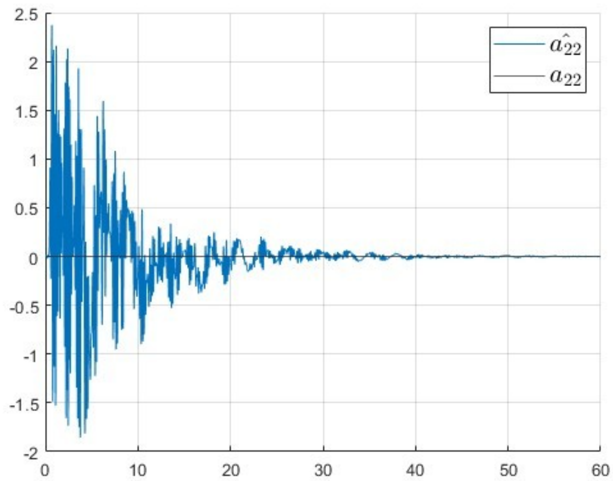

$e_1 = x_1 - \hat{x_1}$
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
0
10
20
30
40
50
60

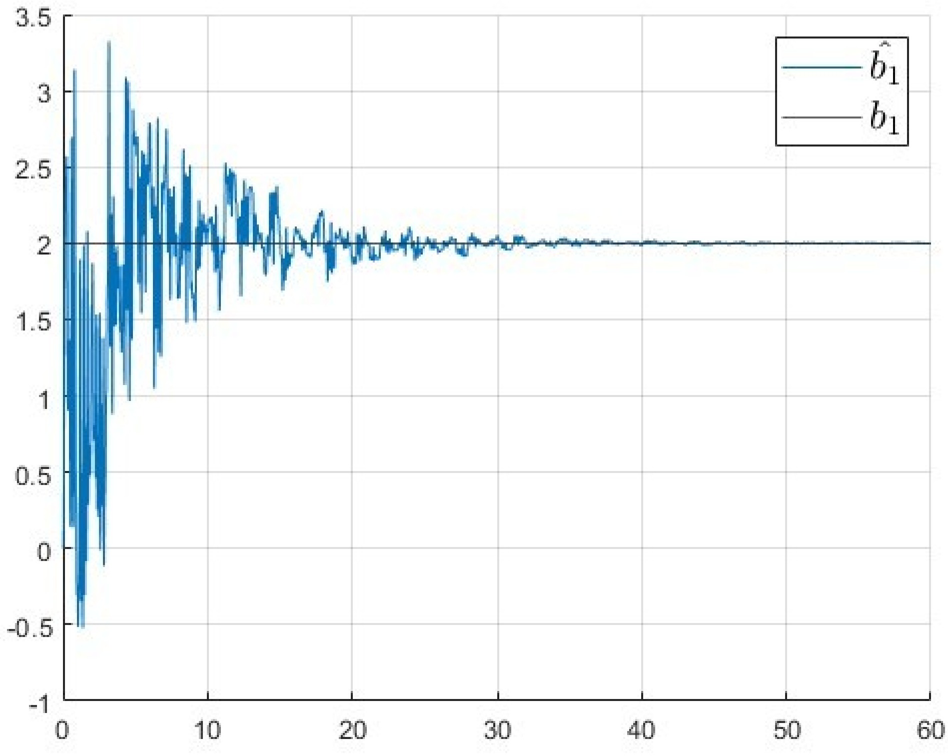

$e_2 = x_2 - \hat{x_2}$
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
0
10
20
30
40
50
60

