Keywords: Poisson equation, Kolmogorov, Numerical Solution.

Постановка задачи

Рассмаотрим следущую краевую задачу для уравнения Пуассона в двумерном случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \\ 0 \leq x \leq 1, \quad u(x,0) = u(x,1) = 0, \\ 0 \leq y \leq 1, \quad u(0,y) = u(1,y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Известно, что решением уравнения Пуассона является:

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi^2} \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

постараемся приблизить данное решение численным методом, а именно с помощью суперпозиции Колмогорова.

Лагранжиан. Выпишем Лагранжиан рассматриваемой задачи:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u f(x,y) \right) dxdy \to extr \tag{2}$$

Граничные условия опустим для нулевого приближения, разве что только z_{min} и z_{max} равны нулю

В соответствие с представлением суперпозиции Колмогорова с помощью функций Шпрехера выпишем $u(x,y)$ в следующем виде:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q \left(\sum_n \alpha_n \psi(x_n + aq) \right), \quad q \in N, n \in \overline{0,2n} \tag{3}$$

Нулевое приближение

Возьмем в качестве нулевого приближения сулчай, когда $a = 0$. Тогда выражение (3) примет вид:

$$u(x,y) = \sum_q \varphi_q \left(\sum_n \alpha_n \psi(x_n) \right), \quad q \in N, n \in \overline{0,2n}$$

В этом случае все φ_q берутся от одного и того же аргумента, следовательно можуо заменить $\sum \varphi_q$ на φ. Также обозначим $\sum_n \alpha_n \psi(x_n)$ через z, тогда перепишем выражение (3) ещё раз в следующем виде:

$$u(x,y) = \varphi(z), \quad n \in \overline{0,2n}$$

Лагранжиан (2) примет вид:

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \varphi'^2(z) \left(\alpha_1^2 \psi'^2(x) + \alpha_2^2 \psi'^2(y) \right) + \varphi(z) f(x,y) \right) dxdy \to extr$$

Сделаем замену переменных $x, y \to x, z$ и пользуясь тем, что:

$$u(x,y) = u(x.z - y) = \varphi(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(z) \alpha_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(z)\alpha_2$$

$$z = \alpha_1\psi(x) + \alpha_2\psi(x) \Rightarrow y = \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)$$

перепишем выражение (2) еще раз следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_{\alpha_1\psi(x)+\alpha_2\psi(0)}^{\alpha_1\psi(x)+\alpha_2\psi(1)} \Bigg(\frac{1}{2}\varphi'^2(z)\Big(\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Big) + \\ +\varphi(z)f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Bigg)\frac{dxdz}{\alpha_2\psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)} \to extr\end{gathered} \tag{4}$$

Положим

$$\alpha_2\psi'\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(y)\Big) = r(z,x)$$

и проварьируем Ларганжиан (4):

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}}^{z_{max}} \Bigg(\delta\varphi(z)\varphi'(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(x,y)}\Bigg) + \\ +\delta\varphi(z)f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\Bigg)\frac{dxdz}{r(z,x)} \to extr\end{gathered} \tag{5}$$

Возьмём первый член выражения (5) по частям, получаем:

$$\begin{gathered}\delta\mathcal{L} = \int\limits_0^1 \Bigg(\delta\varphi(z)\varphi'(z)\ \Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg)\Bigg|_{z_{min}}^{z_{max}} dx + \\ + \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}}^{z_{max}} \delta\varphi(z)\Bigg(f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g_z'(z,x)\Bigg)dxdz \to extr\end{gathered} \tag{6}$$

где

$$g(z,x) = \varphi'(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg)$$

$$\begin{gathered}g_z'(z,x) = \varphi''(z)\Bigg(\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r(z,x)}\Bigg) + 2\varphi'(z)\frac{\alpha_2^2\psi'\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r^2(z,x)} - \\ - \varphi'(z)\frac{\alpha_1^2\psi'^2(x) + \alpha_2^2\psi'^2\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)}{r^3(z,x)}\alpha_2\psi''\Big(\psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big)\end{gathered}$$

или для компактности

$$g(z,x) = \varphi'(z)g_{wo\_phi}(z,x)$$

$$g_z'(z,x) = \varphi''(z)g_{wo\_phi}(z,x) + \varphi'(z)g_{wo\_phi}'(z,x)$$

Пользуясь тем, что $\varphi(z)$ фиксирована в точках z_{min} и z_{max}, первый член выражения (6) обнуляется. Обозначим второй член выражения (6) как I.

$$I = \int\limits_0^1 \int\limits_{z_{min}}^{z_{max}} \delta\varphi(z)\Bigg(f\Big(x, \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(x)\Big)\Big) - g_z'(z,x)\Bigg)dxdz$$

Будем решать I методом сведения к порвторному интегралу. Запишем I таким образом, чтобы было удобно выписать пределы интегрирования по x:

$$I = \int\limits_{z_{min}}^{z_{max}} \delta\varphi(z)\Bigg(\int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - g'_z(z,x)\Big)dx\Bigg)dz \tag{7}$$

где,

$$l_{low}(z) = \begin{cases} 0, & z < \alpha_2, \\ \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big), & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$l_{high}(z) = \begin{cases} \psi^{-1}\Big(\frac{z}{\alpha_1}\Big), & z < \alpha_1, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение

Из выражения (7) следует:

$$\int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - g'_z(z,x)\Big)dx = 0$$

или

$$\int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - g'_z(z,x)\Big)dx =$$

$$= \int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} \Big(f\big(x, y(z,x)\big) - \varphi''(z)g_{wo\_phi}(z,x) + \varphi'(z)g'_{wo\_phi}(z,x)\Big)dx = 0$$

Откуда получаем

$$\int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} f\big(x, y(z,x)\big)dx = \varphi''(z)\int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} g_{wo\_phi}(z,x)dx + \varphi'(z)\int\limits_{l_{low}(z)}^{l_{high}(z)} g'_{wo\_phi}(z,x)dx$$

Введем переобозначения:

$$I_f(z) = \varphi''(z)I_g(z) + \varphi'(z)I_{g\_prime}(z)$$

Добавим граничные условия:

$$\varphi(0) = 0$$
$$\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$$

Пусть $h(z) = \varphi'(z)$, $\varphi(z) = \int\limits_0^z h(z_1)dz_1$

Подберем $h(0)$ такое, чтобы выполнялось условие $\varphi(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$.

Затем подставляя $\alpha_1\psi(x) + \alpha_2\psi(y)$ вместо z получаем $u(x, y)$.