1. 已知单调连续函数 $y=f(x)$ 的如下数据

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	-1	-2

用反插值法求方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内根的近似值。(小数点后至少保留 4 位有效数字)

解：

由于函数 $y=f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调连续，故存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，有如下函数表

y_i	-2	-1	1
$x_i=f^{-1}(y_i)$	2	1	0

方法一：Lagrange 插值

$$L_0(y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}=\frac{1}{3}(y+1)(y-1)$$
$$L_1(y)=\frac{(y-y_0)(y-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}=-\frac{1}{2}(y+2)(y-1)$$
$$L_2(y)=\frac{(y-y_0)(y-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}=\frac{1}{6}(y+2)(y+1)$$
$$x(y)=\frac{2}{3}(y+1)(y-1)-\frac{1}{2}(y+2)(y-1)+\frac{0}{6}(y+2)(y+1)$$

从而有 $x(0)=\frac{1}{3}$.

方法二：Newton 插值

-2	2		
-1	1	-1	
1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

从而有

$$x(y)=2-(y+2)+\frac{1}{6}(y+2)(y+1)$$

$x(0)=\frac{1}{3}$.

2. 构造三次多项式 $p_3(x)$，使得曲线 $y=p_3(x)$ 与函数 $y=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\pi$ 处相交，在 $x=0$ 处相切，并写出用 $y=p_3(x)$ 近似 $y=\cos x$ 的截断误差。（计算中用重节点牛顿插商法，计算尽可能用分数，截断误差不需要证明）

解：

构造三次多项式 $p_3(x)$，使得曲线 $y=p_3(x)$ 与函数 $y=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\pi$ 处相交（函数值相等），在 $x=0$ 处相切（函数值相等且一阶导函数值相等），即需满足如下插值条件

x_i	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(x_i)$	1	0	-1
$f'(x_i)$	0		

用重节点的差商标建立插值多项式，差商表如下：

0	1			
0	1	0		
$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{4}{\pi^2}$	
π	-1	$-\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{4}{\pi^3}$

则插值多项式为

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= f(0)+f[0,0](x-0)+f[0,0,\frac{\pi}{2}](x-0)^2+f[0,0,\frac{\pi}{2},\pi](x-0)^2(x-\frac{\pi}{2}) \\
&= 1-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi^3}x^2(x-\frac{\pi}{2}).
\end{aligned}
$$

根据插值条件可设插值余项为

$$
\begin{aligned}
R(x) &= f(x)-p_3(x) \\
&= k(x)x^2(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi)
\end{aligned}
$$

当 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 时，上式对任意的 $k(x)$ 都成立.

当 $x \in [0,\pi]$ 且不同于 $0,\frac{\pi}{2},\pi$ 时，构造关于变量 t 的函数，

$$g(t) = f(t) - p_3(t) - k(x)t^2(t-\frac{\pi}{2})(t-\pi).$$

上述函数充分光滑，并有如下零点

$$g(0) = g(\frac{\pi}{2}) = g(\pi) = g(x) = 0, g'(0) = 0.$$

在四个互异节点 $0,\frac{\pi}{2},\pi,x$ 形成的三个区间上使用 Rolle 定理，则存在三个互异数 $\eta_1,\eta_2,\eta_3 \in (0,\pi)$，且不同于 $0,\frac{\pi}{2},\pi,x$，使得有

$$g'(\eta_1) = g'(\eta_2) = g'(\eta_3) = 0.$$

这样知 $g'(t)$ 至少有四个（$\eta_1,\eta_2,\eta_3,0$）互异零点，继续使用 Rolle 定理，知 $g''(t)$ 至少有三个互异零点，$g'''(t)$ 至少有两个互异零点，$g^{(4)}(t)$ 至少有一个互异零点（设其为ξ，ξ 依赖于 $0,\frac{\pi}{2},\pi,x$）.

而 $g^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - 4!k(x)$，将 ξ 带入，便得到

$$k(x) = \frac{f^4(\xi)}{4!}.$$

于是，误差余项为

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^2(x-\frac{\pi}{2})(x-\pi), \xi \in (0,\pi).$$

3. 计算在区间$\int_0^1 e^{x^2}dx$，要求采用梯形公式或者 Simpson 公式计算，该积分的精确值为 1.4626517459…，请比较两种方法的误差，如果想得到更高精度的结果，请建议一些新的解法。

解：

梯形公式:

$$I \approx \frac{(b-a)}{2}[f(a)+f(b)]$$
$$=1.571583165458632$$

Simpson 公式：

$$I \approx \frac{h}{6}[f(a)+4f(\frac{b+a}{2})+f(b)]$$
$$=1.475730582535002$$

将区间 $[0,1]$ 等分为 $n=10$ 份，$x_i = ih, h = 0.1,$ 在每段上使用梯形公式，则有

复化梯形公式:

$$I \approx \frac{h}{2}[f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(x_n)]$$
$$=1.467174692738799$$

在每两段上使用 Simpson 公式，则有

复化 Simpson 公式：

$$I \approx \frac{h}{3}[f(x_0)+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})+f(x_n)]$$
$$=1.462681400099797$$

Gauss 公式：

区间 [-1,1] 上的 Gauss 求积公式为，

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

节点和权系数为

$n=5$

Gauss_point = [-0.9324695142, -0.6612093865, -0.2386191761, 0.2386191761, ...
0.6612093865, 0.9324695142];

Gauss_weight = [0.1713244924, 0.3607615730, 0.4679139346, 0.4679139346, ...
0.3607615730, 0.1713244924];

$n=6$

Gauss_point = [-0.9324695142, -0.6612093865, -0.2386191761, 0.2386191761, ...
0.6612093865, 0.9324695142];

Gauss_weight = [0.1713244924, 0.3607615730, 0.4679139346, 0.4679139346, ...
0.3607615730, 0.1713244924];

$n=7$

Gauss_point = [-0.9491079123, -0.7415311856, -0.4058451514, 0,...
0.4058451514, 0.7415311856, 0.9491079123];

Gauss_weight = [0.1294849662, 0.2797053915, 0.3818300505, 0.4179591837, ...
0.3818300505, 0.2797053915, 0.1294849662];

对任意区间 $[a,b]$ 上的积分 $\int_a^b f(x)dx$，进行变量代换 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$，可变为[-1,1]上的积分

$$\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2})dt.$$

使用 n = 5 的高斯求积公式可得，

$$I_5 \approx 1.462651743817687.$$

n = 6，

$$I_6 \approx 1.462651743817687.$$

n = 7，

$$I_7 \approx 1.462651745975861.$$

更进一步，还可以分段使用 Gauss 型求积公式进一步提高精度。