
Συστήμα & Αυτόματος Έλεγχος II

Συνθετική Εργασία 2020

Διδάσκων: Ι.Σ. Σακελλαρίου, Επίκουρος Καθηγητής

Σταμόπουλος Χρήστος

AM 1057168

5^ο Έτος

ΠΑΤΡΑ, 25/1/2020

Περιεχόμενα

ΜΕΡΟΣ Ι: ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ, ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ, ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ 4

1. Να υποδειχθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω συστήματος και να υπολογιστούν οι πόλοι και οι μηδενιστές του. Να απεικονισθούν οι πόλοι και οι μηδενιστές στο μιγαδικό επίπεδο. Είναι το σύστημα ευσταθές; Ποιες είναι οι φυσικές συχνότητες και οι λόγοι απόσβεσης του συστήματος. Να υπολογιστούν οι φυσικές συχνότητες με απόσβεση. 4

 Πόλοι-Μηδενιστές 5

 Ευστάθεια Συστήματος 5

 Φυσικές Συχνότητες-Λόγοι Απόσβεσης 5

2. Να σχεδιαστεί το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode και να συγκριθεί με αυτό που παράγεται από το MATLAB. Σχολιάστε τυχόν διαφορές. Να υποδειχθεί το Περιθώριο Φάσης και το Περιθώριο Κέρδους. Βάσει αυτών να επισημανθεί αν το σύστημα είναι ευσταθές. 7

 Διάγραμμα Bode στο Matlab 13

 Ευστάθεια Συστήματος 14

3. Να γίνει το διάγραμμα Nyquist με τη βοήθεια του Matlab. Είναι το σύστημα ευσταθές και γιατί; Να υπολογιστούν τα οριακά σημεία του διαγράμματος και να εξηγηθεί αν και τότε το σύστημα γίνεται ασταθές. 15

 Κριτήριο Ευστάθειας Nyquist 15

 Οριακά Σημεία Διαγράμματος Nyquist 15

4. Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace να υπολογιστεί αναλυτικά η βαρυτική συνάρτηση του συστήματος της Εξίσωσης (1) και να απεικονιστεί η απόκριση του συστήματος για 20 δευτερόλεπτα (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί βήμα 0.1sec). 18

 Απόκριση Συστήματος 20

ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΜΕΛΕΤΗ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 21

5. Να γίνει η διακριτοποίηση του συστήματος της Εξίσωσης (1) με τη μέθοδο “zoh” (zero order hold) και συχνότητες δειγματοληψίας 1 Hz, 10 Hz, 100 Hz. Να γραφούν οι συναρτήσεις μεταφοράς των διακριτών συστημάτων..... 21

6. Να απεικονισθεί στο ίδιο γράφημα η απόκριση του συνεχούς και των διακριτοποιημένων συστημάτων σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας και να σχολιαστούν οι διαφορές μεταξύ των τριών δειγματοληψιών. Διαλέξτε το βέλτιστο σύστημα και αιτιολογήστε τους λόγους..... 22

7. Να υλοποιηθούν τα ερωτήματα 5 και 6 στο SIMULINK και να δειχθούν τα δομικά διαγράμματα των βρόχων που θα σχεδιαστούν καθώς και τα παραγόμενα αποτελέσματα. 23

8. Με τη βοήθεια του κριτηρίου Routh-Hurwitz να γίνει έλεγχος ευστάθειας του διακριτού συστήματος που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα τοποθετώντας εν σειρά κατευθυντή P με κέρδος K και κλείνοντας τον βρόχο με μοναδιαία ανάδραση. 24

9. Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού z να υπολογιστεί η απόκριση μόνιμης κατάστασης του διακριτού συστήματος που επιλέξατε στο ερώτημα 2.2. σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας (μετασχηματισμός z μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης: $z/(z-1)$). 28

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ. 30

10. Να μεταφερθεί το σύστημα της Εξίσωσης(1) στον χώρο κατάστασης να υποδειχθούν οι μεταβλητές κατάστασης και ο πίνακας κατάστασης. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα κατάστασης. 30
- Χώρος Κατάστασης 30
- Μεταβλητές Κατάστασης..... 31
- Πίνακας Κατάστασης 31
- Ιδιοτιμές & ιδιοδιανύσματα του Πίνακα Κατάστασης 31
11. Να γίνει το διάγραμμα κατάστασης του συστήματος..... 34
12. Να υπολογιστεί ο πίνακας μετάβασης $\Phi(t)$ και να δοθεί η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης του συστήματος..... 34
13. Να υπολογιστούν οι πίνακες παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας. Είναι το σύστημα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο; Εξηγήστε γιατί. 37
14. Πληροί το σύστημα τις απαιτούμενες συνθήκες για να σχεδιαστεί σύστημα αυτομάτου ελέγχου που θα το βελτιώνει; Αν ναι, να σχεδιαστεί σύστημα αυτομάτου ελέγχου με τη μέθοδο τοποθέτησης πόλων ή με τον τύπο του Ackermann, το οποίο να εισάγει ζεύγος συζύγων πόλων $-3 \pm 4j$. Να δοθεί ο πίνακας κατάστασης του κλειστού βρόχου και η συνάρτηση μεταφοράς του. Επιτεύχθηκε η τοποθέτηση των νέων πόλων; 40

ΜΕΡΟΣ Ι: ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ, ΠΕΔΙΟ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ, ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

Έστω μηχανολογικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη συνάρτηση μεταφοράς,

$$H(s) = \frac{s + \frac{7168}{1000}}{s^2 + \frac{7168}{10000}s + 3}$$

- 1 Να υποδειχθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παραπάνω συστήματος και να υπολογιστούν οι πόλοι και οι μηδενιστές του. Να απεικονισθούν οι πόλοι και οι μηδενιστές στο μιγαδικό επίπεδο. Είναι το σύστημα ευσταθές; Ποιες είναι οι φυσικές συχνότητες και οι λόγοι απόσβεσης του συστήματος. Να υπολογιστούν οι φυσικές συχνότητες με απόσβεση.

Όπως είναι γνωστό, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω συνάρτησης μεταφοράς είναι ο παρονομαστής του κλάσματος, οι πόλοι είναι οι ρίζες του παρονομαστή και οι μηδενιστές οι ρίζες του αριθμητή. Με αυτό τον τρόπο προκύπτουν τα παρακάτω:

- Χαρακτηριστικό Πολυώνυμο:

$$s^2 + \frac{7168}{10000}s + 3$$

- Πόλοι:

$$s_1 = -0.3584 + j1.6946$$

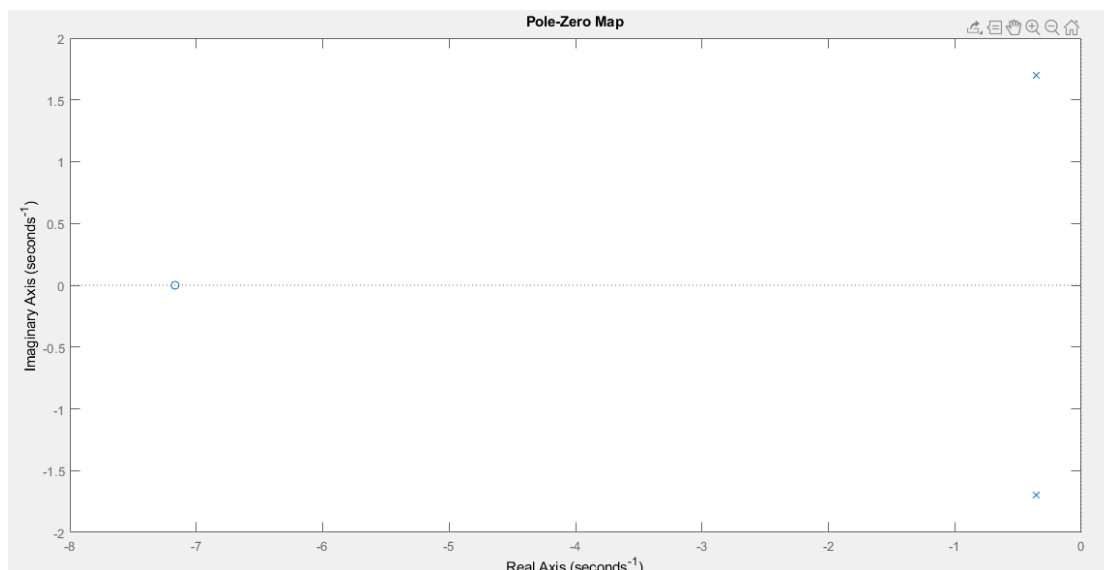
$$s_2 = -0.3584 - j1.6946$$

- Μηδενιστές:

$$s_1 = -7.168$$

Πόλοι-Μηδενιστές

Παρακάτω, με την χρήση του Matlab, απεικονίζονται οι πόλοι και οι μηδενιστές στο μιγαδικό επίπεδο.



Εικόνα 1 Πόλοι και μηδενιστές ανοιχτού βρόχου στο μιγαδικό επίπεδο.

Ευστάθεια Συστήματος

Ευσταθές ονομάζεται ένα σύστημα όταν οι πόλοι και μηδενιστές του συστήματος βρίσκονται αριστερά από τον φανταστικό άξονα (αρνητικό πραγματικό μέρος). Όπως διαπιστώνεται παραπάνω αυτό ισχύει, επομένως το σύστημα είναι ευσταθές.

Φυσικές Συχνότητες-Λόγοι Απόσβεσης

Για τον υπολογισμό των φυσικών συχνοτήτων και των λόγων απόσβεσης, απαραίτητο θα ήταν να παρουσιαστεί η συνάρτηση μεταφοράς στην τυπική μορφή 2^{ης} τάξης συστήματος, όπως φαίνεται παρακάτω.

$$H(s) = \frac{(k_1 s + k_0) \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Επομένως, η φυσική συχνότητα και ο λόγος απόσβεσης είναι $\omega_n = \sqrt{3}$ και

$\zeta = 0.20692$, αντίστοιχα. Έπειτα, υπολογίζεται η φυσική συχνότητα με απόσβεση από την φυσική συχνότητα και τον λόγο απόσβεσης ως ακολούθως:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 1.7172$$

Για την ολοκλήρωση του ερωτήματος, παρατίθεται μέσω της χρήσης του Matlab οι πόλοι, οι μηδενιστές και οι φυσικές συχνότητες με απόσβεση.

```
Command Window

>> num = [1 7.168];
den = [1 0.7168 3];
H = tf(num, den)

H =

      s + 7.168
-----
s^2 + 0.7168 s + 3

Continuous-time transfer function.

>> [wn,zeta] = damp(H)

wn =

    1.7321
    1.7321

zeta =

    0.2069
    0.2069
```

Εικόνα 2 Συνάρτηση μεταφοράς, φυσικές συχνότητες, λόγος απόσβεσης στο MATLAB.

```
Command Window

>> z = zero(H)

z =

   -7.1680

>> s = pole(H)

s =

   -0.3584 + 1.6946i
   -0.3584 - 1.6946i

>> wd = wn*sqrt(1-zeta(1)^2)

wd =

    1.6946
    1.6946
```

Εικόνα 3 Μηδενιστές, πόλοι, συχνότητα με απόσβεση ανοιχτού βρόχου στο MATLAB

2. Να σχεδιαστεί το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode και να συγκριθεί με αυτό που παράγεται από το MATLAB. Σχολιάστε τυχόν διαφορές. Να υποδειχθεί το Περιθώριο Φάσης και το Περιθώριο Κέρδους. Βάσει αυτών να επισημανθεί αν το σύστημα είναι ευσταθές.

Ένα διάγραμμα Bode είναι μια γραφική παράσταση μιας γραμμικής, αμετάβλητης συνάρτησης μεταφοράς συστήματος. Σε ένα γραμμικό σύστημα, κάθε ημιτονοειδές που εισάγει το σύστημα αλλάζει μόνο σε μέγεθος, όταν ενισχύεται ή εξασθενεί, και φάση, όταν καθυστερεί. Επομένως, το σύστημα μπορεί να περιγραφεί για κάθε συχνότητα, μόνο με το κέρδος και τη μετατόπιση φάσης. Οι γραφικές παραστάσεις εντοπίζουν απλώς τη μετατόπιση κέρδους και φάσης του συστήματος σε ένα εύρος συχνοτήτων. Υπάρχουν δύο γραφικές παραστάσεις, η μία σχεδιάζει το μέγεθος (ή κέρδος) έναντι της συχνότητας (γραφική παράσταση Bode Magnitude) και άλλη σχεδιάζει τη φάση έναντι της συχνότητας (γραφική παράσταση φάσης Bode).

Με άλλα λόγια, το διάγραμμα Bode είναι η γραφική απεικόνιση της Συνάρτησης Απόκρισης Συχνότητας (ΣΑΣ) ή αλλιώς Frequency Response Function (FRF) ως συνάρτηση της συχνότητας. Έτσι, εύκολα διαπιστώνεται πως για τον προσεγγιστικό σχεδιασμό του διαγράμματος Bode πρέπει να υπολογιστεί η ΣΑΣ, η οποία προκύπτει αντικαθιστώντας στην συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$, το $s = j\omega$ και ορίζεται ως :

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = \left|_{s=j\omega}\right.$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \text{ (Μετασχηματισμός Fourier της Βαρυτικής)}$$

Όπου η $h(t)$ είναι η βαρυτική συνάρτηση.

Με αυτόν τον τρόπο, αντικαθιστώντας το $s = j\omega$ και εφαρμόζοντας διάφορα τεχνάσματα για να “φαίνεται” το κέρδος, το υποσύστημα 1^{ης} τάξης αλλά και το υποσύστημα 2^{ης} τάξης, έχουμε:

$$H(j\omega) = 2.389 \cdot \left(\frac{1}{0.14j\omega + 1} \right)^{-1} \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\sqrt{3}} \right)^2 + 0.239j\omega + 1}$$

Όπως εύκολα βλέπουμε από την παραπάνω εξίσωση, ο 1^{ος} όρος είναι το κέρδος, ο 2^{ος} όρος το υποσύστημα 1^{ης} τάξης και ο 3^{ος} όρος 2^{ης} τάξης.

Πιο συγκεκριμένα από την FRF παίρνουμε τις εξής πληροφορίες:

1. Το στατικό κέρδος ή κέρδος μόνιμης κατάστασης (DC gain) που ορίζεται ως η τελική τιμή της απόκρισης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας ισούται με 2.389.
2. Το αντίστροφο σύστημα πρώτης τάξης έχει χρονική σταθερά $\tau=0.14$, όπου προκύπτει η συχνότητα θλάσης $\omega_1 = 7.1429 \text{ rad/sec}$.
3. Στο σύστημα 2^{ης} τάξης διακρίνεται η φυσική συχνότητα $\omega_n = \sqrt{3}$ και ο λόγος απόσβεσης $\zeta = 0.20692$, όπου η συχνότητα θλάσης είναι $\omega_n = \omega_2 = \sqrt{3} \text{ rad/sec}$.