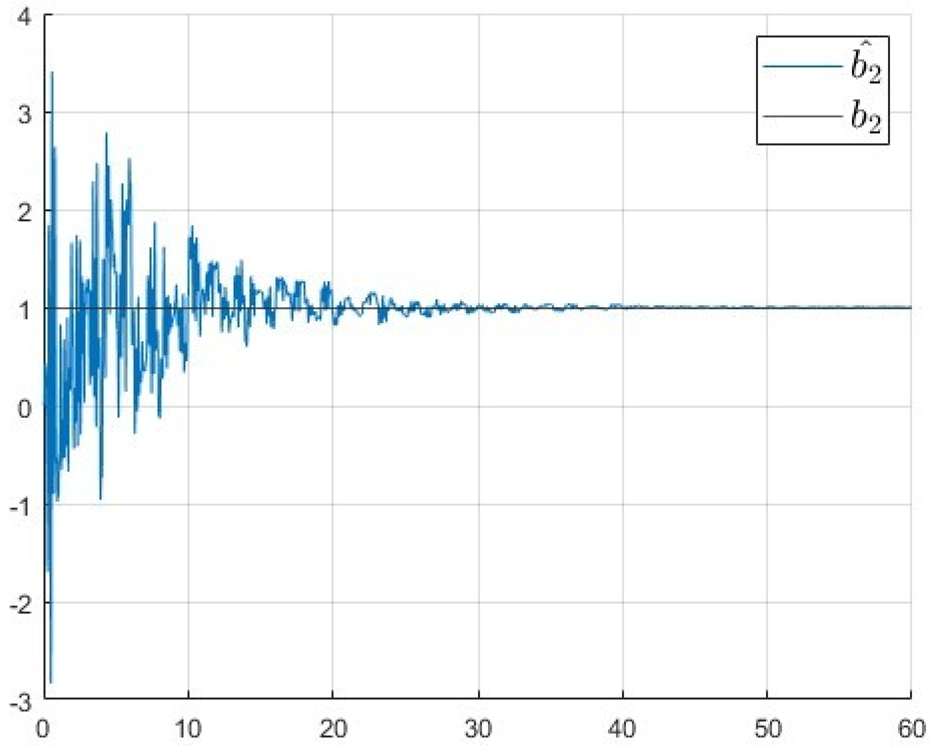

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
0
10
20
30
40
50
60
$\hat{a_{11}}$
a_{11}


5
4
3
2
1
0
-1
-2
0
10
20
30
40
50
60
$\hat{a_{12}}$
a_{12}


1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
0
10
20
30
40
50
60
$\hat{a_{21}}$
a_{21}


2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
10
20
30
40
50
60
$\hat{a_{22}}$
a_{22}


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
10
20
30
40
50
60
$\hat{b_1}$
b_1



Γενικά παρατηρώ ότι οι εκτιμήσεις για τα x_1 και x_2 είναι πολύ κοντά στις πραγματικές συναρτήσεις και με την πάροδο του χρόνου οι εκτιμήσεις των $a_{i,j}$ και b_i τείνουν στις πραγματικές τους τιμές. Παρόλα αυτά η μεικτή δομή παρουσιάζει ελαφρώς καλύτερη απόδοση και γρηγορότερη απόκριση.

<u>Θέμα 4</u>

Έχω το σύστημα: $\dot{x}=-\theta_1^* f(x)+\theta_2^* u,\ x(0)=0$. Θα χρησιμοποιήσω μεικτή δομή συστήματος αναγνώρισης και άρα έχω:

$$\dot{\hat{x}}=-\hat{\theta}_1 f(x)+\hat{\theta}_2 u+a_m(x-\hat{x}),\ \text{με}\ a_m>0$$

Για το σφάλμα εκτίμησης ισχύει:

$$e=x-\hat{x}\Rightarrow\dot{e}=\dot{x}-\dot{\hat{x}}=-\theta_1^* f(x)+\theta_2^* u+\hat{\theta}_1 f(x)-\hat{\theta}_2 u-am(x-\hat{x})$$

$$\Rightarrow\dot{e}=-a_m e+(\hat{\theta}_1-\theta_1^*)f(x)-(\hat{\theta}_2-\theta_2^*)u$$

$$\Rightarrow\dot{e}=-a_m e+\tilde{\theta}_1 f(x)-\tilde{\theta}_2 u,\ \text{με}\ \tilde{\theta}_1=\hat{\theta}_1-\theta_1^*\ \text{και}\ \tilde{\theta}_2=\hat{\theta}_2-\theta_2^*$$

Επιλέγω την παρακάτω συνάρτηση Lyapunov και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο έχω:

$$V=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2+\frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2\geq 0$$

$$\Rightarrow\dot{V}=e\dot{e}+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\Rightarrow\dot{V}=e(-a_m e+\tilde{\theta}_1 f(x)-\tilde{\theta}_2 u)+\frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\dot{\hat{\theta}}_2$$

$$\Rightarrow \dot{V} = -a_m e^2 + e\tilde{\theta}_1 f(x) - e\tilde{\theta}_2 u + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2$$

