Numerisk Lineær Algebra F2023
Opgavesæt 7

Opgave 7.1. Se opgavesæt 04 for instrukser for adgang til »Peerwise«.

(a) Individuelt eller i små grupper stil mindst 1 ny multiple-choice opgave i »Peerwise«, med en begrundelse for det korrekte svar.
Mulige emner for opgaver inkluderer bl.a. singulærværdier, konditionstal, lineære ligningssystemer, ortogonale matricer, ortonormale baser, Householder matricer og flops.

(b) Individuelt svar på mindst 2 opgaver i »Peerwise« i dette kursus.

Opgave 7.2. Bestem konditionstal for de følgende funktioner og diskutér konsekvenserne for beregninger med `float`:

(a) $f(x) = 1/(1+x^2)$,
(b) $f(x) = \sin(x)$,
(c) $f(x,y) = xy$.

Opgave 7.3. Omskriv de følgende udtryk til formen $x + iy$ med $x, y \in \mathbb{R}$:

(a) $(3+2i) + (-1+i)$,
(b) $(3+2i)(-1+i)$,
(c) $(3+2i)/(-1+i)$.

Løs de følgende ligninger/ligningssystemer

(d) $(1+i)z = 2 - i$,

(e) $$\begin{cases} (1-i)a + ib - (1+i)c = 5, \\ a - (2+i)b + ic = 2, \\ ia + (1-i)b + (1-i)c = 0. \end{cases}$$

Opgave 7.4. Lad V være vektorrummet, som består af alle differentiable funktioner $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$. Hvilke af de følgende mængder er underrum af V?

(a) $\{f \in V \mid f(0) = 0\}$,
(b) $\{f \in V \mid f(1) = 0\}$,
(c) $\{f \in V \mid f(-1) = 1\}$,
(d) $\{f \in V \mid f'(0) = 0\}$.

Opgave 7.5. Betragt løsningen

$$x = f(a,b,c) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

til andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$. I python undersøg hvordan løsningen ændrer sig omkring

(a) $(a, b, c) = (2{,}0, 2{,}0, -1{,}0)$,

(b) $(a, b, c) = (2{,}0, 2{,}0, -10{,}0)$.

I hvert tilfælde fortæl hvilke af de tre koefficienter a, b og c påvirker resultatet mest.

Beregn gradienten og konditionstallene for f i de to givne punkter, og forklar hvordan de hænger sammen med det du har fundet ovenfor.

Opgave 7.6. Betragt matricerne

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vis at $J_2^2 = -I_2$.

Lad $z = x + iy$, $w = s + it$ med $x, y, s, t \in \mathbb{R}$. Vis at matricerne $Z = xI_2 + yJ_2$, $W = sI_2 + tJ_2$ opfylder regneregler der svarer til dem for $z, w \in \mathbb{C}$.

Afleveringsopgave 5

Denne opgave må laves som en gruppeopgave, med gruppestørrelse mellem 1 og 4 personer fra samme TØ hold. Opgaveløsningen forsynes med navnene af alle gruppemedlemmer, og hver gruppemedlem uploader en kopi af besvarelsen, som én pdf fil, brightspace under "Course Tools > Assignments > Aflevering 5". Afleveringsfristen bestemmes af din instruktor, men ligger i uge 12.

Vi skal se hvordan vi kan flytte en figur i planen til en standard position. Betragt et ottetalsfigur i planen givet ved

$$x(t) = 3\cos(t), \quad y(t) = \sin(2t), \qquad \text{for } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Vi vil danne nogle datapunkter der ligge tæt på en drejet version af denne figur.

(a) Plot kurven $(x(t), y(t))$ i python.

(b) Brug

```
rng = np.random.default_rng()
theta = rng.uniform(...)
```

til at vælge en tilfældig vinkel θ mellem $\pi/5$ og $4\pi/5$. Drej kurven med rotationsmatricen $R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ og plot resultatet.

(c) For et rimeligt stort n, f.eks. $n = 1000$, dan en $(2 \times n)$-matrix hvis søjler er tilfældige punkter fra den drejede kurve. Ved hjælp af

```
rng.normal(0.0, 0.1, (2, n)),
```

eller noget lignende, tilføj støj til alle indgange til at få en matrix A. Plot punkterne i resultatet.

Nu vil vi forsøge at opdage hvordan figuren fra A kan bringes tilbage til den oprindelige figur, uden kendskab til matricen R.

(d) For hver række i A, træk middelværdien fra, og dermed dan en ny matrix B hvor hver række har middelværdi 0. Der må gerne anvendes `np.mean()`.

(e) Brug python til at beregne singulærværdidekomponeringen $B = U\Sigma V^T$ af B. Angiv $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ og singulærværdierne.

(f) Beskriv hvordan singulærværdierne og de venstre singulærvektorer for B er relateret til den oprindelige figur.

(g) Vis hvordan den ortogonale matrix U kan bruges til at flytte figuren givet ved B, så den ligger tæt på den oprindelige ottetalsfigur.

Andrew Swann