➤ Διάγραμμα Bode

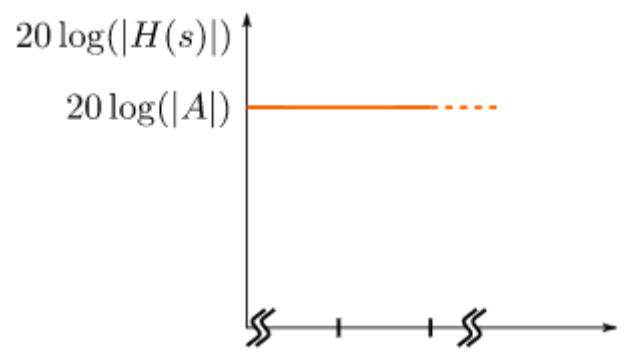
Όπως είναι γνωστό από την θεωρία, το τελικό διάγραμμα Bode θα είναι η υπέρθεση των επιμέρους όρων της FRF.

- ο Γραφική Παράσταση Μέτρου Bode

Εύρος Συχνοτήτων (rad/sec)		Επίδραση στις συχνότητες	Κλίση (dB/δεκάδα)
0	$\sqrt{3}$	Κέρδος	0
$\sqrt{3}$	7.1429	Κέρδος - Σύστημα 2 ^{ης} τάξης	-40
7.1429	∞	Κέρδος - Σύστημα 2 ^{ης} τάξης – Αντίστροφο Σύστημα 1 ^{ης} τάξης	-20

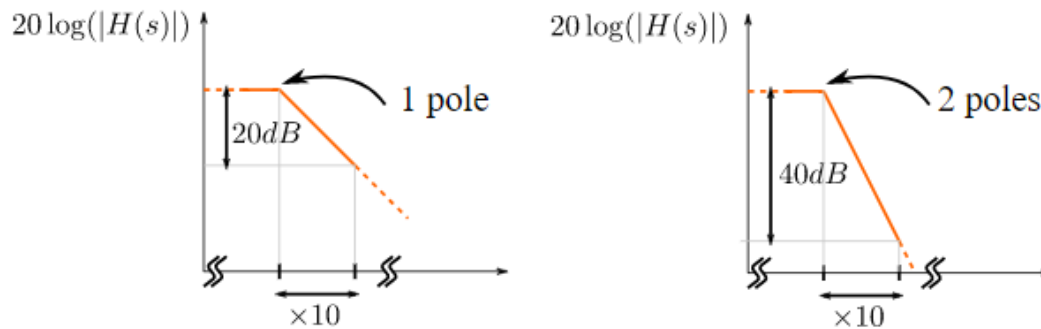
▪ Κανόνες Σχεδιασμού Γραφικής Παράστασης Μέτρου Bode

1. Το διάγραμμα ξεκινά με μια οριζόντια γραμμή σε μέγεθος ίσο με το στατικό κέρδος.



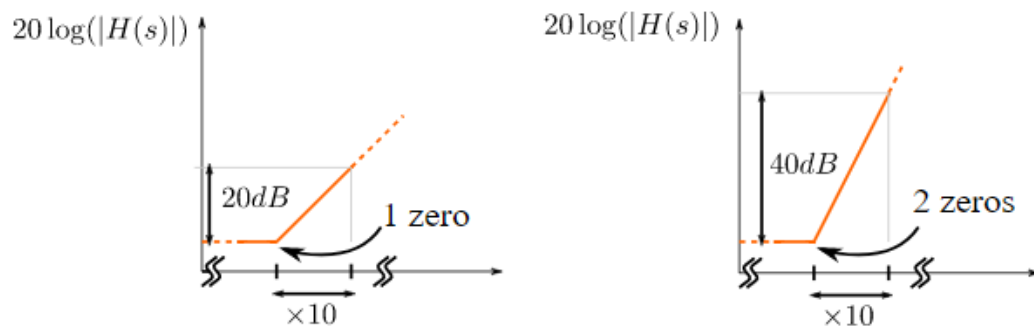
Εικόνα 4

2. Για κάθε πόλο, η κλίση της γραμμής μειώνεται κατά 20 dB/δεκάδα συχνότητας στη συχνότητα αυτού του πόλου. Γι' αυτό από ω_2 έως ω_1 η κλίση είναι -40 dB/δεκάδα, λόγω των 2 πόλων που επιδρούν αλλά και λόγω της απουσίας μηδενιστών.



Εικόνα 5

3. Για κάθε μηδενιστή, η κλίση της γραμμής αυξάνεται κατά 20 dB/δεκάδα συχνότητας στη συχνότητα αυτού του μηδενιστή.



Εικόνα 6

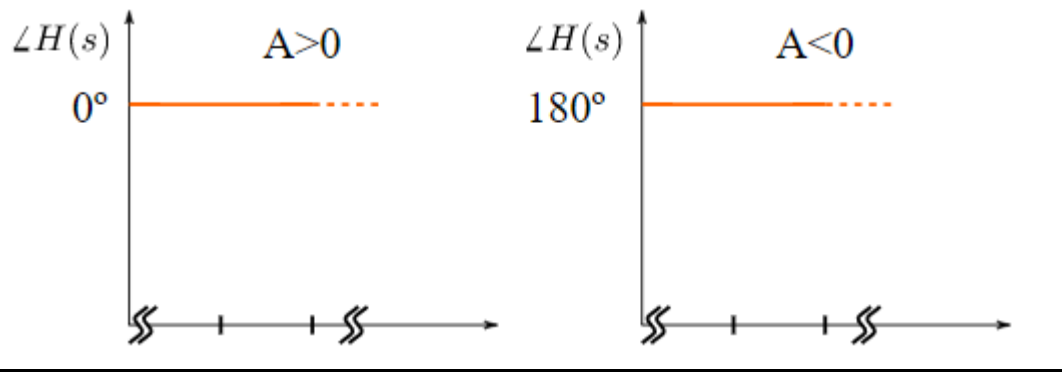
- Γραφική Παράσταση Φάσης Bode

Επίδραση στο σύστημα	Φάση (°)	Συχνότητες (rad/sec)
Στατικό Κέρδος	0	$\forall \omega$
Σύστημα 2 ^{ης} τάξης	$-\pi/2$	$\sqrt{3}$
	$-\pi$	$\forall \omega \gg \sqrt{3}$
Αντίστροφο σύστημα 1 ^{ης} τάξης	$\pi/4$	7.1429
	$\pi/2$	$\forall \omega \gg 7.1429$

Σημείωση: Επειδή παρακάτω δεν γίνεται αναφορά για το αντίστροφο σύστημα 1^{ης} τάξης, αξίζει να σημειωθεί πως για την εύρεση της συχνότητας και του μέτρου, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το ευθύ σύστημα 1^{ης} τάξης με «-1».

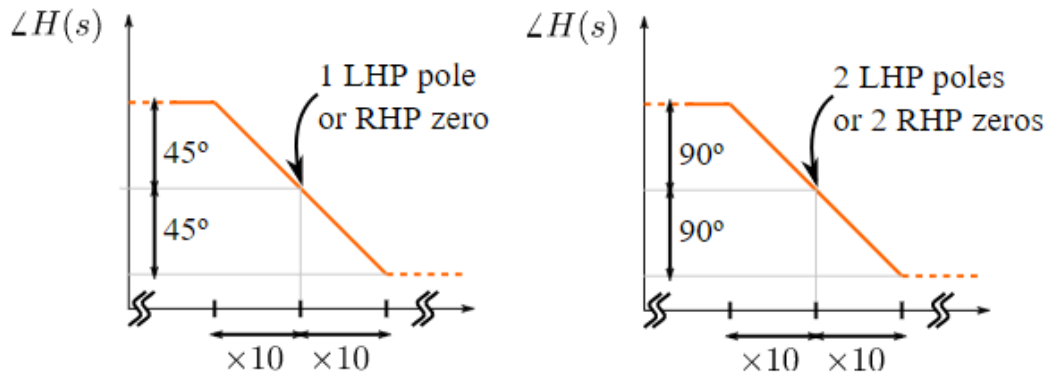
- Κανόνες Σχεδιασμού Γραφικής Παράστασης Φάσης Bode

1. Ο σχεδιασμός ξεκινάει με οριζόντια γραμμή με φάση 0° εάν το κέρδος είναι θετικό ή -180° εάν το κέρδος είναι αρνητικό



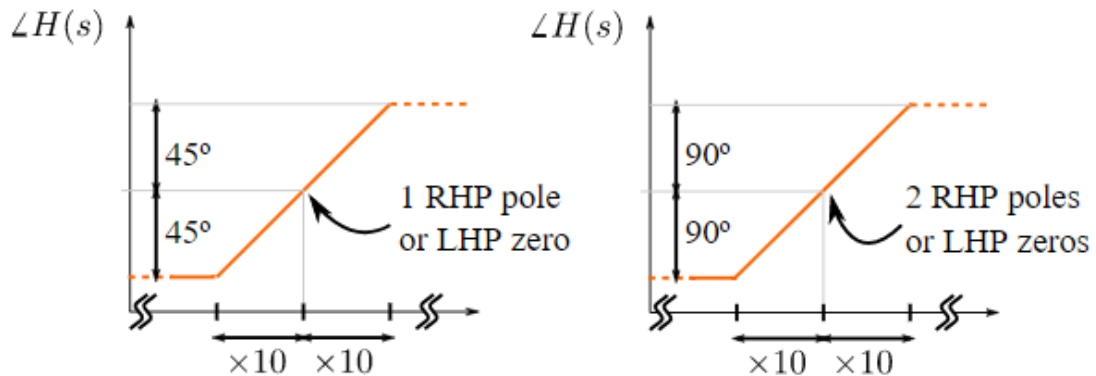
Εικόνα 7

2. Για κάθε πόλο αριστερά (LHP) ή δεξιά (RHP) του μηδενός, υπάρχει μείωση της κλίσης κατά 45° /δεκάδα μία δεκάδα πριν από τον πόλο/μηδενιστή και υπάρχει αύξηση κατά την ίδια ποσότητα μία δεκάδα μετά τον πόλο/μηδενιστή. Μετά από δύο δεκάδες, η φάση θα είναι -90° από πριν για κάθε πόλο/μηδενιστή.



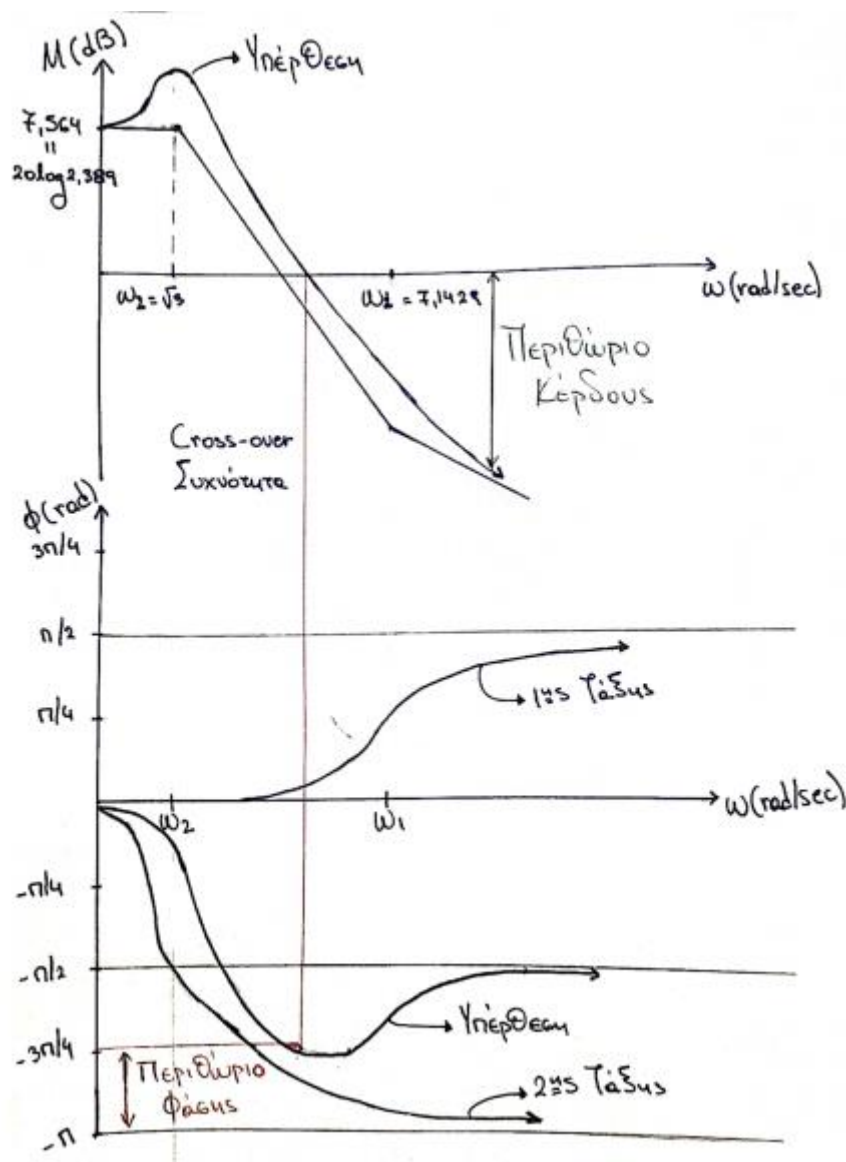
Εικόνα 8

3. Για κάθε πόλο αριστερά (LHP) ή δεξιά (RHP) του μηδενός, υπάρχει αύξηση της κλίσης κατά 45° /δεκάδα μία δεκάδα πριν από τον πόλο/μηδενιστή και υπάρχει μείωση κατά την ίδια ποσότητα μία δεκάδα μετά τον πόλο/μηδενιστή. Μετά από δύο δεκάδες, η φάση θα είναι $+90^\circ$ από πριν για κάθε πόλο/μηδενιστή.



Εικόνα 8

Για την πλήρη αξιολόγηση του προσεγγιστικού διαγράμματος Bode, απαραίτητη ήταν η αναφορά στον τρόπο σχεδιασμού του.



Εικόνα 9 Γραφική παράσταση Bode.