Επιλέγω $\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}_1 = -\gamma_1 e f(x) \\ \dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 e u \end{cases}$

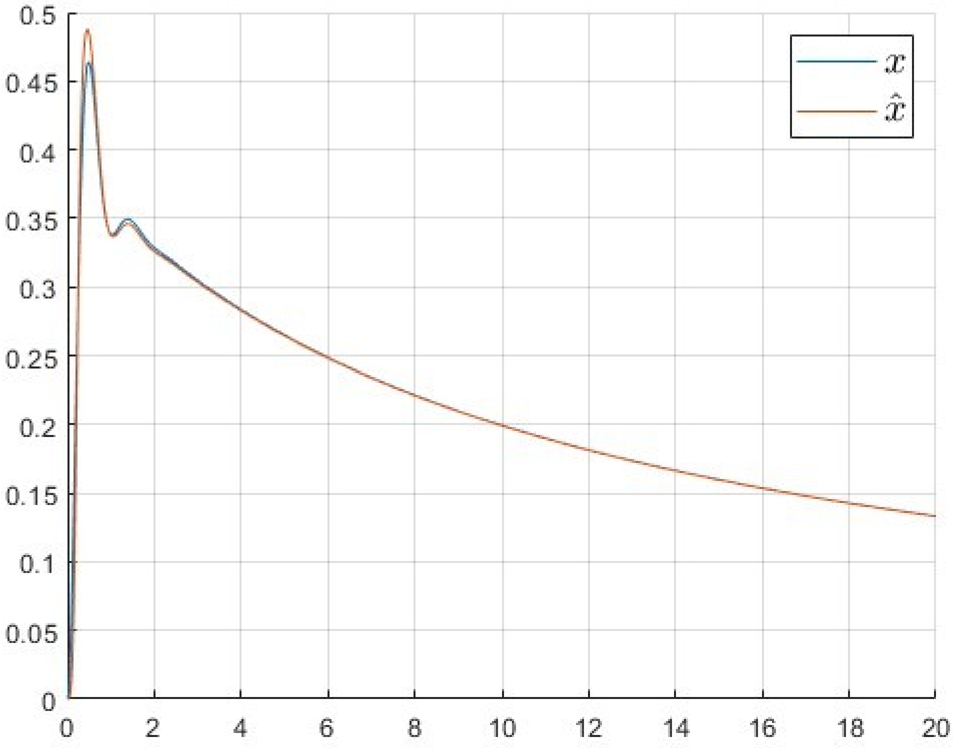
Οπότε $\dot{V} = -a_m e^2 \leq 0$ και με ίδια επιχειρηματολογία όπως και πριν καταλήγω ότι το μοντέλο εκτίμησης συγκλίνει στο πραγματικό σύστημα.
Επομένως από όλα τα παραπάνω προκύπτουν οι εξής εξισώσεις κατάστασης:

