Estudo matemático do reconhecimento de caracteres

Carlos Henrique Venturi Ronchi
Orientador: Abel Soares Siqueira

Universidade Federal do Paraná - UFPR

16 de maio de 2017

- Prever a inflação;
- saber se choverá ou não;
- demanda de estoque;
- reconhecimento de caracteres.

- Método do gradiente;
- método dos gradientes conjugados;
- método do gradiente estocástico;
- redes neurais;
- outros.

Para a regressão (e quadrados mínimos), temos

$$J(\theta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(y^{(i)} - m_\theta(x^{(i)}))^2.$$

Já para classificação,

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{m}\left[-y^{(i)} log(m_\theta(x^{(i)})) - (1 - y^{(i)}) log(1 - m_\theta(x^{(i)}))\right].$$

Direção de descida $-\nabla f(x)$.

Teorema 1

Sejam f uma função convexa e L-Lipschitz e $x^* \in \arg\min_{x:\|x\|\leq B} f(x)$. Se rodarmos o método do gradiente em f para T passos com $\eta = \sqrt{\frac{B^2}{L^2 T}}$, então o vetor de retorno $\bar{x}$ satisfaz

$$f(\bar{x}) - f(x^*) \leq \frac{BL}{\sqrt{T}}$$

Ainda mais, dado $\epsilon > 0$, para obter $f(\bar{x}) - f(x^*) \leq \epsilon$, é necessário rodar o algoritmo com um número T de iterações que satisfaz

$$T \geq \frac{B^2 L^2}{\epsilon^2}.$$

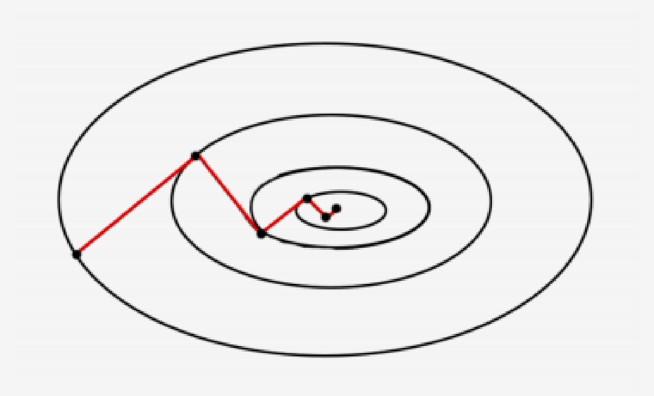

Figura 1: Passos do método do gradiente

Teorema 2

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e denote por* x^* *seu minimizador global. Então para qualquer* $x^0 \in \mathbb{R}^n$*, o método das difereções conjugadas gera uma sequência*

$$x^{k+1} = x^k + t_k d^k, \; t_k = \frac{-\nabla f(x^k)^T d^k}{(d^k)^T A d^k} \;\; \forall k = 0, \ldots, n-1,$$

onde $x^n = x^*$.

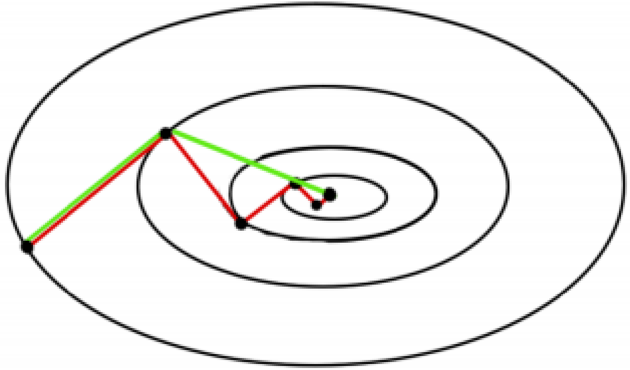

Figura 2: Passos do método dos gradientes conjugados em verde. Em vermelho os passos do método do gradiente

Expectativa de um vetor aleatório ser um subgradiente.

$$x^k = x^{k-1} - \alpha d^k, \text{ onde } \mathbb{E}[d^k \mid x^k] \in \partial f(x^k)$$

No caso das funções citadas anteriormente,

$$d^k = (m_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x^{(i)}$$

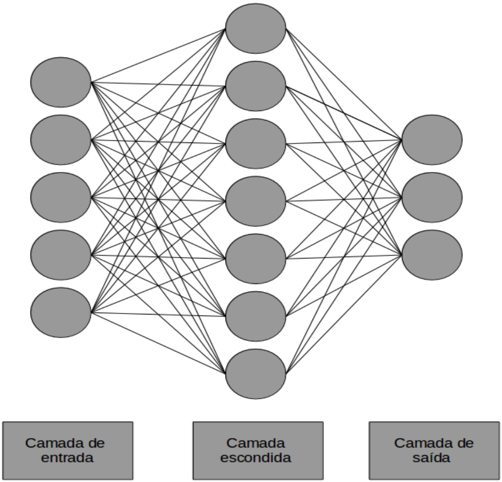

Figura 3: Esquema de uma rede neural artificial.

- Backpropagation
- Alta capacidade para aprender
- Reconhecimento de caracteres
- Computação visual em geral
- Mercado financeiro

- *Detexify*
- *Write-math*
- *HASYv2 dataset*
- 168233 dados, 369 classes.

Figura 4: Caracteres do banco de dados *HASYv2*

- TensorFlow
- Redes neurais convolucionais
- Adam
- 10 épocas, batch de tamanho 500
- tamanho do passo de 0.0005
- ReLU (ao invés de softmax).

Figura 5: Imagem utilizada para teste prático do modelo.

Tabela 1: Letras reconhecidas da Figura 5 pelo modelo.

Letra Original	∂	U	F	P	R
Letra reconhecida	∂	$\cup$	F	∇	$\mathcal{R}$

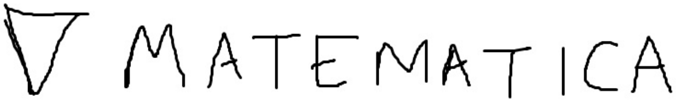

Figura 6: Imagem para utilizar no teste do programa.

Tabela 2: Letras reconhecidas da Figura 6 pelo modelo.

Letra Original	∇	M	A	T	E	M	A	T	I	C	A
Letra reconhecida	∇	M	Δ	$\top$	ϵ	M	λ	$\top$	&	$\subset$	A

- Segmentação de caracteres
- Desenvolvimento de modelos *state-of-the-art*
- Código no Github

Referências I