МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики

Мегафакультет трансляционных информационных технологий

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа №2

«Методы спуска»

Выполнил студент группы №M32111

Чу Тхи Фыонг Тхао

Преподаватель

Москаленко М. А.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2021

Цель работы: реализовать и проанализировать разные методы спусков

<u>Часть 1</u>

В данной части рассматриваются 5 методов спуска:

- метод градиентного спуска;
- метод наискорейшего спуска;
- метод сопряженных градиентов;
- метод сопряженных направлений;
- метод Ньютона.

1. **Метод градиентного спуска**

Основная идея метода заключается в том, чтобы осуществлять оптимизацию в направлении наискорейшего спуска, а это направление задаётся антиградиентом -∇f:

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_i \nabla f(x_i)$$

От выбора $\boldsymbol{\lambda}$ (величина шага)

2. **Метод наискорейшего спуска**

В отличие от метода градиента, в котором градиент определяют на каждом шаге, в методе наискорейшего спуска градиент находят в начальной точке и движение в найденном направлении продолжают одинаковыми шагами до тех пор, пока значение функции уменьшается. Если значение вдруг возрастает, то движение в данном направлении прекращается, последний шаг снимается полностью или наполовину и вычисляется новое значение градиента и новое направление.

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_i \nabla f(x_i)$$
$$\lambda_i = \min\,(x_i - f'(x_i))$$

3. **Метод сопряженных градиентов**

Будем решать задачу:

$$F(x) \rightarrow min, x \in Rn$$

Рассчитываем следующие коэффициенты:

$$\alpha_k = \arg\min F(x_{k-1} + \alpha_k \rho_k)$$
$$\rho_{k+1} = -F'(x_k) + \beta_k \rho_k$$

Коэффициент β_k будем вычислять методом Флетчера:

$$\beta_k = \frac{\|\nabla F(x^{k+1})\|^2}{\|\nabla F(x^k)\|^2}$$

И в итоге получаем движение:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

4. Метод сопряженных направлений

В методе сопряженных направлений используется факт, что минимум квадратичной функции может быть найден не более чем за n шагов при условии, что поиск ведется вдоль сопряженных относительно матрицы Гессе направлений.

5. Метод Ньютона

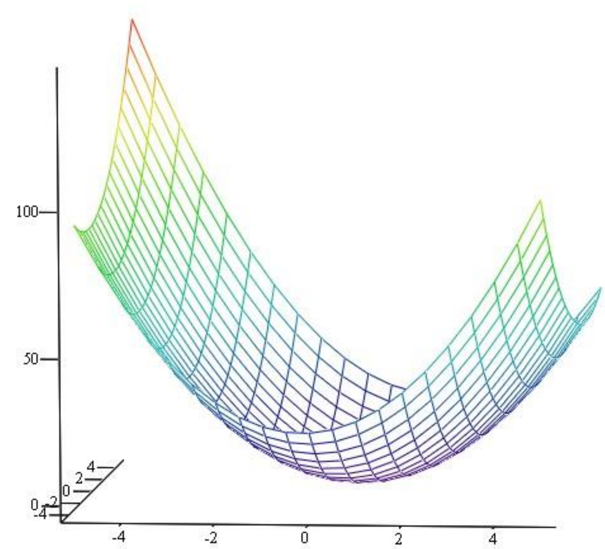
Поиск решения осуществляется путём построения последовательных приближений и основан на принципах простой итерации. Метод обладает квадратичной сходимостью. В случае решения задач оптимизации предполагается, что функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Отыскание минимума функции $f(x)$ производится при помощи отыскания стационарной точки, т.е. точки x^*, удовлетворяющей уравнению $f'(x) = 0$, которое решается методом Ньютона.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$$