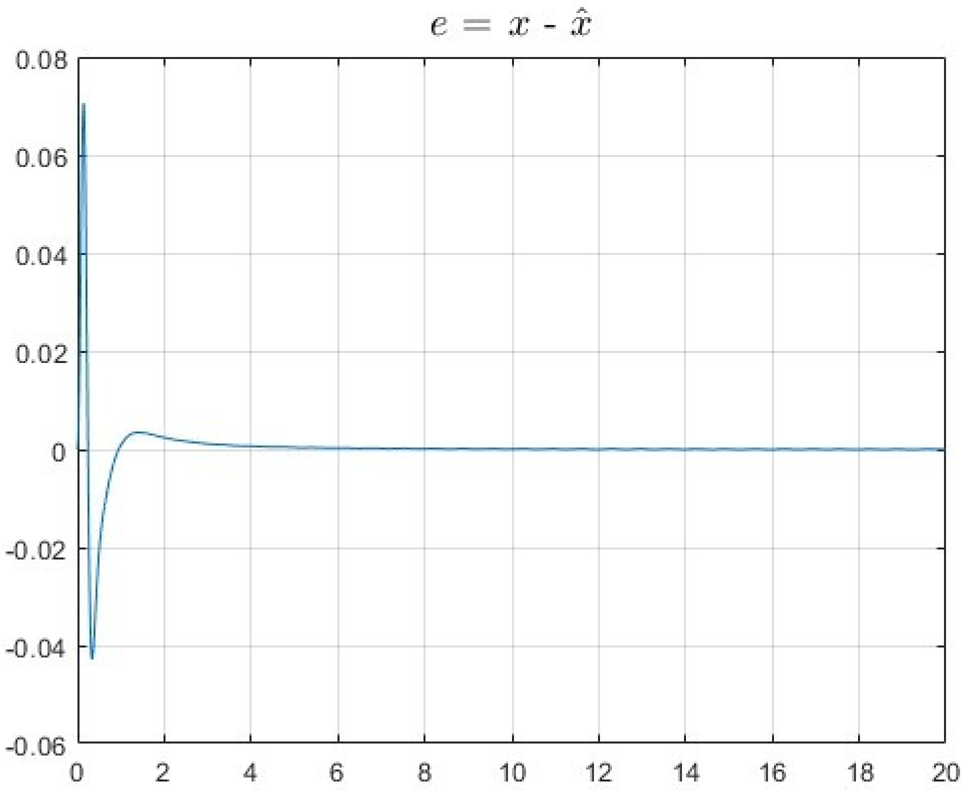
$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{\theta}_1 \\ x_3 = \hat{\theta}_2 \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{x} = -\theta_1^* f(x) + \theta_2^* u \\ \dot{x}_2 = \dot{\hat{\theta}}_2 = -\gamma_1 (x - \hat{x}) f(x) \\ \dot{x}_3 = \dot{\hat{\theta}}_3 = \gamma_2 (x - \hat{x}) u \\ \dot{x}_4 = \dot{\hat{x}} = -\hat{\theta}_1 f(x) + \hat{\theta}_2 u + a_m (x - \hat{x}) \end{cases}$$

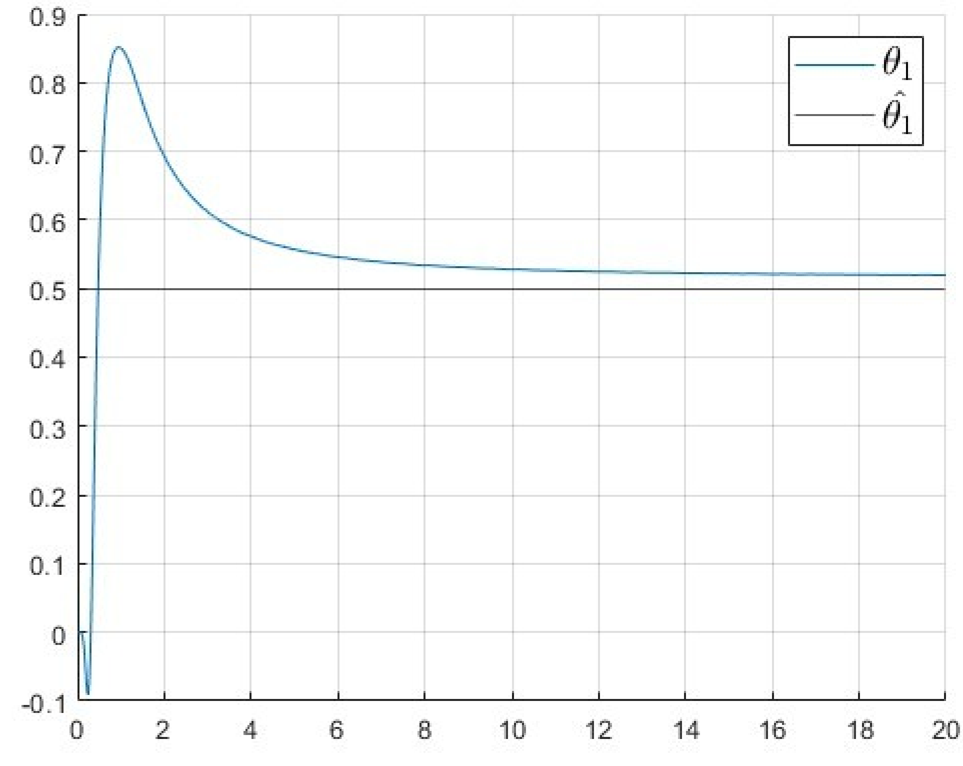
$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\theta_1^* f(x_1) + \theta_2^* u \\ \dot{x}_2 = -\gamma_1 (x_1 - x_4) f(x_1) \\ \dot{x}_3 = \gamma_2 (x_1 - x_4) u \\ \dot{x}_4 = -x_2 f(x_1) + x_3 u + a_m (x_1 - x_4) \end{cases}$$

