

# Konvexe Optimierung

## 2. Übungsserie

### Aufgabe 7

Ein Kegel  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist konvex  $\Leftrightarrow K + K \subseteq K$ .

$$\begin{aligned}
 p, q \in K &\Leftrightarrow (k_1 \cdot p \in K) \wedge (k_2 \cdot q \in K), k_i > 0 \\
 &\Leftrightarrow \{(1-t) \cdot k_1 \cdot p + t \cdot k_2 \cdot q\} \subseteq K, t \in [0, 1] \\
 &\Leftrightarrow \{p + q\} \subseteq K, t \in [0, 1], k_1 \\
 &\Leftrightarrow K + K \subseteq K
 \end{aligned} \tag{1}$$


---

### Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\
 y &\in \mathbb{R}^n \\
 f(x) &= \|x - y\|
 \end{aligned}$$

**Norm:**

1. Definitheit:  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
2. Absolute Homogenität:  $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. Dreiecksungleichung:  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**$f$  ist konvex:**

$$\begin{aligned}
 p, q \in \mathbb{R}^n, t \in [0, 1] \\
 f \text{ ist konvex} &\Leftrightarrow f((1-t)p + tq) \leq (1-t)f(p) + tf(q)
 \end{aligned}$$

$$f((1-t)p + tq) = \|((1-t)p + tq) - y\| \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 f((1-t)p + tq) &\leq (1-t)f(p) + tf(q) \\
 \|((1-t)p + tq) - y\| &\leq (1-t)\|p - y\| + t\|q - y\| \\
 \|(1-t)p + tq - y\| &\leq \|(1-t)(p - y)\| + \|t(q - y)\| \\
 \|p - tp + tq - y\| &\leq \|p - tp + ty - y\| + \|tq - ty\|
 \end{aligned} \tag{3}$$

**Ist  $f$  auch strikt konvex?**

$$\begin{aligned}
 p, q \in \mathbb{R}^n, y = 0_n, p \neq q \\
 f((1-t)p + tq) &= (1-t)f(p) + tf(q) \\
 \|((1-t)p + tq) - y\| &= (1-t)\|(p - y)\| + t\|(q - y)\| \\
 \|p - y\| &= (1-t)\|(p - y)\| + t\|(p - y)\|
 \end{aligned} \tag{4}$$


---

### Aufgabe 11

$$\begin{aligned}
 Q &\in \mathbb{R}^{n \times n}; q \in \mathbb{R}^n; c \in \mathbb{R} \\
 \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) &= \frac{1}{2}x^T Q x + q^T x + c
 \end{aligned}$$

1 Sei  $Q$  psd  $\Rightarrow f$  konvex

$$\begin{aligned}
 f((1-t)a + tb) &= \frac{1}{2}((1-t)a + tb)^T Q((1-t)a + tb) + q^T((1-t)a + tb) + c \\
 &= \frac{1}{2}((1-t)a^T + tb^T)((1-t)Qa + Qtb) + q^T((1-t)a + tb) + c \\
 &= \frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa + \frac{1}{2}t(1-t)a^T Qb + \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa + \frac{1}{2}t^2 b^T Qb + (1-t)q^T a + tq^T b + c
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 (1-t)f(a) + (t)f(b) &= (1-t)\left(\frac{1}{2}a^T Qa + q^T a + c\right) + t\left(\frac{1}{2}b^T Qb + q^T b + c\right) \\
 &= \frac{1}{2}a^T Qa - t\frac{1}{2}a^T Qa + q^T a - tc - tq^T a + c + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + tc \\
 &= \frac{1}{2}(1-t)a^T Qa + (1-t)q^T a + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + c
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2}(1-t)a^T Qa + (1-t)q^T a + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + c \dots \\
 \dots - &\left(\frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa + \frac{1}{2}t(1-t)a^T Qb + \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa + \frac{1}{2}t^2 b^T Qb + (1-t)q^T a + tq^T b + c\right) = 0 \\
 &\frac{1}{2}(1-t)a^T Qa + (1-t)q^T a + t\frac{1}{2}b^T Qb + tq^T b + c \dots \\
 \dots - &\frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa - \frac{1}{2}t(1-t)a^T Qb - \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa - \frac{1}{2}t^2 b^T Qb - (1-t)q^T a - tq^T b - c = 0 \\
 &\frac{1}{2}(1-t)a^T Qa - \frac{1}{2}(1-t)^2 a^T Qa + \frac{1}{2}t b^T Qb - \frac{1}{2}t^2 b^T Qb - t\frac{1}{2}(1-t)a^T Qb - \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa = 0 \\
 &\frac{1}{2}t(1-t)a^T Qa + \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qb - t\frac{1}{2}(1-t)a^T Qb - \frac{1}{2}t(1-t)b^T Qa = 0 \\
 &a^T Qa + b^T Qb - a^T Qb - b^T Qa = 0 \\
 &(a-b)^T Q(a-b) = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$