Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Τεχνικές Βελτιστοποίησης
Εργασία 1

Χριστοφορίδης Χρήστος – ΑΕΜ 10395
christoscs@ece.auth.gr

31/10/2024

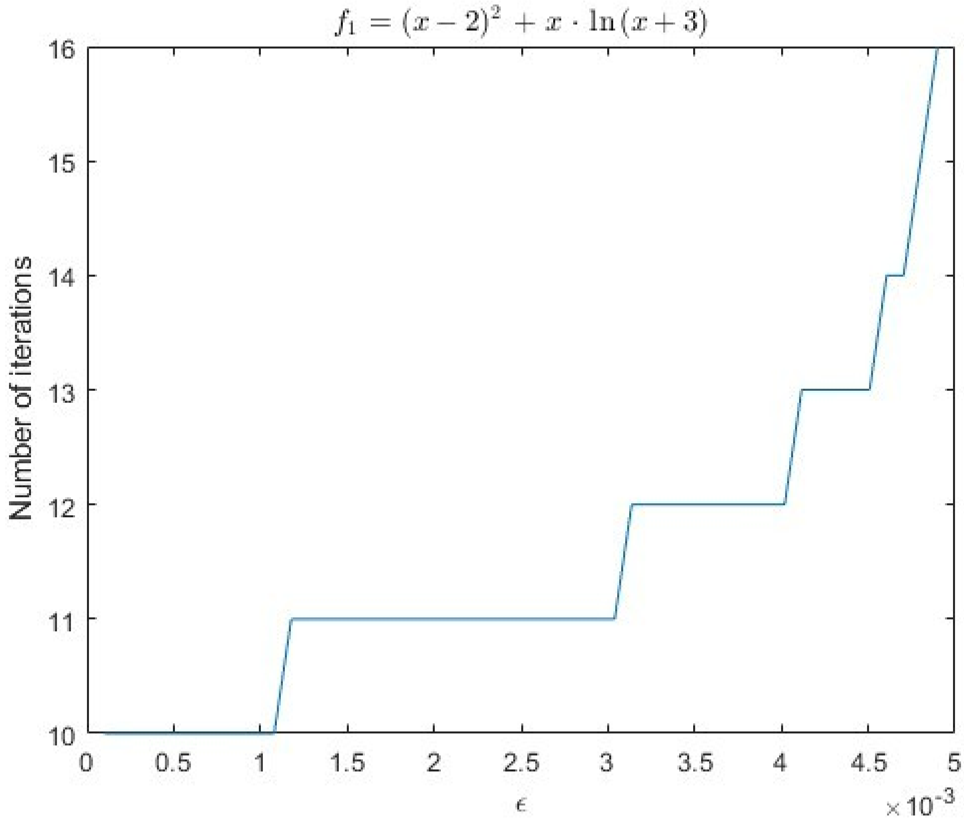
Ζητούμενο της εργασίας είναι η ελαχιστοποίηση μιας δοσμένης κυρτής συνάρτησης f(x) όταν το x ανήκει σε διάστημα [a,b].
Το δοσμένο αρχικό διάστημα είναι το [-1, 3] και οι συναρτήσεις που θα ελαχιστοποιηθούν είναι:

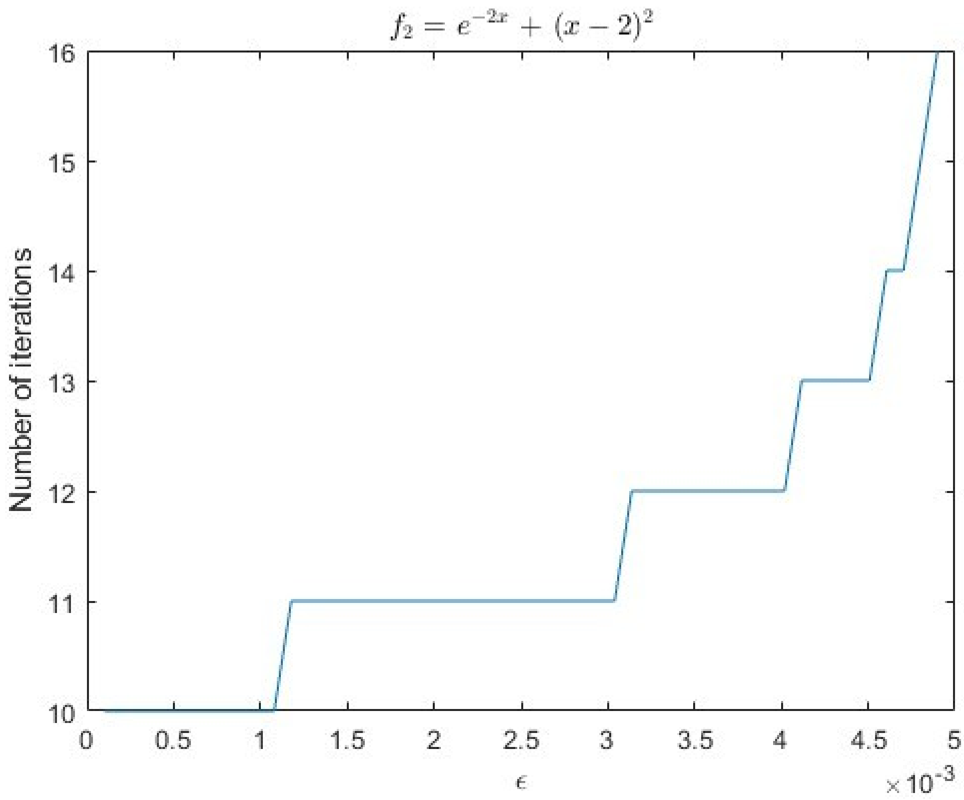
$$f_1(x)=(x-2)^2+x\cdot\ln(x+3)$$
$$f_2(x)=e^{-2x}+(x-2)^2$$
$$f_3(x)=e^x\cdot(x^3-1)+(x-1)\cdot\sin(x)$$

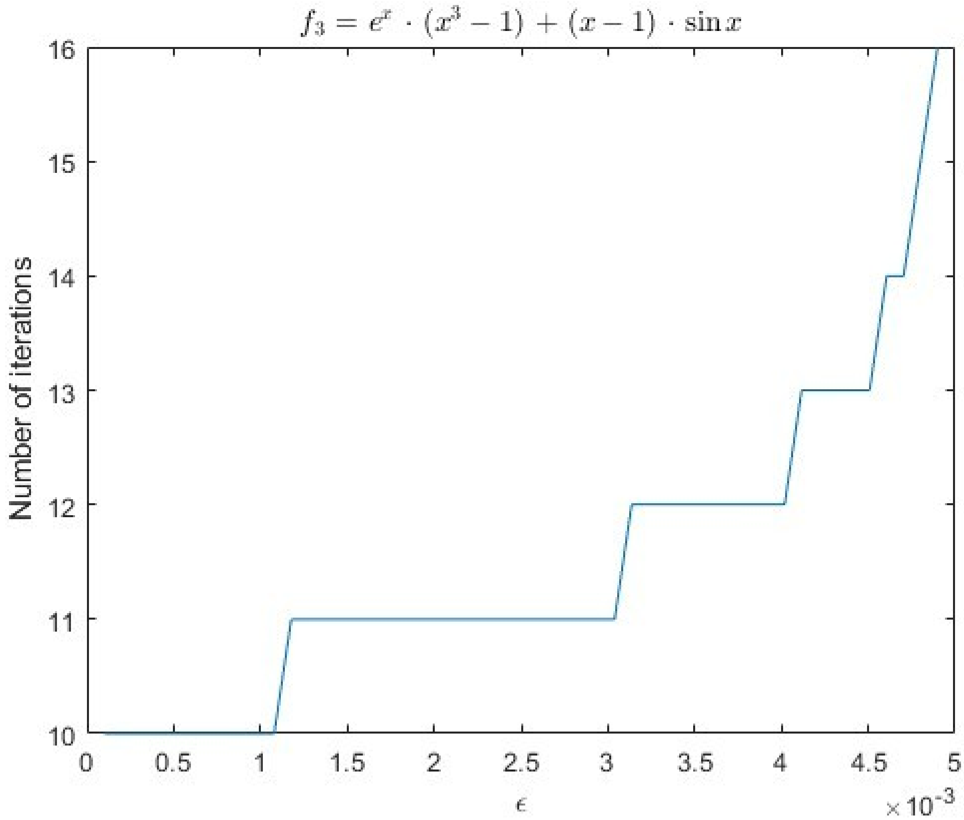
Θέμα 1-Μέθοδος της διχοτόμου

Η μέθοδος της διχοτόμου απαιτεί δύο παραμέτρους. Το ε, δηλαδή την απόσταση των x_1 και x_2 από την διχοτόμο και το l, δηλαδή την απόσταση την οποία πρέπει να βρίσκονται τα άκρα τους διαστήματος (a_k και b_k) ώστε να έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση του ελαχίστου (βλέπε Αλγόριθμο 5.1.1 στο βιβλίο).
Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις που απαιτούνται από την εκφώνηση για την μελέτη της μεθόδου.

Σταθερό l = 0.01
και για τιμές του ε από 0.0001 έως 0.0049 (σύνολο 50 τιμές)

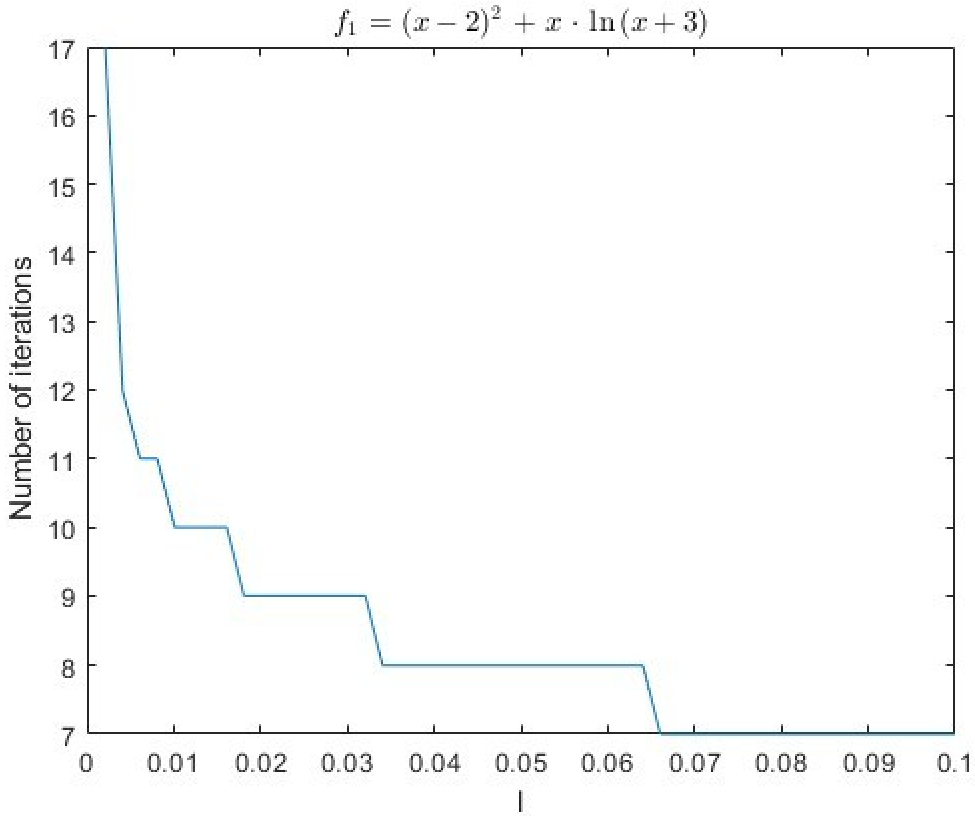


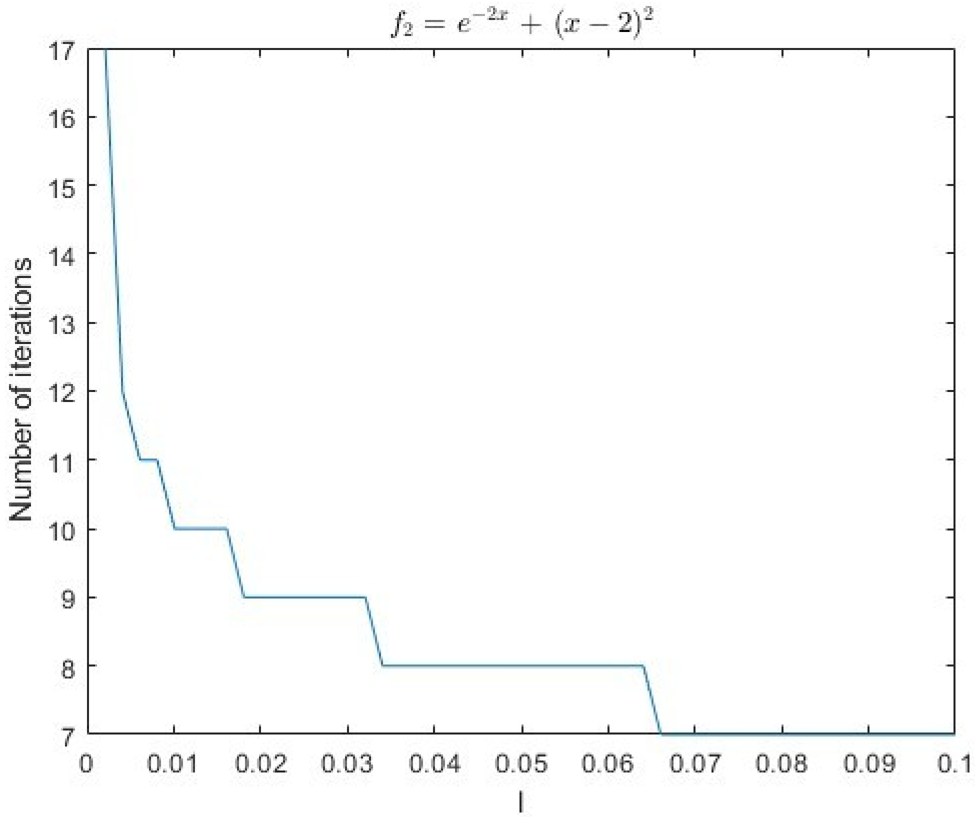


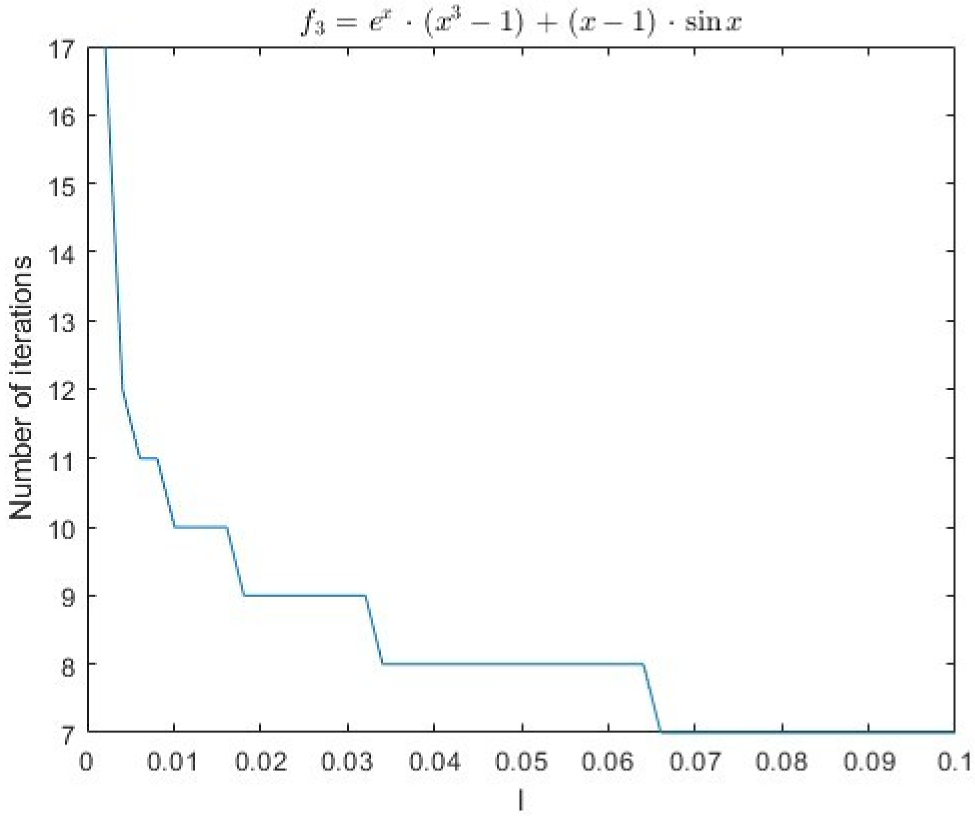


Παρατηρούμε ότι για σταθερό l ο αριθμός κλήσεων της συνάρτησης (το k) αυξάνεται όταν μειώνουμε την σταθερά ε, πράγμα που αναμένουμε καθώς μειώνοντας την απόσταση από την διχοτόμο αναμένουμε μεγαλύτερη ακρίβειας. Επίσης δεν παρατηρείται καμία μεταβολή ως προς τον τύπο της συνάρτησης.