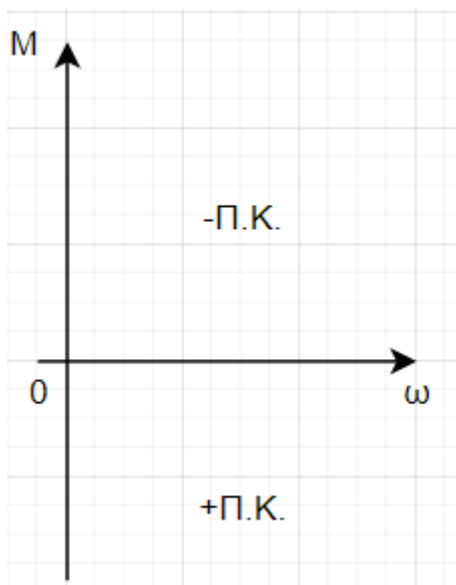
Όπως φαίνεται στην εικόνα 4 και σύμφωνα με τους κανόνες σχεδιασμού που προαναφερθήκαμε, περιμένουμε η προσέγγιση να είναι πολύ παραπάνω από ικανοποιητική σε σχέση με το Bode του Matlab.

Ωστόσο, πριν την παρουσίαση του διαγράμματος Bode μέσω του προγράμματος Matlab, άξιο σχολιασμού θα ήταν και η αναφορά στο Περιθώριο Κέρδους (Π.Κ.) και στο Περιθώριο Φάσης (Π.Φ.).

➤ Περιθώριο Κέρδους (Π.Κ.)

Το Περιθώριο Κέρδους (Gain Margin) είναι η μεταβολή στο κέρδος ανοιχτού βρόχου εκφρασμένου σε ντεσιμπέλ(dB), που απαιτείται σε μετατόπιση φάσης 180° για να κάνει το σύστημα κλειστού βρόχου ασταθές. Το Π.Κ. βρίσκεται από την κατακόρυφη απόσταση του

μέτρου στη θέση ω από το μηδέν. Το περιθώριο είναι αρνητικό για μέτρο θετικό και θετικό για μέτρο αρνητικό. Δείχνει πόσο πρέπει να μετακινηθεί «πάνω» ή «κάτω» το διάγραμμα μέτρου ώστε να υπάρχει ευστάθεια.



Εικόνα 10

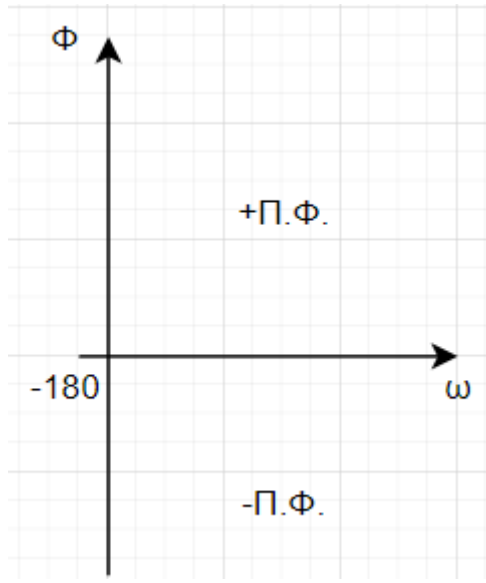
Η έκφραση του Π.Κ. που επιβεβαιώνει την παραπάνω εικόνα είναι:

$$\text{Π.Κ.} = 0 - G \text{ dB}, \text{ όπου } G \text{ το κέρδος}$$

Το περιθώριο κέρδους του προσεγγιστικού διαγράμματος μέτρου του διαγράμματος Bode, το σύστημά μας έχει θετικό περιθώριο κέρδους για ω τείνει στο άπειρο. Πιο συγκεκριμένα $\text{Π.Κ.} = 0 - (-35) = 35$, όπου αυτό σημαίνει πως, υπάρχει ευστάθεια για το σύστημα κλειστού βρόγχου για οποιοδήποτε θετικό στατικό κέρδος κατευθυντή.

➤ Περιθώριο Φάσης (Π.Φ.)

Το Περιθώριο Φάσης (Phase Margin), είναι η μεταβολή στη μετατόπιση φάσης ανοιχτού βρόγχου που απαιτείται σε μοναδιαίο κέρδος για να κάνει το σύστημα κλειστού βρόγχου ασταθές. Πιο συγκεκριμένα είναι η διαφορά φάσης από την συχνότητα στην οποία το μέτρο παίρνει τιμή μηδέν (συχνότητα Cross-over).



Εικόνα 11

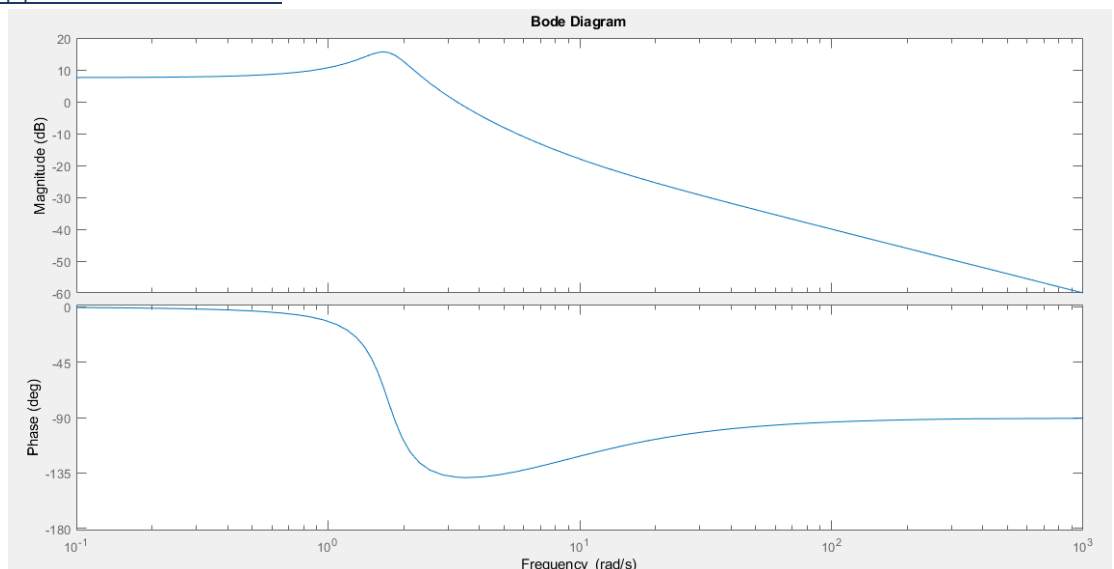
Ο τύπος για το Π.Φ. μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\varphi(\omega) - (-180^\circ) = \varphi(\omega) + 180^\circ \text{ ή } \varphi(\omega) + \pi$$

$$-135^\circ + 180^\circ = 45^\circ (\pi/4)$$

Με αυτόν τον τρόπο, υπάρχει προσεγγιστικό περιθώριο φάσης ίσο με $\pi/4$. Αυτό δείχνει κατά πόσο πρέπει να μετακινηθεί η φάση ώστε να υπάρχει ευστάθεια, όπου στην προκειμένη πρέπει να μετακινηθεί $\pi/4$. Αυτό πρακτικά σημαίνει πως, σε σύστημα κλειστού βρόχου ο κατευθυντής έχει το περιθώριο καθυστέρησης έως και $\pi/4$, για την αποφυγή της αστάθειας.

Διάγραμμα Bode στο Matlab

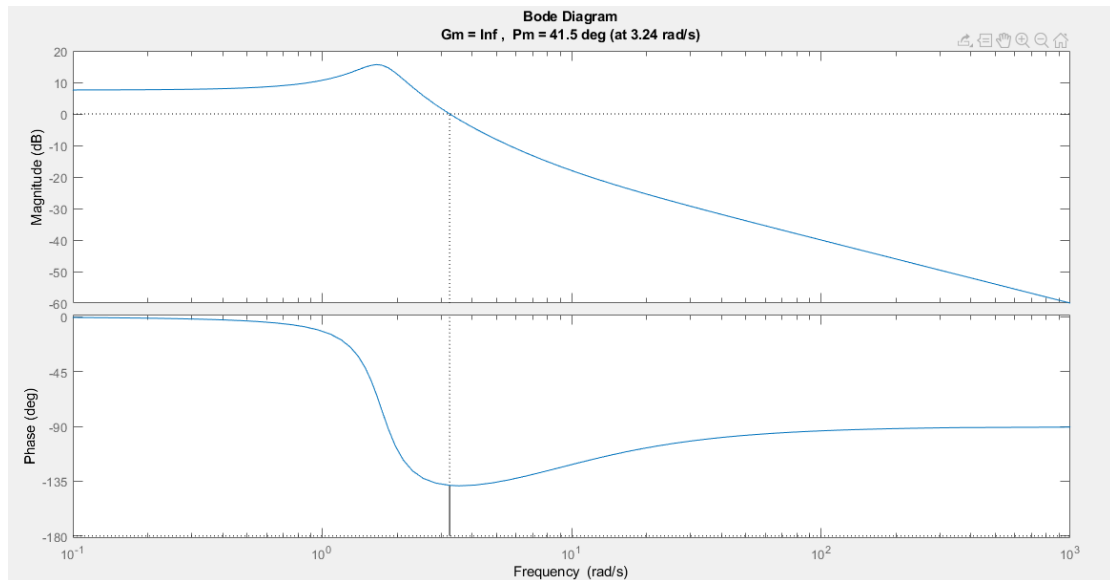


Εικόνα 12 Διάγραμμα Bode στο Matlab.

- Σύγκριση αποτελεσμάτων προσεγγιστικού διαγράμματος Bode – Bode Matlab
Όσον αφορά την μορφή και τις ασύμπτωτες των διαγραμμάτων φαίνονται αδιαμφισβήτητα όμοια. Έτσι, επαληθεύονται όλα τα στοιχεία εκείνα τα οποία

βασίστηκε ο σχεδιασμός του προσεγγιστικού διαγράμματος, αλλά και η υπέρθεση των Bode.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι τιμές του περιθώριο κέρδους και φάσης σύμφωνα με το Matlab:



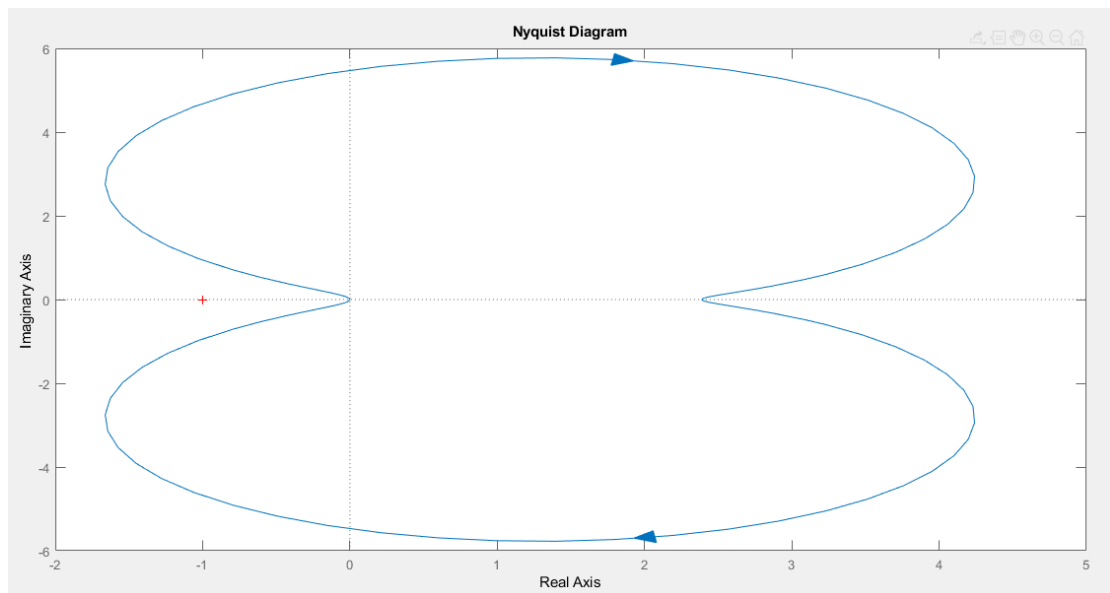
Εικόνα 13 Π.Κ. και Π.Φ. στο Matlab.

Επομένως σύμφωνα με το Matlab το $\text{Π.Κ.} \rightarrow \infty$ και το $\text{Π.Φ.} = 41.5^\circ$. Με αυτόν τον τρόπο, επαληθεύεται η σωστή προσέγγιση των Π.Κ. και Π.Φ. που πραγματοποιήθηκε παραπάνω.

Ευστάθεια Συστήματος

Εφόσον ισχύει ότι $\text{Π.Κ.} > 0$ και $\text{Π.Φ.} > 0$ ταυτόχρονα τότε το σύστημά μας χαρακτηρίζεται ως ευσταθές αλλά και ως σύστημα ελάχιστης φάσης (Συνθήκη: Stability and Minimum Phase System). Γενικότερα, στην πράξη συνήθως επικρατεί $\text{Π.Κ.} > 8\text{dB}$ και $\text{Π.Φ.} > 30^\circ$ ώστε το σύστημα να μην κινδυνεύει να γίνει ασταθές. Έτσι, επαληθεύεται και με αυτόν τον τρόπο η ευστάθεια του συστήματος.

3. Να γίνει το διάγραμμα Nyquist με τη βοήθεια του Matlab. Είναι το σύστημα ευσταθές και γιατί; Να υπολογιστούν τα οριακά σημεία του διαγράμματος και να εξηγηθεί αν και πότε το σύστημα γίνεται ασταθές.



Εικόνα 14 Διάγραμμα Nyquist στο Matlab.

Κριτήριο Ευστάθειας Nyquist

Ένα σύστημα είναι ευσταθές εάν και μόνο αν η καμπύλη Nyquist δεν περικλείει το σημείο $(-1, 0)$, ενώ ταυτόχρονα οι πόλοι που βρίσκονται στο δεξί ημιεπίπεδο είναι μηδέν. Πιο συγκεκριμένα, αν υπάρχουν πόλοι στο δεξί ημιεπίπεδο τότε το σύστημα είναι ευσταθές, εάν το πλήθος των κυκλώσεων του $(-1, 0)$ κατά την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού, ισούται με τον αριθμό των πόλων που έχουν πραγματικά μέρη. Όσον αφορά το σύστημά μας, η μη ύπαρξη πόλων στο δεξί ημιεπίπεδο υποδηλώνει πως μία κύκλωση είναι αρκετή για τον χαρακτηρισμό του συστήματος ως ασταθές. Όμως παρατηρείται πως, στο σημείο $(-1, 0)$ δεν διαγράφεται καμία κύκλωση. Έτσι, το σύστημά μας χαρακτηρίζεται ως ευσταθές.

