11.11 Лекция

Элем. конъюнкция

Теорема

Любая булева функция от n переменных, кроме тождественно равной нулю, можно представить в виде СДНФ притом единственным образом, в виде:

$f(x_1, x_2, x_3) = \bigvee x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n}$ СДНФ

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n:$ ~~СКНФ~~

$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$

Любая БФ кроме тождественно равной единице представима в виде СКНФ притом единственным образом в виде

$f(x_1, x_2, x_3) = \bigwedge (x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}})$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n:$

$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n) = 0$

II Полином Жегалкина

$f(x_1, x_2, \dots x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus$
$\oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \dots \oplus$
$\oplus a_{12\dots n} x_1 x_2 \dots x_n$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12\dots n} \in \{0; 1\}$ коэф. многочлена

Теорема

Любая БФ представима в виде полинома Жегалкина, притом единственным образом.

Для того, чтобы построить ПЖ, применяют метод коэффициентов неопределенных

III Разложение БФ по переменной

~~$f(x_1, x_2, x_3) = x_n \circ f(x_1, x_2, x_3)$~~

$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_n} \circ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \vee$
$\vee x_n \circ f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1)$

Док-во: $f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0) = \overline{0} \circ f(y_1, y_2, \dots y_{n-1}, 0) \vee$
$\vee \underset{x_n}{\overset{\shortparallel}{0}} \circ f(y_1, y_2, \dots y_{n-1}, 1) = f(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0)$

$f(y_1, y_2, \dots y_{n-1}, \overset{x_n}{\overset{\shortparallel}{1}}) = \overline{1} \cdot f(y_1, y_2, \dots y_{n-1}, 0) \vee$

$\vee 1 f(y_1, y_2, y_{n-1}, 1) = f(y_1, y_2, \dots y_{n-1}, 1)$

Полные системы БФ

Опр.

Пусть A – это множество БФ

Понятие формула над A определяется индуктивным способом.

1) $\forall f(x_1, \dots, x_n) \in A$ является формулой над A

2) Если $f(x_1, \dots, x_n) \in A$ и $u_1(y_1 \dots y_n) \dots u_n(y_1 \dots y_n) \in A$ или формулы над A или символы переменных то $f(u_1, \dots u_n)$ — формула над A

Любая формула получается за счет конечного применения пунктов 1 и 2

$A = \{\rightarrow\}$ Формулы над A

$f_1 = x \rightarrow y \quad f_3 = x \rightarrow x$

$f_2 = (x \rightarrow y) \rightarrow y$

Опр

Замыканием множества A ([A])
называется множество всех
формул над A.

Опр

Мн-во (система) БФ называется полным
если [A] совпадает с множеством всех
БФ, т.е любая БФ выражается через
функции, т.е любую БФ можно представить
в виде формулы над A

Теорема

Множество БФ A является полным
$A = \{-, \vee, \wedge\}$, т.е любая БФ
представима в виде формулы,
содержащей только символы
переменных и скобки и $- \vee \wedge$

Док-во:

1 способ Возьмем произвольную БФ

$$\forall f(x_1, x_2, \dots x_n) = \overline{x_n} \cdot \underbrace{f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)}_{g(x_1 \dots x_{n-1})} \vee$$

$$\vee x_n \cdot \underbrace{f(x_1, \dots, x_{n-1}, 1)}_{g_2(x_1, \dots x_{n-1})} =$$

$$= \overline{x_n} \cdot (\overline{x_{n-1}} \cdot g(x_1 \dots x_{n-1}, 0) \vee x_{n-1} \cdot g_1(x_1 \dots x_{n-2}, 1))$$

$$\vee x_n (\overline{x_{n-1}} \cdot g_2(x_1 \dots x_{n-2}, 0) \vee x_{n-1} \cdot g_2(x_1 \dots x_{n-2}, 1))$$

Таким образом, последовательно разлагая получаемые функции от меньшего числа переменных мы получим выражение, которое содержит только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

2 способ

Опирается на теорему о единственности представления БФ в виде СДНФ

Какими св-вами обладают полные системы.

1. Пусть A и B множество БФ, причем $A \subset B$. Если A - полная система БФ,

то B тоже полная система

② Пусть A - полная система БФ и любая функция из A ~~представима~~ $\forall f \in A$ является формулой над B, тогда B тоже полная

Пример $A_1 = \{-, \wedge, \vee\}$ - полная система

$A_1 = \{-, \wedge, \vee, \to, 0\}$
$A_2 = \{-, \vee\}$
$A_3 = \{-, \wedge\}$

полная система

1) $A < A_1 \Rightarrow$ по 1 св-ву A_1 тоже полная

2) $x \wedge y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$, т.к. A полная сист

$A_2 = \{-, \vee\}$ $\forall f \in A$ выразим через

$A_3 = \{-, \wedge\}$ функции из A_2, то

по св-ву ② A_2 - полная

Аналогично для A_3

Замечание

Есть ли система БФ, содержащая только одну БФ, которая является полной

Замкнутые классы функций

Пусть A это множество БФ

[A] - это множество всех формул над A

Пример $A=\{-,\vee,\wedge\}$, $[A]=P_2$

Опр

Множество БФ A называется замкнутым мн. (классом), если замыкание совпадает с самим A ($[A]=A$)

Основные замкнутые классы

L - множество линейных функций, т.е функций полином Жегалкина которых имеет вид

$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_0\oplus a_1x_1\oplus a_2x_2\oplus\dots\oplus a_nx_n$

Теор. L - замкнутый класс, т.е $[L]=L$

Док-во:

$\forall f(x_1, \dots x_n) \in L$

$u_1(y_1, \dots y_n) \in L, \dots, u_n(y_1 \dots y_n) \in L$

$f(u_1(y), \dots, u_n(y)) \in L$?

$f(x_1, \dots, x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n =$

$= a_0 \oplus a_1 (b_0 \oplus b_{11} y \oplus \dots \oplus b_{n1} y_n) \oplus$

$\oplus a_2 (b_{02} \oplus b_{12} y_1 \oplus \dots \oplus b_{n2} y_n) \oplus \dots \oplus$

$\oplus a_n (b_{0n} + b_{1n} y_1 + \dots b_{nn} y_n) =$

$= A_0 \oplus A_1 y_1 \oplus A_2 y_2 \oplus \dots \oplus A_n y_n \in L$

$|L| = 2^{n+1}$

2) S – множество самодвойственных функций

Опр Пусть $f(x_1 \dots x_n)$ – БФ.

Двойственной к ней будем называть функцию $f^*(x_1 \dots x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots \overline{x_n})}$

Опр БФ f называется самодвойственной если $f = f^*$

$f = f^* \Rightarrow f(x_1, x_2) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2})}$

$\overline{f(x_1, x_2)} = f(\overline{x_1}, \overline{x_2})$

У самодвойственной функции значения функции на противоположных наборах являются противоположными

x_1	x_2	$f \in S$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$x \to y \notin S$

$x \wedge y \notin S$

Теор Класс самодвойственных функций является замкнутым, т.е

3) T_0 : $f(0,0,0 \dots 0) = 0$

4) Теор $[T_0] = T_0$

4) $T_1 = f(1,1,\dots 1) = 1$