Corrigé de la Feuille d'exercices n°3 – Polynome et Arithmetique

Année 2025-26

Exercice 1

Exercice 12 Soient $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$. Trouver deux polynomes U, $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Solution

Étape 1 : Application de l'algorithme d'Euclide pour le PGCD
L'algorithme d'Euclide effectue des divisions polynomiales successives jusqu'à ce que le reste soit constant. Notez que $\deg(A) = 7$ et $\deg(B) = 5$.
Étape 1.1 : Division de A par B

$$A = X^7 - X - 1$$
$$B = X^5 - 1$$

Quotient $Q_1 = X^2$ (car $X^7/X^5 = X^2$).

$$X^2 \cdot B = X^2(X^5 - 1) = X^7 - X^2$$

Reste $R_1 = A - Q_1 B = (X^7 - X - 1) - (X^7 - X^2) = X^2 - X - 1$.

$$R_1 = X^2 - X - 1 \quad \text{(degré 2)}$$

Étape 1.2 : Division de B par R1

$$B = X^5 - 1$$
$$R_1 = X^2 - X - 1$$

Nous effectuons la division polynomiale longue (Ou vous pouvez utiliser la division longue comme nous l'avons fait en classe, c'était juste pour que ce soit plus pratique à taper) :

— Étape 1 : $X^5/X^2 = X^3$.
  $X^3 \cdot R_1 = X^3(X^2 - X - 1) = X^5 - X^4 - X^3$.
  Reste temp. : $B - X^3R_1 = (X^5 - 1) - (X^5 - X^4 - X^3) = X^4 + X^3 - 1$ (degré 4).
— Étape 2 (degré $4 \geq 2$) : $X^4/X^2 = X^2$.
  $X^2 \cdot R_1 = X^2(X^2 - X - 1) = X^4 - X^3 - X^2$.
  Reste temp. : $(X^4 + X^3 - 1) - (X^4 - X^3 - X^2) = 2X^3 + X^2 - 1$ (degré 3).

— Étape 3 (degré $3 \geq 2$) : $2X^3/X^2 = 2X$.
$2X \cdot R_1 = 2X(X^2 - X - 1) = 2X^3 - 2X^2 - 2X$.
Reste temp. : $(2X^3 + X^2 - 1) - (2X^3 - 2X^2 - 2X) = 3X^2 + 2X - 1$ (degré 2).

— Étape 4 (degré $2 = 2$) : $3X^2/X^2 = 3$.
$3 \cdot R_1 = 3(X^2 - X - 1) = 3X^2 - 3X - 3$.
Reste $R_2 = (3X^2 + 2X - 1) - (3X^2 - 3X - 3) = 5X + 2$ (degré 1).

Quotient $Q_2 = X^3 + X^2 + 2X + 3$.

$$R_2 = 5X + 2$$

Étape 1.3 : Division de R1 par R2

$$\begin{aligned} R_1 &= X^2 - X - 1 \\ R_2 &= 5X + 2 \end{aligned}$$

Division polynomiale (degré 2 ÷ degré 1) :

— Étape 1 : $X^2/(5X) = \frac{1}{5}X$.
$\frac{1}{5}X \cdot R_2 = \frac{1}{5}X(5X + 2) = X^2 + \frac{2}{5}X$.
Reste temp. : $(X^2 - X - 1) - (X^2 + \frac{2}{5}X) = -X - \frac{2}{5}X - 1 = -\frac{7}{5}X - 1$ (degré 1).

— Étape 2 (degré $1 = 1$) : $(-\frac{7}{5}X)/(5X) = -\frac{7/5}{5} = -\frac{7}{25}$.
$-\frac{7}{25} \cdot R_2 = -\frac{7}{25}(5X + 2) = -\frac{35}{25}X - \frac{14}{25} = -\frac{7}{5}X - \frac{14}{25}$.
Reste $R_3 = (-\frac{7}{5}X - 1) - (-\frac{7}{5}X - \frac{14}{25}) = -1 + \frac{14}{25} = -\frac{25}{25} + \frac{14}{25} = -\frac{11}{25}$.

Quotient $Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25}$.

$$R_3 = -\frac{11}{25} \quad \text{(constante, degré 0)}$$

Étape 1.4 : Condition d'arrêt Le reste R_3 est une constante non nulle ($-\frac{11}{25}$), donc le PGCD(A, B) est une constante (A et B sont premiers entre eux). Nous pouvons continuer avec la partie étendue pour trouver U et V.