<u>Σταθερό ε = 0.001</u>
και για τιμές του l από 0.0021 έως 0.1 (σύνολο 50 τιμές)

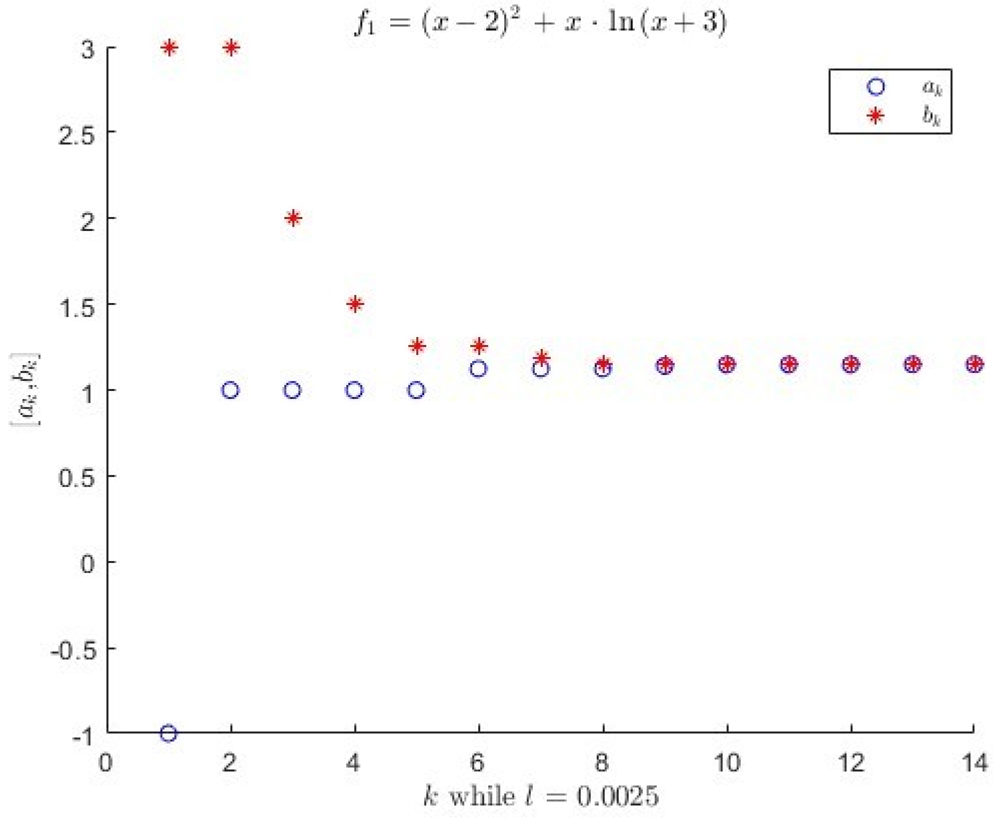


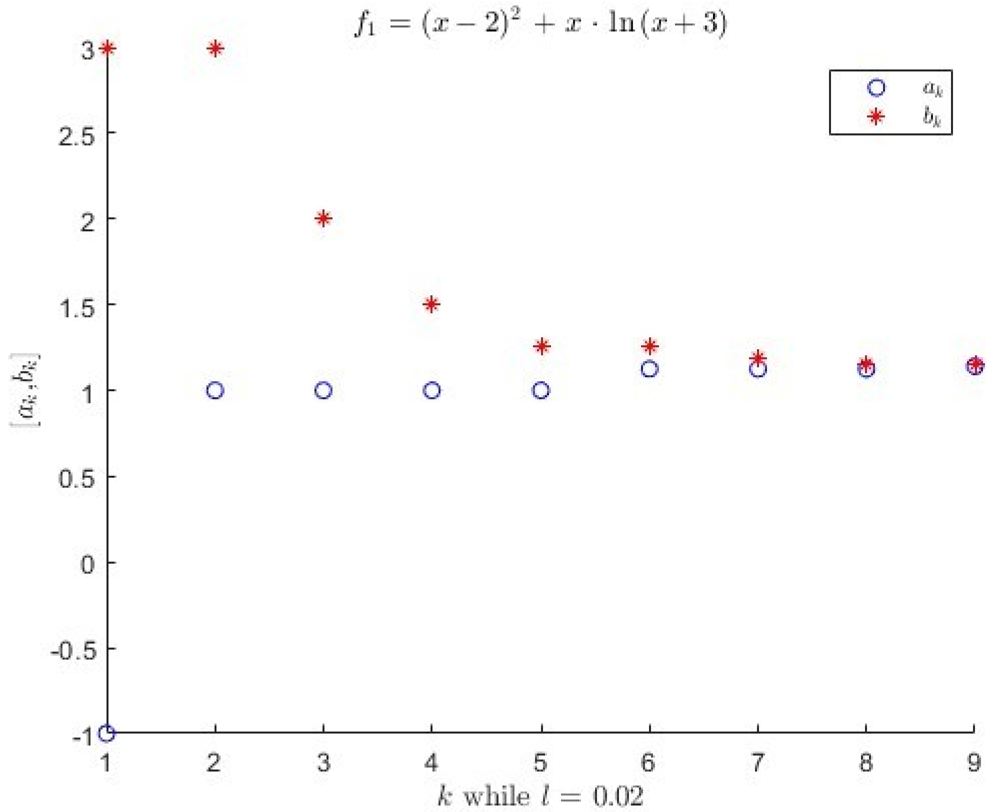


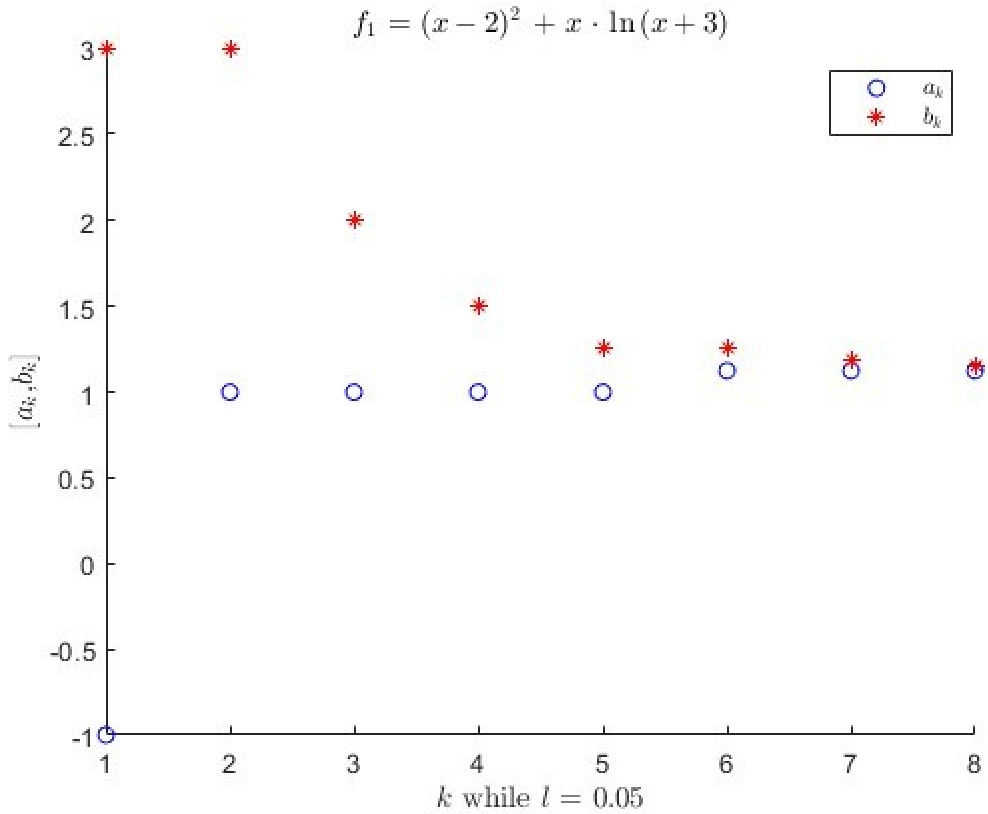


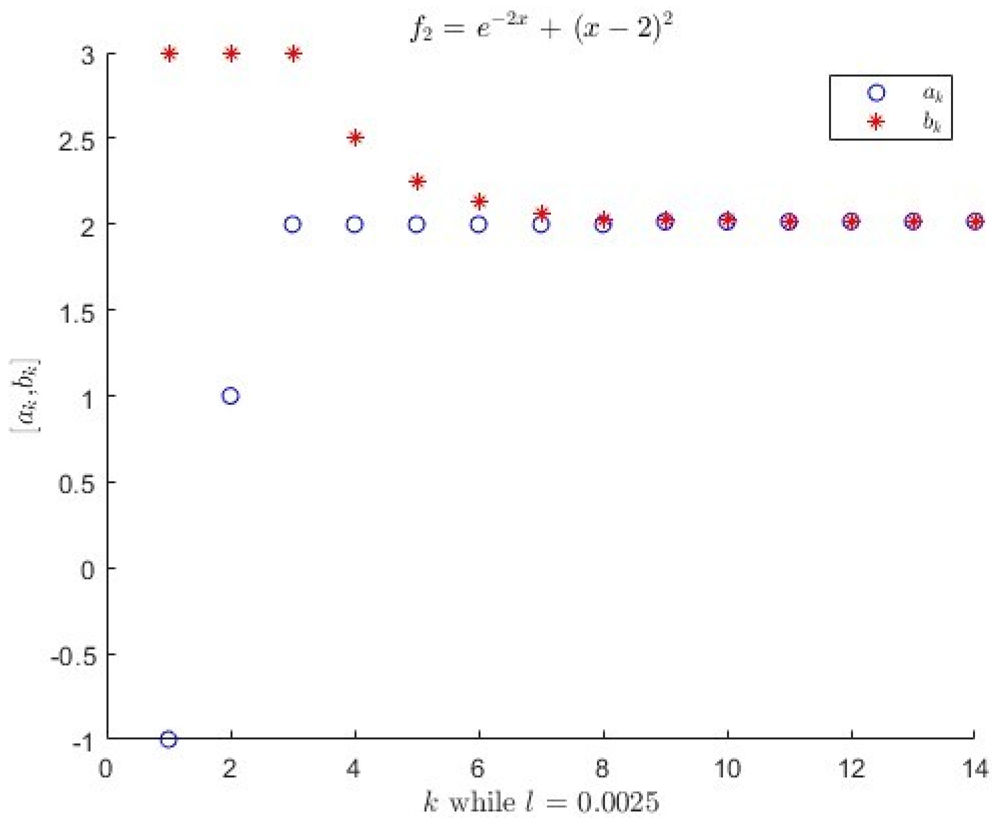
Παρατηρούμε ότι για σταθερό ε ο αριθμός κλήσεων της συνάρτησης (το k) αυξάνεται όταν αυξάνεται την σταθερά l, πράγμα αναμενόμενο καθώς αυξάνουμε την απόσταση των άκρων του διαστήματος. Όμοια με πριν δεν παρατηρείται καμία μεταβολή ως προς τον τύπο της συνάρτησης.

Παρακάτω παραθέτουμε τρία γραφήματα για κάθε συνάρτηση που δείχνουν την σύγκλιση των άκρων $[a_k , b_k]$ ως προς τον αριθμό επαναλήψεων (k) για τρεις διαφορετικές τιμές του l (0.0025, 0.02 και 0.05) θεωρώντας το ε = 0.001.

