Numerisk Lineær Algebra F2023
Opgavesæt 10

Opgave 10.1. Se opgavesæt 8 for instrukser for adgang til »Peerwise«.

(a) Individuelt eller i små grupper stil mindst 1 ny multiple-choice opgave i »Peerwise«, med en begrundelse for det korrekte svar.
Mulige emner for opgaver inkluderer søjlerum for matricer, mindste kvadraters problemer og løsningsmetoder, QR-dekomponeringer via Gram-Schmidt eller Householder matricer, konditionstal for mindste kvadraters problemer, lineære transformationer, kernen, billedmængde, osv.

(b) Individuelt svar på mindst 2 opgaver i »Peerwise« i dette kursus.

Opgave 10.2. Hvilken af de følgende funktioner $L\colon V \to W$ er lineær?

(a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x,y) = (2x, 3y, x-y)$.

(b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x,y) = (1-x, 1+y, x-y)$.

(c) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x,y,z) = (2, x+3y-z)$.

(d) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(x,y) = (0,0,0)$.

For dem, der er lineær, angiv deres standardmatrixrepræsentation.

Opgave 10.3. Lad P_k være vektorrummet af polynomier af grad højst k. Hvilke af de følgende funktioner er lineær?

(a) $L\colon P_2 \to P_2, \quad L(p) = p' - 2p$.

(b) $L\colon P_2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(ax^2+bx+c) = (a,b,c)$.

(c) $L\colon P_2 \to \mathbb{R}^3, \quad L(p) = (p(0), p(1), p(2))$.

(d) $L\colon P_2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(p) = (p(0)+1, p(-1)-1)$.

Opgave 10.4. Lad V være vektorrummet af funktioner $f\colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ som er 2 gange differentiabel. Hvilken af de følgende funktioner er lineær?

(a) $L\colon V \to \mathbb{R}, \quad L(f) = f(2)$.

(b) $L\colon V \to \mathbb{C}, \quad L(f) = |f(0) + f(1)|$.

(c) $L\colon V \to V, \quad L(f) = 3f^2 - f$.

(d) $L(f) = f'' - 2f' + 3f, \quad L\colon V \to W$, hvor W er rummet af alle funktioner $[-1,2] \to \mathbb{R}$.

Opgave 10.5. Tilføj Householder beregning af QR-dekomponering til eksperimentet i afsnit 15.3 i noterne. Det vil nok vise sig at der er ikke stor forskel fra resultaterne for den forbedrede Gram-Schmidt metode, men at Householder beregninger er også væsentlig bedre end klassisk Gram-Schmidt.

Opgave 10.6. Lad (x_i, y_i), $i = 0, \dots, k-1$, være nogle datapunkter i $\mathbb{R}^2$. Ved at bruge normalligninger vis

(a) at den mindste kvadraters løsning for det konstante funktion $f(x) = c$ er givet ved $c = \overline{y}$, middelværdien for $y_0, \dots, y_{k-1}$,
(b) at den mindste kvadraters løsning for det lineære funktion $f(x) = ax + b$ er givet ved

$$a = \frac{k\langle x, y\rangle - s_x s_y}{k\|x\|_2^2 - s_x^2} \quad \text{og} \quad b = \frac{\|x\|_2^2 s_y - s_x\langle x, y\rangle}{k\|x\|_2^2 - s_x^2}$$

hvor $s_x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i$ og $s_y = \sum_{i=0}^{k-1} y_i$. [Opgaven kunne godt gennemføres med Gram-Schmidt metoden, som er oftest til at foretrække over normalligninger, men matematisk giver begge det samme resultat.]