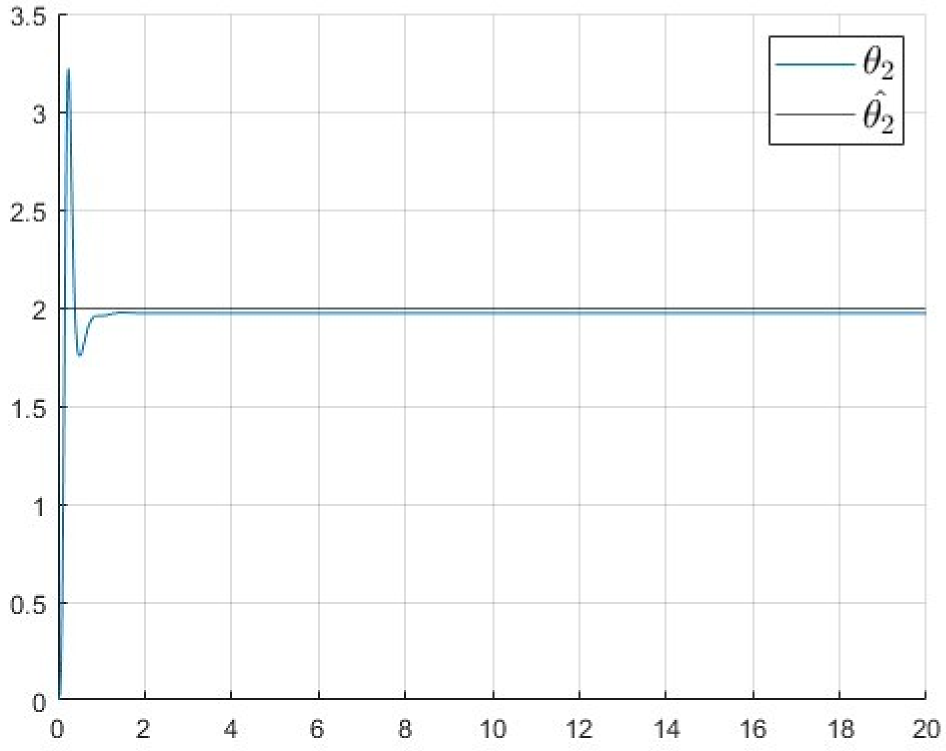
i) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2\pi t) e^{-3t}$

Δοκιμάζοντας πειραματικά διάφορες τιμές τελικά καταλήγω στα $\gamma_1 = 950$, $\gamma_2 = 500$ και $a_m = 5$. Παρακάτω φαίνονται οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις.



