из (3) и подставляя в (2), ищем ненулевое решение a_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ системы (2). Подставляя найденные значения a_k в (1), получаем приближенное выражение собственной функции, отвечающей найденному собственному значению.

Пример 1. Найти по методу Ритца приближенное значение наименьшего характеристического числа ядра.

$$K(x,t) = xt; \qquad a = 0, b = 1.$$

Решение. В качестве координатной системы функции $\psi_n(x)$ выбираем систему полиномов Лежандра: $\psi_n(x) = P_n(2x-1)$. В формуле (1) ограничимся двумя слагаемыми, так что

$$\psi_2(x) = a_1 \cdot P_0(2x-1) + a_2 \cdot P_1(2x-1)$$

Замечая, что

$$\psi_1 \equiv P_0(2x-1) = 1; \qquad \psi_2 \equiv P_1(2x-1) = 2x-1,$$

находим

$$(\psi_1, \psi_1) = \int\limits_0^1 dx = 1, \qquad (\psi_1, \psi_2) = (\psi_2, \psi_1) = \int\limits_0^1 (2x-1)dx = 0,$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int\limits_0^1 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Далее,

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 K(x,t)\psi_1(t)dt \right) \psi_1(x)dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xt\, dx\, dt = \frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xt(2x-1)dx\, dt = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 xt(2t-1)(2x-1)dx\, dt = \frac{1}{36},$$

Система (3) в этом случае принимает вид

$$\begin{vmatrix} \dfrac{1}{4} - \sigma & \dfrac{1}{12} \\ \dfrac{1}{12} & \dfrac{1}{36} - \dfrac{1}{3}\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\sigma^2 - \sigma \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 0.$$

Отсюда $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \dfrac{1}{3}$. Наибольшее собственное значение $\sigma_2 = \dfrac{1}{3}$, значит, наименьшее характеристическое число $\lambda = \dfrac{1}{\sigma_2} = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

По методу Ритца найти наименьшие характеристические числа ядер ($a = 0$, $b = 1$):

340. $K(x,t) = x^2t^2.$ **341.** $K(x,t) = \begin{cases} t, & x \geq t, \\ x, & x \leq t. \end{cases}$

342. $K(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-t), & x \leq t, \\ \frac{1}{2}t(2-x), & x \geq t. \end{cases}$

2^o. Метод следов.

Назовём m-м следом ядра $K(x,t)$ число

$$A_m = \int\limits_a^b K_m(t,t)\,dt,$$

Где $K_m(x,t)$ означает m-е итерированное ядро.

Для наименьшего характеристического числа λ_1 при достаточно большом m справедлива следующая приближенная формула:

$$|\lambda_1| \approx \sqrt{\frac{A_{2m}}{A_{2m+2}}}. \tag{4}$$

Формула (4) дает значение $|\lambda_1|$ с избытком.

Следы четного порядка для симметричного ядра вычисляются по формуле

$$A_{2m} = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_m^2(x,t)\,dx\,dt = 2 \quad \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_m^2(x,t)\,dt\,dx. \tag{5}$$

Пример 2. Найти по методу следов первое характеристическое число ядра

$$K(x,t) = \begin{cases} t, & x \geq t, \\ x, & x \leq t, \end{cases} \quad a = 0, b = 1.$$