Keywords: Poisson equation, Kolmogorov, Numerical Solution.

Постановка задачи

Рассмаотрим следущую краевую задачу для уравнения Пуассона в двумерном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \\ 0 \leq x \leq 1, \quad u(x,0) = u(x,1) = 0, \\ 0 \leq y \leq 1, \quad u(0,y) = u(1,y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Известно, что решением уравнения Пуассона является:

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2} \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

постараемся приблизить данное решение численным методом, а именно с помощью суперпозиции Колмогорова.

Лагранжиан. Выпишем Лагранжиан рассматриваемой задачи:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u}{\partial x} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial u}{\partial y} \Big)^2 + u f(x,y) \right) dx dy \to extr \tag{2}$$

Граничные условия, в общем случае, в Лагранжиан не включаем, поскольку мы будем рассматривать их по-разному в зависимости от приближения.

В соответвствии с представлением суперпозиции Колмогорова с помощью функций Шпрехера выпишем $u(x,y)$ в следующем виде:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q \left(\sum_n \alpha_n \psi(x_n + aq) \right), \quad q \in N, n \in \overline{0,2n} \tag{3}$$

Нулевое приближение

Возьмем в качестве нулевого приближения сулчай, когда $a = 0$. Тогда выражение (3) примет вид:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q \left(\sum_n \alpha_n \psi(x_n) \right), \quad q \in N, n \in \overline{0,2n}$$

В этом случае все φ_q берутся от одного и того же аргумента, следовательно можуо заменить $\sum \varphi_q$ на φ. Также обозначим $\sum_n \alpha_n \psi(x_n)$ через z, тогда перепишем выражение (3) ещё раз в следующем виде:

$$u(x,y) = \varphi(z), \quad n \in \overline{0,2n}$$

Лагранжиан (2) примет вид:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2(z) \Big(\alpha_1^2 \psi'^2(x) + \alpha_2^2 \psi'^2(y) \Big) + \varphi(z) f(x,y) \right) dx dy \to extr$$

Граничные условия опустим для нулевого приближения, оставив только требования, что $u(0,0) = 0$ и $u(1,1) = 0$. В следующих приближениях граничные условия будут учтены в полном объеме.

Сделаем замену переменных $x, y \to x, z$ и пользуясь тем, что:

$$u(x,y) = u(x.z - y) = \varphi(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha_1\varphi'(z)\psi'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha_2\varphi'(z)\psi'(y)$$

$$z = \alpha_1\psi(x) + \alpha_2\psi(x) \Rightarrow y = \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)$$

перепишем выражение (2) еще раз следующим образом:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha_1\psi(x)+\alpha_2\psi(0)}^{\alpha_1\psi(x)+\alpha_2\psi(1)} \Bigg(\frac{1}{2}\varphi'^2(z)\Big(\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Big) + \\ +\varphi(z)f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Bigg)\frac{dxdz}{\alpha_2\psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)} \to extr \tag{4}$$

Положим

$$\alpha_2\psi'\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(y)\Big) = r(z,x)$$

и проварьируем Ларганжиан (4):

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}}^{z_{max}} \Bigg(\delta\varphi(z)\varphi'(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(x,y)}\Bigg) + \\ +\delta\varphi(z)f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Bigg)\frac{dxdz}{r(z,x)} \to extr \tag{5}$$

Возьмём первый член выражения (5) по частям, получаем:

$$\delta\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \Bigg(\delta\varphi(z)\varphi'(z)\ \Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg)\Bigg|_{z_{min}}^{z_{max}} dx + \\ + \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}}^{z_{max}} \delta\varphi(z)\Bigg(f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g'_z(z,x)\Bigg)dxdz \to extr \tag{6}$$

где

$$g(z,x) = \varphi'(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg)$$

$$g'_z(z,x) = \varphi''(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg) + 2\varphi'(z)\frac{\alpha_2^2\psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r^2(z,x)} - \\ - \varphi'(z)\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r^3(z,x)}\alpha_2\psi''\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)$$

или для компактности

$$g(z,x) = \varphi'(z)g_{wo\_phi}(z,x)$$

$$g'_z(z,x) = \varphi''(z)g_{wo\_phi}(z,x) + \varphi'(z)g'_{wo\_phi}(z,x)$$

Из-за того, что $\varphi(z)$ фиксирована в точках z_{min} и z_{max}, первый член выражения (6) обнуляется. Обозначим второй член выражения (6) как I.

$$I = \int_0^1 \int_{z_{min}}^{z_{max}} \delta\varphi(z)\left(f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g'_z(z,x)\right)dxdz$$

Будем решать I методом сведения к порвторному интегралу. Запишем I таким образом, чтобы было удобно выписать пределы интегрирования по x:

$$I = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \delta\varphi(z)\left(\int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - g'_z(z,x)\Big)dx\right)dz \tag{7}$$

