ESERCIZI di ANALISI MATEMATICA (Corso A)

Università di Torino, Primavera 2014

Foglio 1 – Soluzioni

Esercizio 1. *Prima si controlla che le (dis)ugualianze sono vere per* $n = 5$ *rispettivamente* $n = 1$ *(primo passo della induzione). Per il secondo passo si può procedere così:*

a) *La disugualianza sia vera per un* $n \geq 5$*. Allora*

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot 5n = 5n + 5n \geq 5n + 5 = 5(n+1),$$

cio'è la disugualianza è vera per $n + 1$.

b) *L'equazione sia vera per un* $n \geq 1$*. Allora*

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2,$$

cio'è l'equazione è vera per $n + 1$.

c) *L'equazione sia vera per un* $n \geq 1$*. Allora*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2(n+1)+1),\end{aligned}$$

cio'è l'equazione è vera per $n + 1$.

d) *L'equazione sia vera per un* $n \geq 1$*. Allora*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \Big(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\Big)^2,\end{aligned}$$

cio'è l'equazione è vera per $n + 1$.

Esercizio 2. *L'insieme delle soluzioni è:*

a) $(-\infty, 1]$ *b)* $\Big(-\infty, \frac{5-\sqrt{5}}{2}\Big)$ *c)* *nessuna soluzione*

Esercizio 3. *a)* $\{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 8x - 10 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -5 \text{ e } x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 4 \geq 0 \text{ } e \text{ } x - 1 \neq 0\} = (-\infty, -1] \cup [4, +\infty)$

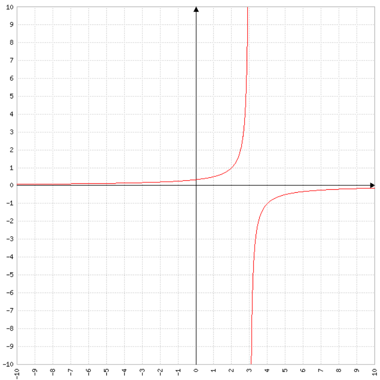
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-3x-4}{x-1} \geq 0 \text{ } e \text{ } x - 1 \neq 0\} = [-1, 1) \cup [4, +\infty)$

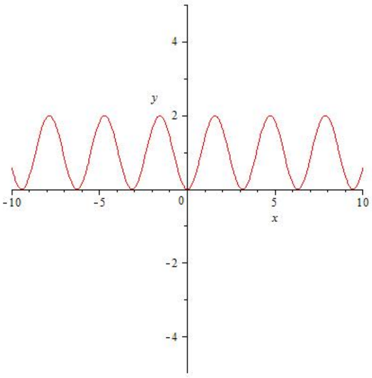
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x > 0\} = \ldots (-4\pi, -3\pi) \cup (-2\pi, -\pi) \cup (0, \pi) \cup (2\pi, 3\pi) \cup (4\pi, 5\pi) \ldots$
$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \big(2k\pi, (2k+1)\pi\big)$

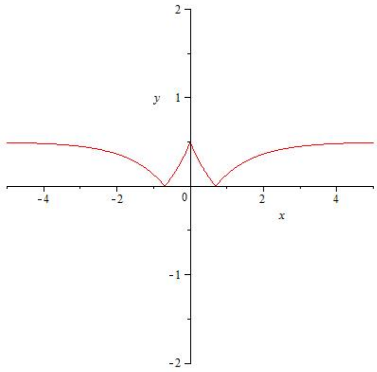
e) $\{x < 0 \mid x + 1 \geq 0\} \cup \{x \geq 0 \mid 2x + 1 \neq 0\} = [-1, 0) \cup [0, +\infty)$

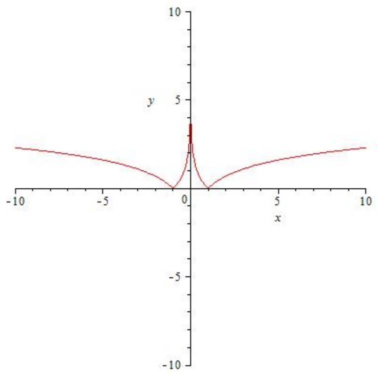
f) $\{x \in \mathbb{R} \mid e^{2x} - e^x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x \geq 1\} = [0, +\infty)$ (*si nota:* $e^{2x}/e^x = e^x$)

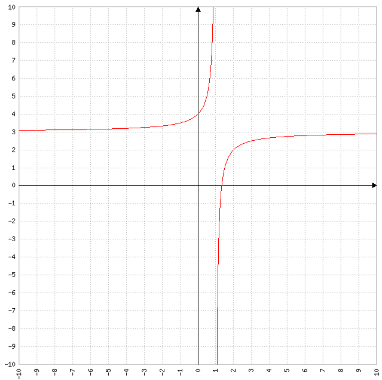
Esercizio 4. *I grafici sono*:

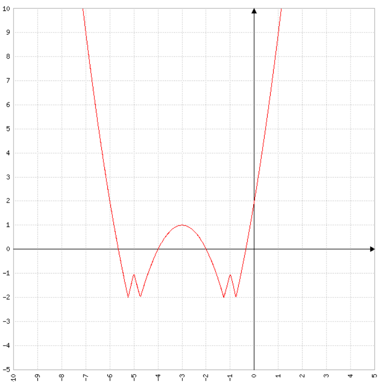






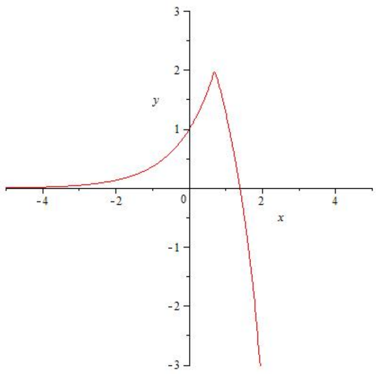






Per il secondo grafico in e) si nota che $\dfrac{3x-4}{x-1} = \dfrac{3(x-1)-1}{x-1} = 3 - \dfrac{1}{x-1}$.

Esercizio 5. *a) Il grafico è*



b) *Il numero delle soluzioni è*:

nessuna per $a > 2$, *una per* $a = 2$, *due per* $0 < a < 2$, *una per* $a \leq 0$.

c) *La soluzione è* $x = \log 5$.

Esercizio 6. *L'immagine* $\mathrm{im}(f)$ *è*:

a) $[0, 1)$ *b)* $[-1, +\infty)$ *c)* $(0, +\infty)$ *d)* $[0, +\infty) \cup (-7, +\infty) = (-7, +\infty)$

Esercizio 7.

a) *pari*   *b)* *dispari*   *c)* *pari*   *d)* *pari*   *e)* *dispari*   *f)* —

Esercizio 8. *Stabilire quale delle seguenti funzioni sono periodiche*:

a) *periodo* 2π,   *b)* *non è periodico*,   *c)* 2π*-periodica.*

Esercizio 9. *La funzione inversa è*:

a) $\mathrm{dom}(f) = (3/4, +\infty)$, $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{e^x + 3}{4}$ *con dominio* $\mathbb{R}$,

b) $\mathrm{dom}(f) = [0, +\infty)$, $\mathrm{im}(f) = [1, +\infty)$, $f^{-1}(x) = (\log_2 x)^2$ *con dominio* $[1, +\infty)$,

c) $\mathrm{dom}(f) = [1, +\infty)$, $\mathrm{im}(f) = (0, 1]$, $f^{-1}(x) = \left(\dfrac{\pi}{\arcsin x} - 2\right)^2 + 1$ *con dominio* $(0, 1]$.