Konvexe Optimierung

3. Übungsserie

Aufgabe 18

(b)

$$f(x) = \frac{1}{2}||Ax - b||^2$$

$$\nabla_x f(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = A^\intercal (Ax - b) \tag{1}$$

Berechne Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned}(1) \overset{!}{=} 0_m &\Rightarrow A^\intercal (Ax - b) = 0_m \\ &\Rightarrow A^\intercal Ax - A^\intercal b = 0_m \\ &\Rightarrow A^\intercal Ax = A^\intercal b \\ &\Rightarrow x^* = (A^\intercal A)^{-1} A^\intercal b\end{aligned}$$

Da A den vollen Spaltenrang existiert das Inverse von $A^\intercal A$ und die Gleichung wird lösbar, wenn eine Schätzung von b zur Verfügung steht.

Aufgabe 21

$$\begin{aligned}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6\end{aligned}$$

Konvexität Das Problem ist konvex, wenn die Menge der zulässigen Punkte $\mathcal{C}$ konvex ist und die Funktion f konvex auf dieser Menge ist.

$$\begin{aligned}f(x) &= (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix}^\intercal \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} + 0_2 r + 0_2, \quad r \in \mathbb{R}^2\end{aligned}$$

Die Funktion f hat somit quadratische Form und ist konvex.

Lösung Stelle Lagrange-Multiplikator für Nebenbedingung auf:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + \mu(2x_1 + x_2 - 6)$$

Bilde partielle Ableitungen und setze gleich Null:

$$\begin{aligned}&\nabla_{x_1} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = 2(x_1 - 3) + \mu \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow & x_1 = \frac{1}{2}(6 - \mu)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&\nabla_{x_2} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = 2(x_2 - 4) + \mu \overset{!}{=} 0 \\ \Rightarrow & x_2 = \frac{1}{2}(8 - \mu)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&\nabla_{\mu} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = 2x_1 + x_2 - 6 \overset{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 6 - x_2\end{aligned} \tag{4}$$

Löse das sich ergebende Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
(2),(3),(4) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}(6-\mu)\right) &= 6-\frac{1}{2}(8-\mu) \\
\Rightarrow 6-\mu &= 6-\frac{1}{2}(8-\mu) \\
\Rightarrow -\mu &= -\frac{1}{2}(8-\mu) \\
\Rightarrow \mu &= \frac{1}{2}(8-\mu) \\
\Rightarrow \frac{3}{2}\mu &= 4 \\
\Rightarrow \mu &= \frac{8}{3}
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
(2),(5) \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2}\left(6-\frac{8}{3}\right) \\
\Rightarrow x_1 &= \left(3-\frac{1\cdot 8}{2\cdot 3}\right) = \frac{18}{6}-\frac{8}{6}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
(3),(5) \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}\right) \\
\Rightarrow x_2 &= \left(4-\frac{1\cdot 8}{2\cdot 3}\right) = \frac{24}{6}-\frac{8}{6}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Durch Einsetzen ergibt sich der Funktionswert:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{5}{3},\frac{8}{3},\frac{8}{3}\right) &= \left(\left(\left(\frac{5}{3}-3\right)\right)^2+\left(\left(\frac{8}{3}-4\right)\right)\right)^2+\frac{8}{3}\left(\left(2*\frac{5}{3}+\frac{8}{3}-6\right)\right) \\
&= \frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{8}{3}\left(\frac{18}{3}-\frac{18}{3}\right) \\
&= \frac{32}{9}
\end{aligned} \tag{8}
$$