Keywords: Poisson equation, Kolmogorov, Numerical Solution.

Постановка задачи

Рассмаотрим следущую краевую задачу для уравнения Пуассона в двумерном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \\ 0 \le x \le 1, \quad u(x,0) = u(x,1) = 0, \\ 0 \le y \le 1, \quad u(0,y) = u(1,y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Известно, что решением уравнения Пуассона является:

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2} \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

постараемся приблизить данное решение численным методом, а именно с помощью суперпозиции Колмогорова.

Лагранжиан. Выпишем Лагранжиан рассматриваемой задачи:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u f(x,y) \right) dxdy \to extr \tag{2}$$

Граничные условия опустим для нулевого придлижения, разве что только z_{min} и z_{max} равны нулю

В соответствие с представлением суперпозиции Колмогорова с помощью функций Шпрехера выпишем $u(x,y)$ в следующем виде:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q \left(\sum_n \alpha_n \psi(x_n + aq) \right), \quad q \in N, n \in \overline{0, 2n} \tag{3}$$

Нулевое приближение

Возьмем в качестве нулевого приближения сулчай, когда $a = 0$. Тогда выражение (3) примет вид:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q \left(\sum_n \alpha_n \psi(x_n) \right), \quad q \in N, n \in \overline{0, 2n}$$

В этом случае все φ_q берутся от одного и того же аргумента, следовательно можуо заменить $\sum \varphi_q$ на φ. Также обозначим $\sum_n \alpha_n \psi(x_n)$ через z, тогда перепишем выражение (3) ещё раз в следующем виде:

$$u(x,y) = \varphi(z), \quad n \in \overline{0, 2n}$$

Лагранжиан (2) примет вид:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2(z) \left(\alpha_1^2 \psi'^2(x) + \alpha_2^2 \psi'^2(y) \right) + \varphi(z) f(x,y) \right) dxdy \to extr$$

Сделаем замену переменных $x, y \to x, z$ и пользуясь тем, что:

$$u(x,y) = u(x.z - y) = \varphi(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(z) \alpha_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(z)\alpha_2$$

$$z = \alpha_1\psi(x) + \alpha_2\psi(x) \Rightarrow y = \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)$$

перепишем выражение (2) еще раз следующим образом:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha_1\psi(x)+\alpha_2\psi(0)}^{\alpha_1\psi(x)+\alpha_2\psi(1)} \Bigg(\frac{1}{2}\varphi'^2(z)\Big(\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Big) + \\ +\varphi(z) f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Bigg)\frac{dxdz}{\alpha_2\psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)} \to extr \qquad (4)$$

Положим

$$\alpha_2\psi'\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(y)\Big) = r(z,x)$$

и проварьируем Ларганжиан (4):

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}(x)}^{z_{max}(x)} \Bigg(\delta\varphi(z)\varphi'(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(x,y)}\Bigg) + \\ +\delta\varphi(z) f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Bigg)\frac{dxdz}{r(z,x)} \to extr \qquad (5)$$

Возьмём первый член выражения (5) по частям, получаем:

$$\delta\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \Bigg(\delta\varphi(z)\varphi'(z)\ \Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg)\Bigg|_{z_{min}(x)}^{z_{max}(x)} dx + \\ + \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}(x)}^{z_{max}(x)} \delta\varphi(z)\Bigg(f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g'_z(z,x)\Bigg)dxdz \to extr \qquad (6)$$

где

$$g(z,x) = \varphi'(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg)$$

$$g'_z(z,x) = \varphi''(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg) + \frac{2\psi'(x)\alpha_2^2\psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r^2(z,x)} - \\ - \frac{\psi'(x)\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r^3(z,x)}\alpha_2\psi''\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)$$

Пользуясь тем, что $\varphi(z)$ фикисрована в точках z_{min} и z_{max}, первый член выражения (6) обнуляется. Обозначим второй член выражения (6) как I.

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}(x)}^{z_{max}(x)} \delta\varphi(z)\Bigg(f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g'_z(z,x)\Bigg)dxdz = 0 \qquad (7)$$

Будем решать (7) методом сведения к порвторному интегралу. Запишем I таким образом, чтобы было удобно выписать пределы интегрирования по x:

исходно рассматривал три случая для $\alpha_1 < \alpha_2, \alpha_1 > \alpha_2$ и $\alpha_1 = \alpha_2$ и для каждого из них разбивал I на три интеграла. Получилось обобщить.

$$I = \int\limits_{z_{min}(x)}^{z_{max}(x)} \delta\varphi(z) \int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g'_z(z,x)\Big) dxdz = 0$$

где,

$$l_{low}(z) = \begin{cases} 0, & z < \alpha_2, \\ \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$l_{high}(z) = \begin{cases} \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_1}\Big), & z < \alpha_1, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предположим, что $\psi(x) = x$

text in progress