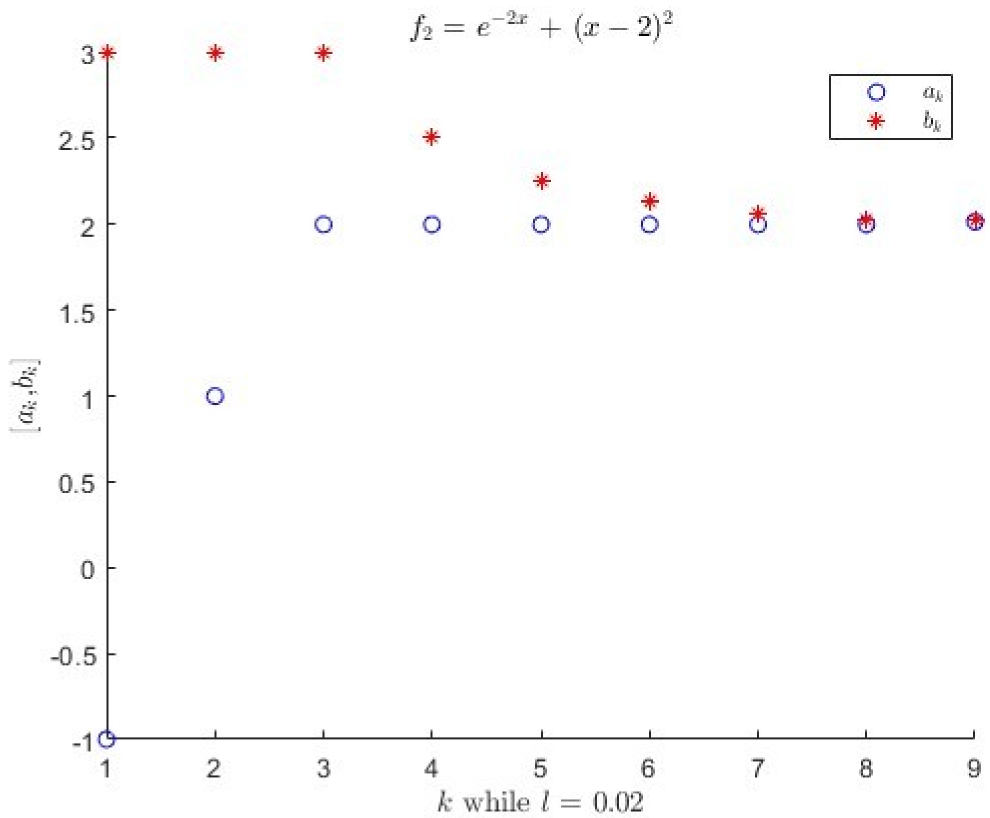



$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.02$

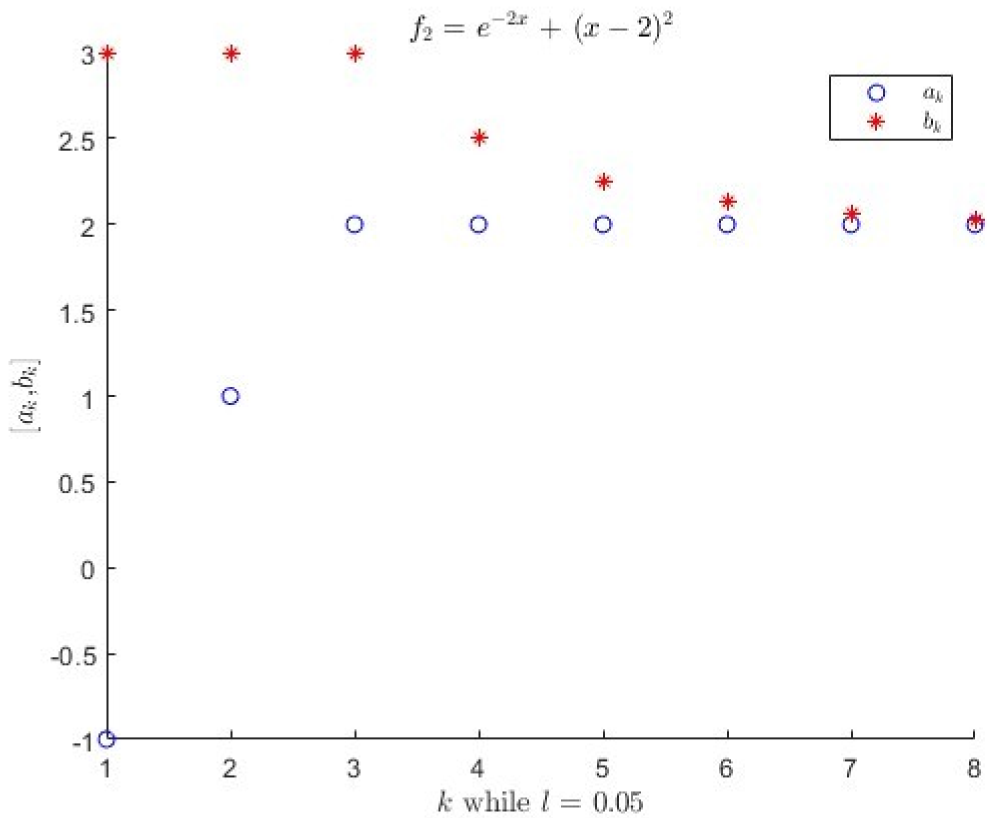

$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.05$

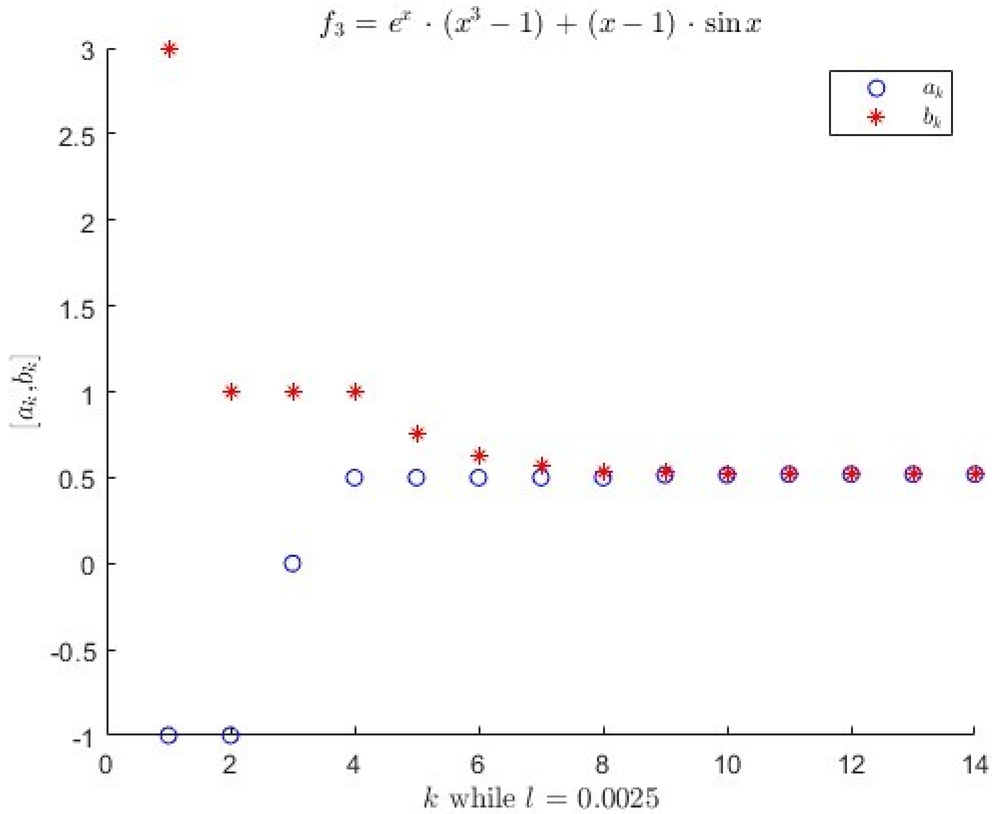


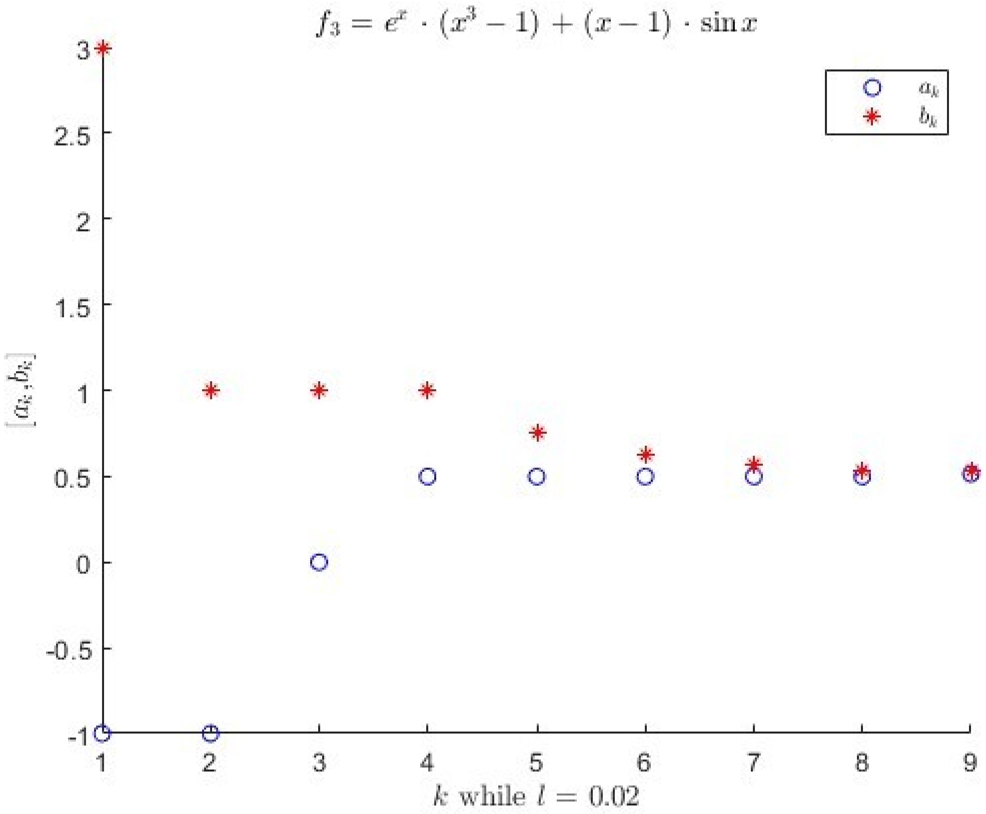
$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.0025$

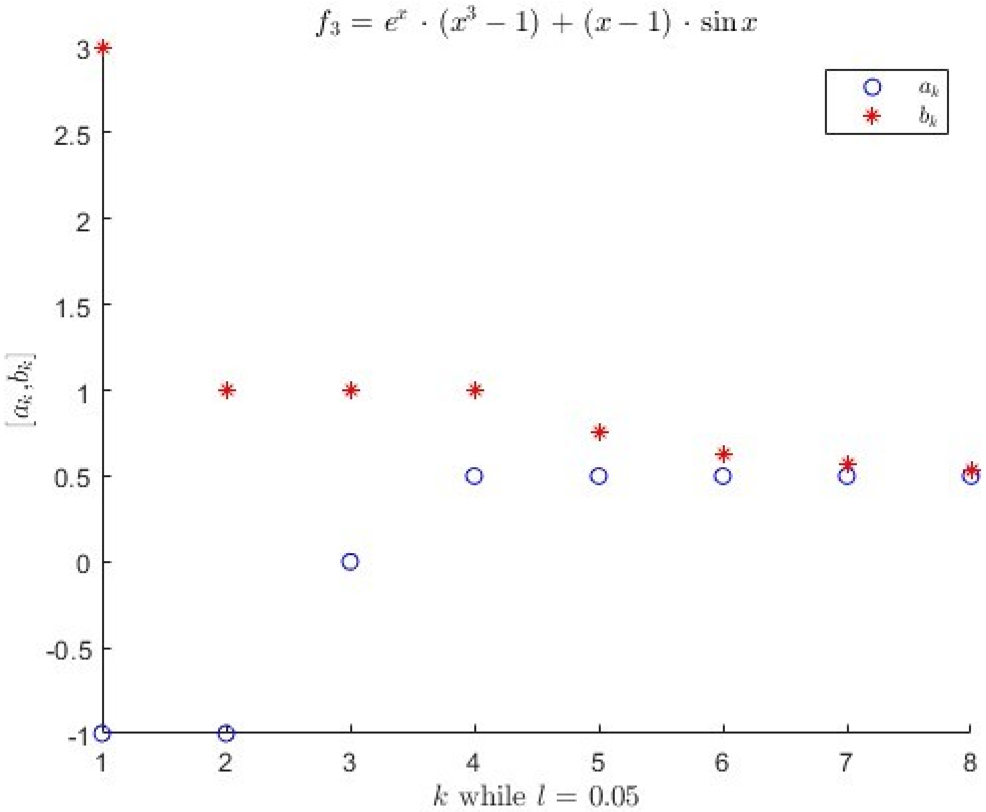


$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.02$


$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.05$


$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.0025$



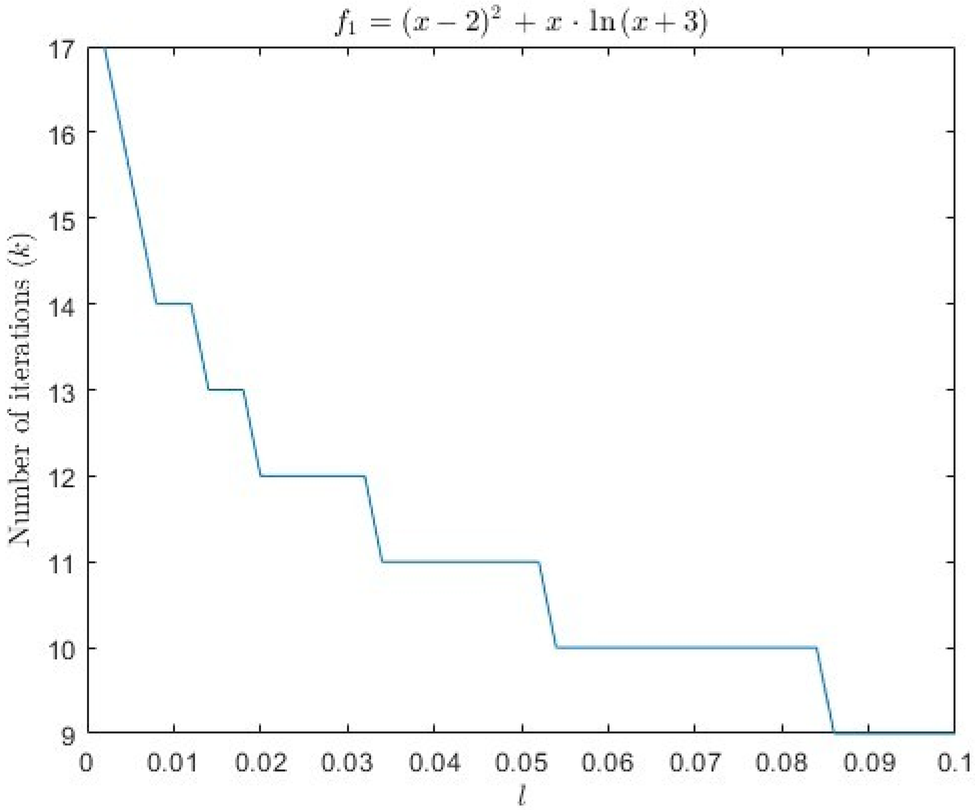


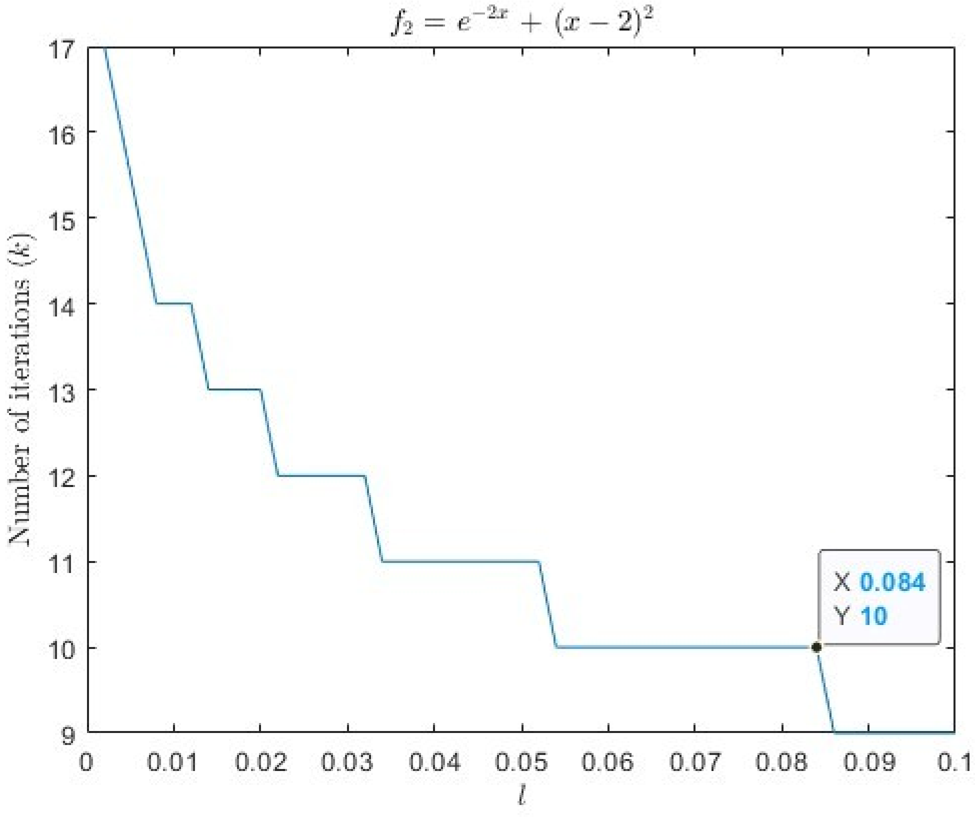
Παρατηρούμε σε κάθε περίπτωση πως τα άκρα α και β συγκλίνουν όσο αυξάνουμε των αριθμό των επαναλήψεων.

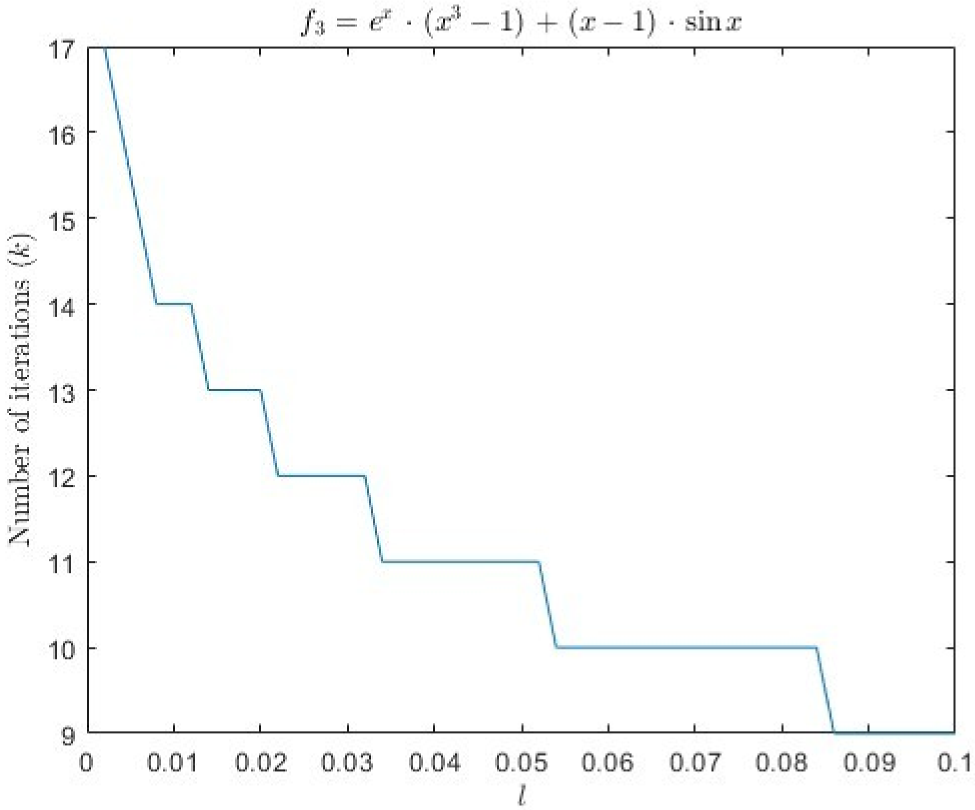
Θέμα 2- Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Η μέθοδος του χρυσού τομέα βασίζεται στην λογική ότι προσπαθούμε να περιορίσουμε ένα αρχικό διάστημα [a, b] συνεχώς έτσι ώστε στο τελικό διάστημα να περιέχεται το ελάχιστο της συνάρτησης με ακρίβεια l, που δεν είναι τίποτα παραπάνω από την απόσταση των ακρών. Το νέο υποδιάστημα συνδέεται με το προηγούμενο βάση της εξίσωσης: $b_{k+1} - a_{k+1} = \gamma \cdot (b_k - a_k)$, όπου γ = 0.0618. Το παραπάνω είναι εμπνευσμένο από την χρυσή τομή.

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται, δηλαδή ο αριθμός επαναλήψεων για κάθε συνάρτηση για μεταβλητό l (συνολικά 50 τιμές από 0.002 έως 0.01).