где,

$$l_{low}(z) = \begin{cases} 0, & z < \alpha_2, \\ \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$l_{high}(z) = \begin{cases} \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_1}\Big), & z < \alpha_1, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение

Из выражения (7) следует:

$$\int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - g'_z(z,x)\Big)dx = 0$$

или

$$\int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - g'_z(z,x)\Big)dx =$$

$$= \int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - \varphi''(z)g_{wo\_phi}(z,x) - \varphi'(z)g'_{wo\_phi}(z,x)\Big)dx = 0$$

Откуда получаем

$$\int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} f\big(x, y(z,x)\big)dx = \varphi''(z)\int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} g_{wo\_phi}(z,x)dx + \varphi'(z)\int_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} g'_{wo\_phi}(z,x)dx$$

Перепишем соответсвующие интегралы иначе:

$$I_f(z) = \varphi''(z)I_g(z) + \varphi'(z)I_{g\_prime}(z)$$

Добавим граничные условия:

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

Пусть $h(z) = \varphi'(z)$, $\varphi(z) = \int\limits_0^z h(z_1)dz_1$
Первое граничное условие выполняется автоматически.
Подберем $h(0)$ такое, чтобы выполнялось условие $\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.
Затем подставляя $\alpha_1\psi(x) + \alpha_2\psi(y)$ вместо z получаем $u(x, y)$. В результате решение $u(x, y)$ выглядит следующим образом (рис. solution_0_01.png). Основной недостаток решения это несоответствие граничным условиям (наложить которые в полной мере не представлялось возможным в данном приближении). Для избегания данного недостатка следует отойти от нулевого приближения и использовать $a > 0$.

Общий случай

Перепеишем уравнение (3) для двумерного случая:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q\left(\sum_n \alpha_n\psi(x_n + aq)\right) = \sum_q \varphi_q\left(\alpha_1\psi(x + aq) + \alpha_2\psi(y + aq)\right) = \sum_q \varphi_q\left(z_q\right)$$

где

$$q \in N, n \in \ \overline{0, 2n}$$

Тогда, производные примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_q \varphi_q'(z_q)\frac{\partial z_q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_q \varphi_q'(z_q)\frac{\partial z_q}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z_q}{\partial x} = \alpha_1\psi'(x + qa)$$

$$\frac{\partial z_q}{\partial y} = \alpha_1\psi'(y + qa)$$

Перепишем Лагранжиан (2):

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\sum_q\sum_l \varphi_q'(z_q)\varphi_l'(z_l)\left(\alpha_1^2\psi'(x + qa)\psi'(x + la) + \alpha_2^2\psi'(y + qa)\psi'(y + la)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_q \varphi_q(z_q)f(x,y)\right)dxdy$$

Вариация такого Лагранжиана выглядит следующим образом:

$$\delta\mathcal{L} = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\sum_q\sum_l \delta\varphi_q'(z_q)\varphi_l'(z_l)\left(\alpha_1^2\psi'(x + qa)\psi'(x + la) + \alpha_2^2\psi'(y + qa)\psi'(y + la)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_q \delta\varphi_q(z_q)f(x,y)\right)dxdy =$$
$$= \sum_q\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left(\delta\varphi_q'(z_q)\sum_l \varphi_l'(z_l)\left(\alpha_1^2\psi'(x + qa)\psi'(x + la) + \alpha_2^2\psi'(y + qa)\psi'(y + la)\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_q \delta\varphi_q(z_q)f(x,y)\right)dxdy$$

Переходим от переменных x, y к переменным x, z_q. Для использования в дальнейшем выразим через x и z_q следующие величины:

$$y = \psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big) - qa$$

$$\varphi_l'(z_l) = \varphi_l'\Bigg(\alpha_1\psi(x+la) + \alpha_2\psi\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big) - (q-l)a\Big)\Bigg)$$

$$z_l(z_q) = \alpha_1\psi(x+qa) + \alpha_2\psi\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big) - (q-l)a\Big)$$

$$\frac{\partial\varphi_l'(z_l(z_q))}{\partial z_q} = \varphi_l''(z_l(z_q))\frac{\partial z_l}{\partial z_q}$$

$$\frac{\partial z_l}{\partial z_q} = \psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big) - (q-l)a\Big)\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(\frac{(z_q-\alpha_1\psi(x+qa))}{\alpha_2}))}$$

Введем обозначение B:

$$B = \Big(\alpha_1^2\psi'(x+qa)\psi'(x+la) + \alpha_2^2\psi'(y+qa)\psi'(y+la)\Big) =$$

$$= \Big(\alpha_1^2\psi'(x+qa)\psi'(x+la) + \alpha_2^2\psi'\Big(\ \psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big)\Big)\psi'\Big(\ \psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big) - (q-l)a\Big)\Big)$$