Η επαλήθευση όμως της ευστάθειας έρχεται και από το περιθώριο κέρδους. Το Π.Κ. στο διάγραμμα διαβάζεται σε μεγέθυνση του διαγράμματος. Έτσι, είναι κοινώς αποδεκτό πως για οποιαδήποτε μεγέθυνση δεν θα υπάρξει κύκλωση. Τέλος, με αυτόν τον τρόπο επαληθεύεται και το Π.Κ. που τείνει στο άπειρο.

Οριακά Σημεία Διαγράμματος Nyquist

Σύμφωνα με την θεωρία, ο υπολογισμός των κρίσιμων σημείων, δηλαδή των οριακών τιμών και ασυμπτώτων, προκύπτει ως εξής:

$$\operatorname{Re}\{H\}_{\omega \rightarrow 0^+}, \operatorname{Re}\{H\}_{\omega \rightarrow +\infty}$$

$$\operatorname{Im}\{H\}_{\omega \rightarrow 0^+}, \operatorname{Im}\{H\}_{\omega \rightarrow +\infty}$$

Έτσι, μετά την αναλυτική λύση στο χαρτί, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\operatorname{Re}\{H\}_{\omega \rightarrow 0^+} = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{-(840000(3\omega^2 - 10))}{(390625\omega^4 - 2143046\omega^2 + 3515625)} = \frac{8400000}{3515625} = 2.389$$

$$\operatorname{Im}\{H\}_{\omega \rightarrow 0^-} = \lim_{\omega \rightarrow 0^-} \frac{-(5\omega(78125\omega^2 - 167033))}{(390625\omega^4 - 2143046\omega^2 + 3515625)} = \frac{0}{225000000} = 0$$

$$\operatorname{Re}\{H\}_{\omega \rightarrow +\infty} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-(840000(3\omega^2 - 10))}{(390625\omega^4 - 2143046\omega^2 + 3515625)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) (De l'hospital) = \frac{a}{+\infty} = 0^+$$

$$\operatorname{Im}\{H\}_{\omega \rightarrow +\infty} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{-(10\omega(2500000\omega^2 - 2378831))}{(390625\omega^4 - 2143046\omega^2 + 3515625)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) (De l'hospital) = \frac{b}{+\infty} = 0$$

Μία 1^η επαλήθευση για τον σωστό διαχωρισμό των όρων Real και Imaginary παρουσιάζεται παρακάτω στις εικόνες 16 και 17, μέσω της χρήσης του Matlab. Να σημειωθεί πως, στην εικόνα 17 έχει οριστεί ο $\operatorname{Re}\{H\}$ ως f2_real και ο $\operatorname{Im}\{H\}$ ως f2_imag.

```

1 - num = [1 7.168];
2 - den = [1 0.7168 3];
3 - syms H;
4 - syms omega real;
5 - f1 = poly2sym(num,H)/poly2sym(den,H)
6 - f2 = subs(f1,H,1i*omega)
7 - f2_real = simplify(real(f2))
8 - f2_imag = simplify(imag(f2))

```

Εικόνα 15 Υπολογισμός Πραγματικών και Φανταστικών όρων της FRF.


```

f1 =

(H + 896/125)/(H^2 + (448*H)/625 + 3)

f2 =

(896/125 + omega*1i)/(- omega^2 + (omega*448i)/625 + 3)

f2_real =

-(840000*(3*omega^2 - 10))/(390625*omega^4 - 2143046*omega^2 + 3515625)

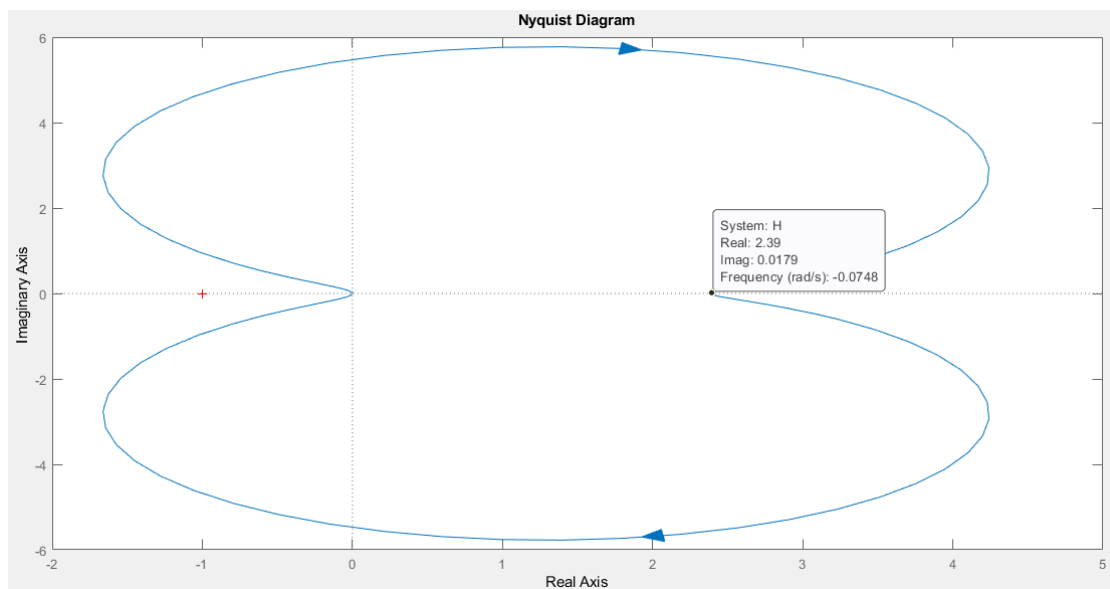
f2_imag =

-(5*omega*(78125*omega^2 + 167033))/(390625*omega^4 - 2143046*omega^2 + 3515625)

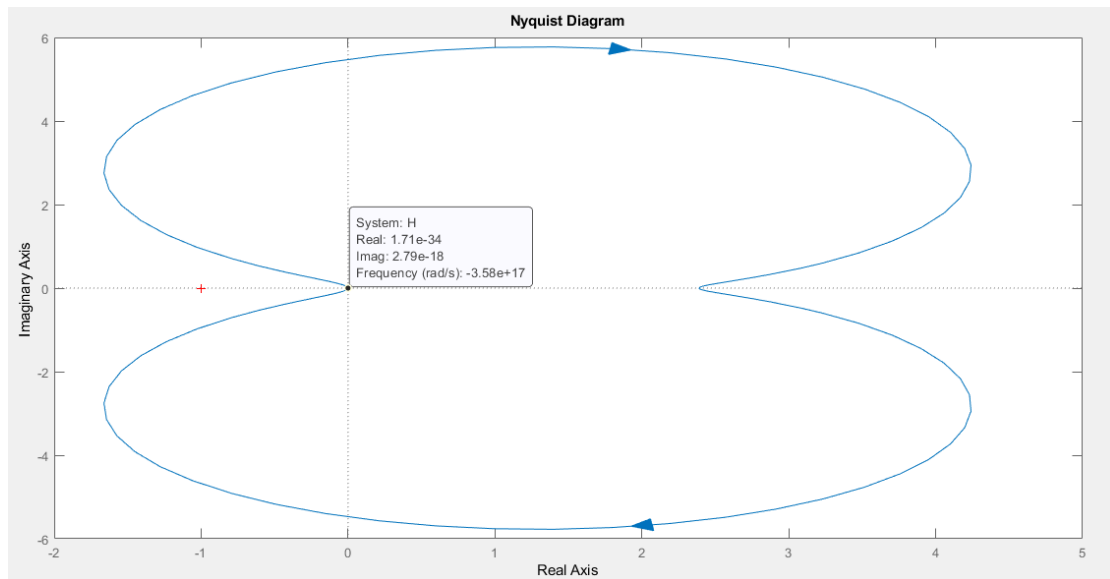
```

Εικόνα 16 Αποτελέσματα Πραγματικών και Φανταστικών όρων της FRF.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται στο διάγραμμα Nyquist τα οριακά σημεία που υπολογίστηκαν προηγουμένως. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται και επαλήθευση των αποτελεσμάτων.



Εικόνα 17 Οριακά σημεία : $Re\{H\}_{\omega \rightarrow 0^+}$ και $Im\{H\}_{\omega \rightarrow 0^-}$ στο διάγραμμα Nyquist μέσω Matlab.



Εικόνα 18 Οριακά σημεία $Re\{H\}_{\omega \rightarrow +\infty}$ και $Im\{H\}_{\omega \rightarrow +\infty}$ στο διάγραμμα Nyquist μέσω Matlab.

Παρατηρείται λοιπόν, μέσω των εικόνων 18 και 19, πως ο Nyquist του συστήματός μας δεν έχει ασύμπτωτες, αφού τα αποτελέσματα των ορίων μάς δίνουν οριακές τιμές.

4. Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace να υπολογιστεί αναλυτικά η βαρυτική συνάρτηση του συστήματος της Εξίσωσης (1) και να απεικονιστεί η απόκριση του συστήματος για 20 δευτερόλεπτα (Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί βήμα 0.1sec).

Με την βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace στην συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$ υπολογίζεται η Βαρυτική Συνάρτηση, ως εξής:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\}$$

Η διαδικασία επίλυσης έχει ως εξής:

1. Χωρισμός της συνάρτησης μεταφοράς σε απλά κλάσματα.
2. Χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Έτσι έχουμε:

- ❖ Χωρισμός της συνάρτησης μεταφοράς σε απλά κλάσματα.

$$H(s) = \frac{s + 7.168}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{s + 7.168}{(s + 0.36 - j1.69)(s + 0.36 + j1.69)} \Rightarrow$$

$$H(s) = \frac{A}{s + 0.36 - j1.69} + \frac{B}{s + 0.36 + j1.69} \quad (1)$$

$$A = \frac{s + 7168}{(s + 0.36 - j1.69)(s + 0.36 + j1.69)} (s + 0.36 - j1.69) \Big|_{s = -0.36 + j1.69} \Rightarrow$$

$$A = 0.5 - j2.014$$

$$B = \frac{s + 7.168}{(s + 0.36 - j1.69)(s + 0.36 + j1.69)} (s + 0.36 + j1.69) \Big|_{s = -0.36 - j1.69} \Rightarrow$$

$$B = 0.5 + j2.014$$

$$(1) \Rightarrow H(s) = \frac{0.5 - j1.25}{s + 0.36 - j1.69} + \frac{0.5 + j1.25}{s + 0.36 + j1.69} \quad (2)$$

❖ Χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Κάνοντας χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της εκθετικής συνάρτησης :

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s - a} \right] = e^{at}$$

εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην συνάρτηση μεταφοράς $H(s)$.

$$L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{0.5 - j2.01}{s + 0.36 - j1.69} + \frac{0.5 + j2.01}{s + 0.36 + j1.69} \right\} \Rightarrow$$

$$L^{-1}\{H(s)\} = (0.5 - j2.01)e^{(-0.36 + j1.69)t} + (0.5 + j2.01)e^{(-0.36 - j1.69)t} \Rightarrow$$

$$h(t) = 2.07e^{-j76.03} [e^{-0.36t} (\cos(1.69t) + j\sin(1.69t))] + 2.07e^{-j76.03} [e^{-0.36t} (\cos(-1.69t) + j\sin(-1.69t))] \Rightarrow$$

$$h(t) = 2.07e^{-0.36t} [(\cos(76.03) - j\sin(76.03))(\cos(1.69t) + j\sin(1.69t)) + (\cos(76.03) + j\sin(76.03))(\cos(1.69t) - j\sin(1.69t))] \Rightarrow$$

$$h(t) = 2.07e^{-0.36t} (2 \cos(76.03) \cos(1.69t) + 2 \sin(76.03) \sin(1.69t)) \Rightarrow$$

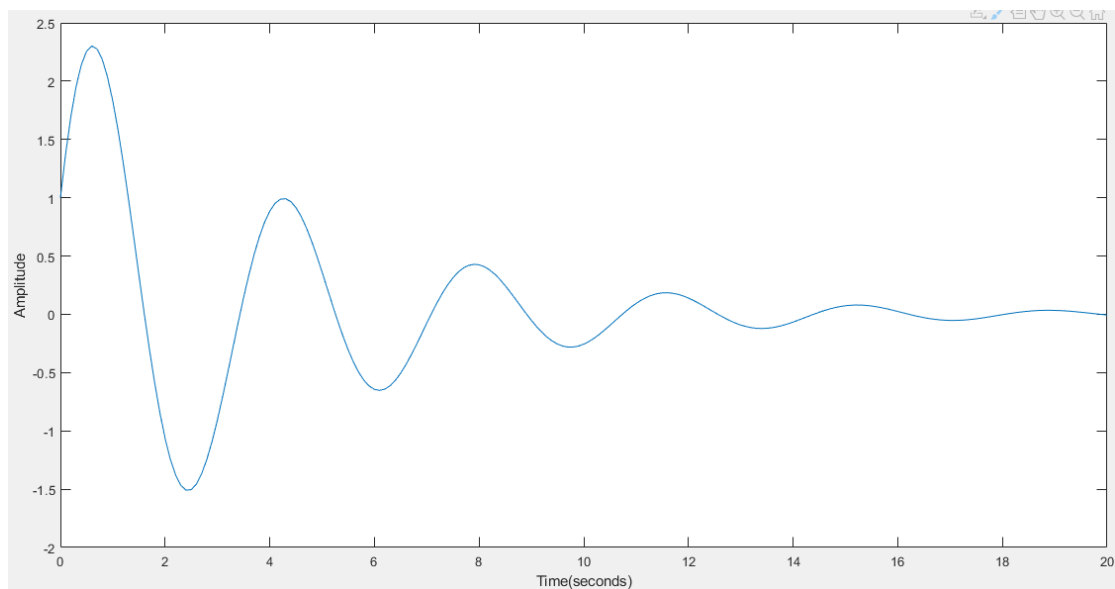
$$h(t) = \cos(1.69t) e^{-0.36t} + 4.02 \sin(1.69t) e^{-0.36t} \Rightarrow$$

$$h(t) = e^{-0.36t} [\cos(1.69t) + 4.02 \sin(1.69t)]$$

Εύκολα παρατηρείται, μέσω της βαρυτικής συνάρτησης, πως $\tau=2.778$ ($1/0.36$) (χρονική σταθερά) και $\omega_d = 1.69$ (συχνότητα με απόσβεση).

Απόκριση Συστήματος

Έπειτα, με την βοήθεια του Matlab, θα υπολογιστεί η κρουστική απόκριση (Impulse Response) του συστήματος για 20 δευτερόλεπτα με βήμα 1, όπως φαίνεται παρακάτω.



Εικόνα 19 Απεικόνιση Απόκριση Συστήματος για 20sec με βήμα 0.1.