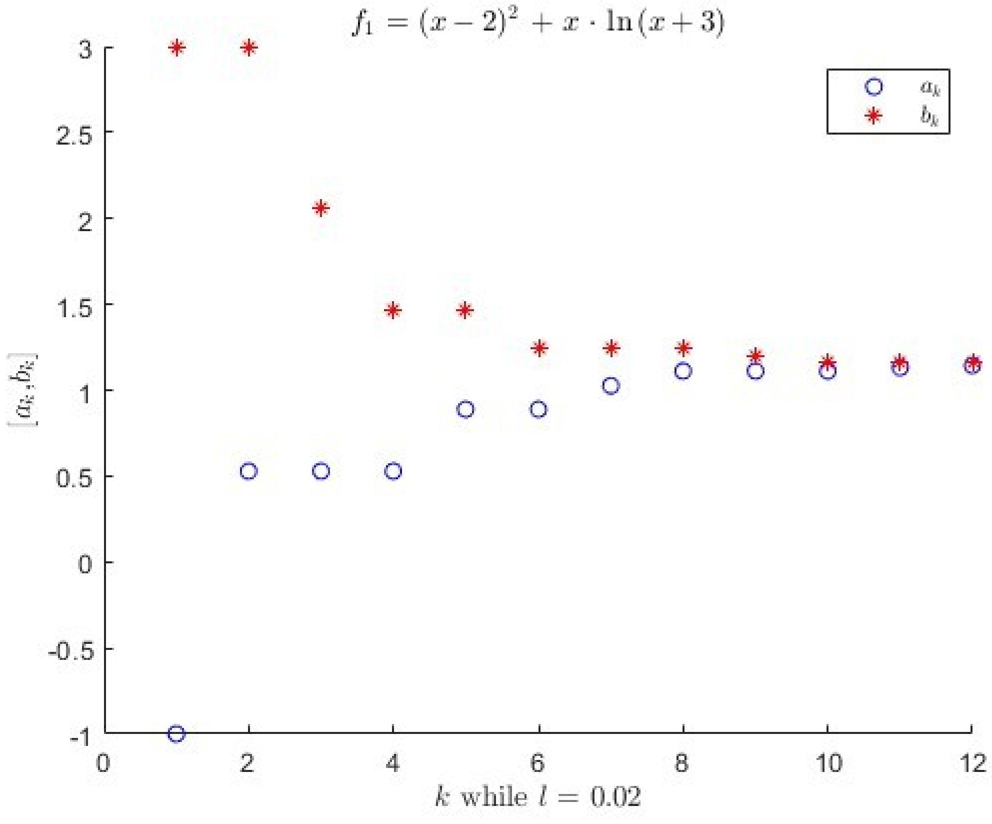


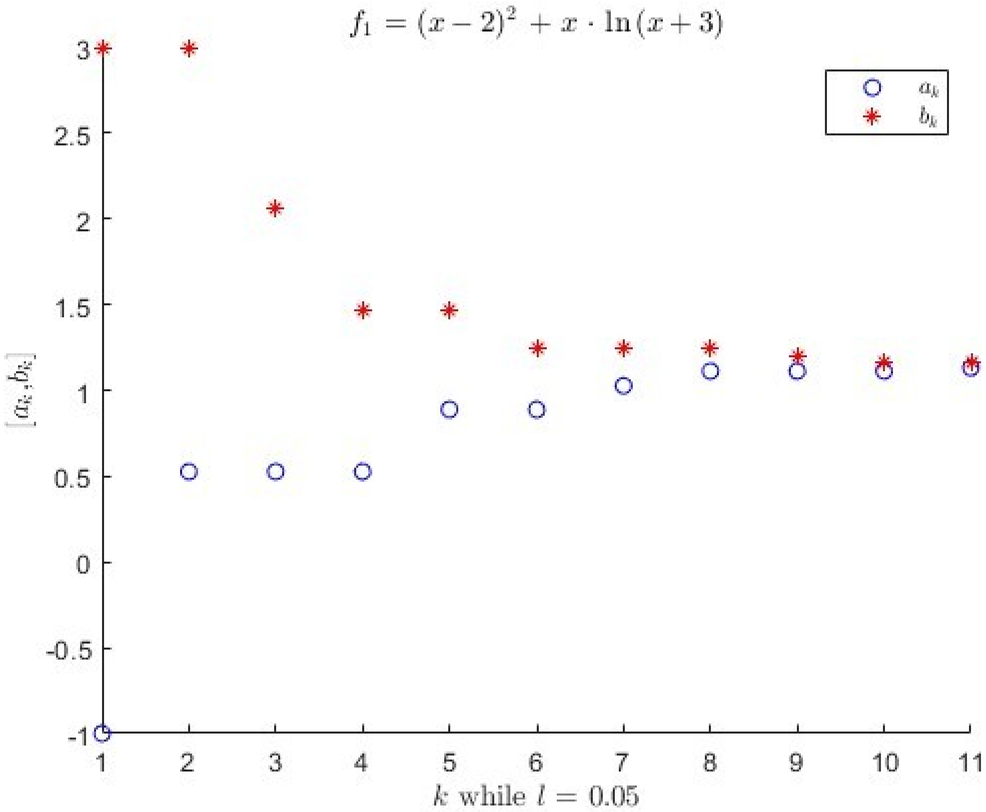


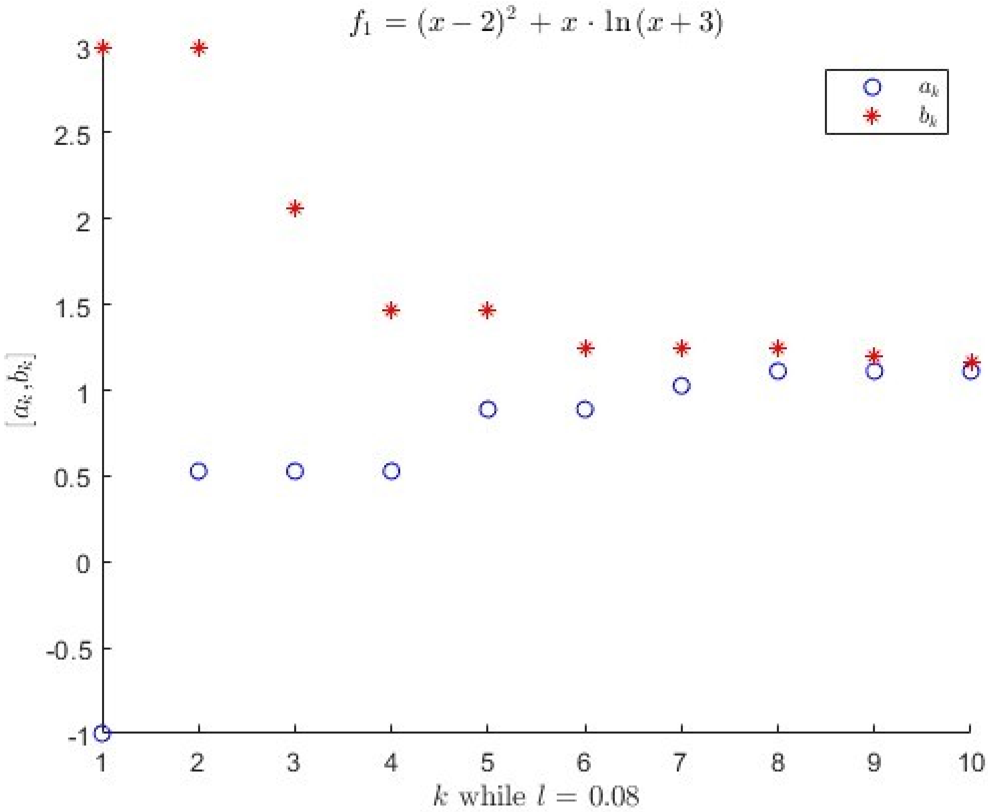


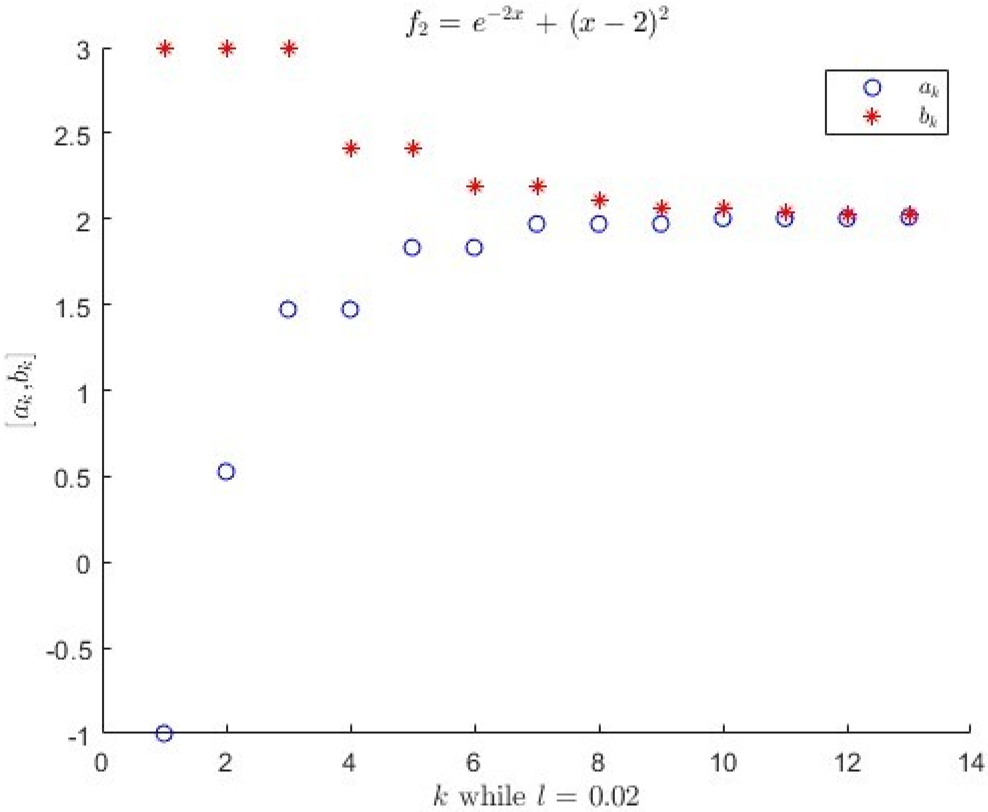
Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το l τόσο αυξάνονται οι επαναλήψεις που απαιτούνται, πράγμα αναμενόμενο καθώς αυξάνουμε την ακρίβεια που επιθυμούμε. Επίσης δεν παρατηρείται και πάλι καμία μεταβολή από τον τύπο της συνάρτησης.

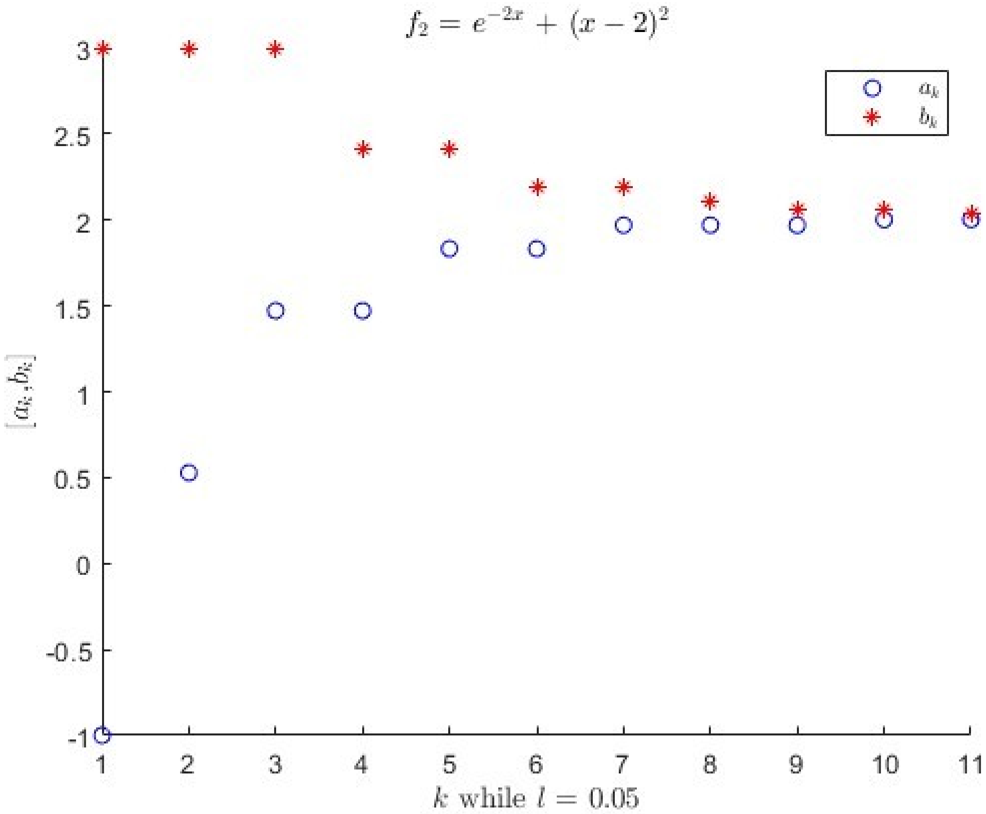
Παρακάτω παραθέτουμε τρία γραφήματα για κάθε συνάρτηση που δείχνουν την σύγκλιση των άκρων $[a_k , b_k]$ ως προς τον αριθμό επαναλήψεων (k) για τρεις διαφορετικές τιμές του l (0.02, 0.05 και 0.08).