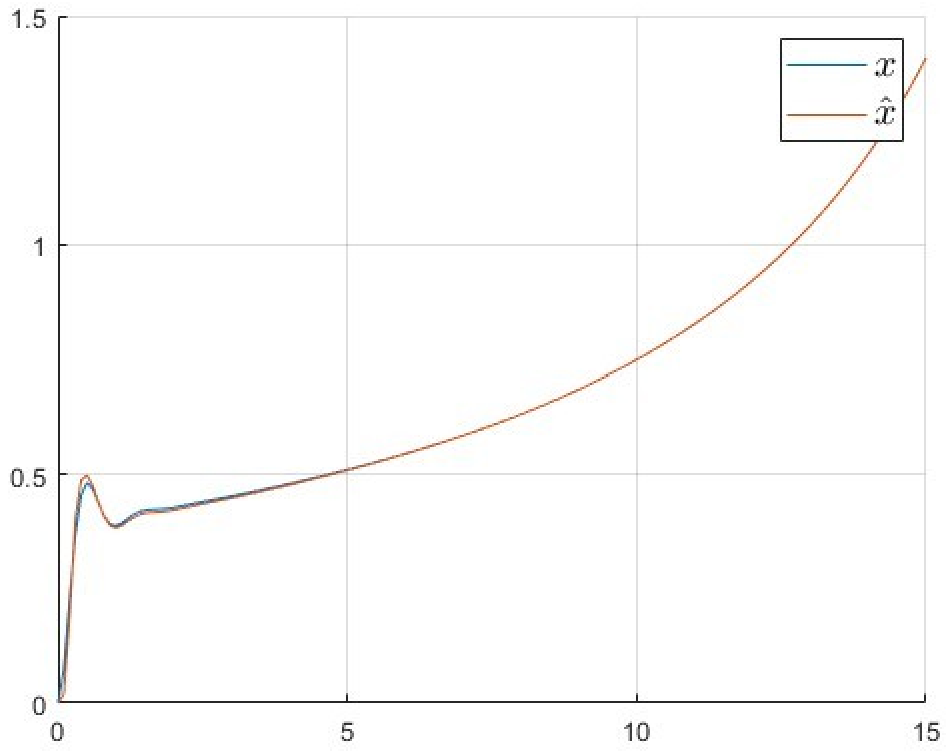

$e = x - \hat{x}$
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

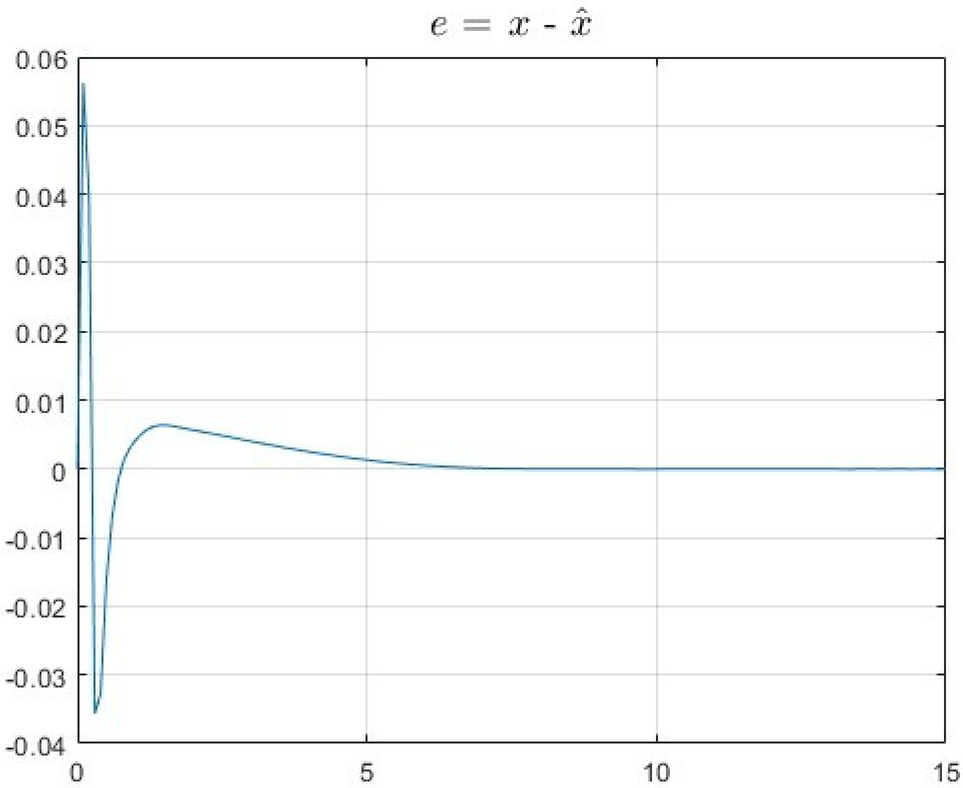

θ_1
$\hat{\theta}_1$
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20

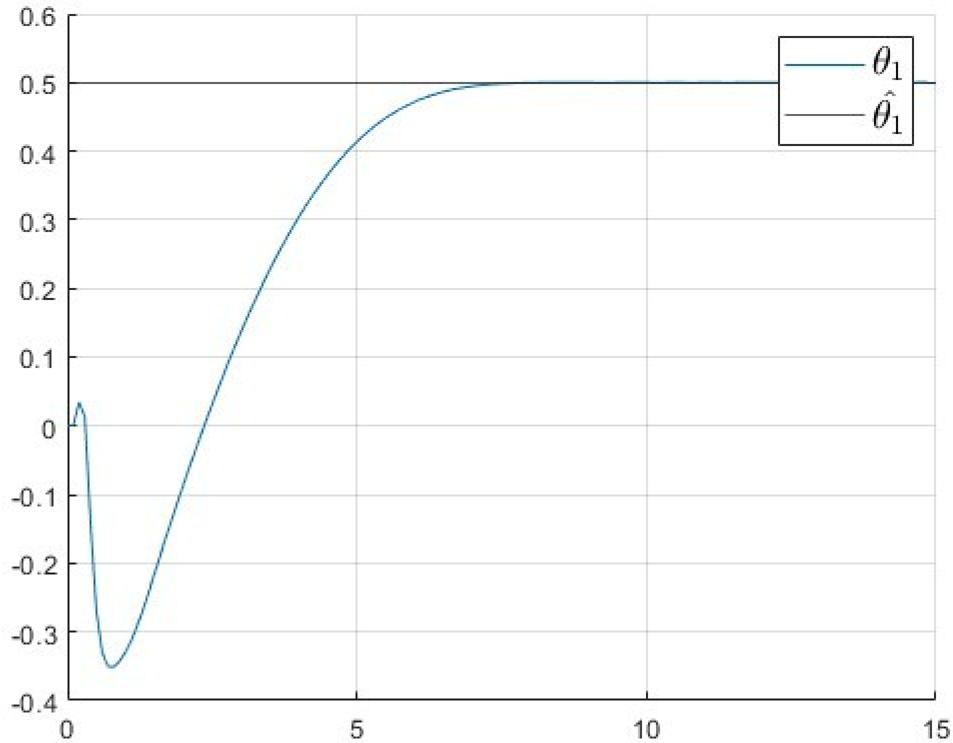


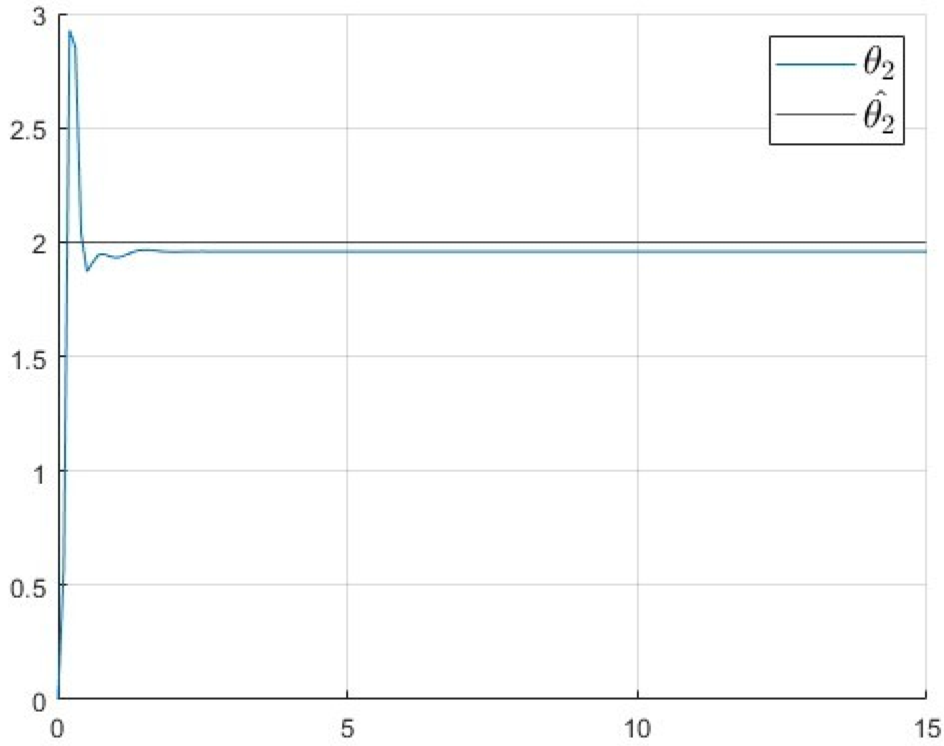
ii) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

Βάζοντας τις ίδιες τιμές στις παραμέτρους παίρνω τα παρακάτω αποτελέσματα




$e = x - \hat{x}$
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
0
5
10
15


θ_1
$\hat{\theta}_1$
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
0
5
10
15



3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
θ_2
$\hat{\theta}_2$