

Konvexe Optimierung

5. Übungsserie

Aufgabe 29

(1)

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i = \|x\|^2 \quad (1)$$

Zu zeigen: f_1 ist gleichmäßig konvex mit Konvexitätsparameter 2. f_1 ist gleichmäßig konvex wenn gilt:

$$(1-t)\|x\|^2 + t\|y\|^2 \geq \|(1-t)x + ty\|^2 + t(1-t)\mu\|x-y\|^2 \quad (2)$$

(2)

$$f_2(x) = x^4 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (1-t)x^4 + ty^4 &\leq ((1-t)x + ty)^4 \\ &\leq ((1-t)x)^4 + 4 * ((1-t)x)^3 * ty + 6 * ((1-t)x)^2 * ty^2 + 4 * ((1-t)x) * ty^3 + ty^4 \end{aligned}$$

$$(1-t)x^4 + ty^4 \leq ((1-t)x + ty)^4 \quad (4)$$

$$(1-t)x^4 + ty^4 \leq ty^4 + 4ty^3x - 4t^2y^3x + 6ty^2x^2 - 12t^2y^2x^2 + 6t^3y^2x^2 + 4tyx^3 - 12t^2yx^3 + 12t^2tyx^3 \dots \quad (5)$$

$$\dots - 4t^4yx^3 + x^4 - 4tx^4 + 6t^2x^4 - 4t^3x^4 + t^4x^4 \quad (6)$$

$$(1-t)x^4 \leq 4ty^3x - 4t^2y^3x + 6ty^2x^2 - 12t^2y^2x^2 + 6t^3y^2x^2 + 4tyx^3 \dots \quad (7)$$

$$\dots - 4t^4yx^3 + x^4 - 4tx^4 + 6t^2x^4 - 4t^3x^4 + t^4x^4 \quad (8)$$

$$(9)$$

$$\begin{aligned} (1-t)x^4 + ty^4 &\leq ((1-t)x + ty)^4 \\ &\leq ty^4 + 4ty^3x - 4t^2y^3x + 6ty^2x^2 - 12t^2y^2x^2 + 6t^2ty^2x^2 + 4tyx^3 \dots \\ &\dots - 12t^2yx^3 + 12t^2tyx^3 - 4t^3tyx^3 + x^4 - 4tx^4 + 6t^2x^4 - 4t^3x^4 + t^4x^4 \\ &\leq ty^4 + 4ty^3x - 4t^2y^3x + 6ty^2x^2 - 12t^2y^2x^2 + 6t^2ty^2x^2 + 4tyx^3 \dots \\ &\dots - 4t^4yx^3 + x^4 - 4tx^4 + 6t^2x^4 - 4t^3x^4 + t^4x^4 \end{aligned}$$