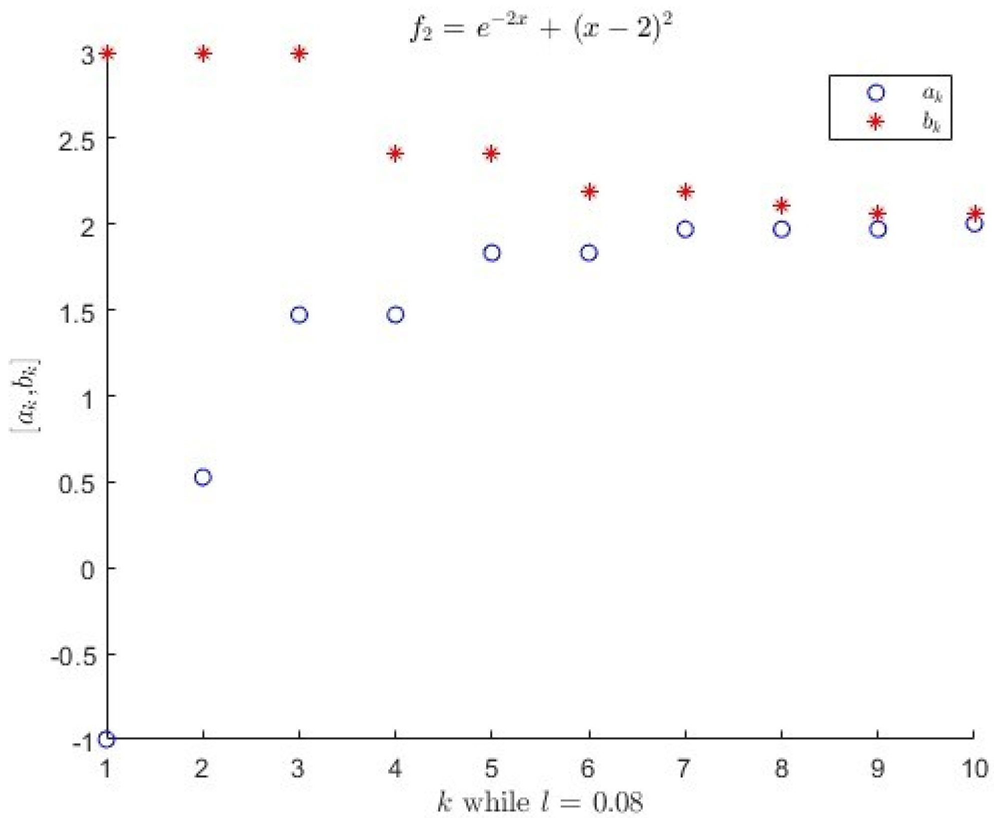


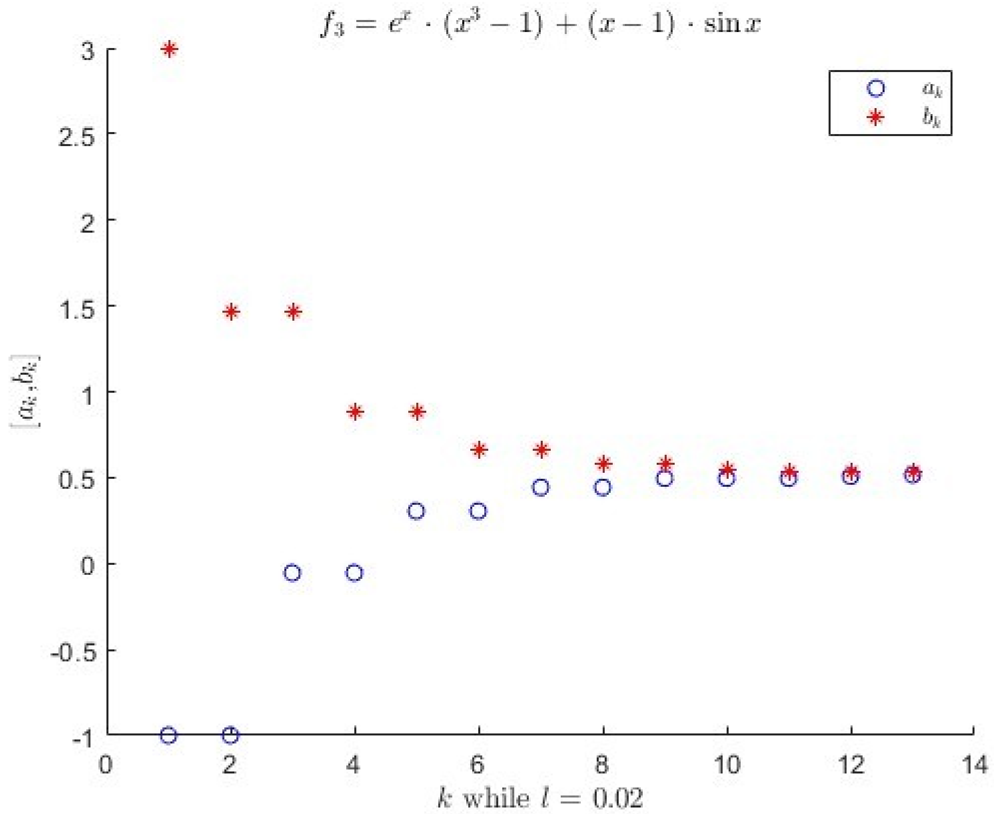

$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
k while $l = 0.05$

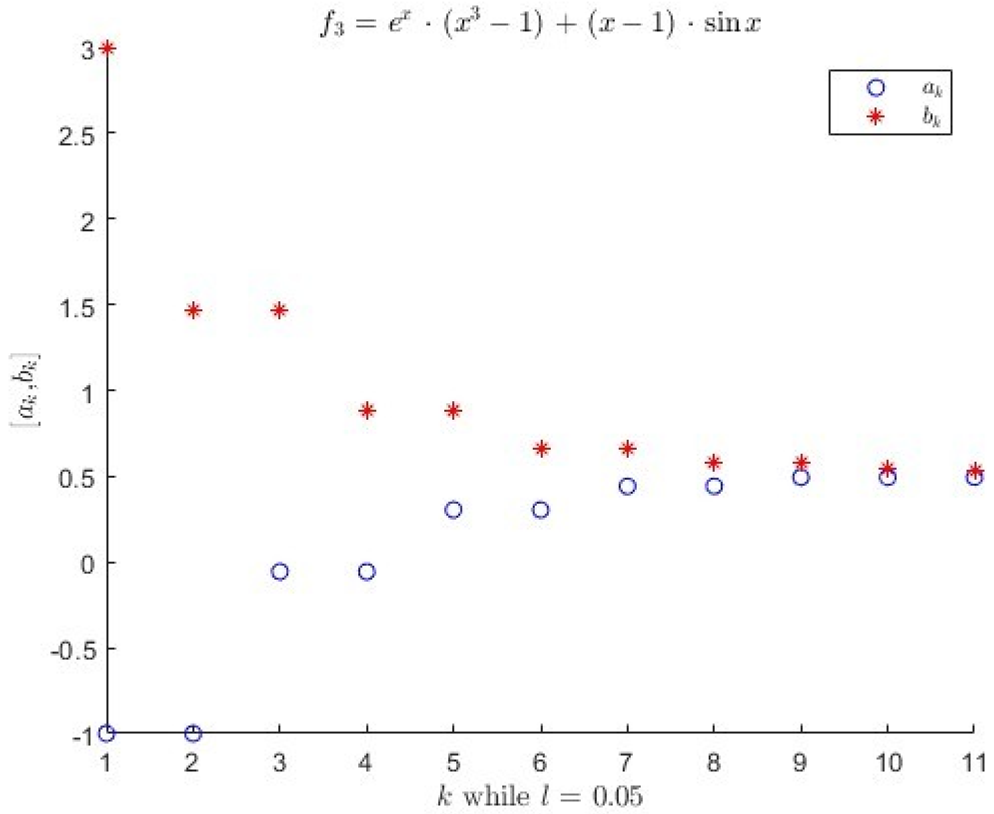

$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k while $l = 0.08$

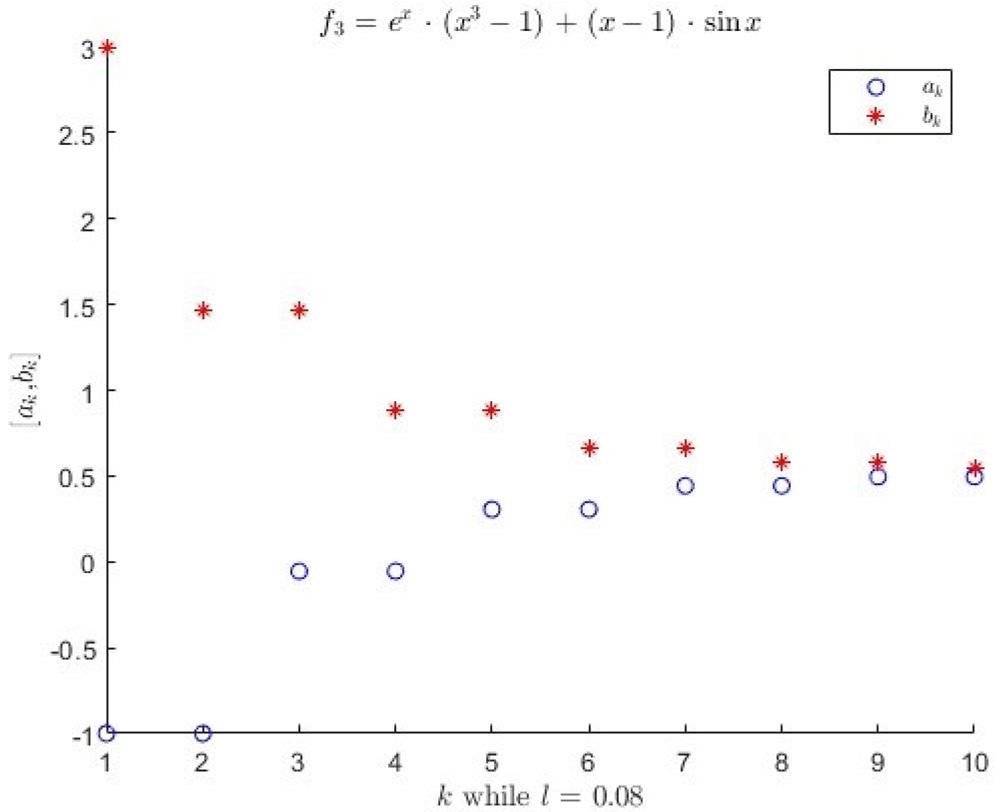

$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.02$


$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.05$


$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.08$


$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x-1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.02$



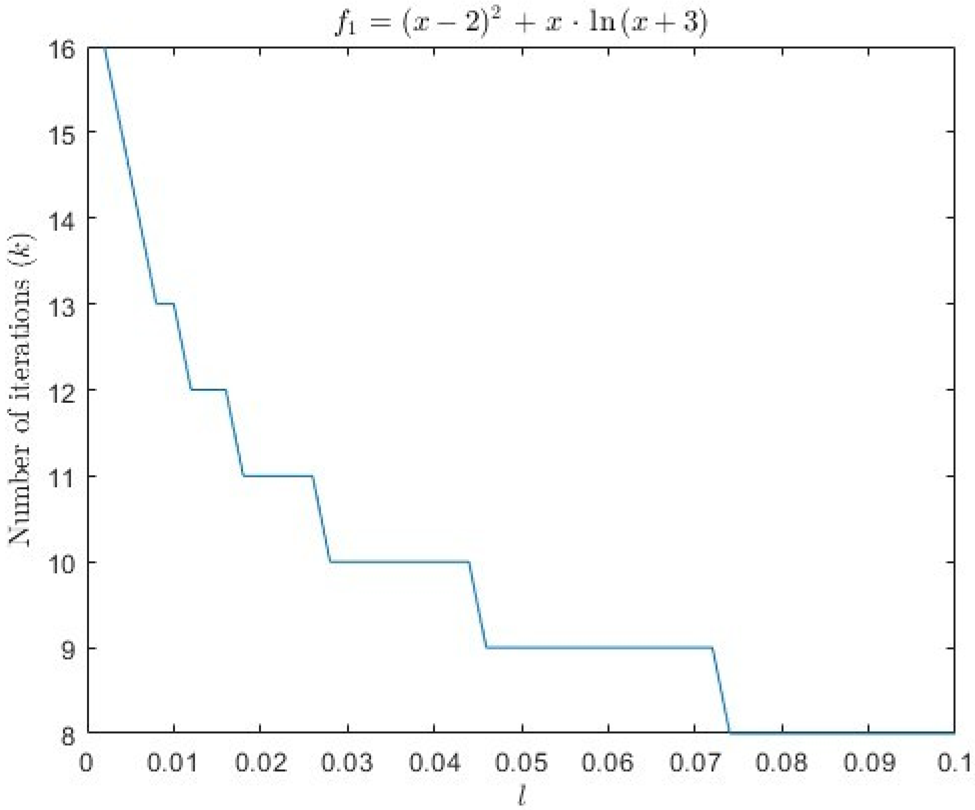


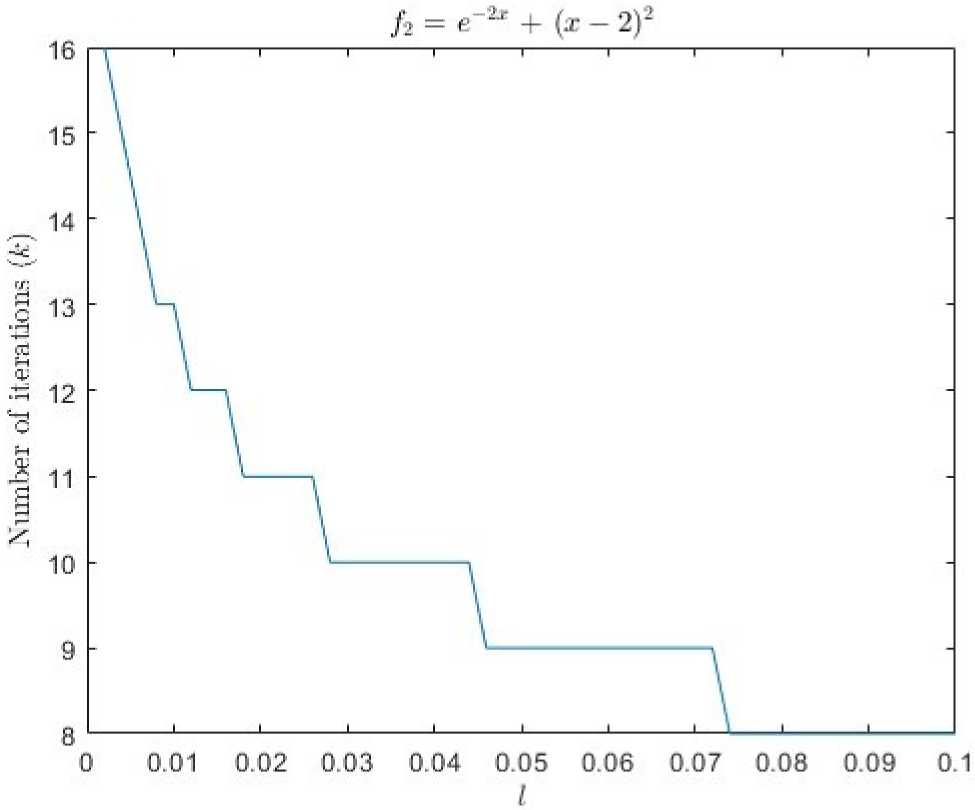
Από τα παραπάνω παρατηρείται ότι όσο μεγαλώνει το l τόσο γρηγορότερα συγκλίνει ο αλγόριθμος, με μικρότερη όμως ακρίβεια καθώς αυξάνουμε το εύρος.

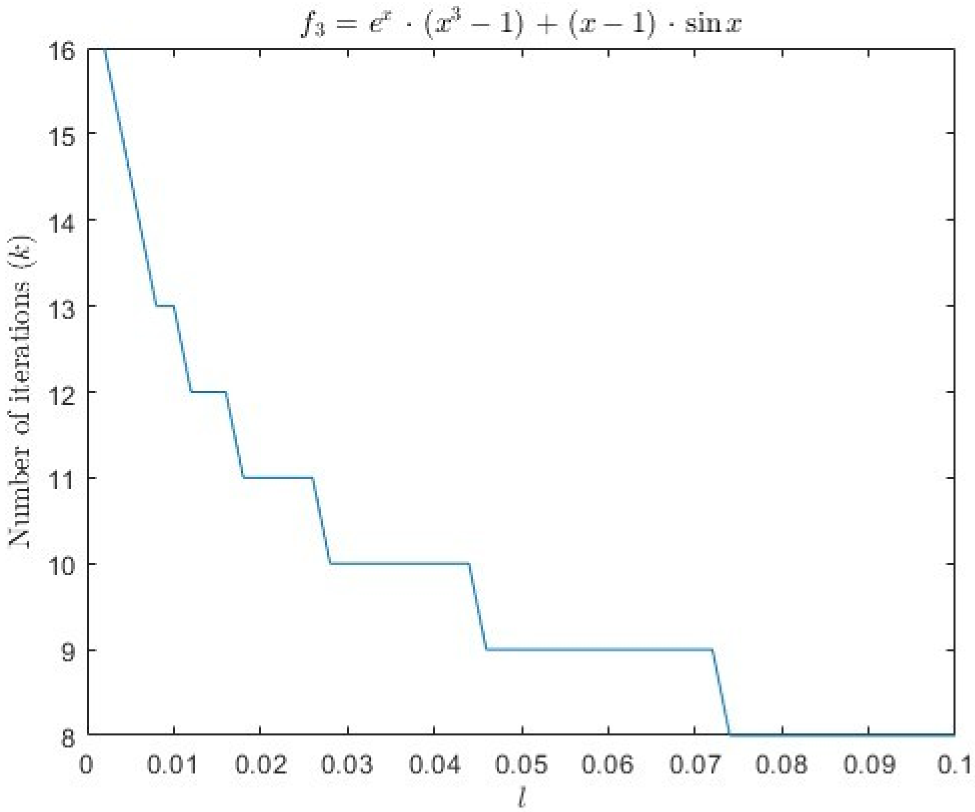
Θέμα 3 – Μέθοδος Fibonacci

Η μέθοδος Fibonacci μοιάζει με την μέθοδο του χρυσού τομέα με την διαφορά ότι το νέο διάστημα δεν μειώνεται σε σχέση με το προηγούμενο με την βοήθεια της σταθεράς γ αλλά με τη βοήθεια της ακολουθίας Fibonacci. Ο συντελεστής δηλαδή δεν είναι σταθερός και αλλάζει σε κάθε επανάληψη. Επίσης απαιτείται να υπολογιστεί εξαρχής ο αριθμός των επαναλήψεων που θα χρειαστούν. Συγκεκριμένα βρίσκω το μικρότερο n για το οποίο ισχύει: $F_n > \frac{b-a}{l}$ και ορίζω ανάλογα τα αρχικά x_1 και x_2 (βλέπε αλγόριθμο στο βιβλίο).

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται, δηλαδή ο αριθμός επαναλήψεων για κάθε συνάρτηση για μεταβλητό l (συνολικά 50 τιμές από 0.002 έως 0.01) και για σταθερό ε = 0.001 .