Για την κατάλληλη αξιολόγηση του παραπάνω γραφήματος, απαραίτητο θα ήταν ο υπολογισμός του κέρδους μόνιμης κατάστασης (DC gain).

$$k_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s + 7.168}{s^2 + 0.7168s + 3} \cdot 1 = 0$$

Το οποίο επιβεβαιώνει το γράφημα της εικόνας 19.

ΜΕΡΟΣ II: ΜΕΛΕΤΗ ΨΗΦΙΑΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

5. Να γίνει η διακριτοποίηση του συστήματος της Εξίσωσης (1) με τη μέθοδο “zoh” (zero order hold) και συχνότητες δειγματοληψίας 1 Hz, 10 Hz, 100 Hz. Να γραφούν οι συναρτήσεις μεταφοράς των διακριτών συστημάτων.

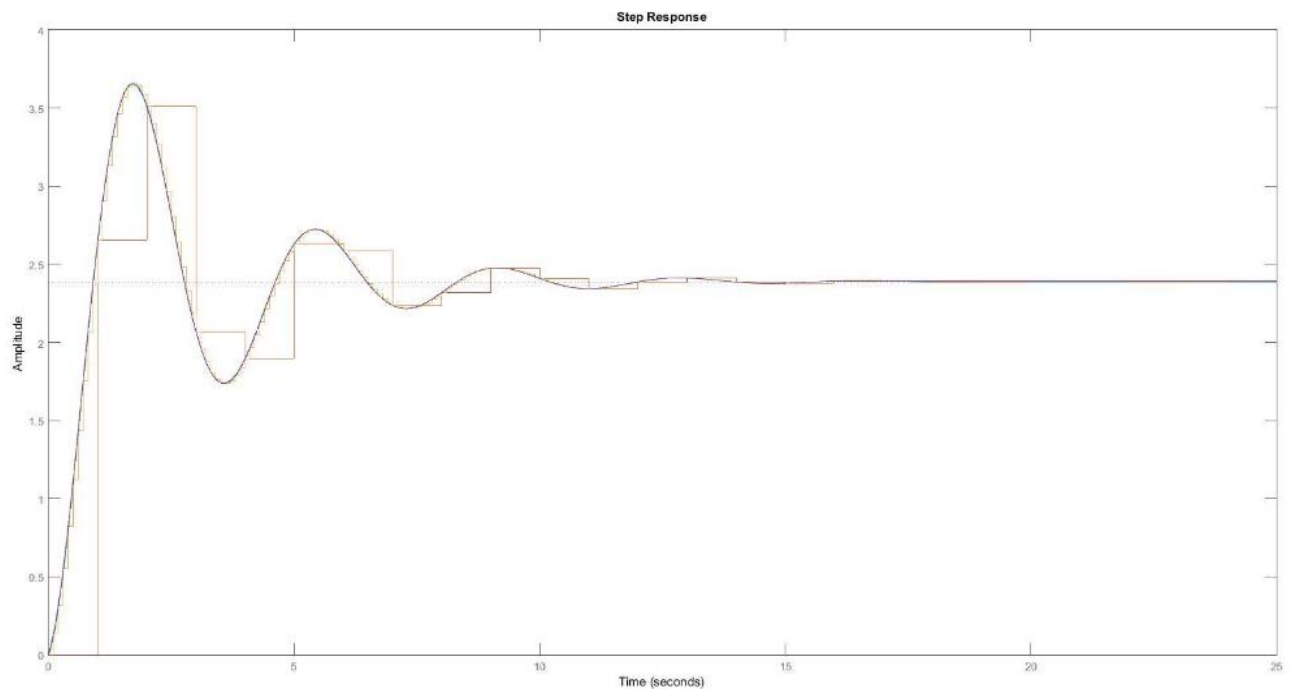
Στο συγκεκριμένο ερώτημα, παρουσιάζονται οι συναρτήσεις μεταφοράς των διακριτών συστημάτων με συχνότητα δειγματοληψίας 1, 10 και 100 Hz ως H1, H10 και H100 αντίστοιχα.

```
H =  
  
      s + 7.168  
      -----  
      s^2 + 0.7168 s + 3  
  
Continuous-time transfer function.  
  
H1 =  
  
      2.654 z + 1.314  
      -----  
      z^2 + 0.1725 z + 0.4883  
  
Sample time: 1 seconds  
Discrete-time transfer function.  
  
H10 =  
  
      0.1309 z - 0.06193  
      -----  
      z^2 - 1.902 z + 0.9308  
  
Sample time: 0.1 seconds  
Discrete-time transfer function.  
  
H100 =  
  
      0.01032 z - 0.009607  
      -----  
      z^2 - 1.993 z + 0.9929  
  
Sample time: 0.01 seconds  
Discrete-time transfer function.
```

Εικόνα 20 Συναρτήσεις Μεταφοράς των διακριτών συστημάτων.

6. Να απεικονισθεί στο ίδιο γράφημα η απόκριση του συνεχούς και των διακριτοποιημένων συστημάτων σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας και να σχολιαστούν οι διαφορές μεταξύ των τριών δειγματοληψιών. Διαλέξτε το βέλτιστο σύστημα και αιτιολογήστε τους λόγους.

Με την βοήθεια του Matlab απεικονίζεται η απόκριση του συνεχούς και των διακριτοποιημένων συστημάτων σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας.



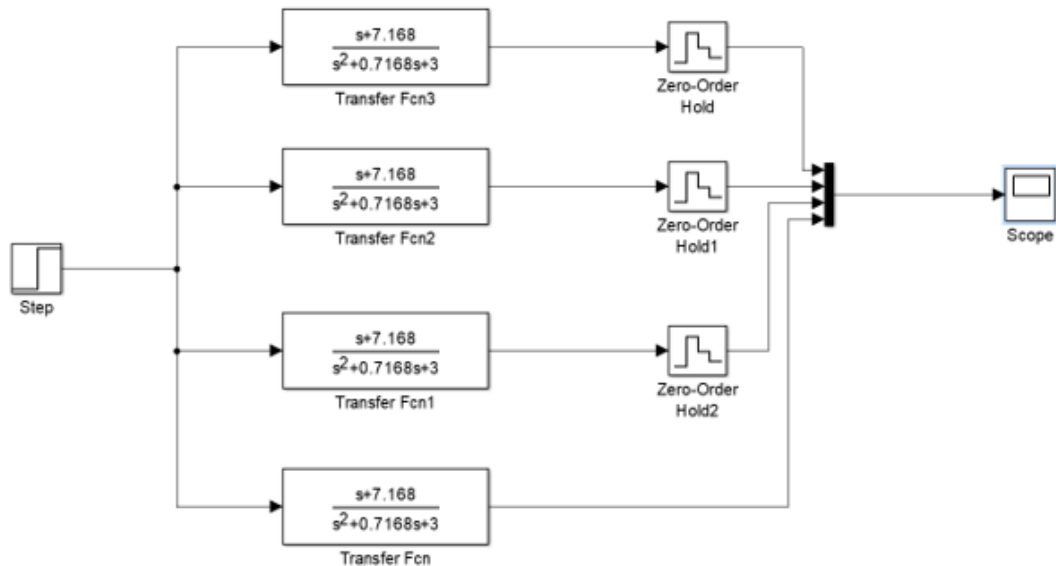
Εικόνα 21 Απεικόνιση του Συνεχούς και των Διακριτοποιημένων Συστημάτων σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας.

Η γενική ιδέα της δειγματοληψίας είναι πως δεν πρέπει να ναι 'αραιή' γιατί χάνεται η πληροφορία από το πραγματικό σύστημα. Με αυτόν τον τρόπο, απορρίπτεται αυτόματα η διακριτοποίηση του συστήματος με συχνότητα δειγματοληψίας 1 Hz, αφού χάνεται αρκετή πληροφορία.

Έτσι, σκεπτόμενοι την έννοια της δειγματοληψίας, εύκολα παρατηρείται από την εικόνα 21 πως, καλύτερη διακριτοποίηση γίνεται με συχνότητα δειγματοληψίας 10 και 100Hz. Προφανώς, βέλτιστη είναι αυτή των 100 Hz, αφού προσεγγίζει εξαιρετικά την απόκριση του συνεχούς παρέχοντάς μας όλη την απαραίτητη πληροφορία.

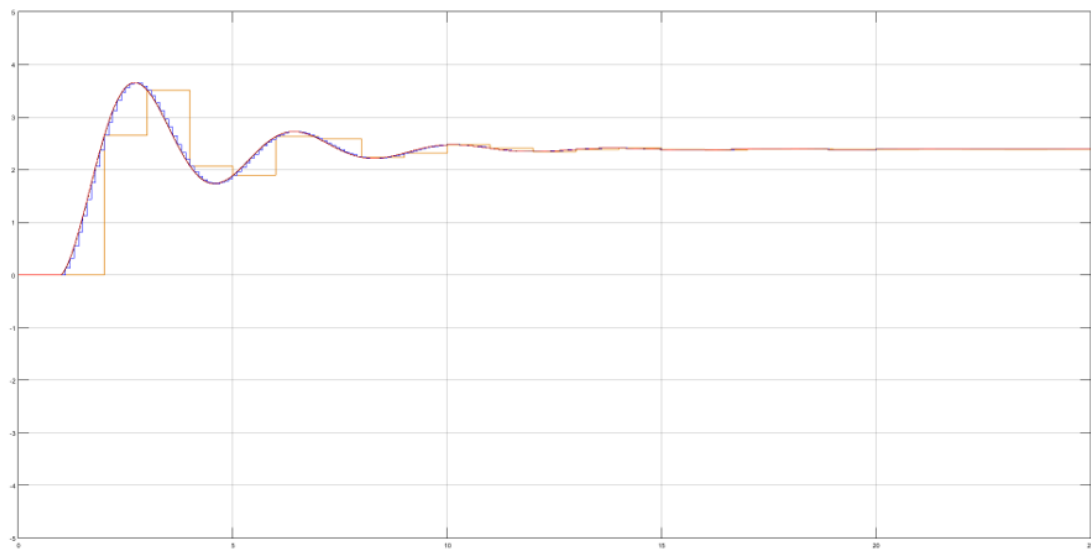
7. Να υλοποιηθούν τα ερωτήματα 5 και 6 στο SIMULINK και να δειχθούν τα δομικά διαγράμματα των βρόχων που θα σχεδιαστούν καθώς και τα παραγόμενα αποτελέσματα.

Υλοποίηση των ερωτημάτων 5 και 6 στο SIMULINK.



Εικόνα 22 Δομικά διαγράμματα στο SIMULINK.

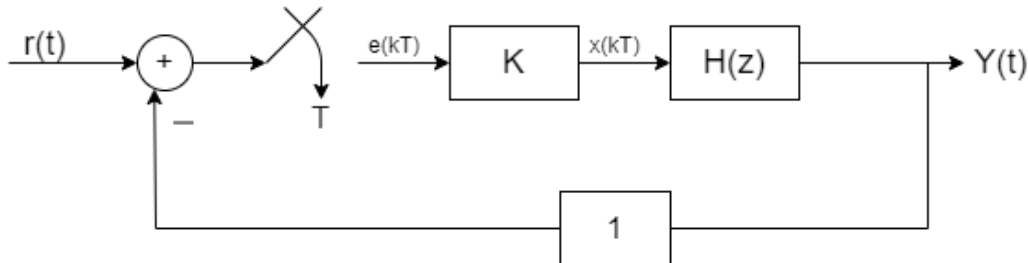
Τα παραγόμενα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω, σε ένα κοινό διάγραμμα απεικόνισης των αποκρίσεων συνεχούς και των διακριτών συστημάτων με είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας.



Εικόνα 23 Παραγόμενα Αποτελέσματα από το SIMULINK.

8. Με τη βοήθεια του κριτηρίου Routh-Hurwitz να γίνει έλεγχος ευστάθειας του διακριτού συστήματος που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα τοποθετώντας εν σειρά κατευθυντή P με κέρδος K και κλείνοντας τον βρόχο με μοναδιαία ανάδραση.

Παρακάτω παρουσιάζεται κατευθείαν το διακριτοποιημένο σύστημα:



Στο παραπάνω σύστημα διακρίνουμε:

1. Κέρδος κατευθυντή P (K)
2. Μοναδιαία ανάδραση
3. Η $H(z)$ είναι η διακριτή συνάρτηση μεταφοράς. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα έχουμε επιλέξει την διακριτή συνάρτηση μεταφοράς με συχνότητα δειγματοληψίας 100Hz, την $H100(z)$ όπου προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$H(z) = 1 - e^{-Ts} \quad H(z) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} * H(s)$$

Έπειτα παρατίθεται η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου του διακριτοποιημένου συστήματος ως εξής:

$$G(z) = \frac{L(z)}{1 + L(z)}$$

$$\text{Όπου } L(z) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} * H(s) * K = K * H100(z)$$

Έτσι, αντικαθιστώντας την $H100(z)$ (η οποία έχει βρεθεί παραπάνω και απεικονίζεται στην εικόνα 20) προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου. Έπειτα, παίρνουμε την χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόχου για να εφαρμόσουμε το κριτήριο Routh-Hurwitz, ώστε να γίνει έλεγχος ευστάθειας του διακριτού συστήματος. Όμως, για να αντιστοιχίσουμε το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου στο αρνητικό ημιεπίπεδο απαραίτητο θα ήταν, πρώτα να εφαρμοστεί Διγραμμικός Μετασχηματισμός. Με αυτόν τον τρόπο, φαίνεται συνοπτικά η διαδικασία που περιεγράφηκε.

