



LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT



Bachelorarbeit
in Informatik plus Mathematik

Verbreitung von Epidemien


Christopher Sorg

Aufgabensteller: Prof. Dr. Konstantinos Panagiotou
Betreuer: Prof. Dr. Konstantinos Panagiotou
Abgabedatum: 10. Juli 2021

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Bachelorarbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, den 10. Juli 2021


.....
Christopher Sorg

Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war die Programmierung einer graphischen Benutzeroberfläche für die Verbreitung von Epidemien auf Grundlage eines stochastischen Modells. Programmiersprache ist hierbei C++. Die Arbeit beinhaltet sowohl einen mathematischen, als auch einen informatischen Teil.

Der mathematische Teil befasst sich mit mathematischen Grundlagen hinleitend zum SEIR-Modell, das Grundlage der Programmierung besagter Benutzeroberfläche war. Letztgenanntes überdeckt den informatischen Teil.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Das SEIR-Modell	3
2.1	Stochastische Grundlagen	3
2.2	Grundlagen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen	8
2.3	Das SEIR-Modell und seine eindeutige maximale Lösung	10
2.4	Differentialgeometrische Grundlagen: Der Torus	14
3	Aufbau der graphischen Benutzeroberfläche	21
3.1	Bilderreise durch die Benutzeroberfläche mit zugehörigen Ideen	21
3.2	Funktionsweise Cairomm: So werden die Bilder erstellt	30
4	Schluss	31
	Abbildungsverzeichnis	33
	Literaturverzeichnis	34

Kapitel 1

Einleitung

Wir schreiben den 31. Dezember im Jahre 2019. Die World Health Organization (WHO) registriert einen Krankheitsfall in Form einer Lungenentzündung mit unbekannter Ursache [Cora](#). Wie sich später herausstellen wird, ist dieser Tag der eigentliche Beginn der weltweiten katastrophalen Coronakrise, die bis heute (Stand: 01.07.2021) anhält. Die Ursache ist ein neuartiges Virus der SARS-CoV Gruppe, genannt SARS-CoV-19.

Laut aktuellen Stand (01.07.2021) stammt das Virus mit hoher Wahrscheinlichkeit aus einer Übertragung von einem Tier auf einen Bürger in der chinesischen Stadt Wuhan [Corb](#).

Doch diese Übertragung ist keine Überraschung. Durch sukzessive Zerstörung der Wälder, insbesondere Regenwälder, verlieren viele Tiere ihr Zuhause. Jedes Jahr werden beispielsweise etwa 158.000 (!) km² Regenwald abgeholzt [Abh](#). Folglich suchen diese Tiere logischerweise nach neuem Lebensraum bzw. bleiben diesem Raum trotzdem erhalten.

Beide Aspekte führen zu derselben Folgerung: Der Mensch dringt in diese Räume vor und wundert sich anschließend, weshalb die Tiere in die Städte kommen. Und mit den Tieren erreichen uns auch neuartige (gefährliche) Viren und andere Krankheiten.

In Folge unseres Konsums und unserer Lebensweise, müssen wir uns also näher mit Pandemien/Epidemien beschäftigen:

- Woher stammen diese zumeist?
- Wie wirken sie sich aus auf die Menschen?
- Wie wirken sich mögliche Maßnahmen aus?

Folglich können wir schneller und effizienter auf neue mögliche Epidemien reagieren. Um hierfür wichtige wissenschaftliche Thesen zu testen (vor allem auf die zweite und dritte Frage bezogen), dient die für diese Arbeit programmierte Benutzeroberfläche.

Kapitel 2

Das SEIR-Modell

Bevor wir das ursprüngliche Modell betrachten können, für das die Benutzeroberfläche entwickelt wurde, sollten wir uns zunächst einmal ein paar Begrifflichkeiten vertraut machen.

Da wir in den folgenden Kapiteln einige Kurznotationen benutzen werden, sollten wir diese vorab einmal definieren:

Notationen

1. Für Kapitel 2.2 und alle Referenzen auf dieses gilt:
Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} .
2. Gegeben seien Mengen A und B , sowie eine Funktion $f : A \rightarrow B$. Dann seien die folgenden Klassen definiert:
 - $\mathcal{C}(A, B) := \{f \text{ ist stetig}\}$
 - $\mathcal{C}^k(A, B) := \{f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$, wobei $k \in \mathbb{N}$.

2.1 Stochastische Grundlagen

In der Stochastik, insbesondere der Wahrscheinlichkeitstheorie, beschäftigt man sich mit Berechnungen und Abschätzungen von Wahrscheinlichkeiten. Hierbei liegt eine Menge an Ergebnissen zugrunde, die man meistens Ω nennt. Zusätzlich ist es im Allgemeinen von Nöten, **nicht** mit der gesamten Potenzmenge dieser Menge zu arbeiten, sondern mit einer Teilmenge davon, einer sogenannten σ -Algebra. Diese beinhaltet nur die messbaren Teilmengen der Potenzmenge.

Stochastisch ausgedrückt beinhaltet sie also alle Ereignisse, die die folgenden Eigenschaften besitzen:

2.1.1 Definition (σ -Algebra)

Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ -Algebra (über Ω), wenn gilt [Hen19, Seite 12]:

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. $\forall A \in \mathcal{A}: A^c := \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
3. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Anmerkung: Die 1. Eigenschaft kann äquivalent mit $\Omega \in \mathcal{A}$ ersetzt werden. Dies folgt direkt aus der 2. Eigenschaft.

Der genaue Grund für das Nutzen einer solchen σ -Algebra ist das berühmte Maßproblem. Dieses entsprach ursprünglich einer Forderung an Merkmalen, die ein Maß erfüllen muss. Mathematisch formuliert lautet diese Forderung folgendermaßen:

2.1.2 Definition (Maßproblem)

Es ist eine Maßfunktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften gesucht [Els18, Seite 5]:

1. $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ mit $A_n \cap A_m = \emptyset \forall n \neq m \in \mathbb{N}$:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (2.1)$$

2. $\forall \beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, A \subset \mathbb{R}^d : \mu(\beta(A)) = \mu(A)$
3. $\mu([0, 1]^d) = 1$

Hierbei sei $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ die disjunkte Vereinigung der A_n .

Die 2. Eigenschaft nennt man auch Bewegungsinvarianz. Banach und Tarski stellten Folgendes 1924 dann zu dieser Eigenschaft fest:

2.1.3 Satz (Satz von Banach und Tarski)

Es seien $d \in \mathbb{N}$, $A, B \subset \mathbb{R}^d$ mit nicht leerem Inneren.

Dann $\exists C_k \subset \mathbb{R}^d$ und Bewegungen $\beta_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, sodass gilt:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \text{ und } B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \beta_k(C_k) \quad (2.2)$$

[Els18, Seite 6]

Dieses Paradoxon zeigt, dass das Maßproblem verändert werden muss, soll es lösbar werden.

Intuitiv ausgedrückt sagt der Satz 2.1.3 nämlich aus, dass wir gegeben einer Menge A , die wir aus der disjunkten Vereinigung der C_k erhalten, diese C_k bewegen können und eine Menge B erhalten.

Nehmen wir also an, A sei ein Würfel mit Kantenlänge 1 cm. Durch Bewegung der Mengen C_k erhalten wir einen zweiten Würfel mit Kantenlänge 1 cm, der disjunkt zu A ist - ein Widerspruch.

Sinnvollerweise ordnen wir nun noch den Ereignissen ein solches Maß zu. Typischerweise wird dieses in der Stochastik dann mit \mathbb{P} bezeichnet.

Mathematisch ausgedrückt führen diese Überlegungen zu dem Begriff des Wahrscheinlichkeitsraums:

2.1.4 Definition (Wahrscheinlichkeitsraum)

Ein Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, welches folgendermaßen definiert ist [Hen19, Seite 17]:

1. $\Omega \neq \emptyset$
2. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ sei eine σ -Algebra
3. $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß, also mit Eigenschaften:
 - (a) $\mathbb{P}(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$
 - (b) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
 - (c) $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ mit A_1, A_2, \dots paarweise disjunkt aus \mathcal{A}

Im Folgenden lernen wir nun zwei bekannte stochastische Verteilungen kennen, die wir im Modell später (Kapitel 2.4 und 3.1) benötigen werden.

Als σ -Algebra wird hierbei die borelsche σ -Algebra verwendet. Diese wird von den offenen bzw. abgeschlossenen Mengen erzeugt, für mehr Details und ein Beweis für diese Behauptung sei auf [Els18, Seiten 18,19] verwiesen.

Zunächst definieren wir die Exponentialverteilung. Hierbei sei noch angemerkt, dass $1_{[0,\infty[}$ für die Indikatorfunktion steht. Die genaue Definition sieht dann wie folgt aus:

2.1.5 Definition (Exponentialverteilung)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $a \in \mathbb{R}^+$ und X eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion [Hen19, Seite 154]:

$$f_X(x) = 1_{[0,\infty[}(x) a e^{-ax}, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Diese Verteilung wird auch Exponentialverteilung mit Parameter a genannt.

Die Exponentialverteilung entspricht einer stetigen Verteilung. Die zweite Verteilung, die wir nun definieren, entspricht einer diskreten Verteilung.