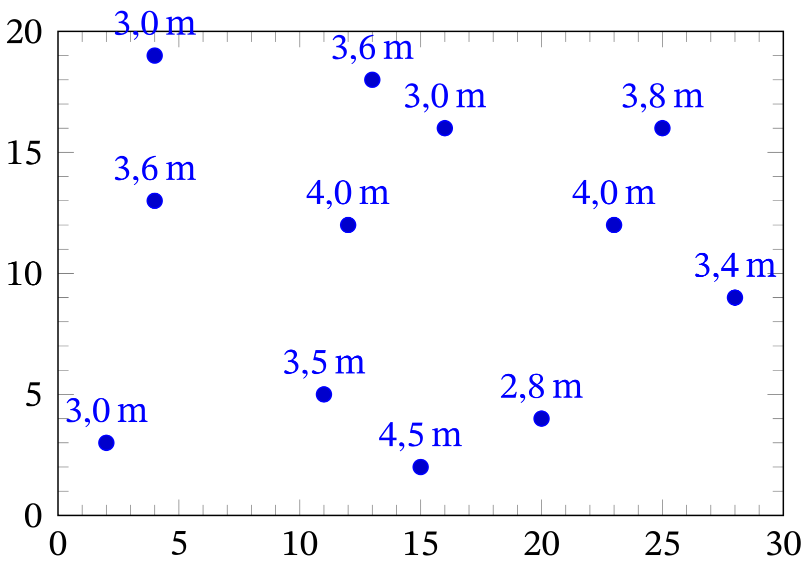
Opgave 10.7. For $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ med reduceret SVD $A = U\Sigma V^T$, lad $A^+ = V\Sigma^{-1}U^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ være dens pseudoinvers.
(a) Hvis A er kvadratisk, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, og invertibel, vis at $A^+ = A^{-1}$.
(b) Vis generelt at
  (i) $AA^+A = A$,
  (ii) $A^+AA^+ = A^+$,
  (iii) $(AA^+)^T = AA^+$ og
  (iv) $(A^+A)^T = A^+A$.

Afleveringsopgave 7

Denne opgave må laves som en gruppeopgave, med gruppestørrelse mellem 1 og 4 personer fra samme TØ hold. Opgaveløsningen forsynes med navnene af alle gruppemedlemmer, og hver gruppemedlem uploader en kopi af besvarelsen, som én pdf fil, brightspace under "Course Tools > Assignments > Aflevering 7". Afleveringsfristen bestemmes af din instruktor, men ligger omkring uge 16.

En parkeringsplads på 20 m × 30 m bliver oplyst via lamper placeret forskellige steder og i forskellige højde, som angivet i figur 1 side 3.

Parkeringspladsen inddeles i en rektangulær gitter af 600 kvadrater hver af størrelse 1 m × 1 m . Tallet y_j angiver belysningsniveauet i kvadrat j, for $j = 0, \dots, 599$. Lad x_i angiver styrken af lampe i. Vi vælger enheder så at bidraget til belysningen i kvadrat j fra lampe i er x_i/d_{ij}^2, hvor d_{ij} er afstanden i $\mathbb{R}^3$ fra lampen til centrum af kvadrat j.
(a) Angiv hvordan belysningsniveauet $y = (y_0, \dots, y_{599})$ og styrkerne $x = (x_0, \dots, x_{11})$ er relateret via et lineært ligningssystem. Opstil koeffici-



Figur 1: Parkeringsplads.

entmatricen for systemet i python. (I må estimere koordinaterne for placeringen af hver lampe ud fra diagrammet.)

(b) Lav en heatplot der viser belysningsniveauet i hver kvadrat når alle lampe er tændt med styrke $x_i = 20{,}0$.

(c) Der ønskes at belysningsniveauet bliver så tæt så muligt på 1,0 i alle kvadrater. Brug den mindste kvadraters metode til at bestemme i python lysstyrken i hver lampe ved brug af (i) QR-dekomponering via forbedret Gram-Schmidt, hhv. (ii) SVD-dekomponering.

(d) Lav en heatplot af resultaterne fra del (c) på en måde, som bedst illustrerer hvor tæt værdierne er på den ønskede. Hvad er den maksimale afvigelse fra den ønskede værdi 1,0? Er der stor forskel mellem resultaterne fra de to metoder?

(e) Beregn tallene $\kappa(A)$, $\cos\theta$ og η, som styrer konditionstallene for problemet (sml. notesæt 17). Angiv den tilsvarende øvre grænse for konditionstallet for hvordan ændring i A påvirker ændring i den beregnede x i del (c). Brug dette til at forklare hvor nøjagtig I kan forvente beregning af x til at være.

Andrew Swann