❖ Συνάρτηση Μεταφοράς Κλειστού Βρόχου:

$$\frac{(0.01032 * Z - 0.009607)K}{Z^2 - 1.993 * Z + 0.9929 + (0.01032 * Z - 0.009607)K}$$

❖ Χαρακτηριστική Εξίσωση Κλειστού Βρόχου:

$$\frac{0.01032 * K * Z - 0.009607 * K}{Z^2 - 1.993 * Z + 0.9929 + 0.01032 * Z * K - 0.009607 * K}$$

❖ Εφαρμογή Διγραμμικού Μετασχηματισμού:

Αντιστοίχιση του μοναδιαίου στο αριστερό ημιεπίπεδο του $Z = \frac{r+1}{r-1}$, όπου εκφράζεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ως προς r

$$r^2[-0.0001 + 0.000713 * K] + r[0.0142 + 0.019214*K] + 3.9859 - 0.019927*K$$

Κριτήριο Ευστάθειας Routh-Hurwitz		
r^2	$-0.0001+0.000713K$	$3.9859-0.019927K$
r^1	$0.0142+0.019214K$	0
r^0	$3.9859-0.019927K$	-

Η ερμηνεία του παραπάνω πίνακα έγκειται στον ορισμό του κριτηρίου Routh-Hurwitz, το οποίο εξηγεί πως η αστάθεια του συστήματος προκύπτει από τον αριθμό των ασταθών πόλων, οι οποίοι βρίσκονται από τον αριθμό εναλλαγών πρόσημων στην 1^η στήλη του πίνακα. Με αυτόν τον τρόπο, για να θεωρηθεί ένα σύστημα ευσταθές, σύμφωνα με το κριτήριο, απαραίτητο θα ήταν οι εναλλαγές πρόσημων να ήταν μηδενικές, να ισχύει δηλαδή:

$$-0.0001 + 0.000713K > 0$$

$$0.0142 + 0.019214K > 0$$

$$3.9859 - 0.019927K > 0$$

Επομένως διακριτό σύστημα με συχνότητα δειγματοληψίας 100Hz είναι ευσταθές για τα παρακάτω κέρδη κατευθυντή:

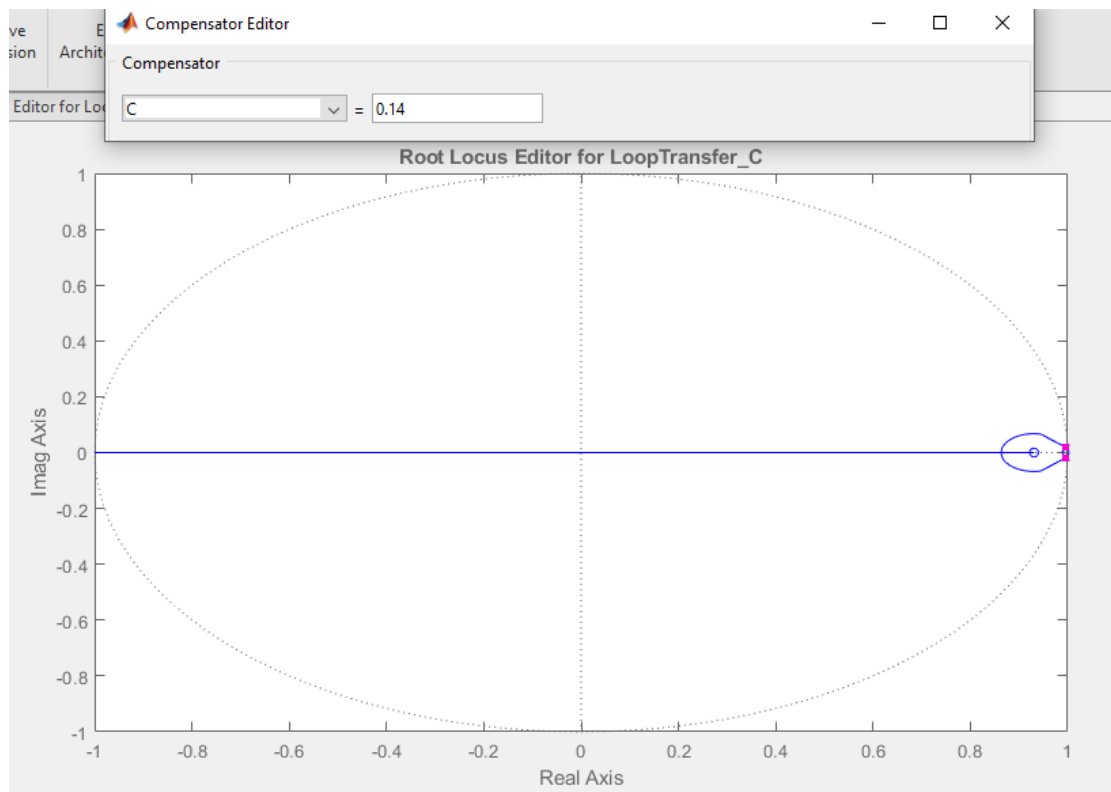
$$K > 0.14$$

$$K > -0.7390 \rightarrow K > 0$$

$$K < 200.03$$

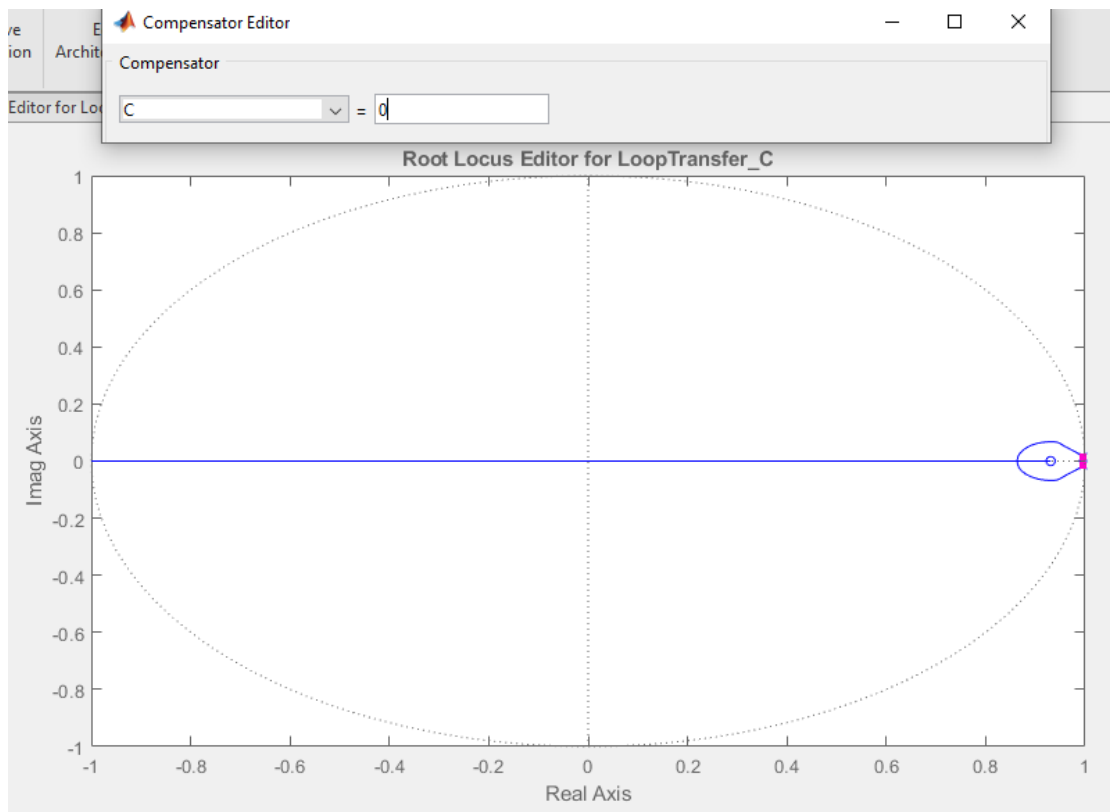
Με σκοπό την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, παρακάτω χρησιμοποιείται η βοήθεια του Matlab με την εντολή sisotool.

➤ **K=0.14**



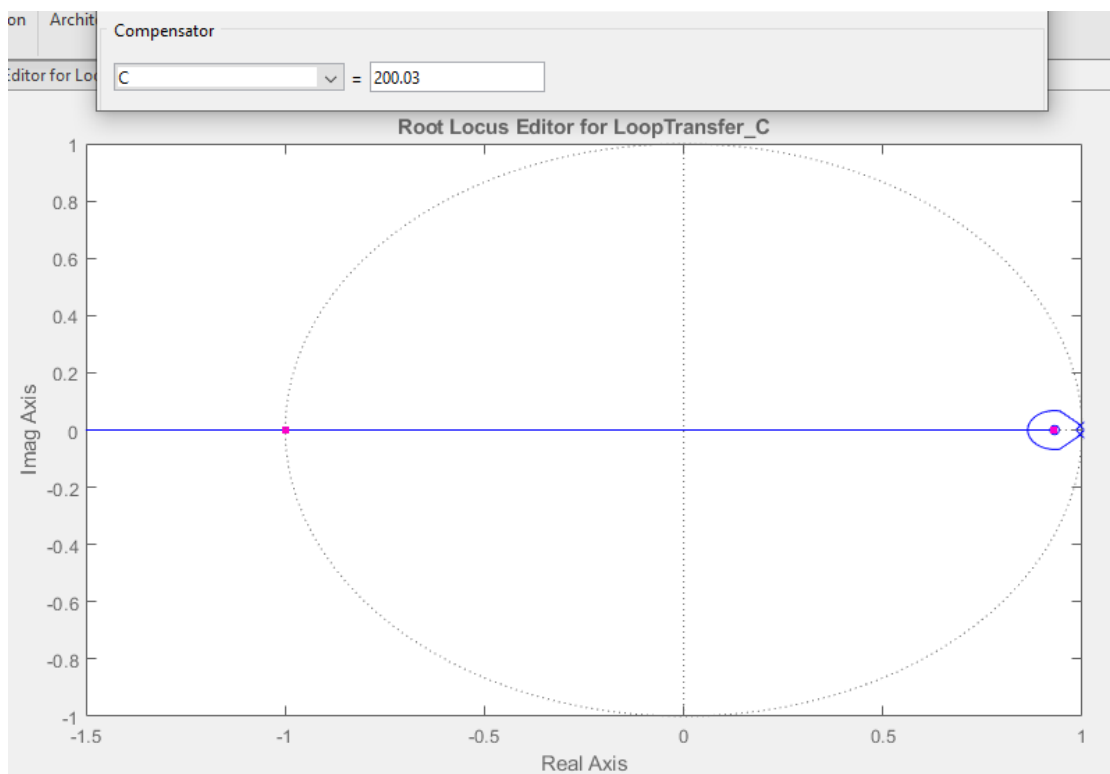
Εικόνα 24 Τόπος ριζών για Κέρδος κατευθυντή 0.14.

➤ **K=0**



Εικόνα 25 Τόπος ριζών για Κέρδος κατευθυντή 0.

➤ **K=200.03**



Εικόνα 26 Τόπος ριζών για Κέρδος κατευθυντή 200.03.

Έτσι, όπως παρατηρείται από τα παραπάνω διαγράμματα, το σύστημά μας είναι ευσταθές για το συγκεκριμένο εύρος τιμών Κέρδους, αφού οι πόλοι βρίσκονται εντός του μοναδιαίου κύκλου οριακά (όπου και αυτός ήταν ο σκοπός της ανάλυσης). Τέλος, το ελάχιστο αρνητικό κέρδος του κατευθυντή τείνει το σύστημά μας προς την αστάθεια ακόμα και έτσι όμως μεταφράζεται ως μηδενικό κέρδος, αφού αυτή η οριακή τιμή του κέρδους σε καμία περίπτωση δεν καθιστά το σύστημά μας ασταθές.

9. Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού z να υπολογιστεί η απόκριση μόνιμης κατάστασης του διακριτού συστήματος που επιλέξατε στο ερώτημα 2.2. σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας (μετασχηματισμός z μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης: $z/(z-1)$).

Με την βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού z υπολογίζεται η απόκριση μόνιμης κατάστασης του διακριτού συστήματος $y(kT)$ σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας $z/(z-1)$. Εφαρμόζοντας, λοιπόν, αντίστροφο μετασχηματισμό, προκύπτει:

$$y(kT) = Z^{-1}[y(z)] = Z^{-1}[H100(z)X(z)] = Z^{-1}\left[\frac{0.01032z - 0.009607}{z^2 + 1.993z + 0.9929} \frac{z}{z-1}\right]$$

Στην συνέχεια με την χρήση της μεθόδου “Ανάπτυξη σε απλά κλάσματα” εφαρμόζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό z σε κάθε κλάσμα.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.01032z - 0.009607}{(z^2 - 1.993z + 0.9929)(z - 1)}$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται στην ακόλουθη μορφή, αφού οι πόλοι της $H100(z)$ είναι γνωστοί:

$$\frac{Y(z)}{z} = 0.01032 \frac{(z - 0.9309)}{(z - 0.9965 - j0.01)(z - 0.9965 + j0.01)(z - 1)}$$

Έπειτα, εφαρμόζεται η ανάλυση σε απλά κλάσματα :

$$\frac{Y(z)}{z} = 0.01032 \left[\frac{A}{z - 0.9965 - j0.01} + \frac{B}{z - 0.9965 + j0.01} + \frac{\Gamma}{z - 1} \right]$$

Και ακολουθεί η διαδικασία εύρεσης των A , B , Γ :

$$A = \frac{(z - 0.9309)}{(z - 0.9965 - j0.01)(z - 0.9965 + j0.01)(z - 1)} (z - 0.9965 - j0.01) \Big|_{z = 0.9965 + j0.01} = -326.31 + j61.19$$

$$B = \frac{(z - 0.9309)}{(z - 0.9965 - j0.01)(z - 0.9965 + j0.01)(z - 1)} (z - 0.9965 + j0.01) \Big|_{z = 0.9965 - j0.01} = -326.31 - j61.19$$

$$C = \frac{(z - 0.9309)}{(z - 0.9965 - j0.01)(z - 0.9965 + j0.01)(z - 1)} (z - 1) \Big|_{z = 1} = 615.59$$

Έτσι, καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση :

$$\frac{Y(z)}{z} = 0.01032 \left[\frac{-326.31 + j61.19}{z - 0.9965 - j0.01} + \frac{-326.31 - j61.19}{z - 0.9965 + j0.01} + \frac{615.59}{z - 1} \right] \Rightarrow$$

$$Y(z) = 0.01032 \left[(-326.31 + j61.19) \frac{z}{z - 0.9965 - j0.01} + (-326.31 - j61.19) \frac{z}{z - 0.9965 + j0.01} + (615.59) \frac{z}{z - 1} \right]$$

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας μετασχηματισμό z , προκύπτει :

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = \mathcal{Z}^{-1} \left[0.01032 \left[(-326.31 + j61.19) \frac{z}{z - 0.9965 - j0.01} + (-326.31 - j61.19) \frac{z}{z - 0.9965 + j0.01} + (615.59) \frac{z}{z - 1} \right] \right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = 0.01032 \left[(-326.31 + j61.19) \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z - 0.9965 - j0.01} \right] + (-326.31 - j61.19) \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z - 0.9965 + j0.01} \right] + (615.59) \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z - 1} \right] \right]$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τον αντίστροφο μετασχηματισμό z :

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z + a} \right] = (-a)^n u(n)$$

όπου $u(n)$ η μοναδιαία βηματική συνάρτηση :

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} Z^{-1}[Y(z)] = & 0.01032 [(-326.31 + j61.19)(0.9965 + j0.01)^n u(n) \\ & + (-326.31 - j61.19)(0.9965 - j0.01)^n u(n) \\ & + (615.59)(1)^n u(n)], n \in (1, 2, \dots) \end{aligned}$$

ΜΕΡΟΣ ΙΙΙ: ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ.

