光速度不変の原理の導出

Krollo

1. 「例題で学ぶ相対性理論」§1.1.3 の補足

「例題で学ぶ相対性理論」という参考書で相対性理論を学び始めた．やはり相対論の参考書のはじめは理論の基礎から話し始めるのだが，物理学の理論の基礎は往々にして難しい．

この本の §1.1.3 は物理の業界で有名な Landau & Lifshitz の “The Classical Theory of Fields” の Chapter 1 §2 Intervals をほぼ和訳したような内容になっているのだが，肝心の原本が数学的詳細を端折りすぎていて猛烈にわかりづらい．

特に p.4 と p.5 の間

“As already shown, if $ds = 0$ in one inertial system, then $ds' = 0$ in any other system. On the other hand, ds and ds' are infinitesimals of the same order. From these two conditions it follows that ds^2 and ds'^2 must be proportional to each other: $ds^2 = ads'^2$ where the coefficient a can depend only on the absolute value of the relative velocity of the two inertial systems.”

がよくわからない．「ds と ds' が同次の無限小」 なのはなぜ？ 「これら 2 つの条件から，$ds^2 = ads'^2$」なのはなぜ？

このあたりの記述について調べたことをまとめる．具体的には https://physics.stackexchange.com/a/651023 を参考にした．

1.1. $ds^2 = ads'^2$ の証明

Landau & Lifshitz の該当部分には「同次の無限小だから，$ds^2 = ads'^2$」と書いてあるが，そもそも「同次の無限小」の定義が $ds/ds' \to a$ なので，Landau & Lifshitz の言い方では説明したことになっていない．そして実は，$ds^2 = ads'^2$ を示すのに「同次の無限小」であることは必要ない．Landau & Lifshitz の主張を数学的に言い換えて，それを証明しよう．

まず，ある慣性系 I での光の移動によるインターバルは $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$. このとき， 相対性原理より， 他の慣性系 I' での同じ光のインターバルに対しても同じ物理法則が成り立つから，$ds'^2 = 0$.

また，インターバル $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ について，微小量ということをこれから意識しないので d を省く．また，c は定数係数であり議論にあまり関係しないので，t とまとめる．さらに，左辺は s^2 と書くとわずらわしいので s と書く．つまり，インターバルを表す式を $s = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ と書くことにする．ds'^2 についても同じように書く．

ここで，Vを $\mathbb{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間として，その基底を $\left\{\boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z\right\}$ とする．また，$t, x, y, z \in \mathbb{R}$ とする．Vの元を $\boldsymbol{v} = t\boldsymbol{v}_t + x\boldsymbol{v}_x + y\boldsymbol{v}_y + z\boldsymbol{v}_z$ と書く．また，$\langle\ ,\ \rangle$ を $V \times V$ 上の双線型形式（いずれの変数に対しても線型性を満たす実数値写像）として，基底同士の $\langle\ ,\ \rangle$ の値を

$$
\begin{gathered}
\left\langle \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_t \right\rangle = 1, \\
\left\langle \boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_x \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_y \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{v}_z, \boldsymbol{v}_z \right\rangle = -1, \\
\left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = 0 \ (\text{otherwise})
\end{gathered}
$$

により定めると，

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle &= \left\langle t\boldsymbol{v}_t + x\boldsymbol{v}_x + y\boldsymbol{v}_y + z\boldsymbol{v}_z, t\boldsymbol{v}_t + x\boldsymbol{v}_x + y\boldsymbol{v}_y + z\boldsymbol{v}_z \right\rangle \\
&= t^2\left\langle \boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_t \right\rangle + x^2\left\langle \boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_x \right\rangle + y^2\left\langle \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_y \right\rangle + z^2\left\langle \boldsymbol{v}_z, \boldsymbol{v}_z \right\rangle + \sum_{i \neq j;\ i,j \in \{t,x,y,z\}} ij\left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\
&= t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\
&= s.
\end{aligned}
$$

つまり，$s = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ となる．すなわち，s は V 上の不定値内積（正の値に限らない内積）だとみなせる．

また，この不定値内積を行列を使って表すと，

$$
\begin{aligned}
s &= \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} t & x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と書ける．このときの $[s] = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ を，s の行列表示と呼ぶ．また，このとき係数が $(+, -, -, -)$ となっているので，この不定値内積を $(1, 3)$ 型内積（あるいは符号数

$(1,3)$ の内積）と呼ぶことにする．不定値内積というときは，その行列表示が零行列ではないとする．

Theorem 1.1.1 V を $\mathbb{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間とする．s は V 上の $(1,3)$ 型内積とする．また，$\boldsymbol{v} \in V$ とするとき，$s(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$ ならば $s'(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = 0$ をみたす V 上の対称二次形式 s' が存在すると仮定する．このとき，$s' = as$ となる実数 a が存在する．また，s' もまた $(1,3)$ 型だとすると，$a > 0$ である．

証明．ユークリッドノルムが 1 である数ベクトルを $u^t := 1 \in \mathbb{R}$，$\boldsymbol{u^r} := (u^x, u^y, u^z) \in \mathbb{R}^3$（つまり $(u^t)^2 = (u^x)^2 + (u^y)^2 + (u^z)^2 = 1$）と定める．

この数ベクトルと基底 $\left\{\boldsymbol{v}_t, \boldsymbol{v}_x, \boldsymbol{v}_y, \boldsymbol{v}_z\right\}$ に対して

$$\boldsymbol{u} := u^t \boldsymbol{v}_t + u^x \boldsymbol{v}_x + u^y \boldsymbol{v}_y + u^z \boldsymbol{v}_z$$

