25.11

Теорема о функциональной полноте (теорема Поста)

А - полная система тогда и только тогда, когда А не содержится целиком ни в одном из 5 замкнутых классов

{V} - не явл полной, {|} - полная

Математическая логика

Науки о правильных рассуждениях

Пример: все студенты обязаны учиться, люди со студанками - студенты, то люди со студанками должны учиться

Логика высказываний (ЛВ)

Высказывания - любое утв. предположение:

а) 2·2 это 5 (Л)

б) мат-ка - лучшая наука (И)

в) студенты обязаны учиться (И)

~~28~~.10

- Снабженные метками ((и)(л)) высказывания из некоторого фиксированного набора будем называть элементарными формулами потк. высказываний (÷АС)
- В ЛВ имеются 5 лог. оп.: $\bar{A}$; $A \& B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \equiv B$

Эти ЛО позволяют строить более сложные утверждения, так же снабжен. метками

Правила опр. меток определяются толкующим нет

- Формулой пот.и высказывания называется выражение, получаемое из элемент. формул за счет конечного применения 5 логических операций

Замечание: всякая формула ЛВ имеет метку, определяющую в соотв. со смыслом 5 ЛО

Общезначимые формулы:

Формулы ЛВ называется общезначимой (тождественно истинной или тавтологией), если является общезначимой соответствующей ей булевой ф-ии, то есть если в последнем столбце таблицы ист., отвечающей данной формуле, содержатся только единицы.

- Возьмем некоторую формулу

$A = A(\underbrace{A_1, A_2, \dots A_n}_{\text{ЭФ}})$

Заменим $A_1, A_2, \dots A_n$ на $x_1, x_2, \dots, x_n$

$f(A_1, A_2 \dots A_n) \to f(x_1, x_2 \dots x_n)$

В силу однозначности соответствие можно сопоставить любой ЛВ таблицу ист., связ. с соотв. бул. ф-ей

Например: $A \vee \bar{A} = 1$, $A \to A = 1$, $A \equiv A = 1$

Две формулы ЛВ назовем равносильными, если $A \equiv B$ является общезначимой

Например: $A \vee B$ равносильна $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$

Теор Пусть формулы ЛВ A и $A \to B$ являются общезначимыми, то B — тоже общезначима

Подстановка в формулу

Пусть U — формула ЛВ, то пусть $B_1, \dots B_n$ — ЭФО, попарно различные, $Q_1 \dots Q_n$ — формулы ЛВ

$[U]^{Q_1 \dots Q_n}_{B_1 \dots B_n}$, то есть вместо B_i в формулу U Q_i

Теор Пусть $A_1 \dots A_n$ — ЭФО, $A = A(A_1 \dots A_n)$ — тавтология

$Q_1 \dots Q_n$ — произвол. формулы ЛВ, то подстановка $[A]^{Q_1 \dots Q_n}_{A_1 \dots A_n}$ — является тавтологией

Пример: Тавтология $A \vee \overline{A}$, $Q = C \vee (B \to C)$ произвол. форма

$(C \vee \overline{(B \to C)}) \vee (C \vee (B \to C))$ — тавтология

Аксиомы логики высказываний

Обсудим логику высказывания с аксиоматической точки зрения

- Список аксиом ЛВ содержит 13 штук:

A_1 $A \to (B \to A)$

A_2 $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

A_3 $((A \wedge B) \to A)$

A_4 $((A \wedge B) \to B)$

A_5 $(A \to (B \to (A \wedge B)))$

A_6 $(A \to (A \vee B))$

A_7 $(B \to (A \vee B))$

A_8 $((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

A_9 $(\bar{A} \to (A \to B))$

A_{10} $\bar{\bar{A}} \to A$

A_{11} $((B \to \bar{A})) \to ((B \to A) \to \bar{B}))$

A_{12} $\bar{A} \vee A$

A_{13} $(A \to B) \to ((B \to A) \to (A \equiv B))$

- A, B, C - эл. ЛВ
- Все аксиомы - общезначимые (верные) ф.

Правила вывода:

1) Правило подстановки: если A - выводимая формула ЛВ, то любая подстановка в нее - выводимая формула

2) Modus Ponens (MP): если A и $A \to B$ - вывод ф-лы ИВ, то B - вывод ф. ИВ

Утв: $\forall$ аксиома $A, \vdash_{И_В} A$, тогда все что можно получить подставлением в них - вывод формулы.

вывод ф-рм. в

Список вывода. - любой набор ф-л ИВ, каждая из которых либо является аксиомой, либо получена по одному из правил вывода с помощью пред-щих эл. списка.

Выводимой ф-ой (теоремой) ИВ называется ф-ла в списке вывода, которая является последней

Всякая выводимая формула является общезначимой.

Полнота и непротиворечивость ИВ

Формальную теорию S называют непротиворечивой в широком смысле, если в ней все аксиомы и теоремы - верные формулы

ЛВ - непротиворечива в широком смысле и узком смысле

Формальную теорию S называют непрот. в узком смысле, если в ней ни для какой ф-лы A нельзя вывести эту формулу и ее отрицание.

Формал. т. S наз. полной в широком смысле, если все верные формулы явл. теоремами

Форм. т. S наз. полной в узком смысле, если добавление к набору ее аксиом, какой-либо невывод. формулы позволяет вывести некоторую форм. A и ее отриц $\overline{A}$

ЛВ является полной в широком и узком смысле

Любая более широкие теория чем ЛВ не может быть и полной и непротиворечивой

Исчисление предикатов

1) $|L| = 2^{n+1}$

2) $|T_0| = |T_1| = 2^{2^n - 1}$

3) $|S| = 2^{2^{n-1}}$