Konvexe Optimierung

2. Übungsserie

Aufgabe 7

$$\text{Ein Kegel } K \subset \mathbb{R}^n \text{ ist konvex} \Leftrightarrow K + K \subseteq K.$$

$$\begin{aligned} p, q \in K &\Leftrightarrow \big(k_1 \cdot p \in K\big) \wedge \big(k_2 \cdot q \in K\big), k_i > 0 \\ &\Leftrightarrow \{(1-t) \cdot k_1 \cdot p + t \cdot k_2 \cdot q\} \subseteq K, t \in [0,1] \\ &\Leftrightarrow \{p + q\} \subseteq K, t \in [0,1], k_1 \\ &\Leftrightarrow K + K \subseteq K \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 9

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$y \in \mathbb{R}^n$$
$$f(x) = ||x - y||$$

Norm:

1. Definitheit: $||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Absolute Homogenität: $||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \cdot ||x||$
3. Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

f ist konvex:

$$p, q \in \mathbb{R}^n, t \in [0,1]$$
$$f \text{ ist konvex} \Leftrightarrow f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q)$$

$$f((1-t)p + tq) = ||((1-t)p + tq) - y|| \tag{2}$$

$$\begin{aligned} f((1-t)p + tq) &\leq (1-t)f(p) + tf(q) \\ ||((1-t)p + tq) - y|| &\leq (1-t)||p - y|| + t||q - y|| \\ ||(1-t)p + tq - y|| &\leq ||(1-t)(p - y)|| + ||t(q - y)|| \\ ||p - tp + tq - y|| &\leq ||p - tp + ty - y|| + ||tq - ty|| \end{aligned} \tag{3}$$

Ist f auch strikt konvex?

$$\begin{aligned} p, q \in \mathbb{R}^n, y = 0_n, p = q& \\ f((1-t)p + tq) &= (1-t)f(p) + tf(q) \\ ||((1-t)p + tp) - y|| &= (1-t)||(p - y)|| + t||(p - y)|| \\ ||p - y|| &= (1-t)||(p - y)|| + t||(p - y)|| \end{aligned} \tag{4}$$

Aufgabe 11

$$Q \in R^{n \times n}; q \in \mathbb{R}^n; c \in \mathbb{R}$$
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x + q^T x + c$$

1 Sei Q psd $\Rightarrow f$ konvex

$$\begin{aligned}
f((1-t)a+tb) &= \frac{1}{2}((1-t)a+tb)^TQ((1-t)a+tb)+q^T((1-t)a+tb)+c \\
&= \frac{1}{2}((1-t)a^T+tb^T)((1-t)Qa+Qtb)+q^T((1-t)a+tb)+c \\
&= \frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa+\frac{1}{2}t(1-t)a^TQb+\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa+\frac{1}{2}t^2b^TQb+(1-t)q^Ta+tq^Tb+c
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
(1-t)f(a)+(t)f(b) &= (1-t)(\frac{1}{2}a^TQa+q^Ta+c)+t(\frac{1}{2}b^TQb+q^Tb+c) \\
&= \frac{1}{2}a^TQa-t\frac{1}{2}a^TQa+q^Ta-tc-tq^Ta+c+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+tc \\
&= \frac{1}{2}(1-t)a^TQa+(1-t)q^Ta+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+c
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(1-t)a^TQa+(1-t)q^Ta+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+c\dots \\
\dots-\big(\frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa+\frac{1}{2}t(1-t)a^TQb+\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa+\frac{1}{2}t^2b^TQb+(1-t)q^Ta+tq^Tb+c\big)=0 \\
\frac{1}{2}(1-t)a^TQa+(1-t)q^Ta+t\frac{1}{2}b^TQb+tq^Tb+c\dots \\
\dots-\frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa-\frac{1}{2}t(1-t)a^TQb-\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa-\frac{1}{2}t^2b^TQb-(1-t)q^Ta-tq^Tb-c=0 \\
\frac{1}{2}(1-t)a^TQa-\frac{1}{2}(1-t)^2a^TQa+t\frac{1}{2}b^TQb-\frac{1}{2}t^2b^TQb-t\frac{1}{2}(1-t)a^TQb-\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa=0 \\
\frac{1}{2}t(1-t)a^TQa+\frac{1}{2}t(1-t)b^TQb-t\frac{1}{2}(1-t)a^TQb-\frac{1}{2}t(1-t)b^TQa=0 \\
a^TQa+b^TQb-a^TQb-b^TQa=0 \\
(a-b)^TQ(a-b)=0
\end{aligned} \tag{7}$$