と定めよう．すると，

$$s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = (u^t)^2 - \left((u^x)^2 + (u^y)^2 + (u^z)^2\right) = 1 - 1 = 0.$$

したがって定理の仮定から，$s'(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 0$ でもある．

$s'(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = s'_{ij}$ $(i, j \in \{t, x, y, z\})$ と書くと，s' が対称な二次形式だから，$s'_{ij} = s'_{ji}$ となる．よって，

$$\begin{aligned} s'(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) &= s'\Big(\sum_{i\in\{t,x,y,z\}} u^i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j\in\{t,x,y,z\}} u^j \boldsymbol{v}_j\Big) \\ &= \sum_{i,j\in\{t,x,y,z\}} s'(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j) u^i u^j \\ &= s'_{tt} u^t u^t + 2 \sum_{r\in\{x,y,z\}} s'_{tr} u^t u^r + \sum_{r,r'\in\{x,y,z\}} s'_{rr'} u^r u^{r'} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

また，(1) は任意の単位ベクトル $(u^x, u^y, u^z) \in \mathbb{R}^3$ について成り立つから，この符号を $-$ で置き換えた $(-u^x, -u^y, -u^z)$ についても，

$$s'_{tt} u^t u^t - 2 \sum_{r\in\{x,y,z\}} s'_{tr} u^t u^r + \sum_{r,r'\in\{x,y,z\}} s'_{rr'} u^r u^{r'} = 0 \tag{2}$$

が成り立つ．

(1) $-$ (2) より，

$$\sum_{r\in\{x,y,z\}} s'_{tr}u^t u^r = 0. \tag{3}$$

ここでまた，数ベクトルとして自然基底 $u^t = \boldsymbol{e}_t := 1 \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u^r} = \boldsymbol{e}_x := (1,0,0)$ をとって (3) に代入すると，

$$\sum_{r\in\{x,y,z\}} s'_{tr}u^t u^r = s'_{tx} = 0.$$

同じように，数ベクトル $\boldsymbol{u^r}$ として $\boldsymbol{e}_y := (0,1,0)$ や $\boldsymbol{e}_z := (0,0,1)$ をとって同じ計算をすると結局，

$$s'_{tx} = s'_{ty} = s'_{tz} = 0 \tag{4}$$

が常に成り立っていることがわかる．

(4) を (1) に代入すると

$$s'_{tt}u^t u^t = -\sum_{r,r'\in\{x,y,z\}} s'_{rr'}u^r u^{r'}. \tag{5}$$

先と同じく数ベクトル $\boldsymbol{u}^t, \boldsymbol{u^r}$ として自然基底をとって (5) に代入すると，

$$s'_{tt} = -s'_{xx} = -s'_{yy} = -s'_{zz}. \tag{6}$$

また，単位数ベクトルとして $u^t = 1,\ \boldsymbol{u^r} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ をとると，(5) は

$$s'_{tt} = -s'_{xx}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - s'_{yy}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - s'_{xy}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - s'_{yx}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

この式に (6) を代入すると，$s'_{xy} = s'_{yx}$ だから，

$$s'_{xy} = -s'_{yx} = -s'_{xy}.$$

したがって，$s'_{xy} = 0$. 同様に，$s'_{yz} = s'_{zx} = 0$.

以上まとめると，

$$s'_{tt} = -s'_{xx} = -s_{yy} = -s_{zz},$$
$$s'_{ij} = 0\ (i \neq j).$$

よって，s' を表す行列は

$$
\begin{aligned}
\left[s'\right] &= \begin{pmatrix} s'_{tt} & & & \\ & -s'_{tt} & & \\ & & -s'_{tt} & \\ & & & -s'_{tt} \end{pmatrix} \\
&= s'_{tt}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\
&= s'_{tt}[s].
\end{aligned}
$$

したがって，$s'_{tt} = a$ とおけば $\left[s'\right] = a[s]$ と書ける．すなわち，$s' = as$ となる実数 a が存在することが言えた．

さらに，s' が $(1,3)$ 型だとすると，不定値内積の仮定からその行列表示が零行列ではない．すなわち，$s'_{tt} = a \neq 0$．また，$s'_{tt} = a < 0$ だとすると，

$$
\left[s'\right] = \begin{pmatrix} a & & & \\ & -a & & \\ & & -a & \\ & & & -a \end{pmatrix}.
$$

このとき s' が $(1,3)$ 型とならず（符号が $(-,+,+,+)$ となっていて）仮定に反する．したがって，s' が $(1,3)$ 型だとすると，$s'_{tt} = a > 0$．

これで証明が完了したので，正々堂々と $ds'^2 = ads^2$ と主張してよい．

1.2. a の決定

ここまでは，不定値内積という数学的な対象について議論した（不定値内積でありさえすれば別にインターバルでなくても成り立つような事柄について議論していた）ので，a の存在は保証できたが，具体的な a の値を決めることはできない．ここからが物理の出番だ．

$ds'^2 = ads^2$ の a はどのようにして決まるべきだろうか．物理学の議論において出てきたのだから何かしらの物理量に依存する値のようだが，どのような物理量に依存しているのか？

任意の 2 つの慣性系 I と I' において出てきた量だから，特定の座標や時間に依存していてはいけない（そうすると，座標系・時間において

同じ事象を任意の 2 つの慣性座標系 I, I' において