

Konvexe Optimierung

2. Übungsserie

Aufgabe 7

Ein Kegel $K \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex $\Leftrightarrow K + K \subseteq K$.

$$\begin{aligned} p, q \in K &\Leftrightarrow (k_1 \cdot p \in K) \wedge (k_2 \cdot q \in K), k_i > 0 \\ &\Leftrightarrow \{(1-t) \cdot k_1 \cdot p + t \cdot k_2 \cdot q\} \subseteq K, t \in [0, 1] \\ &\Leftrightarrow \{p + q\} \subseteq K \\ &\Leftrightarrow K + K \subseteq K \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ y &\in \mathbb{R}^n \\ f(x) &= \|x - y\| \\ p, q &\in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1] \\ f \text{ ist konvex} &\Leftrightarrow f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-t)f(p) + tf(q) &= (1-t)\|p - y\| + t\|q - y\| \\ &= \|(1-t)(p - y)\| + \|t(q - y)\| \\ &= \|(1-t)p - (1-t)y\| + \|tq - ty\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(1-t)p - (1-t)y\| + \|tq - ty\| &\geq \|(1-t)p - (1-t)y + tq - ty\| \\ &= \|(1-t)p - y + ty + tq - ty\| \\ &= \|(1-t)p + tq - y\| \end{aligned}$$

Somit ist f konvex.

Aufgabe 11

$$\begin{aligned} Q &\in \mathbb{R}^{n \times n}; q \in \mathbb{R}^n; c \in \mathbb{R} \\ \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) &= \frac{1}{2}x^T Qx + q^T x + c \end{aligned}$$

Es gilt:

$$f((1-t)p + tq) = (1-t)f(p) + tf(q) - \frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f((1-t)p + tq) &\leq (1-t)f(p) + tf(q) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq (1-t)f(p) + tf(q) - f((1-t)p + tq)?? \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) \end{aligned} \quad (2)$$

Sei $A \succeq 0$, dann gilt: $\frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) \geq 0 \Rightarrow f$ ist konvex.
 Sei $A \succ 0$, dann gilt: $\frac{1}{2}t(1-t)(p-q)^T A(p-q) > 0 \Rightarrow f$ ist strikt konvex.

Zeige Gleichung 1

$$\begin{aligned}
f((1-t)a + tb) &= \frac{1}{2}((1-t)a + tb)^T Q((1-t)a + tb) + q^T((1-t)a + tb) + c \\
&= \frac{1}{2}((1-t)a^T + tb^T)((1-t)Qa + Qtb) + q^T((1-t)a + tb) + c \\
&= \frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa + \frac{1}{2}t(1-t)a^T Qb + \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa + \frac{1}{2}t^2 b^T Qb + (1-t)q^T a + tq^T b + c
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
(1-t)f(a) + (t)f(b) &= (1-t)\left(\frac{1}{2}a^T Qa + q^T a + c\right) + t\left(\frac{1}{2}b^T Qb + q^T b + c\right) \\
&= \frac{1}{2}a^T Qa - t\frac{1}{2}a^T Qa + q^T a - tc - tq^T a + c + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + tc \\
&= \frac{1}{2}(1-t)a^T Qa + (1-t)q^T a + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + c
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1-t)a^T Qa + (1-t)q^T a + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + c \dots \\
\cdots - \left(\frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa + \frac{1}{2}t(1-t)a^T Qb + \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa + \frac{1}{2}t^2 b^T Qb + (1-t)q^T a + tq^T b + c\right) &= 0 \\
&\frac{1}{2}(1-t)a^T Qa + (1-t)q^T a + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + c \dots \\
\cdots - \frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa - \frac{1}{2}t(1-t)a^T Qb - \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa - \frac{1}{2}t^2 b^T Qb - (1-t)q^T a - tq^T b - c &= 0 \\
\frac{1}{2}(1-t)a^T Qa - \frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa + t\frac{1}{2}b^T Qb - \frac{1}{2}t^2 b^T Qb - t\frac{1}{2}(1-t)a^T Qb - \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa &= 0 \\
\frac{1}{2}t(1-t)a^T Qa + \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qb - t\frac{1}{2}(1-t)a^T Qb - \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa &= 0 \\
a^T Qa + b^T Qb - a^T Qb - b^T Qa &= 0 \\
(a-b)^T Q(a-b) &= 0
\end{aligned} \tag{5}$$