Konvexe Optimierung

2. Übungsserie

Aufgabe 7

Ein Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex $\Leftrightarrow K + K \subseteq K$.

$$\begin{aligned} p, q \in K &\Leftrightarrow \big(k_1 \cdot p \in K\big) \wedge \big(k_2 \cdot q \in K\big), k_i > 0 \\ &\Leftrightarrow \{(1-t) \cdot k_1 \cdot p + t \cdot k_2 \cdot q\} \subseteq K, t \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow \{p+q\} \subseteq K \\ &\Leftrightarrow K + K \subseteq K \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x) = ||x - y||$$

$$p, q \in \mathbb{R}^n, t \in [0,1]$$
$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q)$$

$$\begin{aligned} (1-t)f(p) + tf(q) &= (1-t)||p-y|| + t||q-y|| \\ &= ||(1-t)(p-y)|| + ||t(q-y)|| \\ &= ||(1-t)p - (1-t)y|| + ||tq - ty|| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||(1-t)p - (1-t)y|| + ||tq - ty|| &\geq ||(1-t)p - (1-t)y + tq - ty|| \\ &= ||(1-t)p - y + ty + tq - ty|| \\ &= ||(1-t)p + tq - y|| \end{aligned}$$

Somit ist f konvex.

Aufgabe 11

$$Q \in R^{n\times n}; q \in \mathbb{R}^n; c \in \mathbb{R}$$

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + q^T x + c$$

Es gilt:

$$f((1-t)p + tq) = (1-t)f(p) + tf(q) - \frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q) \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq (1-t)f(p) + tf(q) - f((1-t)p + tq)\text{??} \\ \Leftrightarrow\ &0 \leq \frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) \end{aligned} \tag{2}$$

Sei $A \succeq 0$,dann gilt: $\frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) \geq 0 \Rightarrow f$ ist konvex.
Sei $A \succ 0$,dann gilt: $\frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) > 0 \Rightarrow f$ ist strikt konvex.

Zeige Gleichung 1

$$\begin{aligned} f((1-t)a+tb) &= \frac{1}{2}((1-t)a+tb)^TQ((1-t)a+tb)+q^T((1-t)a+tb)+c \\ &= \frac{1}{2}((1-t)a^T+tb^T)((1-t)Qa+Qtb)+q^T((1-t)a+tb)+c \\ &= \frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa+\frac{1}{2}t(1-t)a^TQb+\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa+\frac{1}{2}t^2b^TQb+(1-t)q^Ta+tq^Tb+c \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (1-t)f(a)+(t)f(b) &= (1-t)(\frac{1}{2}a^TQa+q^Ta+c)+t(\frac{1}{2}b^TQb+q^Tb+c) \\ &= \frac{1}{2}a^TQa-t\frac{1}{2}a^TQa+q^Ta-tc-tq^Ta+c+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+tc \\ &= \frac{1}{2}(1-t)a^TQa+(1-t)q^Ta+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+c \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-t)a^TQa+(1-t)q^Ta+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+c\dots \\ \dots-\big(\frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa+\frac{1}{2}t(1-t)a^TQb+\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa+\frac{1}{2}t^2b^TQb+(1-t)q^Ta+tq^Tb+c\big) = 0 \\ \frac{1}{2}(1-t)a^TQa+(1-t)q^Ta+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+c\dots \\ \dots-\frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa-\frac{1}{2}t(1-t)a^TQb-\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa-\frac{1}{2}t^2b^TQb-(1-t)q^Ta-tq^Tb-c = 0 \\ \frac{1}{2}(1-t)a^TQa-\frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa+t\frac{1}{2}b^TQb-\frac{1}{2}t^2b^TQb-t\frac{1}{2}(1-t)a^TQb-\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa = 0 \\ \frac{1}{2}t(1-t)a^TQa+\frac{1}{2}t(1-t)b^TQb-t\frac{1}{2}(1-t)a^TQb-\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa = 0 \\ a^TQa+b^TQb-a^TQb-b^TQa = 0 \\ (a-b)^TQ(a-b) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$