09.12

Элементы теории графов

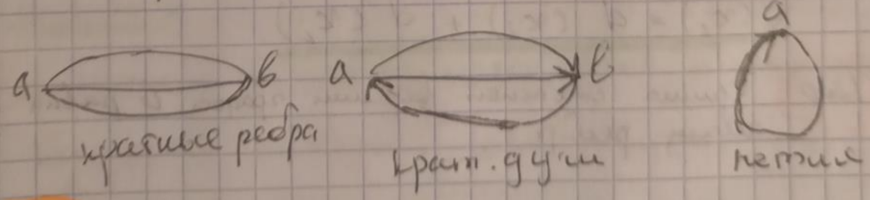
Опр граф $G(X,U)$ задан, если даны два конечных мн-ва:

1) $X = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ – мн-во вершин
2) $U = \{u_1, u_2 \ldots u_m\}$ – мн-во ребер,

состоящее из некоторых пар эл-тов $u_k = (x_i, x_j)$ из мн-ва вершин X

Данное опр. дополним след. образом: если порядок расположения концов ребра – несуществ, то ребро – неориен., если порядок важен, то ребро ориентировано /дуга.

Граф – смеш (смешграф), если есть неор. и ор. ребра

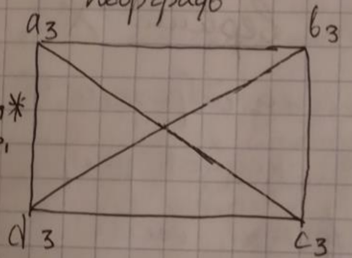


Опр a и b – смежные вершины, если сущ. ребро (a, b) их соединяющее

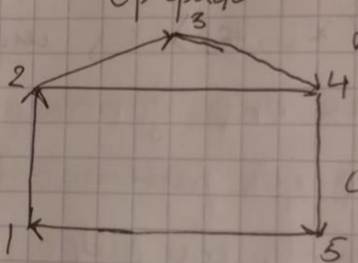
Опр если ребро соединяет вершины а и в, то оно инцидентно вершинам а и в, а верш. а и в — инцидентны ребру (а, в)

Неорграф: Степенью вершины называется число ребер, инцидентных вершине x_i (петли считаются дважды) $= (d(x_i))$

Неорграф



Орграф



$d(x_1)=2$

$d^+(x_2)=0$

$d^-(x_3)=1$

$d^+(x_3)=1$

Орграф: Полустепенью исхода вершины x_i называют $(d^-(x_i))$ число дуг, которые имеют вершину x_i - начальной

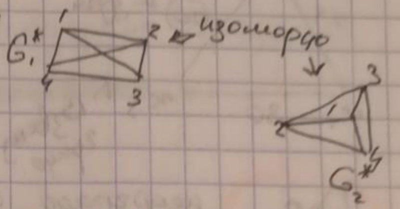
Полустепенью захода верш. x_i называют $(d^+(x_i))$ число дуг, для которых x_i - конечная

$$d(x_i) = d^-(x_i) + d^+(x_i)$$

Теор Сумма степеней вершин графа G равна удв. числу ребер

Изоморфизм графов

Графы $G_1 = (X, U)$ и $G_2 = (Y, V)$ - изоморфны, если существует такое взаимнооднозначная отобр $\varphi : X \leftrightarrow Y$, что $(a, b) \in U$, тогда и только тогда, когда $(\varphi(a), \varphi(b)) \in V$

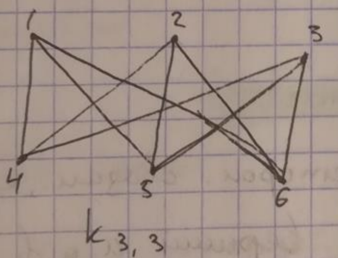


Виды графов

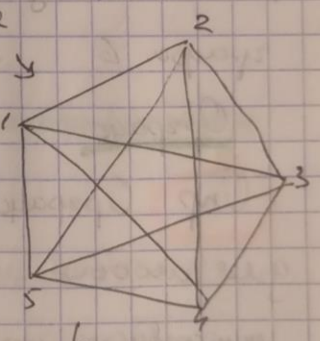
Опр полный – граф, в котором любые вершины – смежны, напр G_1^*

Опр планарный – граф, если его можно изобр. на плоскости так, чтобы ни одна дуга не пересекалась ни с одной дугой графа напр. G_2^*

непланарные



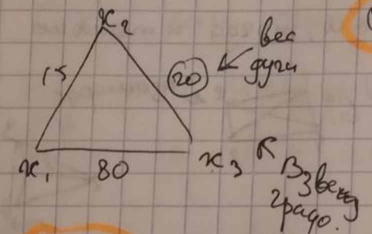
$K_{3,3}$



K_5 (полный)

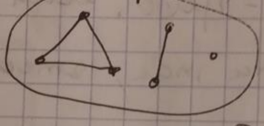
Подграфы

Опр путем в графе называется послед. дуг, в которой каждый конец предыдущ дуги совпадает с начальным след



Опр путь, у которого нач. и конеч. вершины совпадают, называется циклом.

Опр неорграф называется связным, если любые его вершины связаны путем (то есть из любой вершины можно добраться до другой)



← несвяз граф
3 компонента

Всякий максимальный связный подграф графа G называется компонентом связности графа G

Орграф:

Опр Орграф назыв. односторон. связан., если для любых 2 различных вершин a и b существует по крайней мере один путь из a в b или из b в a.

Опр Орграф. назыв сильно связ., если для любых 2 различных вершин a и b сущ. путь из a в b и обратно

Опр Сильным компонентом графа G называется сильносвяз. подграф графа G

Матричные представления графов

1) Матрица смежности $O(n^2)$
2) Матрица инцидентности $O(n \cdot m)$, n - верш, m-ребра
3) Списки смежности $O(n+m)$

Деревья

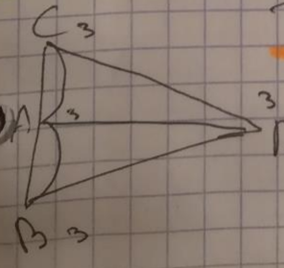
Опр Деревом называется связ. неориент. граф. без циклов имеющий не менее 2 вершины

Эйлеровы и Гамильтоновы графы

Неор: граф

Цикл который проходит по каждому ребру ровно один раз называется Эйлеровым, а граф – эйлеровый

Теорема (Эйлер, 1736г)



Связ. неорграф называется эйлеровым, т.т.т когда степени всех его вершин четны