Die Poissonverteilung, die wir betrachten wollen, ist diskret, da sie nur einzelne, also diskrete, Werte annimmt. Mathematisch ausgedrückt ist diese folgendermaßen definiert:

2.1.6 Definition (Poissonverteilung)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ mit Wahrscheinlichkeitsmaß bezüglich der Zufallsvariablen X wie folgt [Hen19, Seite 97]:

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ wobei } k \in \mathbb{N}_0 \quad (2.4)$$

Diese Verteilung wird auch Poissonverteilung mit Parameter λ genannt.

Zuletzt betrachten wir noch eine stetige Verteilung, die ab einem gewissen "Schwellenwert" eintritt. Später im Modell werden wir dann diese besondere Eigenschaft brauchen.

Die Rede ist von der Paretoverteilung, die wir etwas modifiziert als üblich definieren, sodass sie uns später von Nutzen sein wird:

2.1.7 Definition (Paretoverteilung)

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\alpha > 1$ mit Wahrscheinlichkeitsmaß bezüglich der Zufallsvariablen X wie folgt [Ber19, Seiten 351,352]:

$$f_X(x) = 1_{]0, \infty[}(x)(\alpha - 1) \cdot x^{-\alpha}. \quad (2.5)$$

Diese Verteilung wird auch Paretoverteilung mit Parameter α genannt.

2.2 Grundlagen aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen

Begegnet man zum ersten mal sogenannten Differentialgleichungen, so können diese wirklich verwirrend sein. Aus der Schulzeit und Vorlesungen hat man den Umgang mit Funktionen kennengelernt. Eine Funktion ordnet einer (oder mehreren) Variablen einen Wert zu. Der Wert entspricht sozusagen der "Lösung" der Funktionsgleichung.

Differentialgleichungen setzen an einem anderen Punkt an. So ist die Lösung kein Wert, sondern tatsächlich eine Funktion. Definieren könnte man eine Differentialgleichung folgendermaßen:

2.2.1 Definition (Differentialgleichung)

Eine Differentialgleichung entspricht einer Gleichung, welche unabhängige Variable(n), Funktion(en) und Ableitung(en) von Funktion(en) verbindet [Wal00, Einleitung, Seite 1].

Differentialgleichungen dienen der Beschreibung natürlicher Systeme, finden so hauptsächlich Anwendung in der Physik und Medizin. Für einleitende Beispiele siehe [Dg].

Nun haben Differentialgleichungen meistens jedoch keine triviale Form, wie in den meisten einleitenden Beispielen.

Viel häufiger besitzen diese noch eine sogenannte Störfunktion, eine von der eigentlich gesuchten Funktion unabhängigen Funktion, die für die Beschreibung des natürlichen Systems jedoch notwendig ist.

Dies führt zur Definition sogenannter inhomogener Differentialgleichungen:

2.2.2 Definition (Inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^{n \times n})$, $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, dann heißt die Differentialgleichung [Wal00, Seiten 178, 179]:

$$x' = A(t)x + g(t) \tag{2.6}$$

inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Bevor wir einen für die Validierung des Modells dieser Arbeit wichtigen Satz sehen werden, sollten wir uns erst einmal einem wichtigen Begriff vertraut machen.

Lösungsräume/-intervalle kann man viele angeben bei einer (lösbaren) Differentialgleichung. Interessant ist also die Suche nach der maximalen Lösung:

2.2.3 Definition (Maximale Lösung)

Gegeben sei das Anfangswertproblem (AWP)

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0 \quad (2.7)$$

auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ mit $f : U \rightarrow \mathbb{K}^n$.

Seien nun $t_{\pm}(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} t_+ &:= \sup\{t_1 \geq t_0 \mid \exists \text{ Lösung } x_1 \text{ des AWP auf } [t_0, t_1]\} \\ t_- &:= \inf\{t_1 \leq t_0 \mid \exists \text{ Lösung } x_2 \text{ des AWP auf } [t_2, t_0]\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nun nennt man die Intervalle $[t_0, t_+[$, bzw. $]t_-, t_0]$, bzw. $]t_-, t_+[$ maximale Existenzintervalle der Lösung nach rechts, links oder schlechthin.

Die maximale Lösung ist nun definiert als:

$$x(t) = x_1(t) \forall t \in [t_0, t_1], \text{ bzw. } x(t) = x_2(t) \text{ auf } [t_2, t_0], \text{ also } x \in \mathcal{C}^1((t_-, t_+), \mathbb{R}^n). \quad (2.9)$$

JP19

In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen interessiert man sich sehr dafür, wann und ob eine Lösung existiert. Der folgende Satz zeigt nun auf, wann diese Existenz gewährleistet werden kann:

2.2.4 Satz (Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für inhomogene lineare Differentialgleichungen)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $A \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^{n \times n})$, $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Dann hat für jedes $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{K}^n$ das Anfangswertproblem:

$$x' = A(t)x + g(t), x(t_0) = x_0 \quad (2.10)$$

genau eine Lösung mit Existenz im gesamten Intervall I **Wal00** Seiten 170,171].

2.3 Das SEIR-Modell und seine eindeutige maximale Lösung

Da wir uns nun den wichtigsten mathematischen Begriffen, die für das Verständnis des SEIR-Modell nötig sind, vertraut gemacht haben, wird im Folgenden nun das Modell beschrieben.

Betrachten wir eine Epidemie etwas näher, so fällt auf, dass wir die menschliche Gesellschaft in vier Kompartimente aufteilen können: Einen Teil, der noch empfänglich für die Epidemie ist, einen weiteren, der gefährdet ist, einen infizierten und einen genesenen Teil. Die Änderungen zwischen den Kompartimenten hängen von der sogenannten Reproduktionszahl r ab. Diese Zahl entspricht einem Erwartungswert, wieviele Personen sich von einer infizierten anstecken können.

Daraus ergibt sich folgende logische Folgerung: Gilt $r > 1$, so ist die Epidemie gefährlich, wohingegen mit $r < 1$ gilt, dass die Epidemie über die Zeit hinweg irgendwann erlischt [ALK20].

Die Übergänge im Modell kann man sich graphisch wie folgt vorstellen:

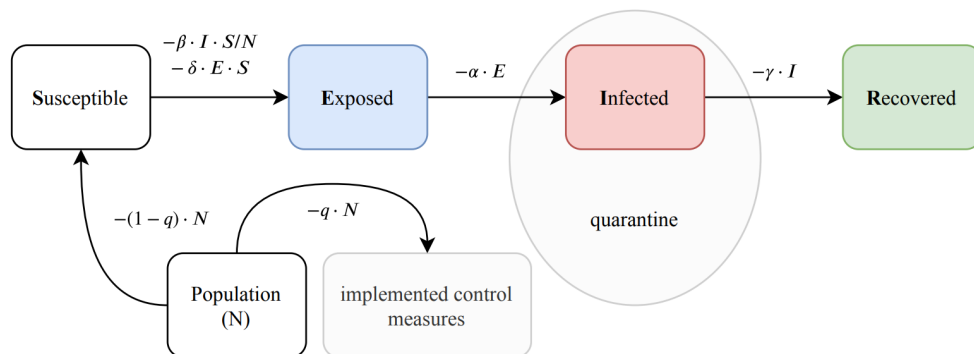


Abbildung 2.1: Graphische Veranschaulichung des SEIR-Modells [ALK20]

Anmerkung: S,E,I,R stehen hier stellvertretend für das empfängliche ($S(t)$), gefährdete ($E(t)$), infizierte ($I(t)$) und genesene ($R(t)$) Kompartiment in Abhängigkeit vom Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Zudem gelte [ALK20]:

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+, r = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}. \quad (2.11)$$

Die Übergänge zwischen den Zuständen werden durch die Gleichungen über den Pfeilen beschrieben.

Zuletzt sei q der immune Anteil der Population N . Wichtig ist hierbei anzumerken, dass das Bild die dynamische Version des SEIR-Modells darstellt, da sich die menschliche Gesellschaft dynamisch ändert.

In der Modellierung dieser Arbeit werden diese Parameter allerdings vernachlässigt. Quarantäne und die zweite Zeile der Grafik spielen also keine Rolle für das Modell der Textdateien, die in der Benutzeroberfläche eingelesen werden.

Diese Vorüberlegungen können wir nun mathematisch mithilfe eines Systems inhomogener Differentialgleichungen ausdrücken:

2.3.1 Definition (SEIR-Modell)

Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}^+$, $S(t)$ das empfängliche, $E(t)$ das gefährdete, $I(t)$ das infizierte, $R(t)$ das genesene Kompartiment, N die Populationsgröße, $t \in \mathbb{R}$. Dann sind die Änderungen der Zustände definiert durch das AWP [\[ALK20\]](#):

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta \cdot \frac{I}{N} \cdot S - \delta \cdot E \cdot S \\ \frac{dE}{dt} &= \beta \cdot \frac{I}{N} \cdot S - \alpha \cdot E + \delta \cdot E \cdot S \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha \cdot E - \gamma \cdot I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma \cdot I \\ E(1) &= e_1, S(1) = N - e_1 - 1, I(1) = 1.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Es folgt daraus auch die logische Normierung mit $S + E + I + R = N$, da N für die Gesamtpopulation steht.

