Konvexe Optimierung

3. Übungsserie

Aufgabe 18

Aufgabe 21

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & f(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 \\ s.t. \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Konvexität

Lösung Stelle Lagrange-Multiplikator für Nebenbedingung auf:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = f(x) = (x_1-3)^2 + (x_2-4)^2 + \mu(2x_1 + x_2 - 6)$$

Bilde partielle Ableitungen und setze gleich Null:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_1}\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= 2(x_1-3) + \mu \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2}(6-\mu) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{x_2}\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= 2(x_2-4) + \mu \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{2}(8-\mu) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= 2x_1 + x_2 - 6 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow 2x_1 &= 6 - x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Löse das sich ergebende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (1),(2),(3) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}(6-\mu)\right) &= 6 - \frac{1}{2}(8-\mu) \\ \Rightarrow 6-\mu &= 6 - \frac{1}{2}(8-\mu) \\ \Rightarrow -\mu &= -\frac{1}{2}(8-\mu) \\ \Rightarrow \mu &= \frac{1}{2}(8-\mu) \\ \Rightarrow \frac{3}{2}\mu &= 4 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (1),(4) \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2}\left(6 - \frac{8}{3}\right) \\ \Rightarrow x_1 &= \left(3 - \frac{1\cdot 8}{2\cdot 3}\right) = \frac{18}{6} - \frac{8}{6} = \frac{10}{6} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} (2),(4) \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{2}\left(8 - \frac{8}{3}\right) \\ \Rightarrow x_2 &= \left(4 - \frac{1\cdot 8}{2\cdot 3}\right) = \frac{24}{6} - \frac{8}{6} = \frac{16}{6} \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Einsetzen ergibt sich der Funktionswert:

$$\mathcal{L}\left(\frac{10}{6}, \frac{16}{6}, \frac{8}{3}\right) = \tag{7}$$