Часть 2

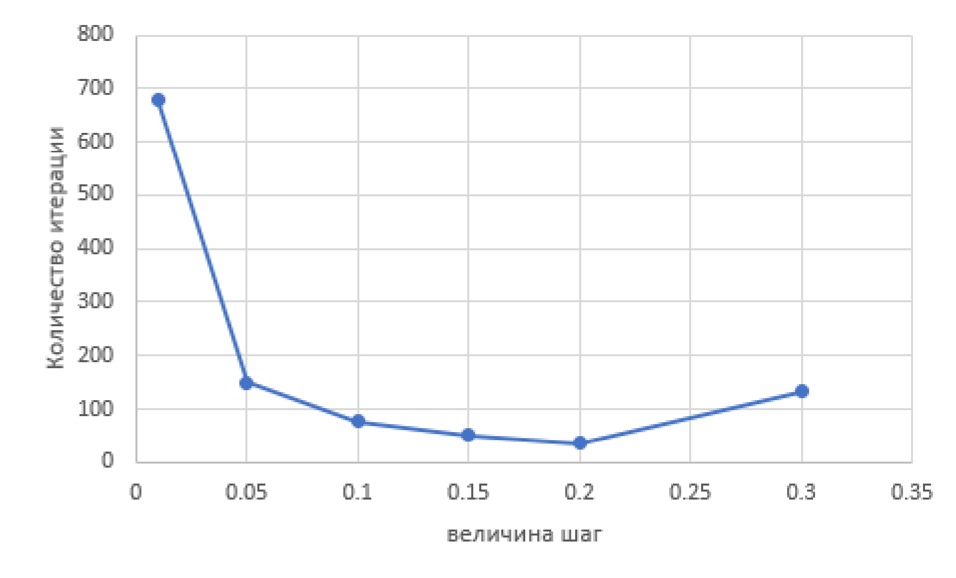
Функция $f(x, y) = 3x^2 + y^2 - xy - 4x$

Начальная точка (-38, 20)

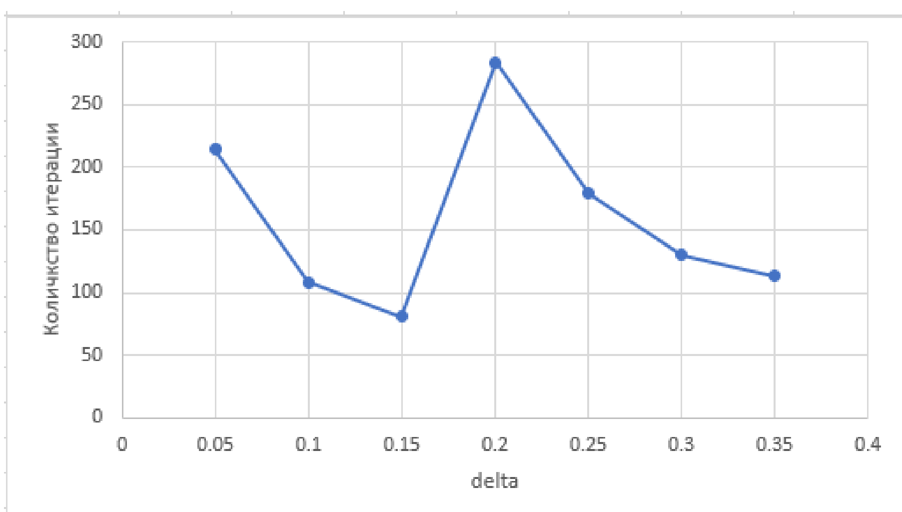


Градиентный спуск при использовании разных методов выборки шага

1. Постоянная величина шага:



2. Дробление шага:



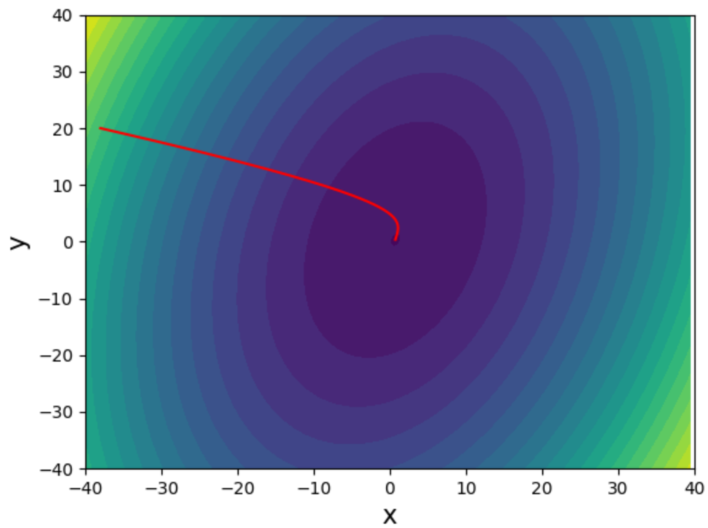
3. Метод золотого сечения:
Используя метод золотого сечения, мы получаем: 27 итераций