Lösen wir dieses System an Differentialgleichungen und beachten, dass $r = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}$ gilt, so bemerken wir, dass Folgendes gilt [\[rec\]](#):

$$\begin{aligned}\text{Fall } r > 1 : R(t) &\text{ ist von unten beschränkt} \\ \text{Fall } r < 1 : R(t) &\text{ ist von unten unbeschränkt}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass das Modell in 2.3.1 annimmt, dass jeder Mensch sich mit einem anderen Menschen gleichwahrscheinlich trifft bzw. treffen kann.

Da Menschen aber logischerweise wahrscheinlicher die Menschen in ihrer Nähe treffen, definieren wir für das Modell, das dann auch in der Benutzeroberfläche eingelesen wird, Nachbarschaftsregeln wie auf einem Torus.

Zunächst werden jedoch die Menschen in einem Art 'Gitter' angeordnet nach der Manhattan Metrik. Diese Metrik ist folgendermaßen definiert:

Sei (\mathbb{R}^n, d) ein metrischer Raum mit $n \in \mathbb{N}$ und einer Metrik d . Eine Metrik ist im Allgemeinen eine Abstandsfunktion, die einer Menge zugeordnet wird und mit dieser dann einen metrischen Raum bildet. Die Manhattan Metrik ist hierbei definiert als:

$$d(a, b) := \|a - b\|_1 := \sum_{k=1}^n |a_k - b_k|, \text{ wobei } a, b \in \mathbb{R}^n. \quad (2.14)$$

Die konkrete Änderung der Kompartimente S, E, I, R geschieht durch stochastische Verteilungen. Die Dauer von E, I und R ist jeweils exponentialverteilt mit Parametern λ_{inc} , λ_{inf} und λ_{rec} . Durch ein Treffen steckt immer eine infizierte Person eine gesunde an. Der Abstand zwischen der infizierten und anderen Person ist hierbei paretoverteilt.

Wieviele Personen eine Person an einem Tag besucht, ist durch eine Poisson-Verteilung mit Parameter λ_{poi} gegeben. Insgesamt werden $k \in \mathbb{N}$ viele Tage simuliert. Jede erstellte $N \times N$ -Matrix ($N \in \mathbb{N}$) ist hierbei stellvertretend für genau einen solchen Tag.

Anmerkung: Die Textdateien, die eine solche Simulation widerspiegeln und in der Benutzeroberfläche eingelesen werden, stellen nur eine zweidimensionale Simulation ohne räumliche Komponente dar. Die Populationsgröße N aus 2.3.1 entspricht hier dann entsprechend N^2 .

Zuletzt wollen wir noch validieren, dass das benutzte Modell auch eine eindeutige Lösung besitzt, sodass es für die Modellierung einer Epidemie aussagekräftige Ergebnisse aufzeigen kann:

2.3.2 Satz (Das SEIR-Modell besitzt eine eindeutige maximale Lösung)

Betrachte also die Funktionen $S(t)$, $E(t)$, $I(t)$ und $R(t)$. Sei $I := \mathbb{R}$. Für das SEIR-Modell kann angenommen werden, dass $S(t), E(t), I(t), R(t) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ gilt, damit das Modell die Wirklichkeit widerspiegelt. Für den Initialzustand gilt im benutzten Modell:

$$S(1) = N^2 - 1, I(1) = 1, E(1) = 0, N \in \mathbb{N} \quad (2.15)$$

mit dem Vorgehen wie oben beschrieben, N^2 entspricht der Populationsgröße. Damit gilt, dass dieses SEIR-Modell eine eindeutige maximale Lösung besitzt.

Beweis: Nach Annahme gilt $S(t), E(t), I(t), R(t) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Damit sind die Bedingungen für den Satz 2.2.4 als skalarer Sonderfall erfüllt, da das System der Differentialgleichungen im SEIR-Modell gekoppelt ist. Das Anfangswertproblem hat dann eine eindeutige Lösung auf \mathbb{R} , siehe [\[SM19\]](#). Insbesondere ist diese Lösung dann maximal. \square

2.4 Differentialgeometrische Grundlagen: Der Torus

Wir möchten in diesem Kapitel eine geometrische Veranschaulichung für das SEIR-Modell gewinnen und uns vergewissern, dass es speziell mit Raumdimension noch valide bleibt.

Dafür wird der Begriff der Mannigfaltigkeit eine wichtige Rolle spielen. Doch um Mannigfaltigkeiten verstehen zu können, müssen wir uns zunächst einigen Grundbegrifflichkeiten vertraut machen, beginnend mit der Topologie:

Eine Topologie ist eine algebraische Struktur. Sie ist eine Menge von Teilmengen einer Menge, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

2.4.1 Definition (Topologie)

Seien X, \mathcal{T} Mengen. \mathcal{T} heißt Topologie [For17, Seite 11]: \Leftrightarrow

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$
3. $U_i \in \mathcal{T} \forall i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$, wobei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge.

Speziell für $I = \emptyset$ sei definiert:

$$\bigcup_{i \in I} := \emptyset, \bigcap_{i \in I} := X. \quad (2.16)$$

Diese Menge X mit der Topologie \mathcal{T} bilden einen sogenannten topologischen Raum, welcher das Tupel der beiden Mengen, also (X, \mathcal{T}) ist. Ist die Topologie klar, hat man sich im allgemeinen Jargon darauf geeinigt, auch kürzer vom topologischen Raum X zu sprechen.

Wie anfangs erwähnt ist eine Topologie eine algebraische Struktur. Erinnern wir uns zurück an eines der zentralen Objekte der linearen Algebra, dem Vektorraum. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, mit der sich dieser aufspannen lässt. Das Analogon zu Vektoren sind bei einer Topologie sogenannte Umgebungen.

Gegeben dem topologischen Raum (X, \mathcal{T}) sei hierbei eine Umgebung $U \subset X$ von $a \in X$ definiert als [For17, Seite 12]:

$$\exists V \subset X, V \in \mathcal{T} \text{ mit } a \in V \subset U. \quad (2.17)$$

Es ist also naheliegend, den Begriff der Umgebungsbasis für eine Topologie zu definieren:

2.4.2 Definition ((Umgebungs-)Basis einer Topologie)

Sei also (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum, $a \in X$. Unter der Umgebungsbasis von a versteht man eine Menge \mathcal{B} , die die folgenden Eigenschaften erfüllt [For17, Seite 16]:

1. Jede Umgebung $V \in \mathcal{B}$ ist eine Umgebung von a
2. Zu jeder Umgebung U von a gibt es ein $V \in \mathcal{B}$ mit $U \subset V$.

Wichtig wird dieser Begriff später sowohl für die topologische Mannigfaltigkeit, da sie auf die Mächtigkeit der Umgebungsbasis zurückgreift, als auch für den Begriff des Hausdorff-Raums, ein sehr wichtiger Begriff im Bereich der Topologie, der im Folgenden definiert wird:

2.4.3 Definition (Hausdorff-Raum)

Ein topologischer Raum (X, \mathcal{T}) heißt Hausdorff-Raum, falls er die Hausdorff-Eigenschaft trägt, die definiert ist als [For17, Seite 13]:

$$\begin{aligned} &\text{Zu je zwei Punkten } x, y \in X, x \neq y, \\ &\exists \text{ Umgebungen } U \text{ von } x \text{ und } V \text{ von } y \text{ mit } U \cap V = \emptyset. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Zur Definition der topologischen Mannigfaltigkeit fehlt jetzt nur noch eine kleine Begrifflichkeit. Es handelt sich um den sogenannten Homöomorphismus, der nur eine Abbildung mit besonderen Eigenschaften darstellt:

2.4.4 Definition (Homöomorphismus)

Ein Homöomorphismus ist eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$, wobei X, Y Mengen, f und f^{-1} stetig sind [Jä01, Seite 17].

Für die Begrifflichkeit des Homöomorphismus bietet sich eine graphische Veranschaulichung an. Eine mögliche homöomorphe Verformung eines Würfels kann man sich folgendermaßen vorstellen:

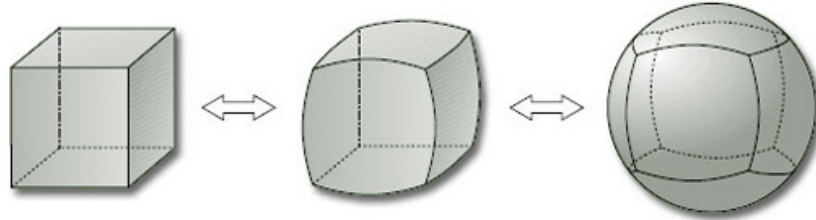


Abbildung 2.2: Homöomorphes "Aufblähen" eines Würfels [\[hom\]](#)

Wir können nun mathematisch ausdrücken, was eine topologische Mannigfaltigkeit ist. Eine mögliche Definition könnte also lauten:

2.4.5 Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)

Eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist ein Hausdorff-Raum M mit einer abzählbaren Basis, sodass $\forall x \in M : \exists$ offene Umgebung von x homöomorph zu einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ [\[Lov19\]](#) Seite 67].

