

Konvexe Optimierung

3. Übungsserie

Aufgabe 18

Aufgabe 21

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} & f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \leq 6 \end{array}$$

Konvexität

Lösung Stelle Lagrange-Multiplikator für Nebenbedingung auf:

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 + \mu(2x_1 + x_2 - 6)$$

Bilde partielle Ableitungen und setze gleich Null:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_1} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= 2(x_1 - 3) + \mu \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{1}{2}(6 - \mu) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{x_2} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= 2(x_2 - 4) + \mu \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{1}{2}(8 - \mu) \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} \mathcal{L}(x_1, x_2, \mu) &= 2x_1 + x_2 - 6 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow 2x_1 &= 6 - x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Löse das sich ergebende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (1), (2), (3) &\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{2}(6 - \mu) \right) = 6 - \frac{1}{2}(8 - \mu) \\ \Rightarrow 6 - \mu &= 6 - \frac{1}{2}(8 - \mu) \\ \Rightarrow -\mu &= -\frac{1}{2}(8 - \mu) \\ \Rightarrow \mu &= \frac{1}{2}(8 - \mu) \\ \Rightarrow \frac{3}{2}\mu &= 4 \\ \Rightarrow \mu &= \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} (1), (4) &\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{8}{3} \right) \\ \Rightarrow x_1 &= \left(3 - \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 3} \right) = \frac{18}{6} - \frac{8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} (2), (4) &\Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{8}{3} \right) \\ \Rightarrow x_2 &= \left(4 - \frac{1 \cdot 8}{2 \cdot 3} \right) = \frac{24}{6} - \frac{8}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Einsetzen ergibt sich der Funktionswert:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) &= \left(\left(\left(\frac{5}{3} - 3\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{8}{3} - 4\right)\right)\right)^2 + \frac{8}{3} \left(\left(2 * \frac{5}{3} + \frac{8}{3} - 6\right)\right) \\ &= \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{8}{3} \left(\frac{18}{3} - \frac{18}{3}\right) \\ &= \frac{32}{9}\end{aligned}\tag{7}$$