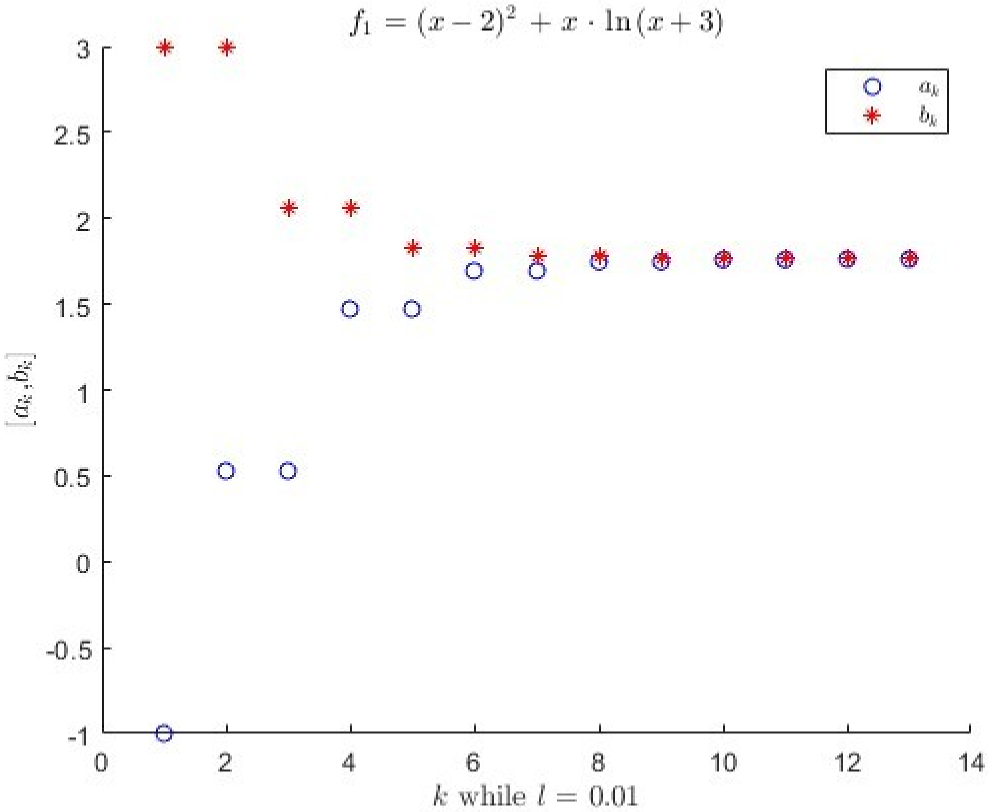


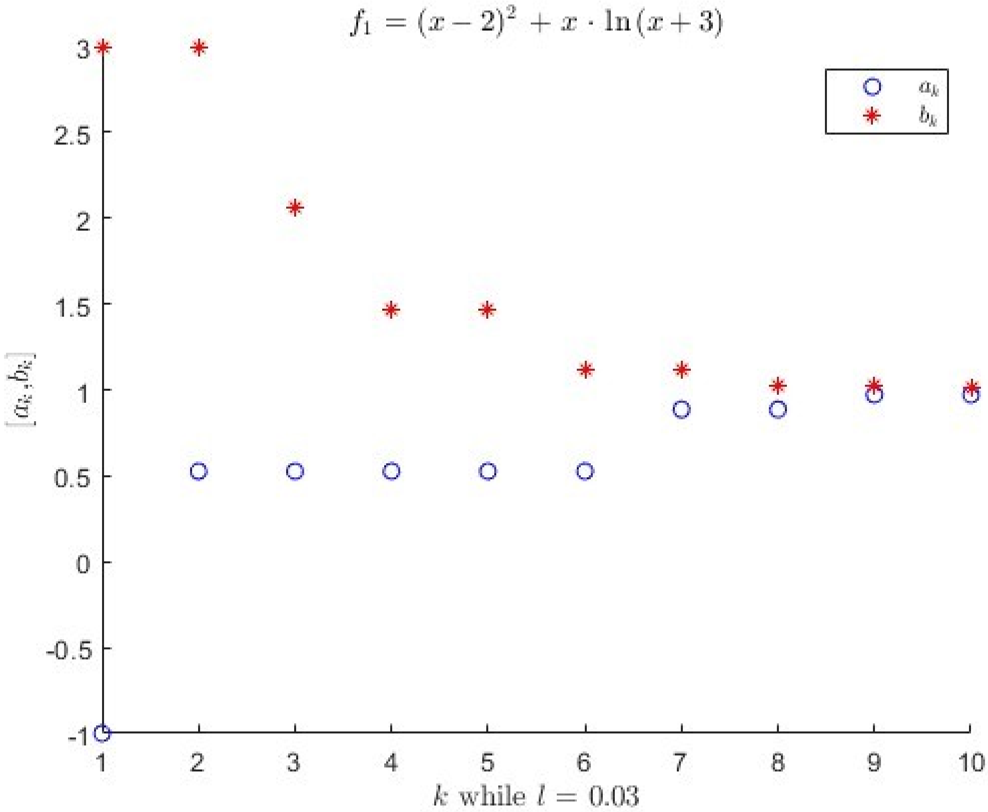


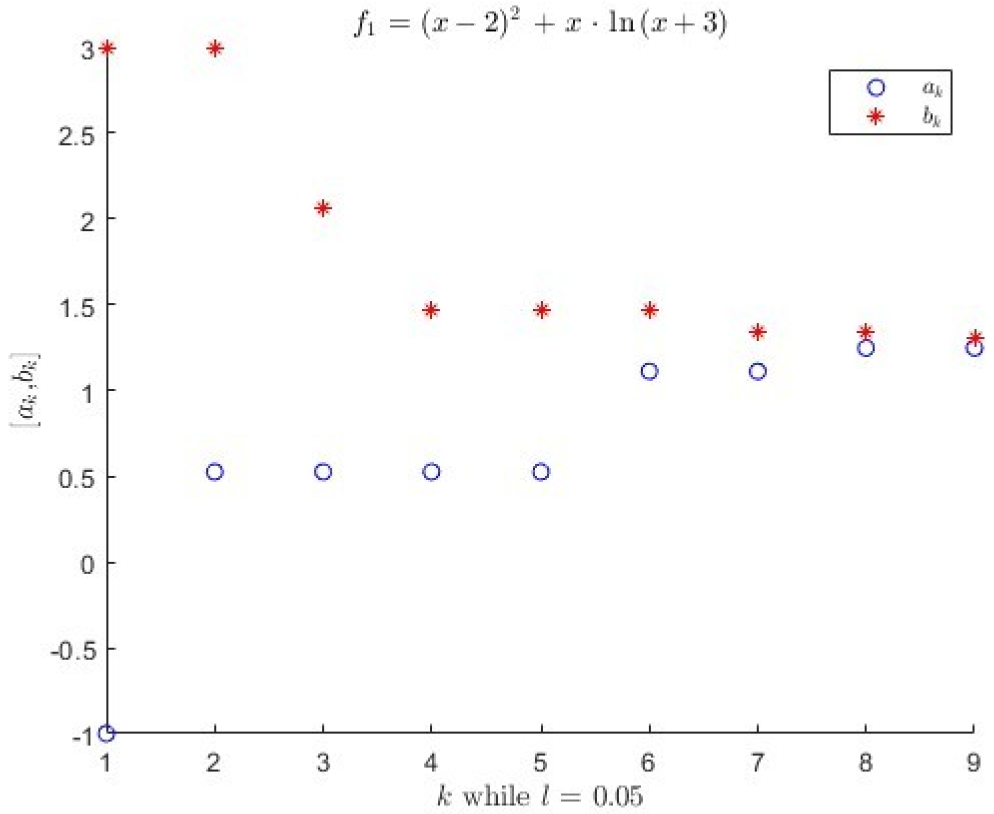


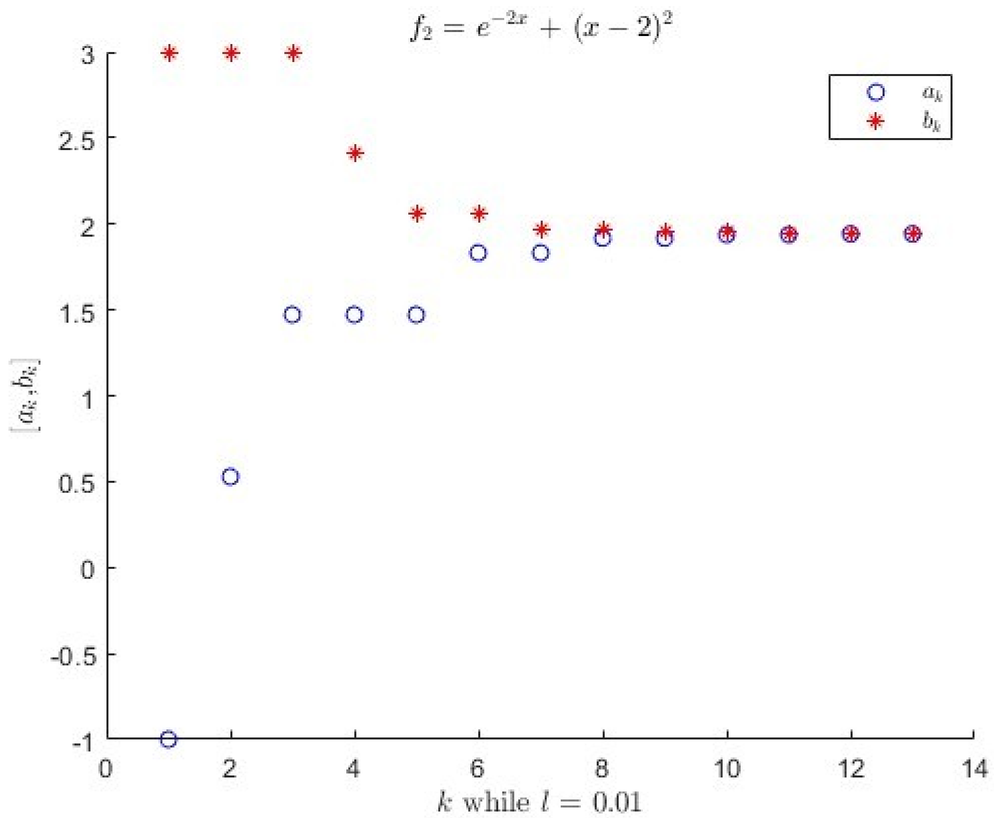
Παρατηρούμε ότι όσο μειώνεται το l, δηλαδή όσο αυξάνω την ακρίβεια που επιθυμώ στην εκτίμηση μου, τόσο αυξάνεται και ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτείται, πράγμα αναμενόμενο.

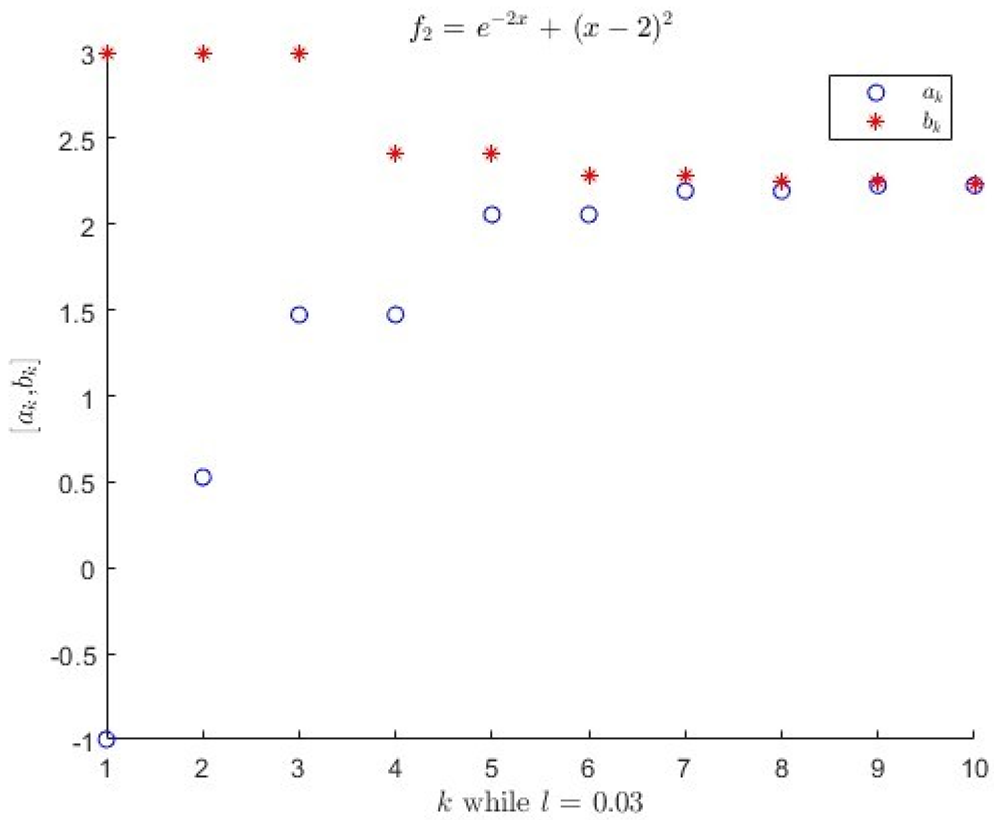
Παρακάτω παραθέτουμε τρία γραφήματα για κάθε συνάρτηση που δείχνουν την σύγκλιση των άκρων [a_k , b_k] ως προς τον αριθμό επαναλήψεων (k) για τρεις διαφορετικές τιμές του l (0.01, 0.03 και 0.05) και ε = 0.001 .



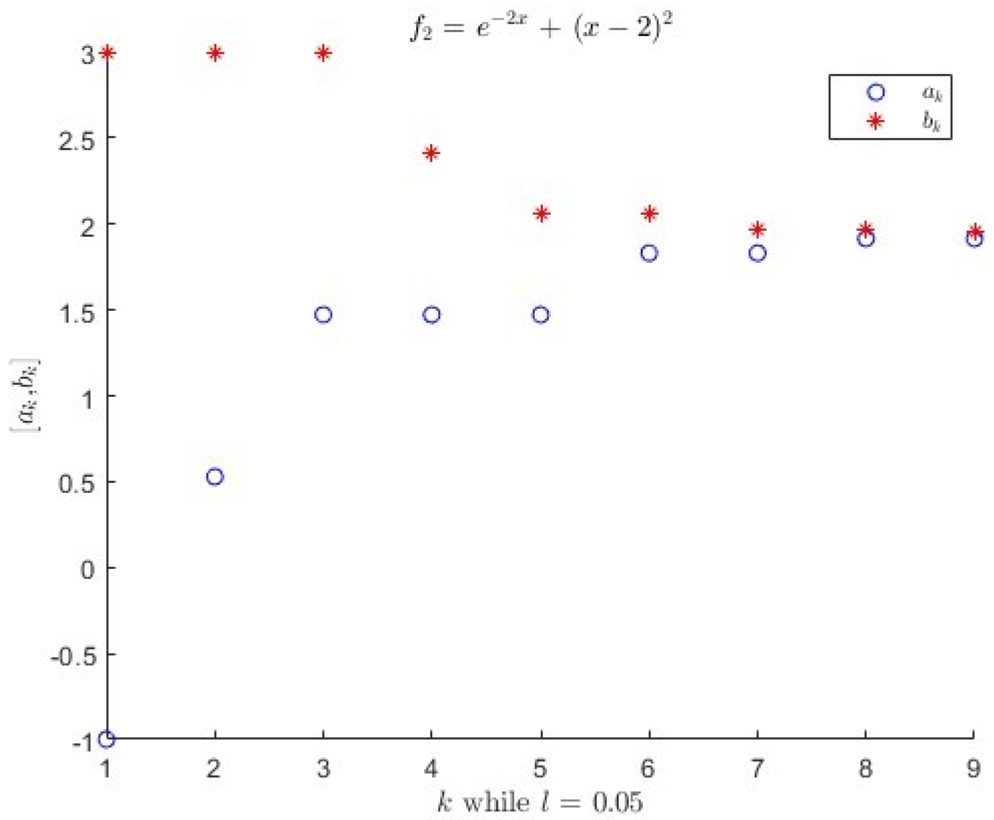



$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
k while $l = 0.05$

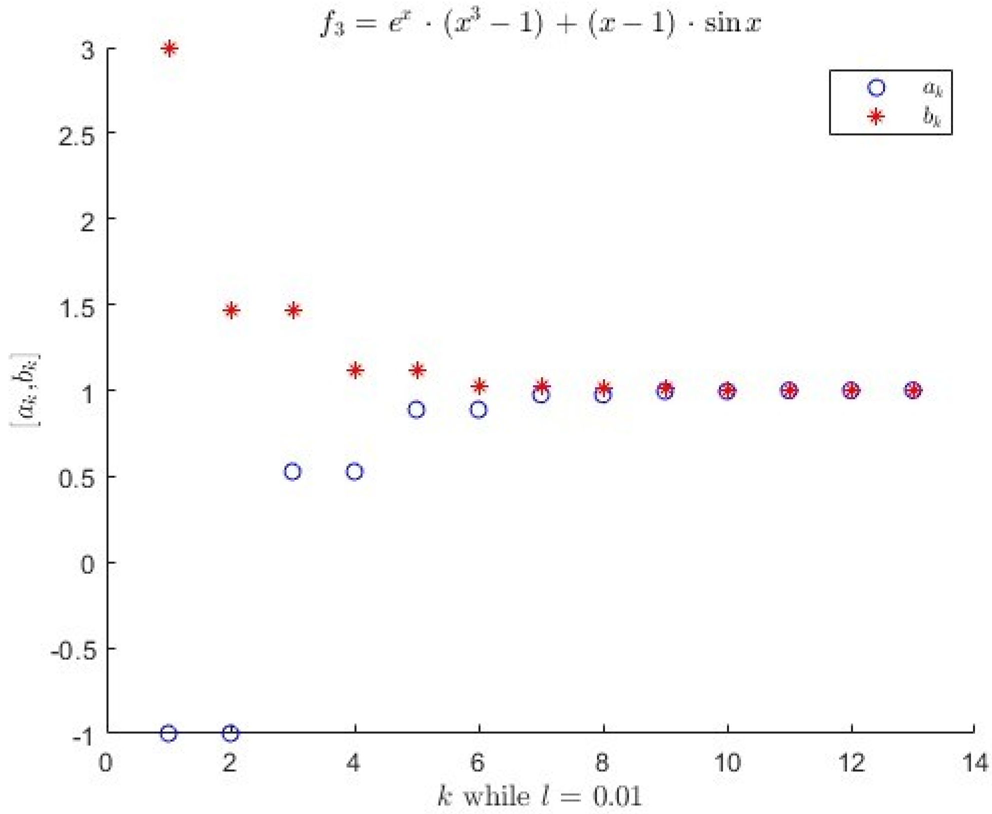

$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14
k while $l = 0.01$

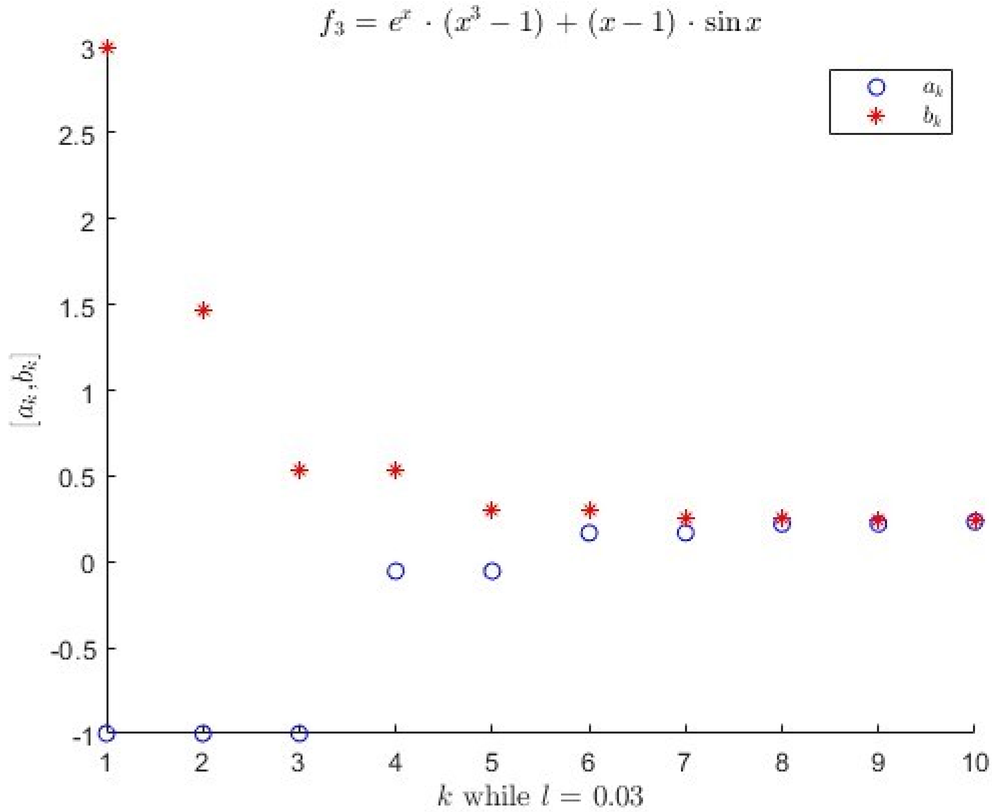


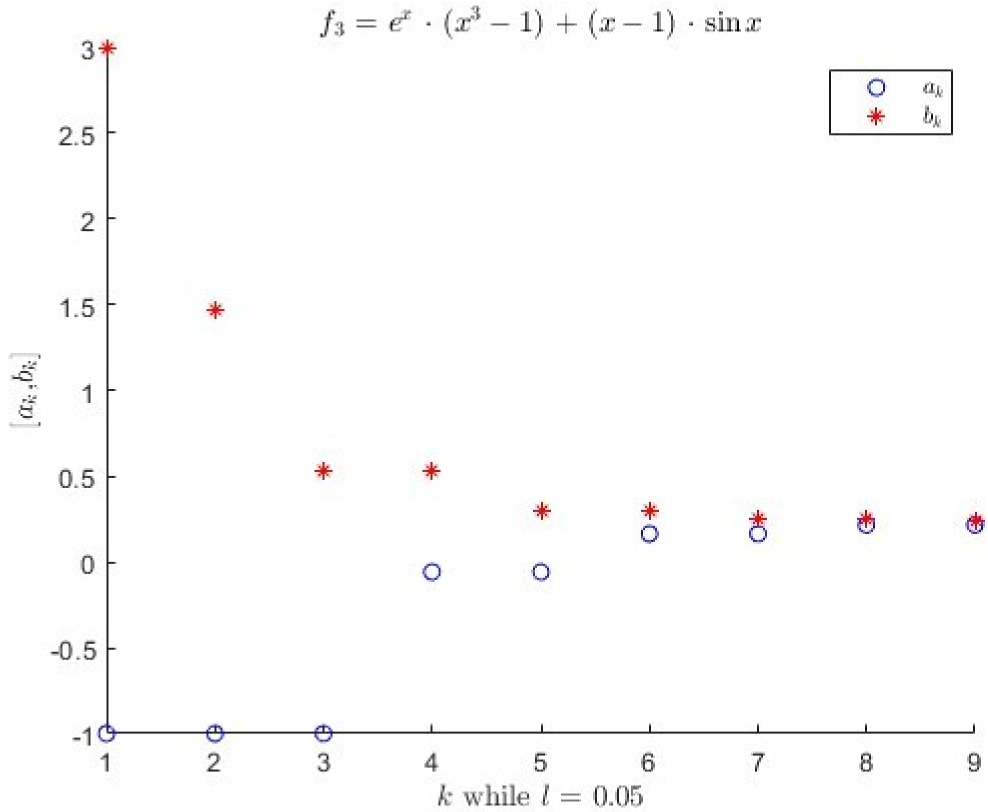
$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
k while $l = 0.03$