Étape 2 : Partie étendue (Remontée pour U et V)

Maintenant, nous remontons pour exprimer R_3 comme une combinaison linéaire de A et B : $R_3 = AU' + BV'$. Ensuite, comme nous voulons $= 1$, et que $R_3 = -\frac{11}{25}$, nous aurons $U = U' \cdot (-\frac{25}{11})$ et $V = V' \cdot (-\frac{25}{11})$.

Étape 2.1 : Partir de $R_3 = R_1 - Q_3R_2$

$$R_3 = R_1 - Q_3R_2$$

Étape 2.2 : Substituer $R_2 = B - Q_2R_1$

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 - Q_3(B - Q_2R_1) \\ &= R_1 - Q_3B + Q_3Q_2R_1 \\ &= (1 + Q_3Q_2)R_1 - Q_3B \end{aligned}$$

Étape 2.3 : Substituer $R_1 = A - Q_1B$

$$\begin{aligned} R_3 &= (1 + Q_3Q_2)(A - Q_1B) - Q_3B \\ &= (1 + Q_3Q_2)A - (1 + Q_3Q_2)Q_1B - Q_3B \\ &= (1 + Q_3Q_2)A - [(1 + Q_3Q_2)Q_1 + Q_3]B \end{aligned}$$

Donc :

$$U' = 1 + Q_3Q_2$$
$$V' = -[(1 + Q_3Q_2)Q_1 + Q_3]$$

Étape 2.4 : Calculer Q_3Q_2

$$Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25}$$
$$Q_2 = X^3 + X^2 + 2X + 3$$

— $\frac{1}{5}X \cdot Q_2 = \frac{1}{5}(X^4 + X^3 + 2X^2 + 3X) = \frac{1}{5}X^4 + \frac{1}{5}X^3 + \frac{2}{5}X^2 + \frac{3}{5}X$
— $-\frac{7}{25} \cdot Q_2 = -\frac{7}{25}X^3 - \frac{7}{25}X^2 - \frac{14}{25}X - \frac{21}{25}$

En combinant (dénominateur commun 25) :
— X^4 : $\frac{5}{25}$
— X^3 : $\frac{5}{25} - \frac{7}{25} = -\frac{2}{25}$
— X^2 : $\frac{10}{25} - \frac{7}{25} = \frac{3}{25}$
— X : $\frac{15}{25} - \frac{14}{25} = \frac{1}{25}$
— Constante : $-\frac{21}{25}$

$$Q_3Q_2 = \frac{5}{25}X^4 - \frac{2}{25}X^3 + \frac{3}{25}X^2 + \frac{1}{25}X - \frac{21}{25}$$

Étape 2.5 : Calculer $U' = 1+Q_3Q_2$ $1 = \frac{25}{25}$. Le terme constant devient : $\frac{25}{25} - \frac{21}{25} = \frac{4}{25}$.

$$U' = \frac{5}{25}X^4 - \frac{2}{25}X^3 + \frac{3}{25}X^2 + \frac{1}{25}X + \frac{4}{25}$$

Ou écrit :

$$U' = \frac{1}{25}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)$$

Étape 2.6 : Calculer V' Rappel : $V' = -[U'Q_1 + Q_3]$.
— D'abord, $U'Q_1 = U' \cdot X^2 = \frac{1}{25}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2)$.
— Ajoutons $Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25} = \frac{5}{25}X - \frac{7}{25}$.
— La somme $[U'Q_1 + Q_3]$ est :
$\frac{5}{25}X^6 - \frac{2}{25}X^5 + \frac{3}{25}X^4 + \frac{1}{25}X^3 + \frac{4}{25}X^2 + \frac{5}{25}X - \frac{7}{25}$.

Donc $V' = -$[Somme] :

$$V' = \frac{1}{25}(-5X^6 + 2X^5 - 3X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X + 7)$$

Étape 2.7 : Mise à l'échelle pour obtenir = 1 Nous avons $R_3 = -\frac{11}{25} = AU' + BV'$. Pour obtenir 1, nous multiplions tout par $(-\frac{25}{11})$:

$$1 = A\left(U' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)\right) + B\left(V' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)\right)$$

Calculons U et V :

$$\begin{aligned} U &= U' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= \left[\frac{1}{25}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)\right] \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= -\frac{1}{11}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V &= V' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\
&= \left[\frac{1}{25}(-5X^6 + 2X^5 - 3X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X + 7)\right] \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\
&= \frac{1}{11}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)
\end{aligned}
$$

Résultat final

$$U = -\frac{1}{11}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)$$

$$V = \frac{1}{11}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)$$

Vérification et remarques

— Vous pouvez utiliser un logiciel de calcul formel (comme Mathematica ou Sage) pour vérifier si $AU + BV$ est bien égal à 1.