Erweitern wir die topologische Mannigfaltigkeit um einen der zentralen Begriffe der Analysis, der Differenzierbarkeit, so erhalten wir die dementsprechende Version der Mannigfaltigkeit, die wir für unser eigentliches Ziel, wie wir es anfangs des Kapitels 2.3 formuliert haben, brauchen:

2.4.6 Definition (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M der Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathcal{A} := \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{\alpha \in I}$ mit I einer Indexmenge und Karten $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ offen in M . Gilt nun:

1. $\forall \phi_\alpha : \phi_\alpha(U_\alpha) = V_\alpha$ offen in \mathbb{R}^n und $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ist ein Homöomorphismus
2. $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$
3. Seien $L, K \subseteq \mathbb{R}^n$. Für die Koordinatentransformations-Funktion $\phi_{\alpha\beta}$ gilt
 - (a) $\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)} : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ist eine Funktion der Klasse \mathcal{C}^1 zwischen L und K .

so nennt man M eine differenzierbare \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeit [\[Lov19\]](#) Seite 67].

Diese Definition ist etwas abstrakt bei erstmaliger Begegnung. Die Idee hinter dieser Definition ist die der Koordinatentransformation.

Betrachten wir hierzu als Beispiel eine Menge M mit Karten $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ und $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, also einem Atlas $\mathcal{A} = \{\phi_1, \phi_2\}$. Graphisch könnte man sich die zugehörige Koordinatentransformation folgendermaßen dann vorstellen:

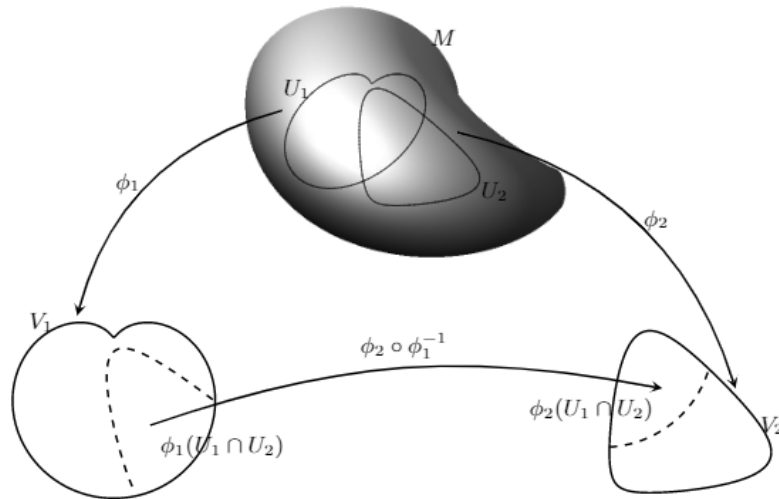


Abbildung 2.3: Idee hinter der Koordinatentransformation [Lov19, Seite 68]

Intuitiv betrachten wir 2 Mengen U_1 und U_2 auf der Menge M . Nun bilden wir mithilfe der Karten ϕ_1 und ϕ_2 von U_1 bzw. U_2 auf die Menge V_1 bzw. V_2 ab.

Wir nutzen für $\phi_{21} := \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ als Urbildmenge die Bildmenge von ϕ_1 , wenn wir die Schnittmenge von U_1 und U_2 abbilden.

Als Bildmenge von ϕ_{21} erhalten wir dann die Bildmenge von ϕ_2 , wenn wir hier ebenfalls die Schnittmenge von U_1 und U_2 abbilden.

Führen wir dieses Verfahren fort, überdecken also insbesondere M mit genügend U_α (Eigenschaft 2 in Definition 2.4.6) als Urbildmengen jeweils für die Karten ϕ_α und erfüllen die Abbildungen und Mengen die in 2.4.6 aufgeführten Eigenschaften, so entspricht M dann auch einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Dabei sei natürlich wie in 2.4.6 $\alpha \in I$ und I eine Indexmenge.

Betrachtet man einige Beispiele differenzierbarer Mannigfaltigkeiten genauer, fällt auf, dass die meisten dieser Mengen in einer von drei verschiedenen Formen auftreten. Weist man allgemein nach, dass eine Menge einer dieser Formen entspricht, so entspricht diese Menge auch einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Der folgende Satz beweist diese Behauptung:

2.4.7 Satz (Differenzierbare Mannigfaltigkeiten in häufig auftretenden Formen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}, n \leq d$. Dann sind äquivalent [For17, Seiten 119,120]:

1. M ist eine n -dimensionale \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeit
2. (Beschreibung durch Gleichungssystem) $\forall a \in M \exists$ (in \mathbb{R}^d) offene Umgebung U von a und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit
 - (a) $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$
 - (b) $\forall a \in M \cap U : \text{Rang}\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)}\right)(a) = d - n$
3. (Darstellung als Graph) $\forall a \in M \exists$ offene Umgebungen $U' \subseteq \mathbb{R}^d$ von $a' := (a_1, \dots, a_d)$ und $U'' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ von $a'' := (a_{n+1}, \dots, a_d)$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$g : U' \rightarrow U'' \subseteq \mathbb{R}^{d-n} \quad (2.19)$$

sodass

$$M \cap (U' \times U'') = \{(x', x'') \in U' \times U'' : x'' = g(x')\}. \quad (2.20)$$

4. (Transformation in Ebene) $\forall a \in M \exists$ offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^d$, offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^d$ und eine \mathcal{C}^1 -invertierbare Abbildung $\phi : U \rightarrow V$, sodass

$$\phi(M \cap U) = E_k \cap V. \quad (2.21)$$

Dabei sei $E_k \subseteq \mathbb{R}^d$ die n -dimensionale Ebene, die definiert ist als:

$$E_k := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid x_{n+1} = \dots = x_d = 0\} \quad (2.22)$$

Nun können wir endlich die Validität des benutzten Modells in der Arbeit zeigen. Da wir mathematisch korrekt alle nötigen Begrifflichkeiten definiert haben, können wir diese Erkenntnis sogar beweisen:

2.4.8 Satz (Der Torus \mathbb{T}^2 ist eine zweidimensionale \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3)

Seien $0 < r < R < \infty$, r und R beliebig, aber fest.

Dann ist $\mathbb{T}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 = (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2\}$ (kartesische Definition Tora) eine zweidimensionale differenzierbare \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 .

Beweis: Betrachte $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$,

$\Phi(x, y, z) := z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 - r^2$. Es gilt damit $\phi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{T}^2$, also insbesondere $\forall a \in \mathbb{T}^2 : \phi(a) = 0$.

Nun ist Φ auf U als Verkettung stetig differenzierbarer Funktionen stetig differenzierbar.

Betrachten wir dann $\nabla\Phi(x, y, z)$, so stellen wir fest, dass gilt:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi(x, y, z) &= \left(x\left(2 - \frac{2R}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), y\left(2 - \frac{2R}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), 2z\right), \\ \text{Rang}(\nabla\Phi(x, y, z)) &= 1. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Setzen wir nämlich $\nabla\Phi(x, y, z) = 0$, so ergibt sich ein Gleichungssystem, welches genau dann erfüllbar ist, wenn gilt:

$$(x, y, z) = (0, 0, 0) \text{ oder } \frac{2R}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2 \tag{2.24}$$

Also ergeben sich folgende Lösungen:

$(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(x, y, z) = (R, 0, 0)$ und $(x, y, z) = (0, R, 0)$.

Die erste Lösung ist invalide, da $x = y = 0$ und zudem $0 \notin \mathbb{T}^2$, da dann $R = r$ folgen würde nach Annahme $0 < r < R$ - ein Widerspruch in der Annahme selbst.

Die zweite Lösung ist invalide, da $(R, 0, 0) \notin \mathbb{T}^2$ und somit $r = 0$ folgen würde - Widerspruch zur Annahme $r > 0$.

Lösung 3 ist ebenfalls invalide. Die Begründung ist hier analog zur Begründung der Invalidität von Lösung 2, da auch hier $r = 0$ folgen würde.

Also ist \mathbb{T}^2 eine zweidimensionale differenzierbare \mathcal{C}^1 -Mannigfaltigkeit nach Satz 2.4.7 (2. \Rightarrow 1.). □

Graphisch veranschaulicht könnte man sich den Torus folgendermaßen vorstellen:

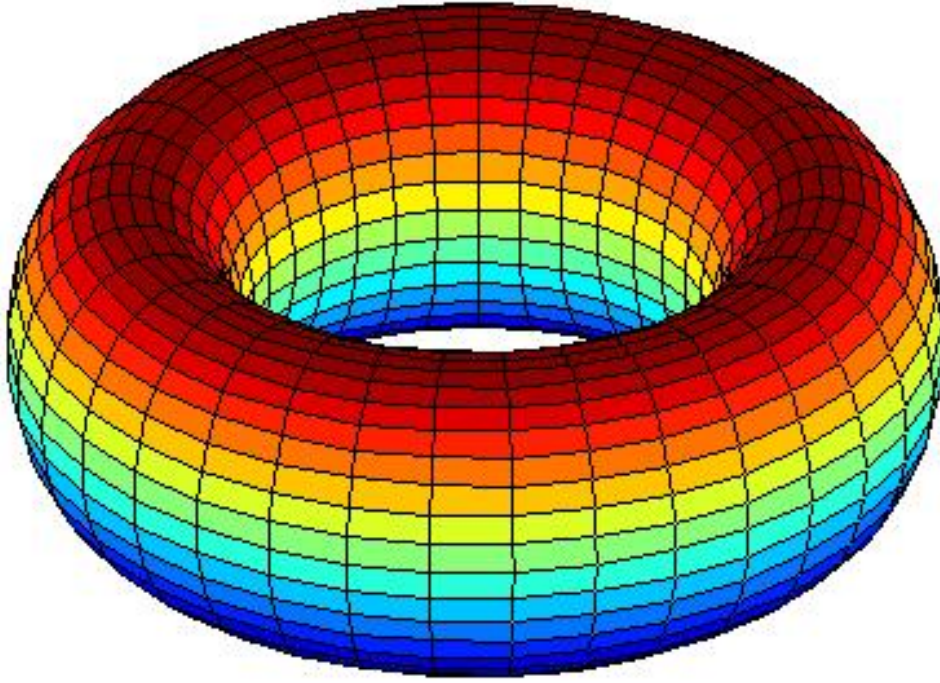


Abbildung 2.4: Geometrische Veranschaulichung des Torus [\[Torb\]](#)

In der Ebene, also ohne die zusätzliche Raumdimension, erhalten wir dann einen Kreisring als Spezialfall des Torus. Damit bleibt die Validität trivialerweise erhalten.