$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1 2 3 4 5 6 7 8 9
k while $l = 0.05$


$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14
k while $l = 0.01$


$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
k while $l = 0.03$

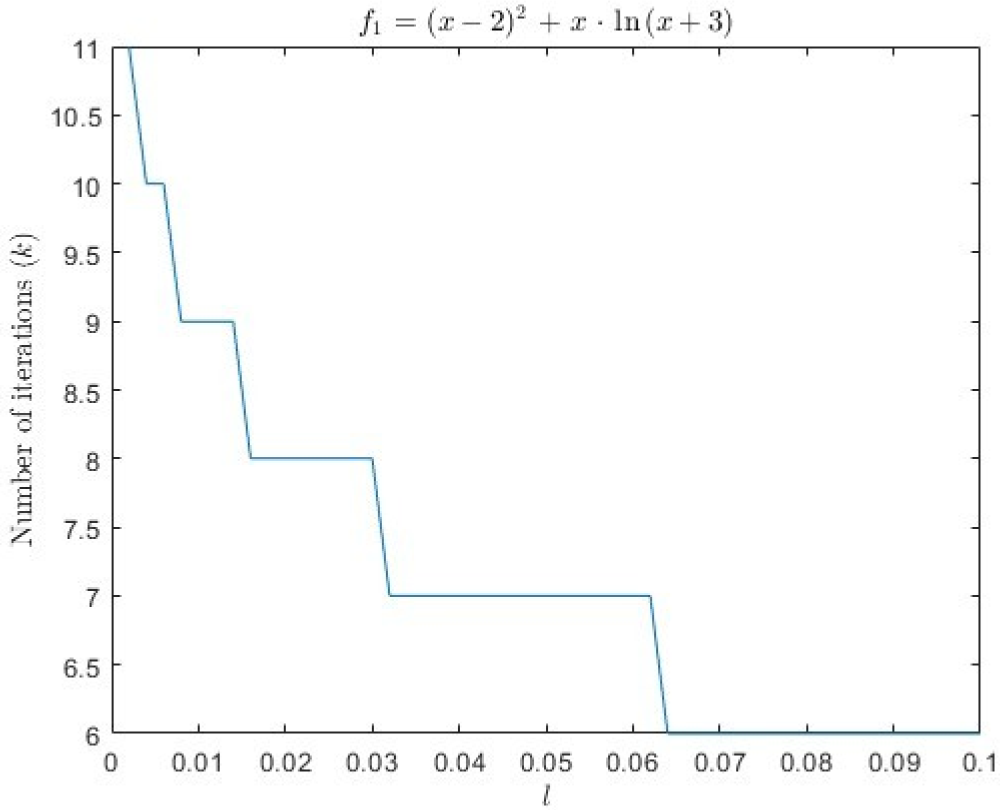

$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
k while $l = 0.05$

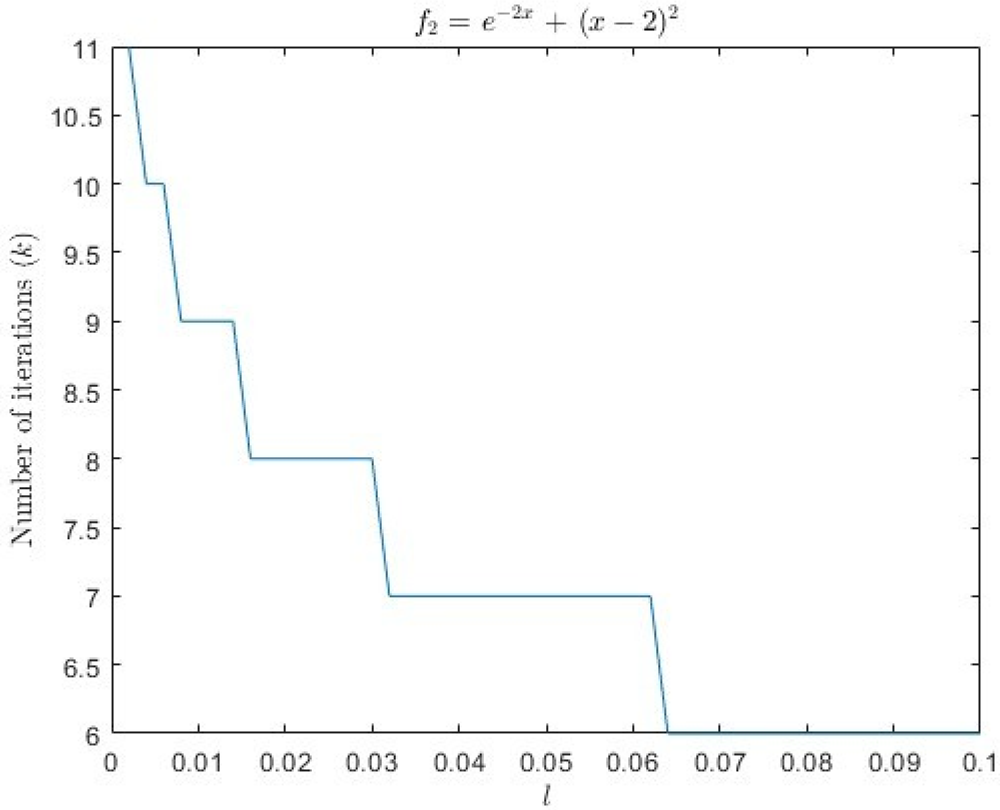
Θέμα 4 – Μέθοδος Διχοτόμου με χρήση παραγώγου

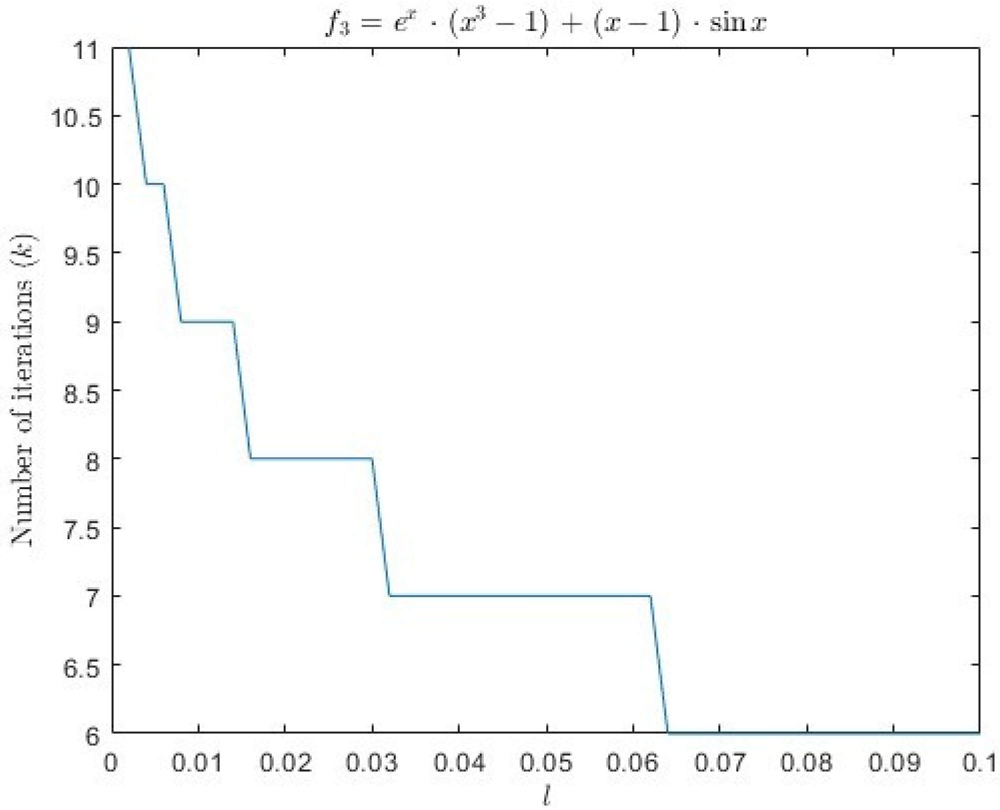
Είναι η μόνη από της μεθόδους που αναλύσαμε που βασίζεται στην παράγωγο της συνάρτησης, η οποία ανάλογα το πρόσημο της προσδιορίζει το επόμενο διάστημα αναζήτησης. Τον αριθμό επαναλήψεων των επιλέγουμε εκ των προτέρων και είναι n τέτοιος ώστε:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$$
$$\Rightarrow 2^{-n} \leq \frac{l}{b_1 - a_1}$$
$$\Rightarrow -n \leq \log_2\left(\frac{l}{b_1 - a_1}\right)$$
$$\Rightarrow n \geq \log_2\left(\frac{l}{b_1 - a_1}\right)$$

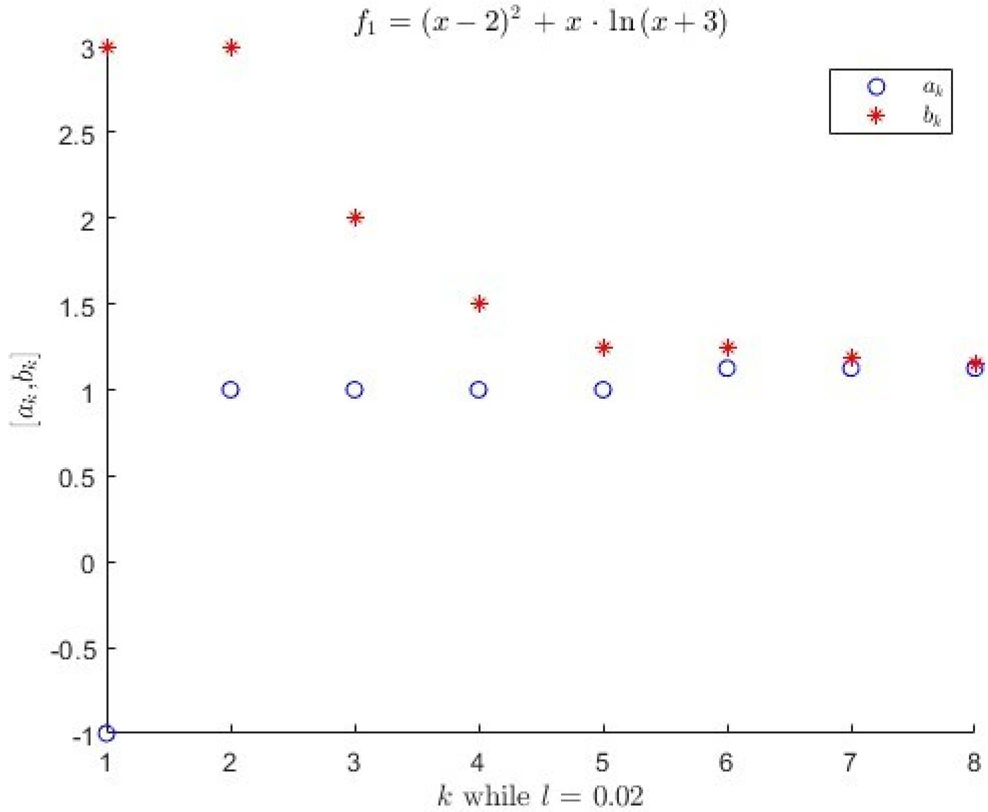
Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται, δηλαδή ο αριθμός επαναλήψεων για κάθε συνάρτηση για μεταβλητό l (συνολικά 50 τιμές από 0.002 έως 0.01).