— **Remarque :** U et V ne sont pas uniques. Toute solution de la forme $U' = U + BK$ et $V' = V - AK$ (où K est un polynôme quelconque) est également une solution. La solution trouvée est celle de degré minimal (pour U).

Exercice 2

Exercice 30 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes (sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$) :

4. $F_4(X) = \dfrac{X^6}{X^5 - X}$.
5. $F_5(X) = \dfrac{X^6 + 1}{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1}$
6. $F_6(X) = \dfrac{1}{X^n - 1}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

Solution

4. Soit $F_4(X) = \frac{X^6}{X^5 - X}$. $Q(X) = X^5 - X = X(X^4 - 1) = X(X^2 - 1)(X^2 + 1) = X(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$. Le degre du numerateur (6) est superieur au degre du denominateur (5). Il y a une partie entière $E(X)$. Division euclidienne de $A = X^6$ par $Q = X^5 - X$: $X^6 = X(X^5 - X) + X^2$. Partie entière $E(X) = X$. Reste $R(X) = X^2$. $F_4(X) = X + \frac{X^2}{X^5 - X} = X + \frac{X^2}{X(X^4 - 1)} = X + \frac{X}{X^4 - 1}$. Soit $G(X) = \frac{X}{X^4 - 1}$. $G(X)$ a pour poles simples $\pm 1, \pm i$. Forme de la decomposition de $G(X)$: $G(X) = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{c}{X - i} + \frac{d}{X + i}$.
   Calcul des coefficients de $G(X)$ sur $\mathbb{C}$:
   a (pole 1) : $a = \left[\frac{X}{4X^3}\right]_{X=1} = \frac{1}{4}$.
   b (pole -1) : $b = \left[\frac{X}{4X^3}\right]_{X=-1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$.
   c (pole i) : $c = \left[\frac{X}{4X^3}\right]_{X=i} = \frac{i}{4i^3} = \frac{1}{4i^2} = -\frac{1}{4}$.
   d (pole $-i$) : $d = \overline{c} = -\frac{1}{4}$.
   Decomposition dans $\mathbb{C}(X)$:

$$F_4(X) = X + \frac{1}{4}\frac{1}{X - 1} + \frac{1}{4}\frac{1}{X + 1} - \frac{1}{4}\frac{1}{X - i} - \frac{1}{4}\frac{1}{X + i}$$

Decomposition dans $\mathbb{R}(X)$ **:** On regroupe les poles conjugues i et $-i$: $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{X-i}+\frac{1}{X+i}\right) = -\frac{1}{4}\frac{X+i+X-i}{(X-i)(X+i)} = -\frac{1}{4}\frac{2X}{X^2+1} = -\frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}$.

$$F_4(X) = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{2}\frac{X}{X^2+1}$$