Nicht alle neuen Infektionsgebiete ($I(t)$, siehe Kapitel 2.3) entsprechen diesen Kreisringen. Die Formen sind aber homöomorphe Verformungen dieser, dementsprechend bleibt die Validität weiterhin erhalten.

Kapitel 3

Aufbau der graphischen Benutzeroberfläche

3.1 Bilderreise durch die Benutzeroberfläche mit zugehörigen Ideen

Im Folgenden betrachten wir nun die Benutzeroberfläche etwas näher. Die Bilder wurden von mir selbst unter Ubuntu 20.04 erstellt. Hierbei habe ich in den Einstellungen für alle Anwendungen den sogenannten Dunkelmodus ausgewählt, das Erscheinungsbild könnte also auf einem anderen Computer anders sein.

In der eigentlichen Simulation (Schaltfläche 'Simulate') wird hierbei auf das Programm zugegriffen, das Herr Vjekoslav Drvar in [\[Drv21\]](#) implementiert hat. Alle anderen Funktionen wurden von mir selbst geschrieben.

Der allgemeine Input entspricht also entweder einer Datei, die nach Klicken von 'Load File' ausgewählt wurde oder einer Datei, die nach Klicken auf 'Simulate' generiert wird. Die genauere Funktionsweise und das benötigte Datei-Format werden im Folgenden noch beschrieben.

Starten wir nun also die Anwendung, werden wir von folgendem Bild begrüßt:

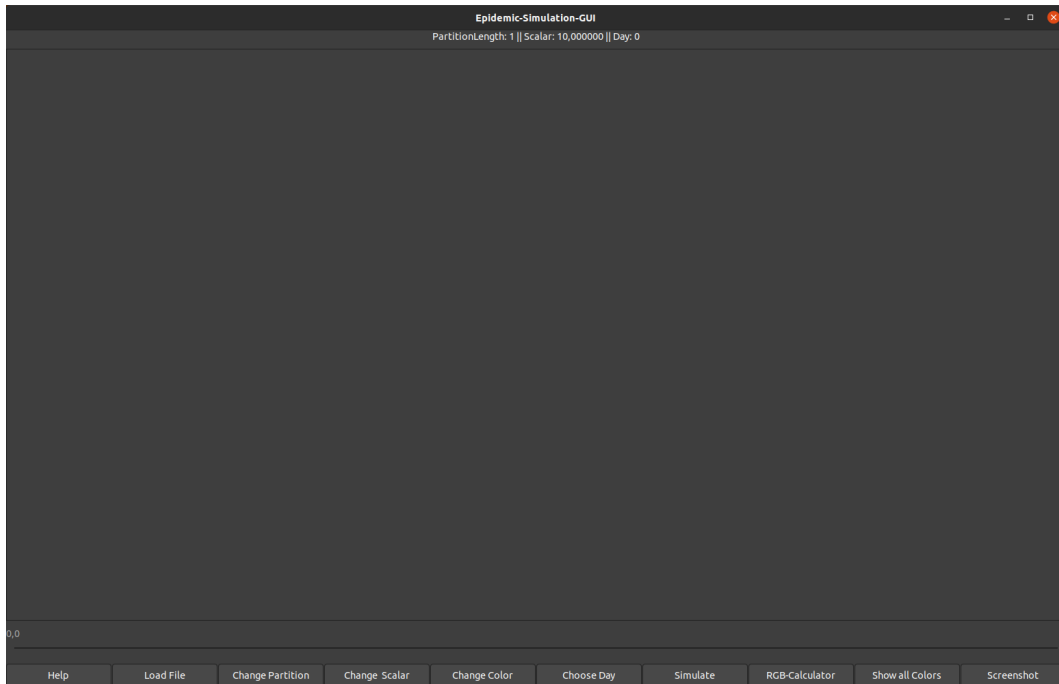


Abbildung 3.1: Startbild der Benutzeroberfläche

Die Benutzeroberfläche ist demnach wie folgt aufgebaut: In der obersten Zeile ist der Name der Anwendung zu sehen (Epidemic-Simulation-GUI). Die zweite Zeile zeigt die derzeitigen Werte der Partitionslänge m , des skalaren Faktors μ und des Tages day an. Hierbei bezeichnet m die Länge eines zu generierenden Blocks in der gegebenen $N \times N$ -Matrix aus der Textdatei. Standardmäßig sind $m=1$, $\mu=10$, $day=0$.

Unterhalb der zweiten Zeile ist die Zeichenfläche zu sehen, in der die simulierten Grafiken angezeigt werden.

Die schwarze Linie mit einer 0,0 links wird später der Scrollbalken, jedoch wird dieser erst initialisiert, wenn eine Datei geladen wurde. Mit dem Scrollbalken lässt sich dann der Tag ändern.

Zuletzt besitzt die Benutzeroberfläche noch zehn verschiedene Schaltflächen, deren Funktionen im Folgenden mit Bildern erklärt werden:

Die Help-Schaltfläche: Die Help-Schaltfläche entspricht einer kurzen Anleitung für den Nutzer, welche in einem Informations-Label erscheint durch Klicken. Bildlich sieht das dann so aus:

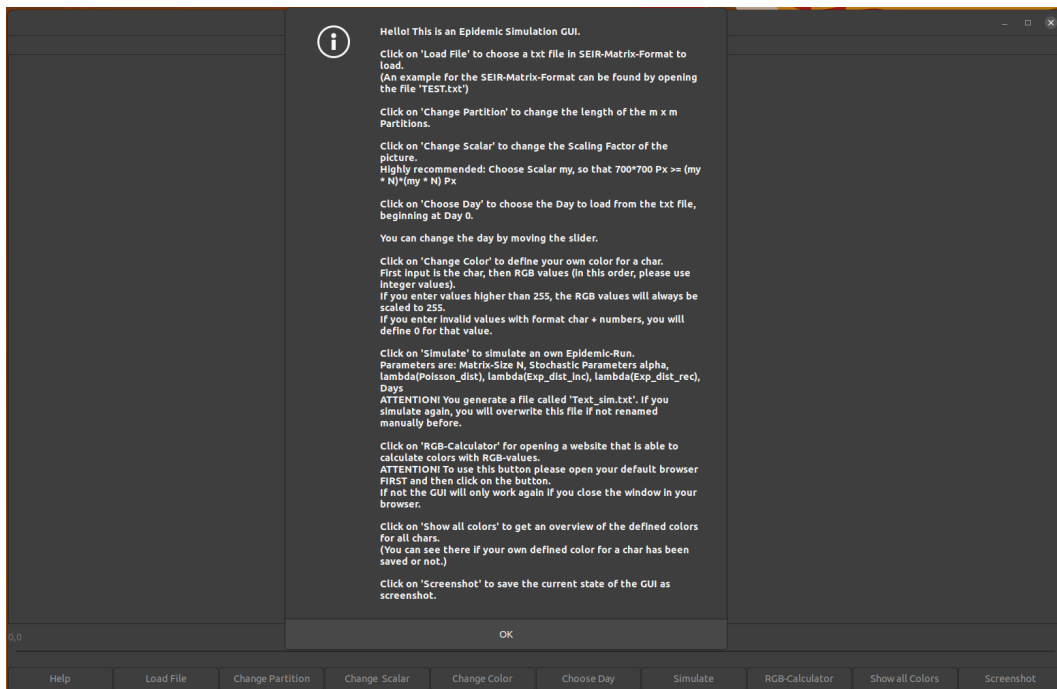


Abbildung 3.2: Bild nach Klicken der Help-Schaltfläche

Die Load File-Schaltfläche: Der Name dieser Schaltfläche ist prinzipiell selbsterklärend. Wird die Schaltfläche geklickt, so wird der Nutzer aufgefordert, eine Datei zum Laden auszuwählen. Diese muss das SEIR-Matrix-Format haben, das wie folgt definiert ist:

Es seien $N=5$, $S(1)=24$, $I(1)=1$, $days=2$. Nehmen wir zur Vereinfachung zudem an, dass der Infizierte keine weitere Person ansteckt. Dann sieht der Inhalt der txt-Datei wie folgt aus:

```
5
S S S S S
S S S S S
S S I S S
S S S S S
S S S S S
```

```
S S S S S
S S S S S
S S I S S
S S S S S
S S S S S
```

Die erste Zeile gibt immer den Wert von N für die $N \times N$ -Matrizen an. Anschließend erfolgen die $N \times N$ -Matrizen, stellvertretend für einen simulierten Tag mit einer Leerzeile Abstand jeweils.