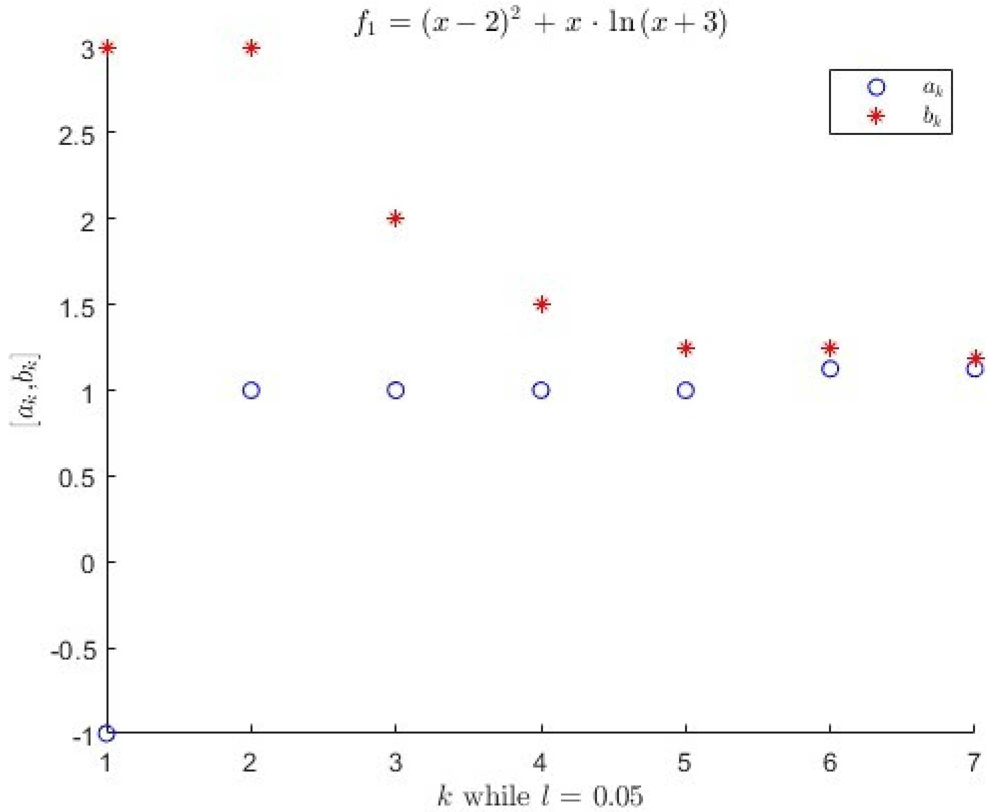


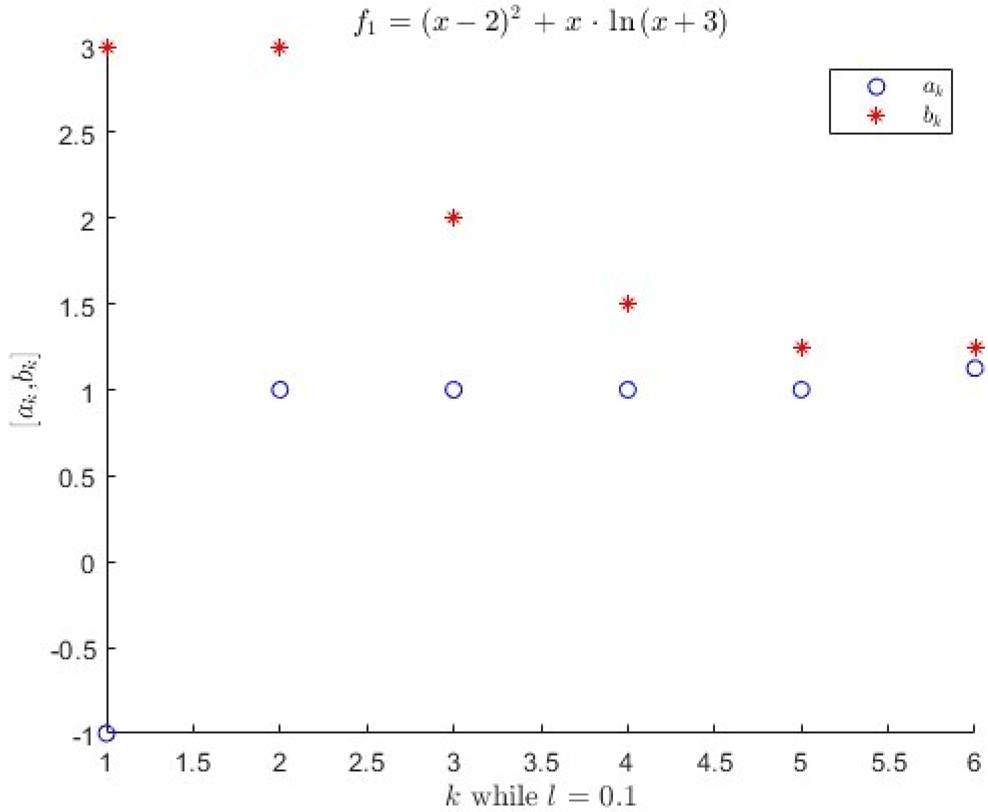


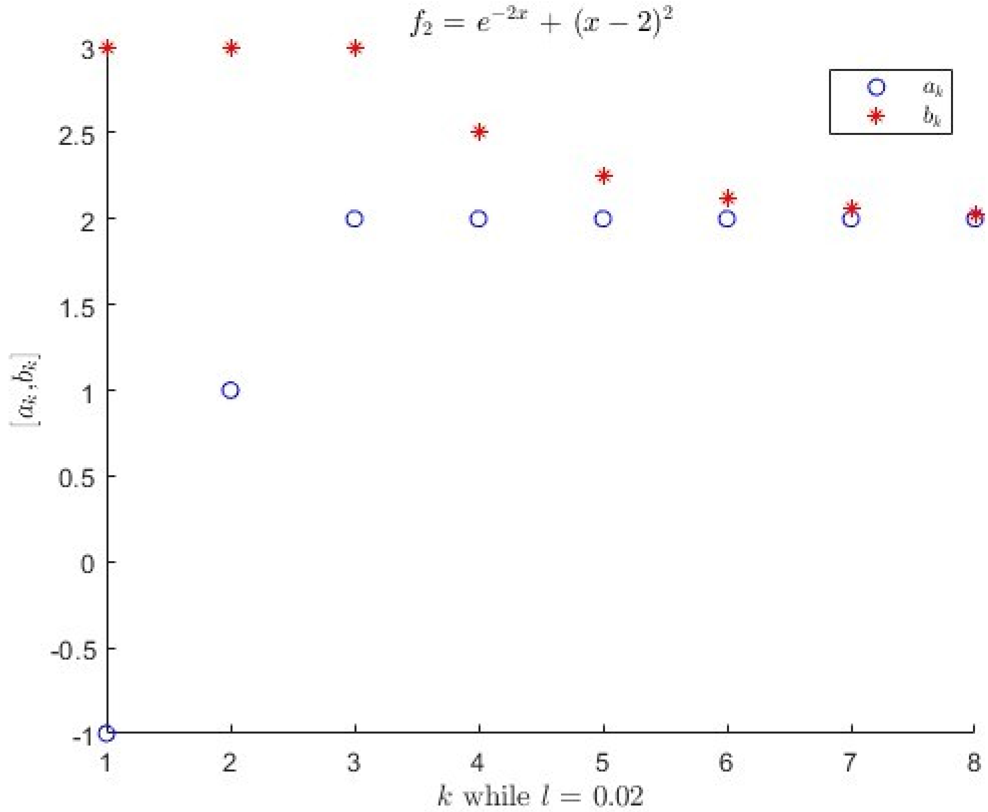


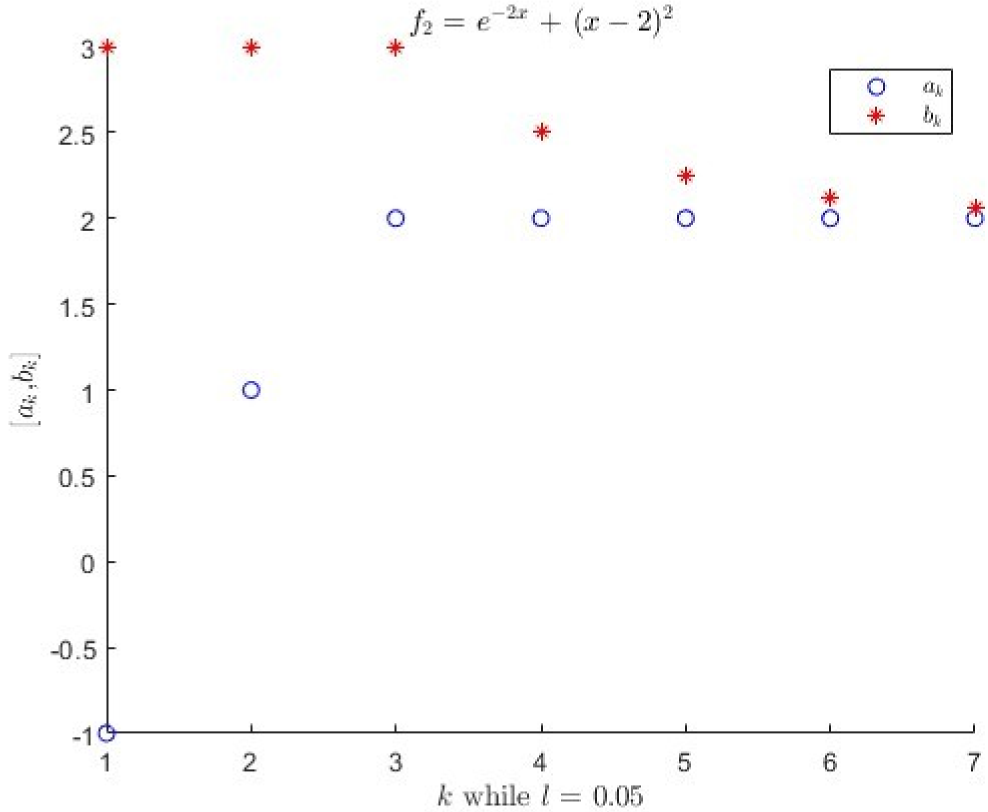
Παρακάτω παραθέτουμε τρία γραφήματα για κάθε συνάρτηση που δείχνουν την σύγκλιση των άκρων $[a_k , b_k]$ ως προς τον αριθμό επαναλήψεων (k) για τρεις διαφορετικές τιμές του l (0.02, 0.05 και 0.1).


$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.02$

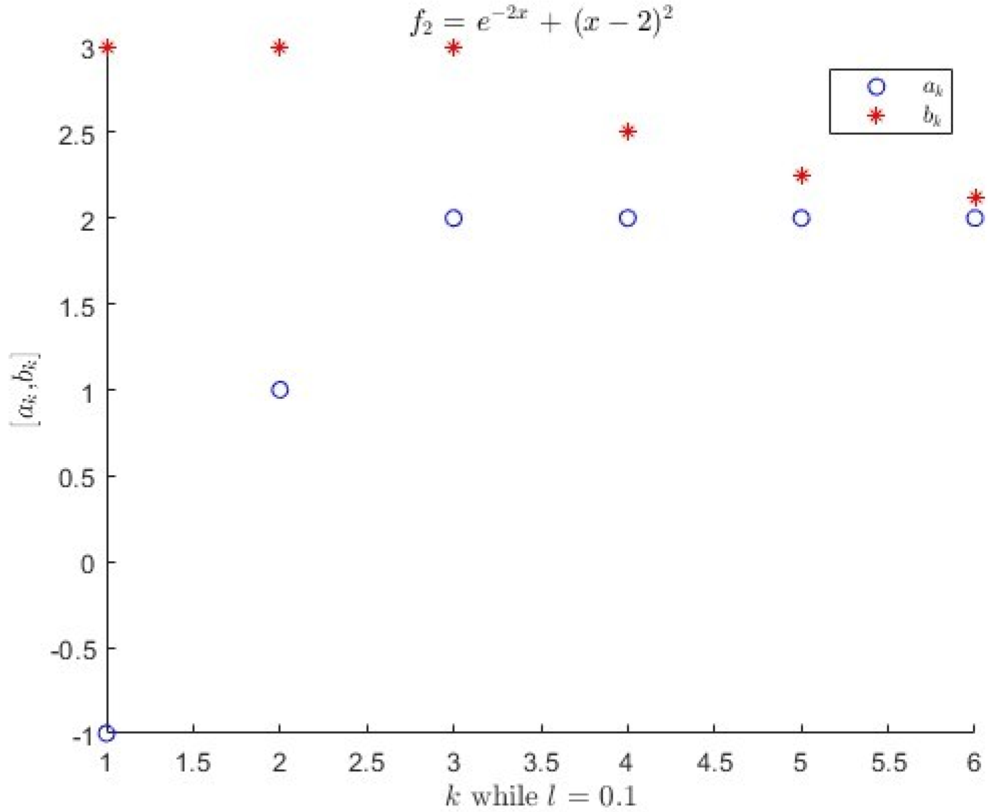

$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.05$


$f_1 = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.1$

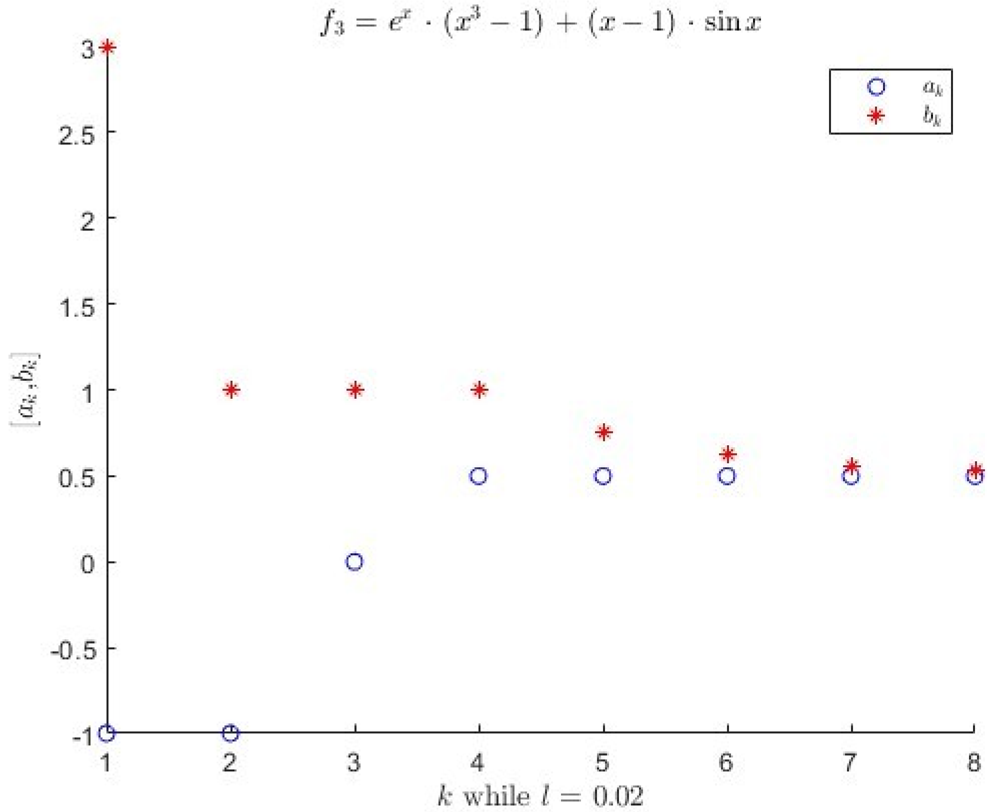

$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.02$

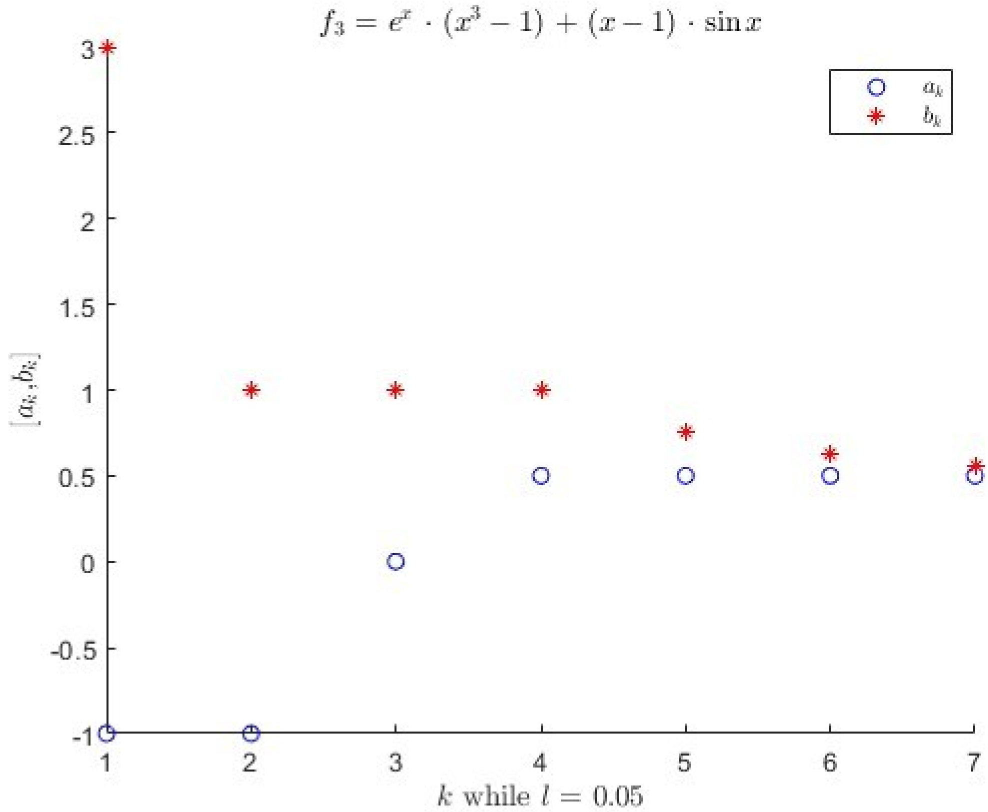


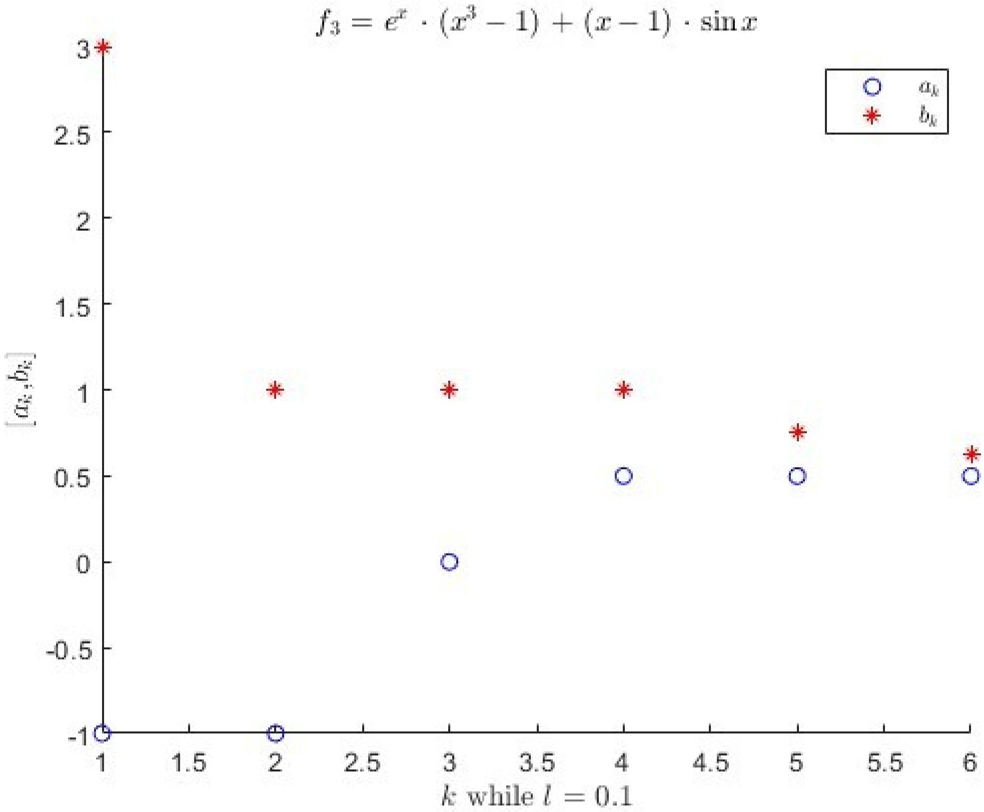
$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.05$



$f_2 = e^{-2x} + (x-2)^2$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
k while $l = 0.1$


$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
k while $l = 0.02$


$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
2
3
4
5
6
7
k while $l = 0.05$



$f_3 = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x - 1) \cdot \sin x$
a_k
b_k
$[a_k, b_k]$
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6
k while $l = 0.1$