Интегрируем по частям первый член в вариации и выпишем вариацию Лагранжиана еще раз:

$$\delta\mathcal{L} = \sum_q \int\limits_0^{\alpha_1+\alpha_2}\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}}\Bigg(-\delta\varphi_q(z_q)\sum_l\Big(\Big(\frac{\partial\varphi_l'(z_l(z_q))}{\partial z_q}\Big)B + \varphi_l'(z_l(z_q))\frac{\partial B}{\partial z_q}\Big) +$$

$$+\delta\varphi_q(z_q)f(x,y)\Bigg)\frac{dx dz_q}{\alpha_2\psi'(\psi^{-1}(\frac{(z_q-\alpha_1\psi(x+qa))}{\alpha_2}))}$$

и введем обозначение $r(x, z_q) = \frac{1}{\alpha_2\psi'(\psi^{-1}(\frac{(z_q-\alpha_1\psi(x+qa))}{\alpha_2}))}$ откуда получаем:

$$\forall q:\quad \sum_l\Bigg(\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}}\Big(\Big(\frac{\partial\varphi_l'(z_l(z_q))}{\partial z_q}\Big)B + \varphi_l'(z_l(z_q))\frac{\partial B}{\partial z_q}\Big)\frac{dx}{r(z,z_q)}\Bigg) = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y(z_q, x))\frac{dx}{r(z,z_q)}$$

или

$$\forall q:\quad \sum_l\Bigg(\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}}\Big(\Big(\varphi_l''(z_l(z_q))\frac{\partial z_l}{\partial z_q}\Big)B + \varphi_l'(z_l(z_q))\frac{\partial B}{\partial z_q}\Big)\frac{dx}{r(z,z_q)}\Bigg) = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y(z_q, x))\frac{dx}{r(z,z_q)}$$

Мы получили $q_{max} + 1$ дифференциальных уравнений, но переменные z_q для разных q сдвинуты относительно друг друга.

Данные уравнения являются уравнениями с запаздываниями (причем с переменным запаздыванием и само запаздывание под интегралом). Чтобы перейти к уравнениям, где у всех неизвестных функций одинаковый аргумент, нужно воспользоваться разложением в ряд Тейлора (без него мы не сможем вынести неизвестные функции из под интеграла).

Разложение в ряд Тейлора

$$\Delta z_{l,q} = \alpha_1 \psi(x+la) + \alpha_2 \psi\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z_q - \alpha_1\psi(x+qa)}{\alpha_2}\Big) - (q-l)a\Big) - z_q$$

$$\forall q: \quad \sum_l \Bigg[\int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_l^{(n+2)}(z_q)(\Delta z_{lq})^n}{n!} \Bigg) \frac{\partial z_l}{\partial z_q} B \frac{dx}{r(x,z_q)} + \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} \Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_l^{(n+1)}(z_q)(\Delta z_{lq})^n}{n!} \Bigg) \frac{\partial B}{\partial z_q} \frac{dx}{r(x,z_q)} \Bigg] =$$

$$= \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y(z_q, x)) \frac{dx}{r(x,z_q)}$$

Переобозначим для удобства:

$${}_nI_{lq}^{B} = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} (\Delta z_{lq})^n \frac{\partial z_l}{\partial z_q} B \frac{dx}{r(x,z_q)}$$

$${}_nI_{lq}^{\partial B} = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} (\Delta z_{lq})^n \frac{\partial B}{\partial z_q} \frac{dx}{r(x,z_q)}$$

$$F_q = \int\limits_{x_{min}}^{x_{max}} f(x, y(z_q, x)) \frac{dx}{r(x,z_q)}$$

Тогда:

$$\forall q: \quad \sum_{n=0}^{N} \sum_l \Bigg[\Bigg(\frac{\varphi_l^{(n+2)}(z_q)}{n!} \Bigg) {}_nI_{lq}^{B} + \Bigg(\frac{\varphi_l^{(n+1)}(z_q)}{n!} \Bigg) {}_nI_{lq}^{\partial B} \Bigg] = F_q$$

Дальнейший план:

Для люого выбранного N мы можем решить данную систему уравнений добавив к ней также граничные условия (пока не записано). Вместе с граничными условиями система получается переполненной, однако, мы можем действовать следующим образом:

1. На каждом шаге разностной схемы выбирать две из функций φ_l, для которых значения рассчитываем не в соответствии с разностной схемой, а чтобы удовлетвоорить граничным условиям.

2. Номера этих функций на каждом шаге меняются. Такоим образом ”время” на каждом шаге течет для всех функций, кроме двух. В среднем это приводит к замедлению течения времени для всех функций, для компенсации чего вводится поправка в разностную схему (умножаем шаг на коэффициент).