Zur Veranschaulichung wurde eine Test-Datei geladen und mit dem Scrollbalken der 30. Tag ausgewählt:

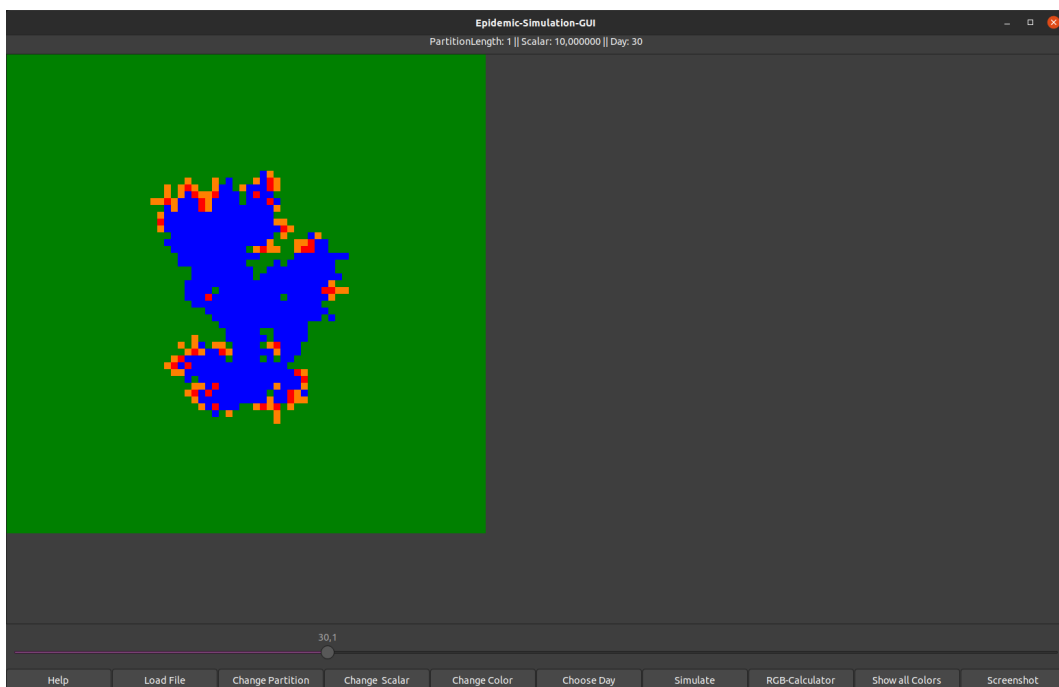


Abbildung 3.3: Bild nach Klicken der Load File-Schaltfläche

Die Change Partition-Schaltfläche: Mithilfe dieser Schaltfläche lässt sich die Partitionslänge m durch anschließende Nutzereingabe ändern. Angenommen also, wir geben 2 ein, so ist das darauffolgende Bild dieses:

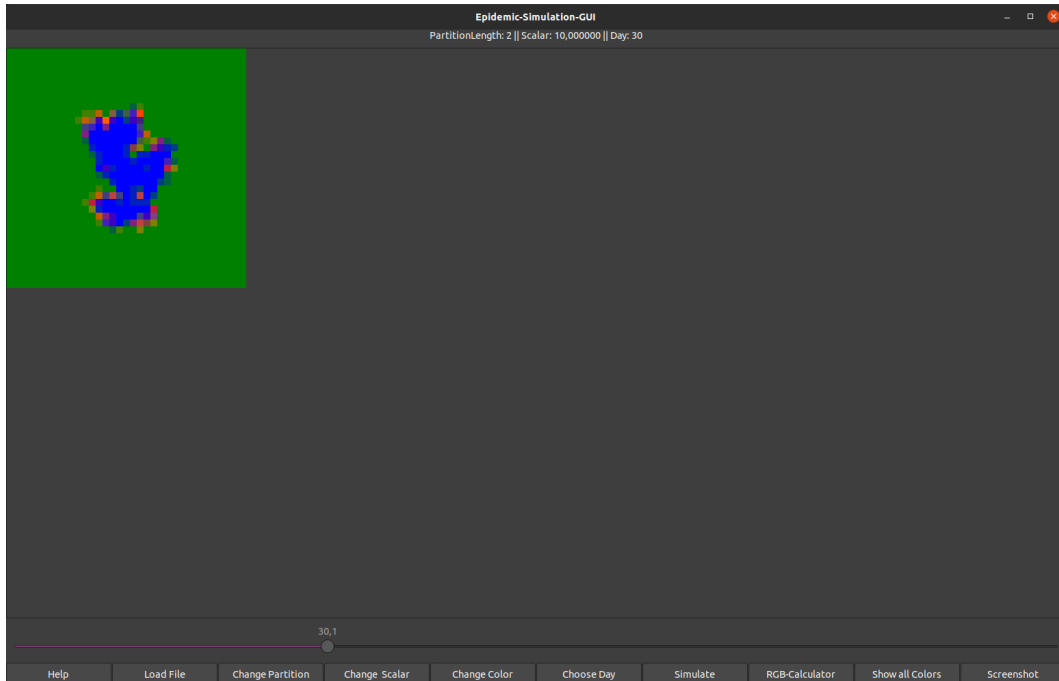


Abbildung 3.4: Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog der Change Partition-Schaltfläche

Die Farben verblasen hierbei, da mit $m=2$ ein 2x2-Buchstaben-Block statt einem einzelnen Buchstaben durch Cairomm (siehe nächstes Kapitel 3.2) zu einem Pixel verrechnet wird. Für die Farbe wird der Mittelwert der vier Buchstaben berechnet.

Die Buchstaben erhalten hierbei RGB-Farben. Für den RGB-Wert jedes Buchstaben wird für den Rot-, Grün- und Blauwert jeweils der Mittelwert berechnet und am Ende wieder zusammengefügt.

Die Change Scalar-Schaltfläche: Cairomm erhält für die Pixelberechnung einen Skalierungsfaktor, der mit Länge und Breite des Rechtecks jeweils multipliziert wird. Der Skalar μ ist, wie oben erwähnt, standardmäßig $\mu=10$ groß. Durch Nutzereingabe kann dieser nun verändert werden. Angenommen, wir geben 8 ein (es gilt nun wieder $m=1$), so folgt dieses Bild:

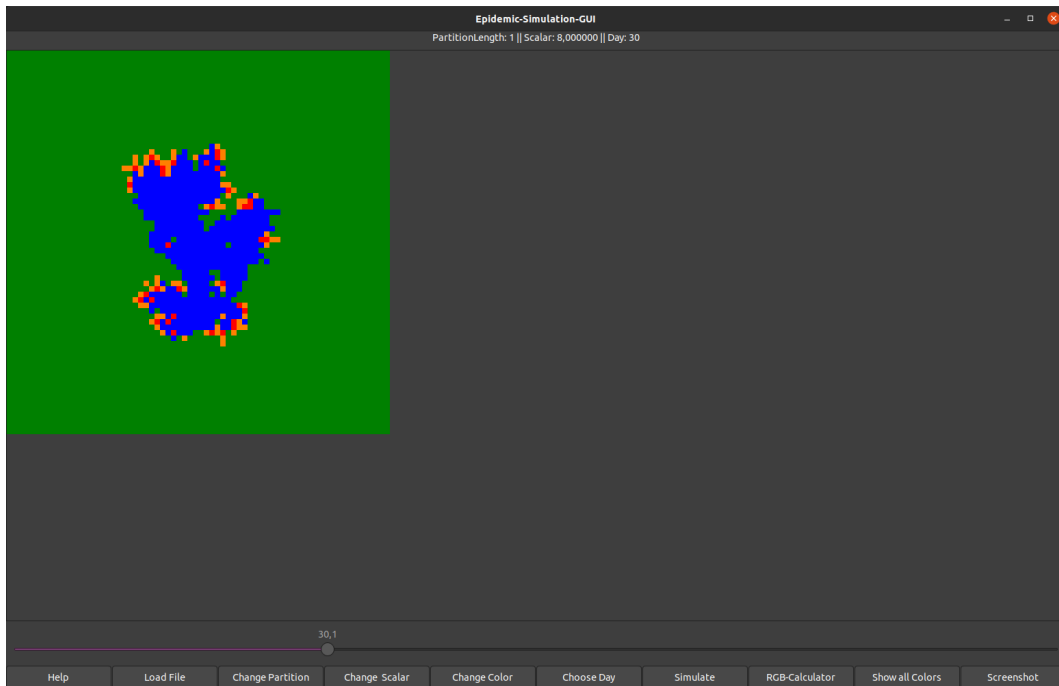


Abbildung 3.5: Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog der Change Scalar-Schaltfläche

Die Change Color-Schaltfläche: Diese Schaltfläche wurde hauptsächlich implementiert, um die Benutzeroberfläche zu verallgemeinern, genauer gesagt für weitere Epidemien-Modelle zugänglich machen zu können.

