Terceira Lista de Exercícios
Tópicos de Matemática Aplicada I

Professor Geovani Nunes Grapiglia
Departamento de Matemática - UFPR

1. Dada uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, prove que existem

$$U = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^{m\times m} \text{ and } V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

tais que

$$U^T AV = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m\times n},\ p = \min\{m, n\}$$

onde

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p \geq 0.$$

2. No Exercício 1, os números σ_i são chamados de valores singulares de A, u_i é o i-ésimo vetor singular à esquerda e v_i é o i-ésimo vetor singular à direita. Prove que

$$Av_i = \sigma_i u_i \quad \text{e} \quad A^T u_i = \sigma_i v_i$$

para todo $i = 1, \ldots, p$. Com base nesse resultado, indique uma maneira de se calcular σ_i, u_i e v_i.

3. Considere a SVD de$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ descrita no Exercício 1. Defina r por

$$\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0.$$

Prove que

(a) $\text{Posto}(A) = r$
(b) $\text{Im}(A) = \text{span}\{u_1, \ldots, u_r\}$.
(c) $\text{Núcleo}(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$.
(d) $A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^T$.

4. Com respeito à SVD de A, prove que

(a) $\|A\|_F^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_p^2$, $p = \min\{m, n\}$.
(b) $\|A\|_2 = \sigma_1$.
(c) $\min_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_n$ $(m \geq n)$.

5. Considere a SVD de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dada no Exercício 1. Se $k < r = \text{posto}(A)$ e

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T,$$

   então

$$\min_{\text{posto}(B)=k} \|A - B\|_2 = \|A - A_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

6. Prove que

$$\sigma_{max}(A) = \max_{y \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \frac{y^T A x}{\|x\|_2 \|y\|_2}.$$

7. Mostre que qualquer matrix em $\mathbb{R}^{m \times n}$ é o limite de uma sequência de matrizes de posto completo.

8. Descreva o Algoritmo de Lloyd (k-médias) para clusterização.

9. Descreva o procedimento de "Auto-faces" para reconhecimento facial.