5. Soit $F_5(X) = \frac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$. On a serie geometrique : $1-X+X^2-X^3+X^4-X^5 = \sum_{k=0}^5(-X)^k = \frac{1-(-X)^6}{1-(-X)} = \frac{1-X^6}{1+X}$. Donc denominateur est : $\frac{X^6-1}{1+X}$, et $F_5(X) = \frac{(X^6-1+2)(X+1)}{X^6-1} = X+1+2\frac{X+1}{X^6-1}$.
   On a $X^6-1 = \prod_{k=0}^{5}(X-e^{\frac{2k\pi i}{6}}) = (X-1)(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\pi i})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}})$. Regrouper les racines et son conjuge ($e^{\frac{2k\pi i}{6}}$ et $e^{\frac{2(6-k)\pi i}{6}}$ sont conjuge), on a
   $X^6-1 = (X-1)(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}})(X+1)(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}})$
   Soit $G(X) = \frac{2(X+1)}{X^6-1}$, on a $G(X) = \frac{2}{(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}})(X-1)(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}})} = \frac{2}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$. On pose $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $j' = e^{\frac{\pi i}{3}}$, on sait $(X-e^{\frac{2\pi i}{3}})(X-e^{\frac{4\pi i}{3}}) = (X-j)(X-j^2) = X^2+X+1$ et $(X-e^{\frac{\pi i}{3}})(X-e^{\frac{5\pi i}{3}}) = (X-j')(X-\overline{j'}) = X^2-X+1$.
   Sur $\mathbb{C}$ **:** Par thm du cours, on sait que $G(X) = \frac{2(X+1)}{X^6-1} = \sum_{k=0,1,2,4,5}\frac{c_k}{X-e^{\frac{k\pi i}{3}}}$
   ou $c_k = \frac{2(e^{\frac{k\pi i}{3}}+1)}{6(e^{\frac{k\pi i}{3}})^5} = \frac{e^{\frac{k\pi i}{3}}+1}{3e^{\frac{-k\pi i}{3}}}$. On a $c_0 = \frac{2}{3}$, $c_1 = \frac{j'+1}{3\overline{j'}}$, $c_5 = \frac{\overline{j'}+1}{3j'}$, $c_2 = \frac{j+1}{3j^2} = -\frac{1}{3} = c_4$.
   $F_5(X) = X+1+\sum_{k=0,1,2,4,5}\frac{c_k}{X-e^{\frac{k\pi i}{3}}}$.
   Sur $\mathbb{R}$ **:** On doit remarquer que $j^2+j+1=0$, $j^3=1$ et $j'^2-j'+1=0$ et $j'^3=-1$. $G(X) = \frac{2(X+1)}{X^6-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{X-1} + \frac{-1}{3}(\frac{1}{X-j}+\frac{1}{X-j^2}) + (\frac{j'+1}{3\overline{j'}}\frac{1}{X-j'} + \frac{\overline{j'}+1}{3j'}\frac{1}{X-\overline{j'}})$.
   On a $\frac{-1}{3}(\frac{1}{X-j}+\frac{1}{X-j^2}) = \frac{-1}{3}\frac{2X+1}{X^2+X+1}$). Et on a $\frac{j'+1}{3\overline{j'}}\frac{1}{X-j'} + \frac{\overline{j'}+1}{3j'}\frac{1}{X-\overline{j'}} = \frac{-1}{X^2-X+1}$.
   Conclusion : ....
6. **Décomposition de** $F_6 = \frac{1}{X^n-1}$
   Les pôles sont les racines n-ièmes de l'unité : $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in \{0,\ldots,n-1\}$. Ce sont des pôles simples.
   Sur $\mathbb{C}$ **:** La formule pour un pôle simple α d'une fraction $1/Q(X)$ est $\frac{1}{Q'(\alpha)}$. Ici $Q'(X) = nX^{n-1}$. Le coefficient associé à ω_k est :
   $$\frac{1}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{\omega_k}{n\omega_k^n} = \frac{\omega_k}{n} \quad (\text{car } \omega_k^n = 1)$$
   Résultat sur $\mathbb{C}$ **:**
   $$\boxed{\frac{1}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k}{n(X-\omega_k)}}$$
   Sur $\mathbb{R}$ **:** Il faut regrouper les racines conjuguées ω_k et $\bar{\omega_k} = \omega_{n-k}$. Le terme regroupé est :
   $$\frac{\omega_k}{n(X-\omega_k)} + \frac{\bar{\omega_k}}{n(X-\bar{\omega_k})} = \frac{1}{n}\frac{\omega_k(X-\bar{\omega_k})+\bar{\omega_k}(X-\omega_k)}{X^2-2\cos(\frac{2k\pi}{n})X+1}$$

Le numérateur vaut $X(\omega_k + \bar{\omega_k}) - 2\omega_k\bar{\omega_k} = 2X\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 2$. Donc le terme réel est $\frac{2}{n}\frac{X\cos(\theta_k)-1}{X^2-2X\cos(\theta_k)+1}$ avec $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$.

Cas 1 : n impair ($n = 2m+1$). Seule racine réelle : 1.

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n(X-1)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{2}{n} \frac{X\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 1}{X^2 - 2X\cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1}$$

Cas 2 : n pair ($n = 2m$). Racines réelles : 1 et -1. Le coefficient pour -1 (obtenu pour $k = m$) est $\frac{-1}{n(X+1)}$.

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n(X-1)} - \frac{1}{n(X+1)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2}{n} \frac{X\cos(\frac{2k\pi}{n}) - 1}{X^2 - 2X\cos(\frac{2k\pi}{n}) + 1}$$