Hierbei lässt sich eine neue RGB-Farbe für einen beliebigen Buchstaben definieren, auch mehrmals für denselben Buchstaben. Eine Übersicht aller Farbdefinitionen kann durch Klicken der Show all Colors-Schaltfläche eingesehen werden. Angenommen, wir ändern $s:=(0,128,0)$ zu $s:=(128,128,255)$. Dann sieht das Bild wie folgt aus:

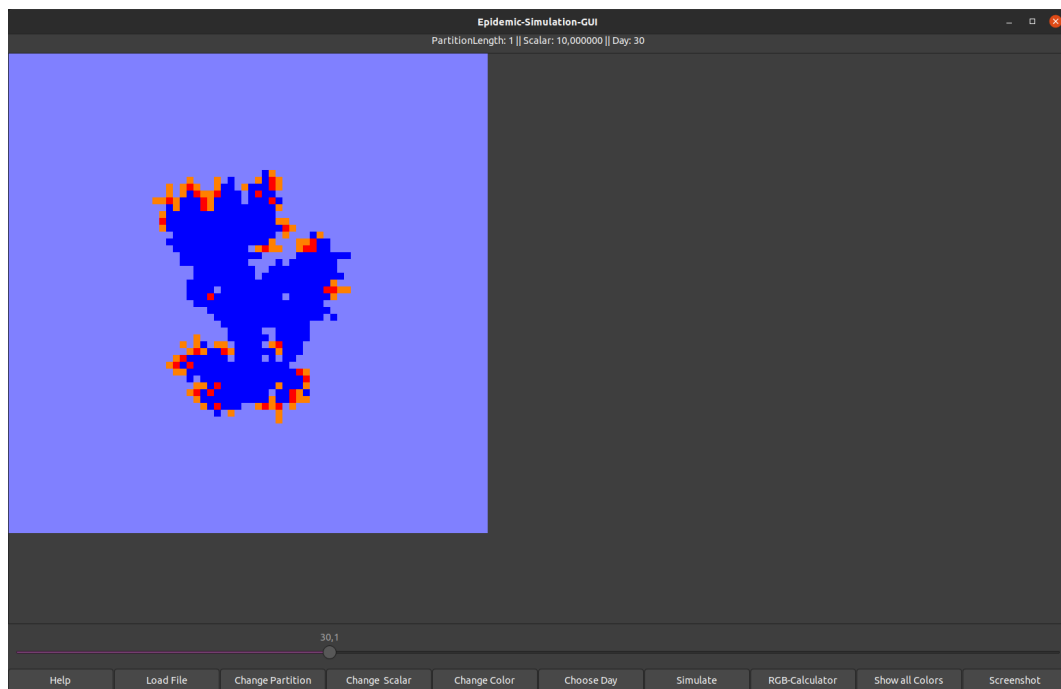


Abbildung 3.6: Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog der Change Color-Schaltfläche

Nach Klicken der Show all Colors-Schaltfläche können wir, wie oben gesagt, anschließend diese Definition einsehen:

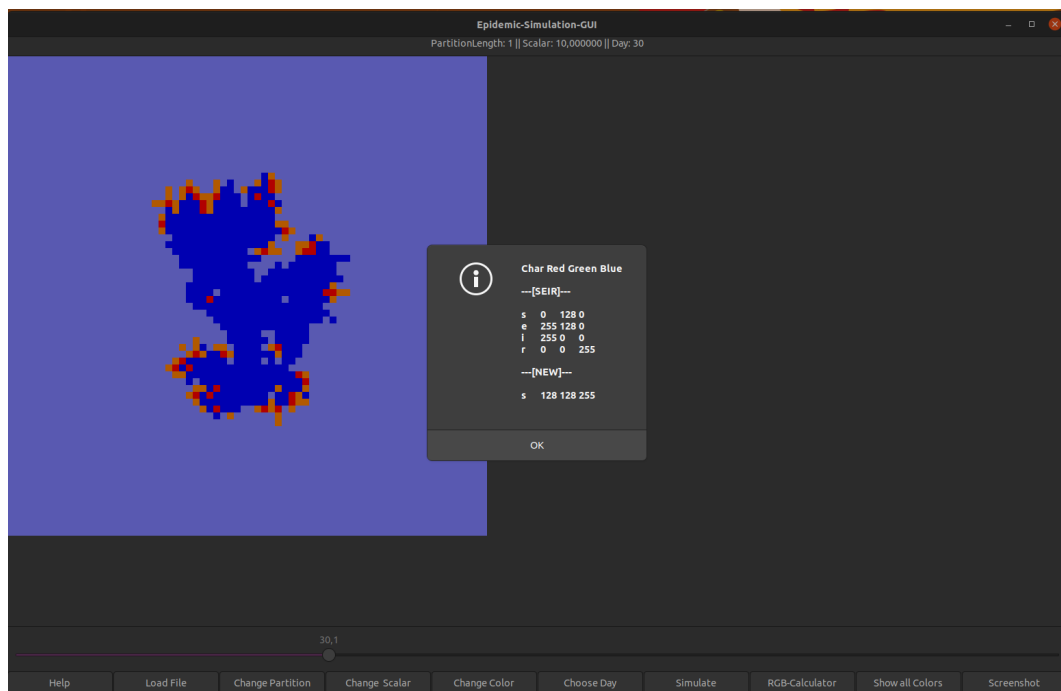


Abbildung 3.7: Bild nach Klicken der Show all Colors-Schaltfläche

Die Schaltflächen Choose Day, RGB-Calculator und Screenshot sind prinzipiell selbsterklärend. So kann der Nutzer nach Klicken von Choose Day den Tag durch Eingabe ändern, RGB-Calculator ruft eine Internetseite auf, auf welcher man RGB-Farben berechnen lassen kann **RGB** und Screenshot erstellt eine Momentaufnahme der Benutzeroberfläche (Dateiname: chosenDay.png), falls man beispielsweise an einem wichtigen Tag in das Bild zoomen möchte.

Anmerkung: Die RGB-Calculator-Schaltfläche sollte erst geklickt werden, nachdem der Standardbrowser geöffnet wurde. Die Schaltfläche öffnet die Internetseite in einem neuen Tab. Macht der Nutzer das nicht, kann man die Benutzeroberfläche erst wieder benutzen, wenn das Browserfenster (welches von der Schaltfläche dann trotzdem geöffnet wird mit der Internetseite in einem neuen Tab) geschlossen wurde. Leider ist die Funktion, die hier aktiviert wird, eine Systemfunktion, weshalb dieses Verhalten sehr ärgerlich, aber nicht zu ändern ist.

Die Simulate-Schaltfläche: Zu guter Letzt betrachten wir noch die Simulate-Schaltfläche. Die Funktion ist die vielleicht sogar interessanteste aller Schaltflächenfunktionen.

So wird nach Klicken dem Nutzer eine Eingabe von Parametern abverlangt, welche den Parametern für das stochastische Modell (Kapitel 2) entsprechen. Es wird eine txt-Datei mit Namen TESTsim.txt erstellt, die eine SEIR-Simulation im oben besagten SEIR-Matrix-Format beinhaltet. Die Datei wird anschließend automatisch eingelesen (Funktion wie bei Schaltfläche Load File) und könnte beispielsweise graphisch dann so aussehen:

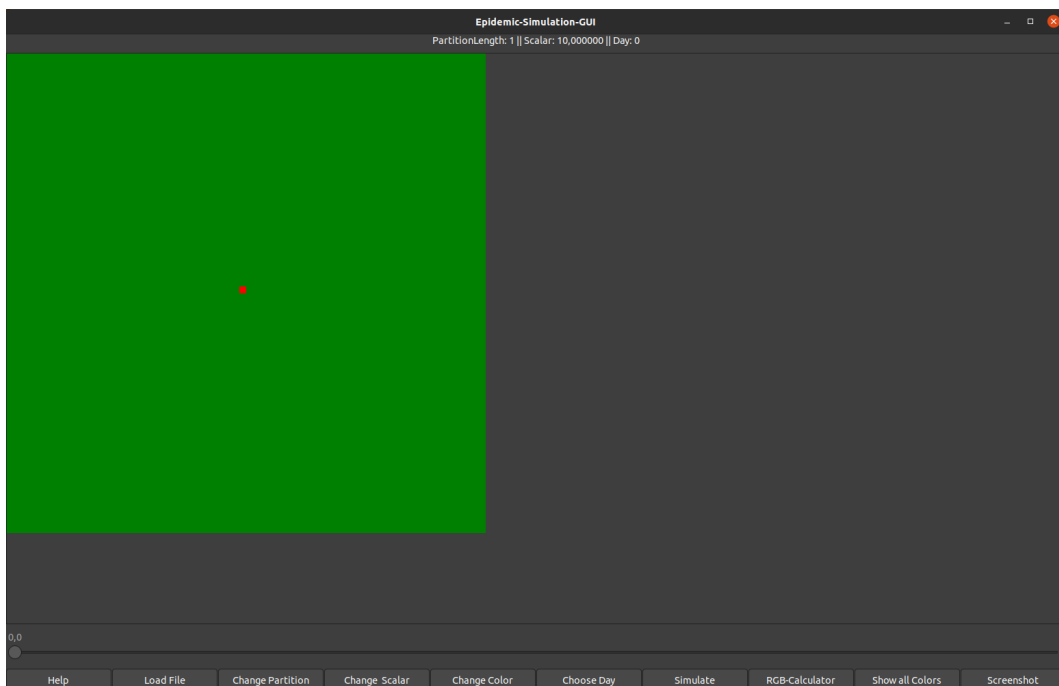


Abbildung 3.8: Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog der Simulate-Schaltfläche

3.2 Funktionsweise Cairomm: So werden die Bilder erstellt

Cairo ist eine zweidimensionale graphische Bibliothek, die in C geschrieben wurde, jedoch auch für andere Sprachen, wie C++, zugänglich ist [\[Cai\]](#).