4. Метод Фибоначчи:
Используя метод золотого сечения, мы получаем: 27 итераций

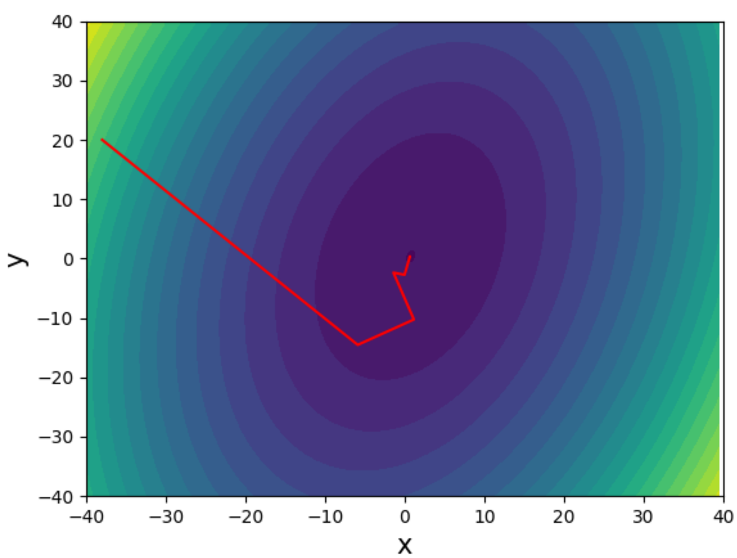
Часть 3

используется та же функция, что и в части 2

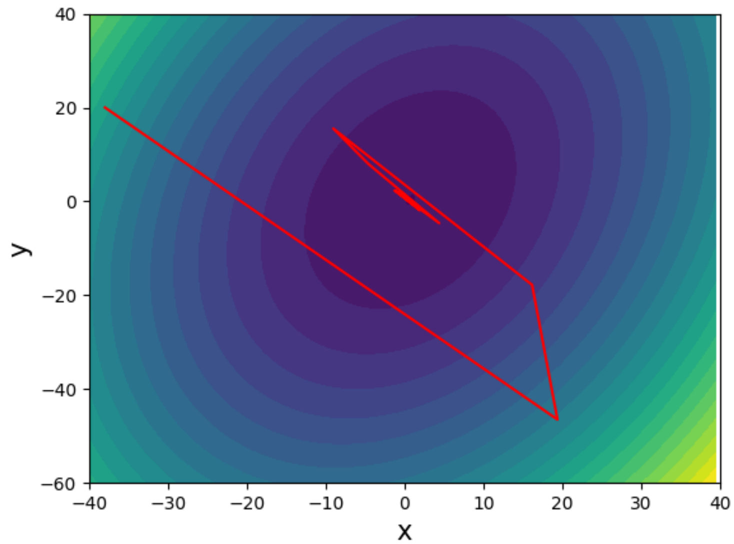
1. Метод градиентного спуска (постоянный шаг):



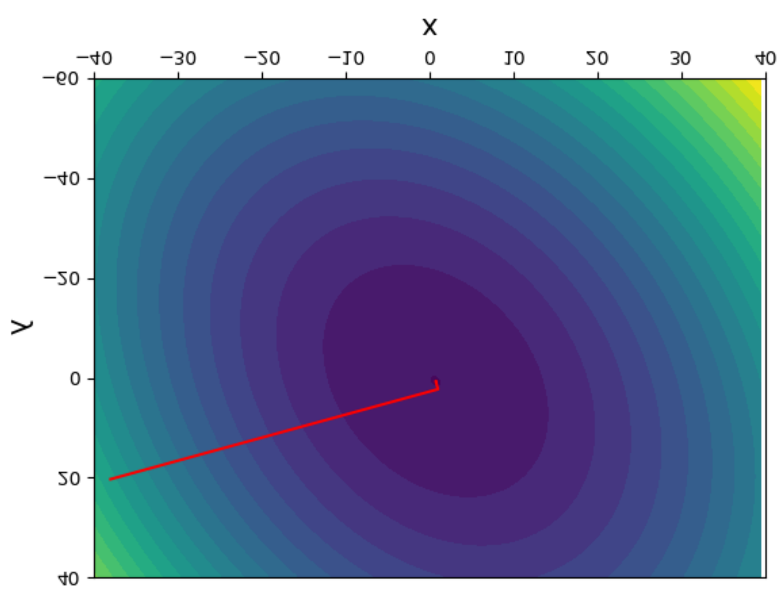
2. Метод наискорейшего спуска:



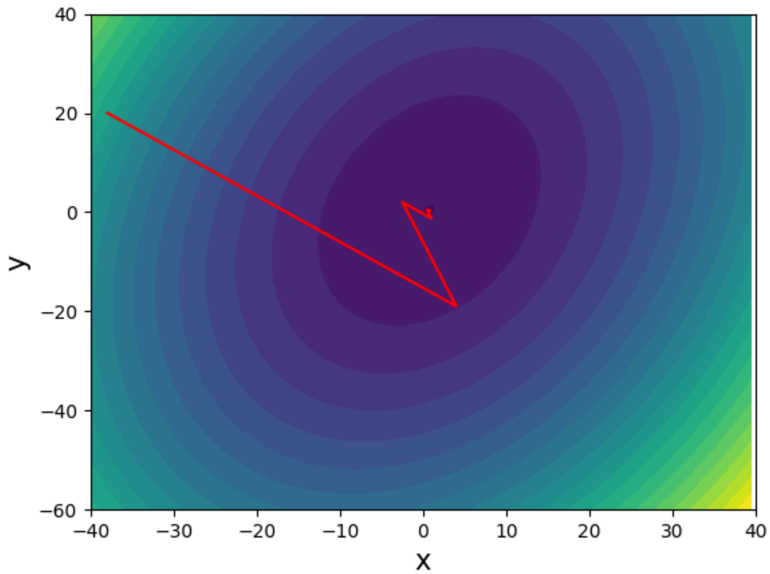
3. Метод сопряженных градиентов



4. Метод сопряженных направлений:



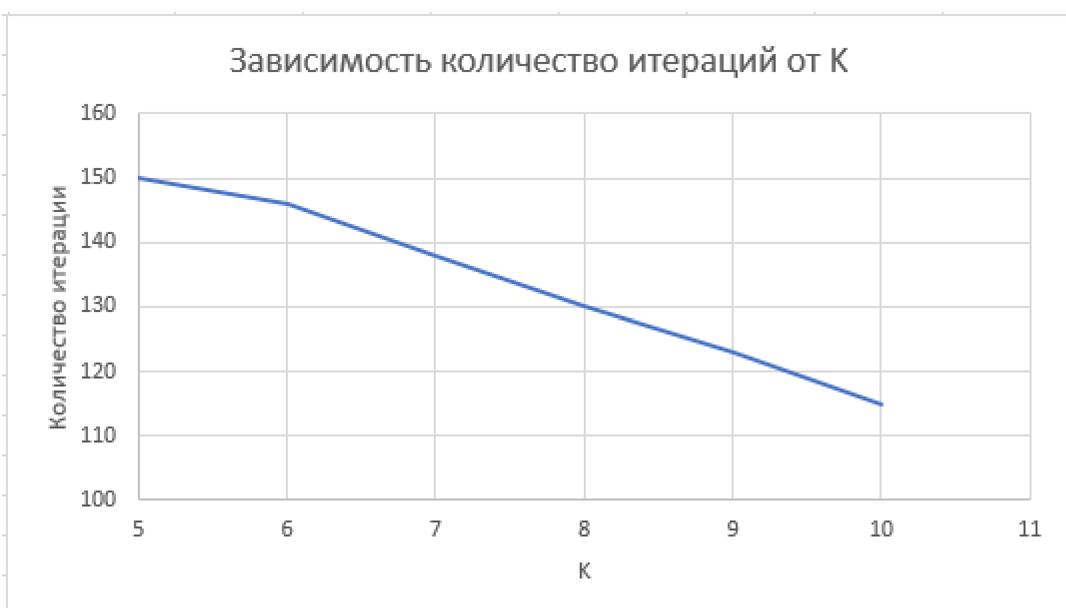
5. Метод Ньютона



<u>Часть 4:</u>

Анилиз зависимости количество итераций градиентного спуска от числа обусловленности. Для анализа, мы взяли n = 2 и k в диапазоне [5;10] и сгенерированная функция имеет вид:

$$F(x, y) = x^{2.5} + y^{2.5}$$



Из результатов можно сделать вывод, что количество шагов напрямую зависит от числа обусловленности, то есть чем разница между размерностью и числом обусловленности, тем меньше шагов потребуется для нахождения оптимума функции, и наоборот при потребуется больше шагов при меньшей разности.

Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы мы реализовали 5 методов нахождения минимумов многомерных функций (Ньютона, градиентного спуска, наискорейшего спуска, сопряженных градиентов, сопряженных направлений). То что градиентный спуск с постоянным шагом может не сойтись (что довольно часто и происходит). Лучше всего показал себя метод сопряженных направленийю.