Производящая функция числовой пос

a_0, a_1, a_2 и т.д.

28.10 ## Рекуррентные последовательности

Числа Фибоначчи. Рассмотрим рекуррентную $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ последовательность $1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ следующего вида

$$x_{n+2} = a\cdot x_{n+1} + bx_n; \ n \geq 1$$

$$x_n = (q)^n \quad (q)^{n+2} = a\cdot q^{n+1} + b\cdot q^n$$

$$q^2 = a\cdot q + b$$ характеристическое уравнение

① $D > 0$, q_1, q_2 - вещественные различные

$\boxed{x_n = C_1\cdot(q_1)^n + C_2(q_2)^n}$, где C_1 и C_2 - произв. константы

② $D = 0$ q - вещ, кратный

$$x_n = (C_1 + C_2\cdot n)(q)^n$$

Пример $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$

Составим характ. ур-е

$q^2 = q+1 \quad q^2 - q - 1 = 0 \quad q_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt5}{2}$ вещ, разл.

$$x_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) = 1 \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

?! Решить систему, отыскав C_1 и C_2

$$\frac{C_1 + \sqrt5 C_1}{2} + \frac{C_2 - \sqrt5 C_2}{2} = 1 \qquad C_1 = \frac{1 - C_2\frac{1-5}{4}}{\frac{1+5}{4}} =$$

$$\frac{C_1(1+\sqrt5)^2}{4} + C_2 - \sqrt5 \qquad = C_1 = \frac{1 - \frac{C_2 - 5C_2}{4}}{} =$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) \qquad \frac{1+\sqrt5 - 1\frac{6}{4}\sqrt5}{2} =$$

$$C_1 = \frac{-\frac{1-\sqrt5}{2} + 1 -}{\frac{1+\sqrt5}{2}} = \frac{2-1-\sqrt5}{2} = \cancel{\frac{1-\sqrt5}{2\sqrt{25}}} = \cancel{\frac{4 - C_2 - 5C_2\sqrt5}{6}} =$$

$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n}{\sqrt5} \qquad 1 - \frac{C_2 - C_2\sqrt5}{2} = \frac{2\sqrt5}{2} = \frac{4 - C_2\sqrt5 - 5C_2}{} = \frac{2 - C_2 - C_2\sqrt5}{\cancel{1+\sqrt5}} \frac{2}{1+\sqrt5}$$

Булевские функции

$E = \{0; 1\}$ $\quad x \in E$ – булевская переменная

Опр

Булевской функцией от n переменных называется закон, который позволяет по любому набору значений булевских переменных $x_1, x_2, \dots x_n$ вычислить

$y \in E$ $\quad y = f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots x_n}_{\text{б перем.}})$

f(x)	x	f_1	f_2	f_3	f_4
	0	0	1	0	1
	1	1	0	0	1

$P_2(1) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ $\quad |P_2(1)| = 4$

$P_2 = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_2(n)$ $\quad P_2(\infty) = P_2(0) \cup P_2(1) \cup \ldots$

$P_2(0)$ $\quad f_0 = 0 \quad f_1 = 1$

Замечание

Любую БФ можно задать с помощью таблицы истинности, определив вектор её значений

Теорема

Количество БФ от n переменных находится по формуле $|P_2(n)| = 2^{2^n}$

Док-во: $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$

Выясним сколько строк содержит ТИ

	x_1	x_2	...	x_n	f
2^n	0	0			0
	0	0			1
	.	.			.
	.	.			.
	1	1			1

1) 2^n строк

2) $\underbrace{\underset{\sqcup}{2}\ \underset{\sqcup}{2}\ \dots\ \underset{\sqcup}{2}}_{2^n} = 2^{2^n}$

A	B	$\bar{A}$, $\neg A$, A'	$A \wedge B$, $A \& B$, $A \cdot B$	$A \cup B$	$A \to B$, $A \supset B$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

A	B	$A \equiv B$; $A \leftrightarrow B$; $A \sim B$	$A \oplus B$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

$A \mid B$	$A \downarrow B$
1	1
1	0
1	0
0	0

Если мы посмотрим на импликацию, то заметим, что из лжи следует что угодно, а из истины только истина

Свойства логических операций

① Коммутативность

$A \circ B = B \circ A$, $\circ$ вместо $\&, \vee, \equiv, \oplus, |, \downarrow$

② Ассоциативность

$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ $\circ$ вместо $\&, \vee, \equiv, \oplus$

③ Дистрибутивность

$(A \vee B) \& C = (A \& C) \vee (B \& C)$

$(A \& B) \vee C = (A \vee C) \& (B \vee C)$

④ Законы ~~поглощения~~ (де Моргана)

$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$

$\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

⑤ Законы поглощения

$A \& (A \vee B) = A$

$A \vee (A \& B) = A$

⑥. $\bar{\bar{A}} = A$ ⑦ $A \cup A = A$ $A \vee \bar{A} = 1$

$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$ $A \& 1 = A$ $A \& 0 = 0$

$A \& \bar{A} = 0$ $A \& A = A$

Указанные формулы доказываются с помощью таблицы истинности

$$f = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \cdot \bar{x}_3$$

Фиктивные переменные

Переменная x_n называется существенной, если существует такой набор значений булевых переменных, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}, 0) \neq$
$F(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n+1}, 1)$

в противном случае x_n – фиктивная перем.

Замечание

Функцию от n переменных всегда можно считать функцией от большего числа переменных, добавив фиктивные переменные

Фиктивные перем. добавляют, чтобы все функции были от одних переменных

Представление булевых функций в виде формулы

I СДНФ, СКНФ

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \sigma = 1 \\ \bar{x}, \sigma = 0 \end{cases}$$

$x^\sigma = 1$ тт $x = \sigma$

$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} .. x_{i_n}^{\sigma_n}$, где $i_1, i_2\ i_n \in \{1, .. n\}$
$\sigma \in \{0, 1\}$

?! Выписать все булевы ф-ии от 2х переменных в виде ① столбца значений ② формулы