Die Cairo Anwendungsschnittstelle (API) kann dann definierte Bezierkurven (Kurven, die für Vektorgrafiken eingesetzt werden, da affine Transformationen auf ihnen ausgeführt werden können [\[Com\]](#)) anstreichen oder sogar füllen. Die Zeichenoperationen von Cairo können durch beliebige affine Transformationen dann auch verändert werden [\[Cai\]](#).

Eine dieser affinen Transformationen kann man auch im Quellcode der app.cpp sehen:

```
cr->rectangle(Scaling_Factor * j, Scaling_Factor * i,  
Scaling_Factor, Scaling_Factor);
```

Kapitel 4

Schluss

Es bleibt weiterhin zu betonen, dass die Menschheit viel Arbeit vor sich hat. Wir müssen forschen und uns mit den Grundverhalten von Epidemien/Pandemien auseinandersetzen, damit uns eine weitere Katastrophe im Ausmaß der Covid-19-Pandemie möglichst erspart bleibt.

Thesen stehen im Raum wie:

- Betrachte den im stochastischen Modell (Kapitel 2) erwähnten Parameter α der Paretoverteilung. Je größer α ist, desto lokaler scheint die Epidemie/Pandemie ihren Verlauf zu nehmen. (T)

Sehr gut greifbar machen können wir diese Verläufe durch stochastische Modelle, wie sie beispielsweise im SEIR-Modell benutzt werden (siehe Kapitel 2). Grund hierfür ist ein ähnliches Grundproblem, wie wir es auch in der Nanophysik haben: Der Mensch kann ein Virus o.Ä. selbst nicht, seine Auswirkungen jedoch sehen. So wirken die Auswirkungen zufällig. (Um das Analogon zur Nanophysik weiterzuspinnen: Wir können Teilchen der Größe von Quarks nicht sehen, also wirken die dann sehbaren Auswirkungen auf den Menschen ebenso zufällig.)

Für das Modell haben wir uns in den Kapiteln 2.1 und 2.2 zunächst den benötigten mathematischen Voraussetzungen, um dieses zu verstehen, bekannt gemacht. Diese umfassen die Gebiete der Stochastik und gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Im darauffolgenden Kapitel 2.3 haben wir dann begonnen, Zusammenhänge zwischen Reproduktionszahl und SEIR-Modell herzustellen. Wir haben zudem Unterschiede im modifizierten Modell, welches als Grundlage für die Einlesedateien in der Benutzeroberfläche dient, festgestellt, diese ausgeführt und diese Modifikationen auch begründet.

Das System an Differentialgleichungen, welches das Ursprungsmodell beschreibt, ist zu idealistisch, um sinnvoll damit zu arbeiten und daran zu forschen.

Am Ende dieses Kapitels haben wir dann auch festgestellt, dass wir eine eindeutige Lösung für das gegebene SEIR-Modell unter den spezialisierten Anfangsbedingungen erhalten.

In Kapitel 2.4 haben wir dann eine geometrische Veranschaulichung erfahren. Wir greifen in dem modifizierten Modell auf Tori zurück, welche zweidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten entsprechen.

Mannigfaltigkeiten mögen bei ersten Begegnungen sehr abstrakt wirken, jedoch sind diese extrem nützlich. Wie nützlich haben wir am Ende des Kapitels 2.4 beispielhaft gesehen.

Schlussendlich haben wir in Kapitel 3 dann zunächst den Aufbau und die Funktionen der Benutzeroberfläche gesehen. Anschließend haben wir noch einen numerischen Einblick in die Funktionsweise der benutzten API Cairomm gesehen. Cairomm besitzt sehr viele nützliche Funktionen, welche für zukünftige (verbesserte) Benutzeroberflächen zur Simulation von Epidemien von großem Vorteil werden könnten.

Abschließend ist noch festzuhalten, dass besonders für die unter (T) genannte These die für diese Arbeit programmierte Benutzeroberfläche dienen kann und soll. Denn auch ich persönlich habe großes Interesse daran, Krisen wie die vergangenen 1,5 Jahre möglichst zu vermeiden in Zukunft.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Graphische Veranschaulichung des SEIR-Modells	[ALK20]	. . .	10
2.2	Homöomorphes "Aufblähen" eines Würfels	[hom]	16
2.3	Idee hinter der Koordinatentransformation	[Lov19, Seite 68]	. .	17
2.4	Geometrische Veranschaulichung des Torus	[Torb]	20
3.1	Startbild der Benutzeroberfläche		22
3.2	Bild nach Klicken der Help-Schaltfläche		23
3.3	Bild nach Klicken der Load File-Schaltfläche		24
3.4	Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog			
	der Change Partition-Schaltfläche		25
3.5	Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog			
	der Change Scalar-Schaltfläche		26
3.6	Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog			
	der Change Color-Schaltfläche		27
3.7	Bild nach Klicken der Show all Colors-Schaltfläche		28
3.8	Bild nach Klicken und Nutzereingabe im darauffolgenden Dialog			
	der Simulate-Schaltfläche		29

Literaturverzeichnis

- [Abh] *Regenwaldabholzung*. <https://www.abenteuer-regenwald.de/wissen/abholzung>. Accessed: 2021-06-02.
- [ALK20] Dragan Poljak Ante Lojic Kapetanovi. *Modeling the Epidemic Outbreak and Dynamics of COVID-19 in Croatia*. Arxiv, (1):2, 2020.
- [Ber19] J. Berger. *Wirtschaftliche Ungleichheit (Zwölf Vorlesungen)*. Springer-Verlag, 2019. doi:10.1007/978-3-658-23682-3.
- [Cai] *Cairographics*. <https://www.cairographics.org>. Accessed: 2021-05-31.
- [Com] *Proseminar-computergrafik*. <https://www.inf.tu-dresden.de/content/institutes/smt/cg/teaching/seminars/ProseminarSS06/brausewetter/Praesentation.pdf>. Accessed: 2021-05-31.
- [Cora] *Coronavirus-covid-19*. <https://www.euro.who.int/de/health-topics/health-emergencies/coronavirus-covid-19>. Accessed: 2021-05-31.
- [Corb] *WHO-alle-thesen-zum-coronavirus-ursprung-werden-verfolgt*. <https://www.aerzteblatt.de/nachrichten/122559/WHO-Alle-Thesen-zum-Coronavirus-Ursprung-werden-verfolgt>. Accessed: 2021-05-31.
- [Dgl] *Some Applications Leading to Differential Equation*. https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_2200%3A_Calculus_for_Scientists_II/3%3A_Introduction_to_Differential_Equations/3.0%3A_Some_Applications_Leading_to_Differential_Equation. Accessed: 2021-06-30.
- [Drv21] Vjekoslav Drvar. *Bachelorarbeit - Simulation eines räumlichen SEIR Modells*. Bachelor's thesis, LMU München, Germany, 2021.

- [Els18] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie (8.Auflage)*. Springer-Verlag GmbH, 2018. [doi:10.1007/978-3-662-57939-8](https://doi.org/10.1007/978-3-662-57939-8).
- [For17] O. Forster. *Analysis 2 (Differentialrechnung im R_n , gewöhnliche Differentialgleichungen)*. Springer Spektrum, 2017. [doi:10.1007/978-3-658-19411-6](https://doi.org/10.1007/978-3-658-19411-6).
- [Hen19] N. Henze. *Stochastik: Eine Einführung mit Grundzügen der Maßtheorie*. Springer-Verlag GmbH, 2019. [doi:10.1007/978-3-662-59563-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-59563-3).
- [hom] *Homeomorphic surfaces*. <https://www.open.edu/openlearn/science-maths-technology/mathematics-statistics/surfaces/content-section-2.4>. Accessed: 2021-07-01.
- [JP19] M. Wilke J.W. Prüss. *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme (2. Auflage)*, page 38. Springer Nature Switzerland AG, 2019. [doi:10.1007/978-3-030-12362-8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-12362-8).
- [Jä01] K. Jänich. *Topologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001. [doi:10.1007/978-3-662-10575-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10575-7).
- [Lov19] S. Lovett. *Differential Geometry of Manifolds (Second Edition)*. Taylor & Francis Group, 2019. [doi:10.1201/9780429059292](https://doi.org/10.1201/9780429059292).
- [rec] *The SIR Model of Disease Spread*. http://web.simmons.edu/~grigorya/390/projects/Charlotte-Kaitlin_Epidemics.pdf. Accessed: 2021-07-09.
- [RGB] *Rgb-calculator*. https://www.w3schools.com/colors/colors_rgb.asp. Accessed: 2021-05-31.
- [SM19] S. Balamuralitharan S. Mayilvaganan. *Analytical solutions of influenza diseases model by HPM*. [2112:4–6](https://doi.org/10.1155/2019/211246), 2019.
- [Tora] *Torus*. <https://www.nosco.ch/mathematics/en/torus.php>. Accessed: 2021-05-31.
- [Torb] *Torus*. <https://www.nosco.ch/mathematics/inc/img/torus0.jpg>. Accessed: 2021-05-31.
- [Wal00] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen (7. Auflage)*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2000. [doi:10.1007/978-3-642-57240-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57240-1).