

Лабораторная работа #3

1. Дана квадратная матрица. Требуется найти ее LU-разложение. Реализовать процедуру нахождения обратной матрицы с использованием LU-разложения. Реализовать методы решения системы с использованием LU-разложения. При этом матрица хранится в разреженно-строчном (разреженно-столбцовом) формате (см. видео <https://youtu.be/uCWNlhXKqQw>). Элементы матрицы обрабатывать в порядке, соответствующем формату хранения. Для решения использовать метод Гаусса.
2. Протестировать разработанную программу.
3. Реализовать итерационный методы решения СЛАУ (Метод Зейделя, Якоби или верхней релаксации на выбор).
4. Провести исследование реализованных методов на матрицах, число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания (т.е. оценить влияние увеличения числа обусловленности на точность решения). Для этого необходимо решить последовательность СЛАУ

$$A^k x^k = F^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где матрицы A^k строятся следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij}, & i > 1, \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k}, & i = 1, \end{cases},$$

и $a_{ij} \in 0, -1, -2, -3, -4$ выбираются достаточно произвольно, а правая часть F_k получается умножением матрицы A^k на вектор $x^* = (1, \dots, n)$. Для каждого k , для которого система вычислительно разрешима, оценить погрешность найденного решения.

5. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта различной размерности.

Матрицы Гильберта размерности k строятся следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1..k.$$

6. Сравните между собой прямой и итерационный методы. Для сравнения используйте матрицы разной размерности: $n = 10, 50, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$. Сделайте выводы, зависит ли эффективность метода от размерности матрицы. Если да, какая зависимость наблюдается?
7. Реализовать поиск обратной матрицы с использованием LU-разложения.

Содержание отчета

Отчет должен содержать таблицы с результатами исследований по каждому методу. Необходимо построить зависимости количества итераций от выбранной точности и от выбранного начального приближения. Объяснить полученные результаты.

По всем пунктам задания требуется сделать выводы.

Теоретические вопросы

1. Разреженно-строчный/разреженно-столбцовый форматы хранения матриц. Способы перевода из плотной в разреженную и наоборот.
2. Особенности использования разреженных матриц в языке Python.
3. Вычисление обратной матрицы с использованием разложений.
4. Типы матриц и их хранение.
5. Итерационные методы и особенности их применения.
6. Устойчивость и сходимость итерационных методов.

Литература

1. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения. Вержбицкий В.М.
2. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач. Рояк М.Э., Словейчик Ю.Г.
<https://2lib.org/book/3715115/6dd7cc?id=3715115secret=6dd7cc>
3. Нежное введение в разреженные матрицы для машинного обучения
<https://www.machinelearningmastery.ru/sparse-matrices-for-machine-learning/>
4. Sparse matrices (scipy.sparse) SciPy 2-D sparse matrix package for numeric data.
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/sparse.html>