10. Να μεταφερθεί το σύστημα της Εξίσωσης(1) στον χώρο κατάστασης να υποδειχθούν οι μεταβλητές κατάστασης και ο πίνακας κατάστασης. Να υπολογιστούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα κατάστασης.

Η εξίσωση που θα μεταφερθεί στον Χώρο Κατάστασης (Χ.Κ.) είναι η ακόλουθη:

$$H(s) = \frac{s + 7.168}{s^2 + 0.7168s + 3}$$

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την μεταφορά της Συνάρτησης Μεταφοράς στον χώρο κατάστασης είναι:

- a) Μέθοδος ευθέως προγραμματισμού (direct programming).
- b) Μέθοδος παράλληλου προγραμματισμού.

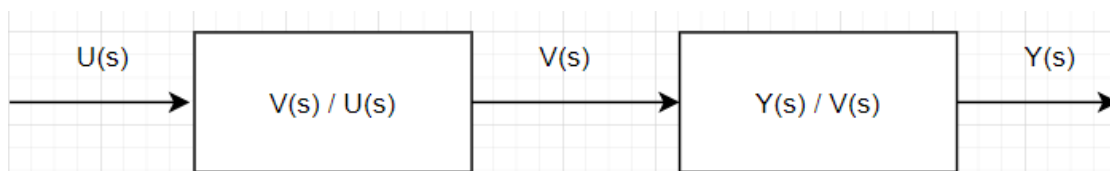
Σχετικά με την πρώτη μέθοδο, αυτή χρησιμοποιείται όταν η Συνάρτηση Μεταφοράς είναι χωρίς παραγοντοποίηση ως προς τους πόλους και τους μηδενιστές. Όσον αφορά την δεύτερη μέθοδο, αυτή είναι έγκυρη μόνο για πραγματικούς πόλους και αν υπάρχουν μιγαδικοί πόλοι το υποσύστημα αυτό υλοποιείται με ευθύ προγραμματισμό.

Χώρος Κατάστασης

Η μέθοδος που μας εξυπηρετεί για την μεταφορά της Σ.Μ. στον Χ.Κ. κατάστασης είναι η μέθοδος του ευθέως προγραμματισμού, αφού η Σ.Μ. είναι χωρίς παραγοντοποίηση ως προς τους πόλους και τους μηδενιστές. Με αυτόν τον τρόπο η εξίσωση (1) γράφεται ως εξής:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{a(s)} b(s)$$

Όπου $\frac{1}{a(s)} = \frac{V(s)}{U(s)}$ και $b(s) = \frac{Y(s)}{V(s)}$



Εικόνα 27: Δομικό Διάγραμμα της Μεθόδου Ευθέως Προγραμματισμού.

Επομένως, στην περίπτωση μας, οι παραπάνω λόγοι αναγράφονται ως εξής:

$$\frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} \Rightarrow$$

$$u = V^{(2)} + 0.7168V^{(1)} + 3V$$

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = s + 7.168 \Rightarrow$$

$$y = V^{(1)} + 7.168V$$

Μεταβλητές Κατάστασης

Η διαμόρφωση των εξισώσεων κατάστασης μπορεί να προκύψει αν θέσουμε τις εξόδους των ολοκληρωτών ως μεταβλητές κατάστασης. Έτσι λοιπόν, ορίζοντας τα V και $V^{(1)}$ ως x_1 και x_2 αντίστοιχα, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \text{Εξισώσεις Κατάστασης} \rightarrow \quad \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u - 3x_1 - 0.7168x_2 \end{aligned}$$

$$\text{Εξίσωση Εξόδου} \rightarrow \quad y = 7.168x_1 + x_2$$

Πίνακας Κατάστασης

Ο πίνακας κατάστασης εμφανίζεται στην περίπτωση που οι παραπάνω εξισώσεις αναγράφονται σε μορφή πινάκων.

$$\begin{aligned} \text{A: Πίνακας Κατάστασης} \quad \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{bmatrix}}^A \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^B \cdot u \\ y &= \overbrace{\begin{bmatrix} 7.168 & 1 \end{bmatrix}}^C \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}^D \cdot u \end{aligned}$$

Οι πίνακες A, B, C και D εκφράζουν **κανονική μορφή κατευθυντή** (controller canonical form) ή αλλιώς **πρώτη συνοδευτική μορφή** (first companion form).

Ιδιοτιμές & ιδιοδιανύσματα του Πίνακα Κατάστασης

Για την εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα κατάστασης θα εργαστούμε ως εξής:

- I. Εφαρμογή Laplace με μηδενικές αρχικές συνθήκες στις εξισώσεις κατάστασης και εξόδου υπό μορφή πινάκων.
- II. Εξισώνουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν και καταλήγουμε στην $Y(s)$.
- III. Εύρεση χαρακτηριστικού πολυωνύμου $(sI - \underline{A})^{-1}$
- IV. Εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων κατά τα γνωστά.

• Βήμα I

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{bmatrix}}^A \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^B \cdot u$$

$$y = \begin{bmatrix} \overbrace{7.168}^C \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \overbrace{0}^D \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u$$

Εφαρμόζοντας Laplace με μηδενικές αρχικές συνθήκες $\rightarrow \begin{cases} (sI - \underline{A})X(s) = \underline{B} U(s) \\ Y(s) = \underline{C} X(s) \end{cases}$

- Βήμα II

$$\begin{cases} X(s) = (sI - \underline{A})^{-1} \underline{B} U(s) \\ Y(s) = \underline{C} (sI - \underline{A})^{-1} \underline{B} U(s) \end{cases} \Rightarrow Y(s) = \underline{C} \frac{adj(sI - \underline{A})}{det(sI - \underline{A})} \underline{B} U(s)$$

- Βήμα III

$$(sI - \underline{A})^{-1} = \frac{adj(sI - \underline{A})}{det(sI - \underline{A})} \Rightarrow$$

$$1) (sI - \underline{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s + 0.7168 \end{bmatrix}$$

$$2) adj(sI - \underline{A}) = adj \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s + 0.7168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + 0.7168 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$3) det(sI - \underline{A}) = s^2 + 0.7168s + 3$$

$$\Rightarrow (sI - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s + 0.7168}{s^2 + 0.7168s + 3} & \frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} \\ \frac{-3}{s^2 + 0.7168s + 3} & \frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} \end{bmatrix}$$

- Βήμα IV

Πόλοι συστήματος: Για πίνακα A διάστασης n x n μπορούμε να γράψουμε μέσω των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του:

$$\underline{A} \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

$$(\underline{A} - \lambda I) \underline{v} = 0 \Rightarrow \text{Χαρακτηριστικός Πίνακας του A.}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -3 & -\lambda - 0.7168 \end{bmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda - 0.7168 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 0.7168\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_{1,2} = -0.3584 \pm 1.695i$, με $\lambda_{1,2}$ ιδιοτιμές του συστήματος.

Για $\lambda = \lambda_1$:

$$(\underline{A} - \lambda_1 I) \underline{w} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3584 - 1.695i & 1 \\ -3 & -0.3584 - 1.695i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$(0.3584 - 1.695i)w_1 + w_2 = 0 \quad (1)$$

$$(-0.3584 - 1.695i)w_2 - 3w_2 = 0 \quad (2)$$

Από θεωρία ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων έχουμε:

$$\text{Θέτω } \rightarrow w_2 = \kappa_1 \Rightarrow$$

$$(1) \Rightarrow w_1 = -\frac{\kappa_1}{0.3584 - 1.695i} = -\kappa_1 \frac{(0.3584 - 1.695i)}{0.3584^2 - (1.695i)^2} = -\kappa_1 \frac{0.3584 - 1.695i}{3.001} \Rightarrow$$

$$w_1 = -(0.1194 - 0.5648j) \kappa_1$$

Επομένως προκύπτει: $\underline{w} = \kappa_1 \begin{Bmatrix} -0.1194 + 0.5648i \\ 1 \end{Bmatrix}$

Για $\lambda = \lambda_2$:

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I})\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.3584 + 1.695i & 1 \\ -3 & -0.3584 + 1.695i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \underline{0} \Rightarrow$$

$$(0.3584 + 1.695i)v_1 + v_2 = 0 \quad (4)$$

$$(-0.3584 + 1.695i)v_2 - 3v_2 = 0 \quad (5)$$

Αντίστοιχα με παραπάνω προκύπτει:

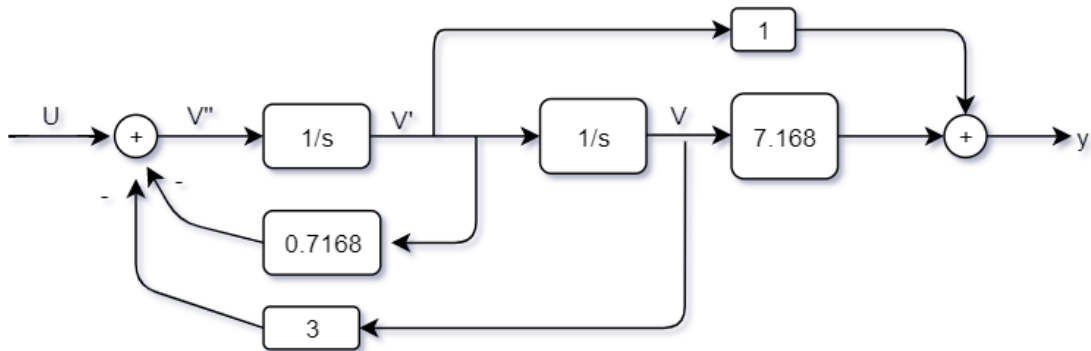
$$\underline{v} = \kappa_1 \begin{Bmatrix} -0.1194 - 0.5648i \\ 1 \end{Bmatrix}$$

11. Να γίνει το διάγραμμα κατάστασης του συστήματος.

Το διάγραμμα κατάστασης του συστήματος προκύπτει από τις εξισώσεις που προκύπτουν από την μέθοδο ευθέως προγραμματισμού, δηλαδή:

$$u = V^{(2)} + 0.7168V^{(1)} + 3V$$

$$y = V^{(1)} + 7.168V$$



Εικόνα 28: Διάγραμμα Κατάστασης.

Τέλος, να υπενθυμίσουμε πως το $V' = x_2$ και $V = x_1$.

12. Να υπολογιστεί ο πίνακας μετάβασης $\Phi(t)$ και να δοθεί η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης του συστήματος.

➤ Επίλυση Εξισώσεων κατάστασης: Ομογενής Μορφή.

Η απλούστερη μορφή ενός συστήματος στον χώρο κατάστασης είναι η ομογενής:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} \quad , \underline{A} : n \times n$$

❖ Θεώρημα:

Η λύση της ομογενούς στο πεδίο του χρόνου με αρχικές συνθήκες $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ είναι:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}t} \cdot \underline{x}_0$$

$$\text{Όπου } e^{\underline{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\underline{A}^k t^k}{k!} = \underline{I} + \underline{A}t + \underline{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \dots \text{ (Απολύτως συγκλίνουσα σειρά)}$$

$$\text{Με την ιδιότητα } \frac{d}{dt} e^{\underline{A}t} = \underline{A} e^{\underline{A}t} = e^{\underline{A}t} \underline{A}$$

❖ Πίνακας Μετάβασης Κατάστασης:

Ο πίνακας $\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t}$ ονομάζεται πίνακας κατάστασης (state transition matrix) και η λύση της ομογενούς είναι απλός μετασχηματισμός του αρχικού διανύσματος κατάστασης.

ο Υπολογισμός Πίνακα Μετάβασης Κατάστασης

$$\underline{\Phi}(t) = e^{\underline{A}t} = L^{-1} \left[(s\underline{I} - \underline{A})^{-1} \right] = L^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s + 0.7168}{s^2 + 0.7168s + 3} & \frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} \\ \frac{-3}{s^2 + 0.7168s + 3} & \frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} \end{bmatrix}$$

Όπως είναι γνωστό από παραπάνω απαραίτητη θα ήταν η ανάλυση σε απλά κλάσματα για τον υπολογισμό του αντίστροφου Laplace:

- Όρος 2ης γραμμής – 2ης στήλης

$$\frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{A}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{B}{s + 0.23 + j1.7} \Rightarrow$$

$$A = \left. \frac{s}{s + 0.36 + j1.7} \right|_{s=-0.36+j1.7} = \frac{-0.36 + j1.7}{j3.4} = 0.5 + j0.106$$

$$B = \left. \frac{s}{s + 0.36 - j1.7} \right|_{s=-0.36-j1.7} = \frac{-0.36 - j1.7}{-j3.4} = 0.5 - j0.106$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{0.5 + j0.106}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{0.5 - j0.106}{s + 0.23 + j1.7}$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} \right] &= (0.5 + j0.106)e^{(-0.36+j1.7)t} + (0.5 - j0.106)e^{(-0.36-j1.7)t} = \\ &= e^{-0.36t} [(0.5 + j0.106)e^{j1.7t} + (0.5 - j0.106)e^{-j1.7t}] = \\ &= e^{-0.36t} (\cos(1.7t) + 0.212 \sin(1.7t)) \end{aligned}$$

- Όρος 1ης γραμμής – 1ης στήλης

$$\frac{s + 0.7168}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{\Gamma}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{\Delta}{s + 0.23 + j1.7} \Rightarrow$$

$$\Gamma = \left. \frac{s + 0.7168}{s + 0.36 + j1.7} \right|_{s=-0.36+j1.7} = \frac{-0.3568 + j1.7}{j3.4} = 0.5 - j0.106$$

$$\Delta = \left. \frac{s + 0.7168}{s + 0.36 - j1.7} \right|_{s=-0.36-j1.7} = \frac{0.3568 - j1.7}{-j3.4} = 0.5 + j0.106$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{0.5 - j0.106}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{0.5 + j0.106}{s + 0.23 + j1.7}$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 0.7168s + 3} \right] &= (0.5 - j0.106)e^{(-0.36+j1.7)t} + (0.5 + j0.106)e^{(-0.36-j1.7)t} = \\ &= e^{-0.36t} [(0.5 - j0.106)e^{j1.7t} + (0.5 + j0.106)e^{-j1.7t}] = \\ &= e^{-0.36t} (\cos 1.7t - 0.212 \sin 1.7t) \end{aligned}$$

- Όρος 1ης γραμμής – 2ης στήλης

$$\frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{E}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{\Sigma T}{s + 0.23 + j1.7} \Rightarrow$$

$$E = \frac{1}{s + 0.36 + j1.7} \Big|_{s=-0.36+j1.7} = \frac{1}{j3.4} = -0.3j$$

$$\Sigma T = \frac{1}{s + 0.36 - j1.7} \Big|_{s=-0.36-j1.7} = \frac{1}{-j3.4} = 0.3j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{-0.3j}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{0.3j}{s + 0.23 + j1.7}$$

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} \right] &= -0.3je^{(-0.36+j1.7)t} + 0.3je^{(-0.36-j1.7)t} = \\ &= e^{-0.36t} (0.6 \sin 1.7t) \end{aligned}$$

- Όρος 2ης γραμμής – 1ης στήλης

$$\frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{Z}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{H}{s + 0.23 + j1.7} \Rightarrow$$

$$Z = \frac{1}{s + 0.36 + j1.7} \Big|_{s=-0.36+j1.7} = \frac{1}{j3.4} = -0.3j$$

$$H = \frac{1}{s + 0.36 - j1.7} \Big|_{s=-0.36-j1.7} = \frac{1}{-j3.4} = 0.3j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} = \frac{-0.3j}{s + 0.36 - j1.7} + \frac{0.3j}{s + 0.23 + j1.7}$$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 0.7168s + 3} \right] * (-3) = -0.9je^{(-0.36+j1.7)t} + 0.9je^{(-0.36-j1.7)t} =$$

$$= -e^{-0.36t}(1.8 \sin(1.7t))$$

Επομένως ο πίνακας μετάβασης έχεις ως εξής:

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-0.36t}(\cos(1.7t) + 0.212 \sin(1.72t)) & e^{-0.36t}(0.6\sin(1.72t)) \\ -e^{-0.23t}(1.8\sin(1.72t)) & e^{-0.36t}(\cos(1.7t) + 0.212 \sin(1.7t)) \end{bmatrix}$$

Άρα, η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης του συστήματος είναι:

$$\underline{x}(t) = \underline{\Phi}(t) \cdot \underline{x}_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-0.36t}(\cos(1.7t) + 0.212 \sin(1.72t)) & e^{-0.36t}(0.6\sin(1.72t)) \\ -e^{-0.23t}(1.8\sin(1.72t)) & e^{-0.36t}(\cos(1.7t) + 0.212 \sin(1.7t)) \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_0$$

13. Να υπολογιστούν οι πίνακες παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας.
Είναι το σύστημα ελέγξιμο και παρατηρήσιμο; Εξηγείστε γιατί.

Για την πλήρη κατανόηση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων, κρίνεται απαραίτητο μία γενική αναδρομή στην θεωρία της Παρατηρησιμότητας και Ελεγχιμότητας συνεχίζοντας πιο συγκεκριμένα στο υπάρχον πρόβλημα.

❖ Ελεγχιμότητα και Παρατηρησιμότητα.

Θεώρημα

Εάν δεν υπάρχουν απαλοιφές πόλων-μηδενιστών στην Συνάρτηση Μεταφοράς τότε το σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Αν υπάρχει κάποια απαλοιφή τότε το σύστημα είναι μη ελεγχόμενο και μη παρατηρήσιμο ή και τα δύο.

Επιπροσθέτως, όσον αφορά την δυναμική του συστήματος, υπάρχει περίπτωση διαφορετικά μοντέλα να έχουν ίδια Συνάρτηση Μεταφοράς. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Συμπέρασμα

Η δυναμική ενός μοντέλου στον χώρο κατάστασης το οποίο είναι μη παρατηρήσιμο και μη ελέγξιμο ή και τα δύο δεν μπορεί να φανεί από την αντίστοιχη Συνάρτηση Μεταφοράς. Γι' αυτό επιθυμούμε μοντέλα με την «ελάχιστη μορφή» (minimum realization models)

❖ Ελεγχιμότητα Γραμμικού Συστήματος.

Γενικός Ορισμός:

Ένα σύστημα λέγεται πλήρως ελέγξιμο (completely controllable) όταν υπάρχει φυσικό σήμα ελέγχου μέσω του οποίου μπορεί να μεταφερθεί το σύστημα από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $\underline{x}(0)$ σε οποιαδήποτε άλλη $\underline{x}(t)$ σε πεπερασμένο χρόνο ($t < \infty$).

Σημείωση 1

Αν όλες οι μεταβλητές κατάστασης είναι ελέγξιμες τότε υπάρχει δυνατότητα εξωτερικής εισόδου $u(t)$ να μετακινεί τις μεταβλητές κατάστασης από αρχική θέση σε οποιαδήποτε άλλη ($t < \infty$) (completely state controllable system).

Σημείωση 2

Γενικότερα, ένα σύστημα μπορεί να είναι ελέγξιμο είτε ως προς την έξοδο, είτε ως τις μεταβλητές κατάστασης. Δηλαδή, σε περίπτωση που εφαρμοστεί feedback ως προς την έξοδο τότε μας ενδιαφέρει η Ελεγχιμότητα μόνο ως προς την έξοδο, ενώ εάν εφαρμοστεί state feedback ως προς τις μεταβλητές κατάστασης τότε μας ενδιαφέρει η Ελεγχιμότητα μόνο ως προς τις μεταβλητές κατάστασης. Κάτι τέτοιο όμως, καταλήγει σε μια διαδικασία παρόμοια με τον συμβατικό έλεγχο και η διαδικασία δυσκολεύει αρκετά. Γι' αυτό τον λόγο αυτή η διαδικασία ακολουθείται μόνο σε απλά συστήματα και όχι στην πραγματικότητα.

Συνθήκη ελεγχιμότητας

Ένα σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο όταν:

$$\text{rank}(\underline{C}(\underline{A}, \underline{B})) = n$$

Με \underline{C} ο πίνακας ελεγχιμότητας:

$$\underline{C} = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B} \quad \dots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{B}]_{n \times (n+r)}$$

n : το πλήθος μεταβλητών κατάστασης.

r : το πλήθος των εισόδων.

Ή για τετραγωνικό πίνακα $|\underline{C}(\underline{A}, \underline{B})| \neq 0$.

Τέλος, για το rank (μη τετραγωνικού πίνακα) παρατηρούμε την μικρότερη διάσταση (στήλες ή γραμμές) και αν υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ αυτών. Αν δεν υπάρχει τότε το rank είναι το πλήθος αυτών.

- Υπολογισμός Ελεγχιμότητας Γραμμικού Συστήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και παρατηρώντας πως οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματός μας είναι $n=2$ και οι εισόδοι $r = 0$, καταλήγουμε στον πίνακα ελεγχιμότητας ως εξής:

$$\underline{C} = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.7168 \end{bmatrix}$$

Εύκολα παρατηρείται πως, δεν υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ των στηλών ή των γραμμών, επομένως $\text{rank } \underline{C} = n$. Άρα, το σύστημα είναι ελέγξιμο.

❖ Παρατηρησιμότητα Γραμμικού Συστήματος.

Ο ορισμός της παρατηρησιμότητας απαντάει στο ερώτημα για το αν είναι εφικτό να μάθουμε «τα πάντα» για την δυναμική συμπεριφορά των μεταβλητών κατάστασης μέσω των μετρούμενων εξόδων.

Ορισμός

Ένα σύστημα λέγεται πλήρως παρατηρήσιμο (completely observable) αν και μόνο αν είναι δυνατό να καθοριστεί οποιοδήποτε αρχικό διάνυσμα κατάστασης $\underline{x}(0)$ χρησιμοποιώντας μόνο μετρήσεις των εξόδων σε πεπερασμένο χρόνο ($t < \infty$) δεδομένης της επιρροής που έχουμε από την είσοδο ελέγχου.

Σημείωση

Η παρατηρησιμότητα μας επιτρέπει την ανακατασκευή μη μετρήσιμων μεταβλητών κατάστασης από μετρήσιμες εξόδους.

Στόχος

Σύστημα n γραμμικά ανεξάρτητων εξισώσεων ώστε έχοντας της μετρήσεις των εξόδων να υπολογιστούν οι μεταβλητές κατάστασης.

$$\underline{y}(0) = \underline{O}(\underline{A}, \underline{C}) \cdot \underline{x}(0)$$

Πίνακας Παρατηρησιμότητας: $\underline{O}(\underline{A}, \underline{C}) = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \\ \vdots \\ \underline{CA}^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n}$, όπου n το πλήθος μεταβλητών

κατάστασης και m το πλήθος των εξόδων.

Οπότε για μοναδική λύση ο πίνακας παρατηρησιμότητας $\underline{O}(\underline{A}, \underline{C})$ πρέπει να είναι αντιστρέψιμος.

Αυτό πρακτικά σημαίνει: $rank(\underline{O}(\underline{A}, \underline{C})) = n$

- Υπολογισμός Παρατηρησιμότητας Γραμμικού Συστήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω και παρατηρώντας πως οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματός μας είναι $n=2$ και οι είσοδοι $m=0$, καταλήγουμε στον πίνακα παρατηρησιμότητας ως εξής:

$$\underline{O} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.168 & 1 \\ -3 & 6.4512 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα είναι παρατηρήσιμο για 2 λόγους:

- 1) Οι γραμμές ή στήλες είναι γραμμικά ανεξάρτητες που σημαίνει

$$rank(\underline{O}(\underline{A}, \underline{C})) = 2 = n$$

- 2) Η ορίζουσα του πίνακα παρατηρησιμότητας είναι διάφορη του μηδενός, άρα είναι αντιστρέψιμος, επομένως:

$$\text{rank}(\underline{Q}(\underline{A}, \underline{C})) = 2 = n$$

$$\det|\underline{O}| = 49,24 \neq 0$$

14. Πληροί το σύστημα τις απαιτούμενες συνθήκες για να σχεδιαστεί σύστημα αυτομάτου ελέγχου που θα το βελτιώνει; Αν ναι, να σχεδιαστεί σύστημα αυτομάτου ελέγχου με τη μέθοδο τοποθέτησης πόλων ή με τον τύπο του Ackermann, το οποίο να εισάγει ζεύγος συζύγων πόλων $-3 \pm 4j$. Να δοθεί ο πίνακας κατάστασης του κλειστού βρόχου και η συνάρτηση μεταφοράς του. Επιτεύχθηκε η τοποθέτηση των νέων πόλων;

Το σύστημά μας πληροί τις απαιτούμενες συνθήκες για να σχεδιαστεί σύστημα αυτομάτου ελέγχου που θα το βελτιώνει, αφού είναι και ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Η βελτίωση αυτή θα επιτευχθεί μέσω της τοποθέτησης πόλων αλλά και μέσω του τύπου Ackermann για επαλήθευση των αποτελεσμάτων.

❖ Ανάδραση Καταστάσεων και Τοποθέτηση Πόλων (State Feedback and Pole Placement)

Ο κύριος στόχος του ελέγχου με ανάδραση καταστάσεων είναι να επηρεάσει τις ιδιοτιμές-πόλους του συστήματος ώστε να επιτευχθούν οι απαιτούμενες προδιαγραφές, χρησιμοποιώντας κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό των μεταβλητών κατάστασης.

Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα:

Αν οι πίνακες \underline{A} , \underline{B} είναι ελέγξιμοι τότε υπάρχει πίνακας ανάδρασης \underline{K} τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές-πόλοι του συστήματος να μπορούν να τοποθετηθούν σε οποιοσδήποτε θέσεις.

→ Με αυτόν τον τρόπο, αφού οι πίνακες \underline{A} , \underline{B} είναι ελέγξιμοι τότε υπάρχει πίνακας ανάδρασης \underline{K} :

$$\underline{u} = -[\underline{K}_1 \quad \underline{K}_2] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

→ Χώρος Κατάστασης:

$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{bmatrix}}^A \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^B u \\ y &= \overbrace{\begin{bmatrix} 7.168 \\ 1 \end{bmatrix}}^C \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} A - BK \end{bmatrix}}^{A_{SF}} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ y &= \overbrace{\begin{bmatrix} 7.168 \\ 1 \end{bmatrix}}^C \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}\end{aligned}$$

Υπολογισμός $A_{STATE FEEDBACK}$:

$$\underline{A}_{SF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 - K_1 & -0.7168 - K_2 \end{bmatrix}$$

Νέα χαρακτηριστική εξίσωση κλειστού βρόγχου:

$$\begin{aligned}|sI - \underline{A}_{SF}| &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 + K_1 & s + 0.7168 + K_2 \end{vmatrix} = \\ &= s^2 + (0.7168 + K_2)s + K_1 + 3 = 0 \quad (1)\end{aligned}$$

Απο την (1) επιλέγοντας κατάλληλα K_1, K_2 μπορούν οι πόλοι του επαυξημένου συστήματος να τοποθετηθούν οπουδήποτε στο μιγαδικό πεδίο.

Έστω πόλοι στις θέσεις $s_{1,2} = -3 \pm j4$, τότε η (1) γίνεται:

$$(s+3-j4)(s+3+j4) = s^2 + 6s + 25 = 0 \quad (2)$$

Αντιστοιχίζοντας (1) και (2) προκύπτει:

$$0.7168 + K_2 = 6 \Rightarrow K_2 = 5.2832$$

$$K_1 + 3 = 25 \Rightarrow K_1 = 22$$

και η τοποθέτηση πόλων έχει ολοκληρωθεί.

❖ Ανάδραση Καταστάσεων – Τύπος Ackermann.

Ο τύπος του Ackermann χρησιμοποιείται όταν η παραπάνω διαδικασία γίνεται πολύπλοκη για συστήματα υψηλής τάξης και ισχύει ότι:

Τύπος Ackermann: $\underline{K} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \underline{C}^{-1} \underline{\Phi}(\underline{A})$, όπου $\underline{\Phi}(s) = |sI - \underline{A}|$ είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού βρόγχου που υπολογίζεται για $s = \underline{A}$.

Σημείωση: Προφανώς απαιτείται και εδώ η ελεγχιμότητα του συστήματος αφού χρησιμοποιείται ο \underline{C}^{-1} .

Επομένως, υπολογισμός τύπου Ackermann:

$$1. \underline{C}^{-1} = \frac{adj \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.7168 \end{bmatrix}}{det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -0.7168 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} -0.7168 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}{-1} = \begin{bmatrix} 0.7168 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2. \underline{\Phi}(s) = |sI - \underline{A}| \Rightarrow s^2 + 6s + 25 = 0$$

$$3. \underline{\Phi}(\underline{A}) =$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.7168 \end{pmatrix} + 25 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 5.2832 \\ -15.8496 & 18.2132 \end{bmatrix}$$

Επομένως \rightarrow

$$\underline{K} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0.7168 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 22 & 5.2832 \\ -15.8496 & 18.2132 \end{bmatrix} = [22 \quad 5.2832]$$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Η τοποθέτηση των πόλων έγινε με επιτυχία, αφού ο τύπος του Ackermann επαληθεύει τα αποτελέσματα για τα κέρδη K_1 , K_2 με την μέθοδο τοποθέτησης πόλων.

Έτσι ο σχεδιασμός μας επιτεύχθηκε και το σύστημα αυτομάτου ελέγχου βελτιώθηκε!