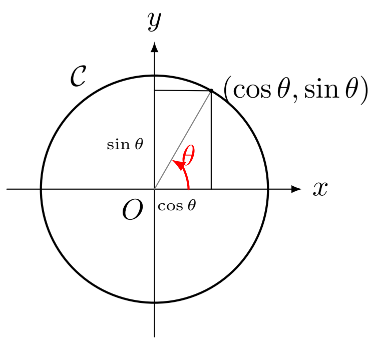
Ch. 2. Nombres complexes

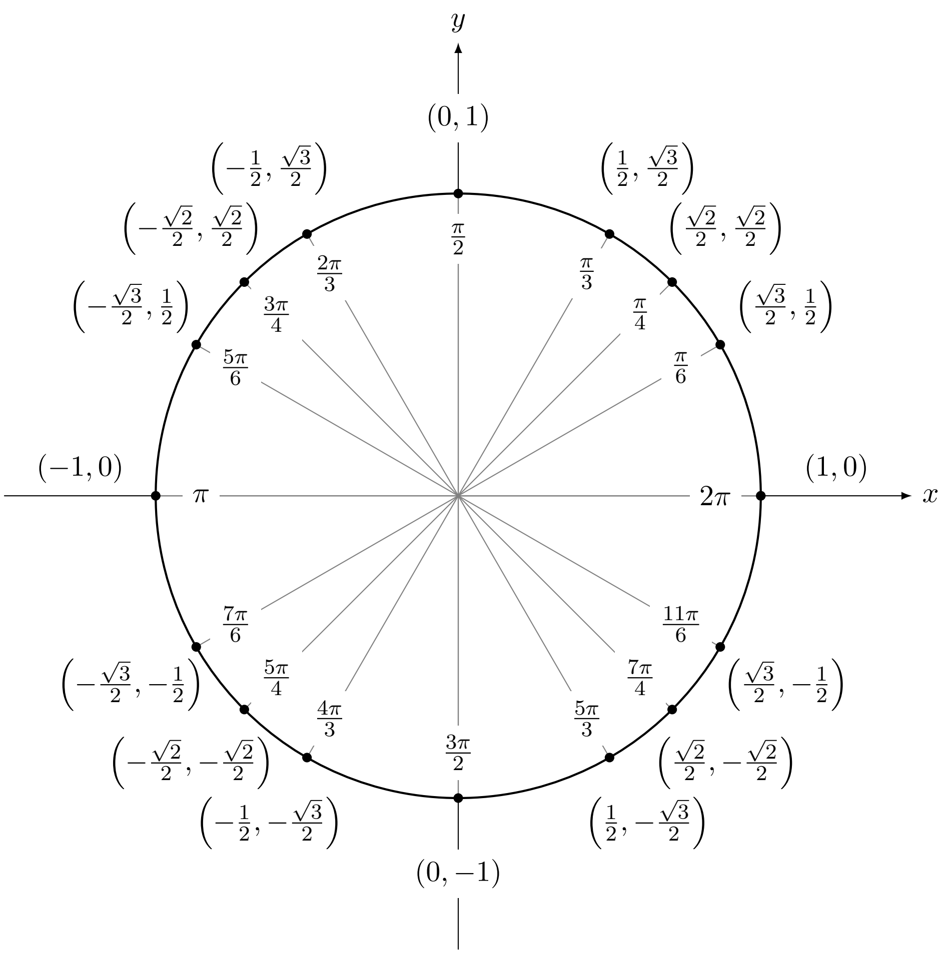
Plan
0. Rappels de trigonométrie
I. L'ensemble des nombres complexes
II. Racines et puissances n-ième d'un nombre complexe
III. Applications à la géométrie plane
IV. Théorème fondamental de l'algèbre

0. Rappels de trigonométrie

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'origine O de rayon 1. On rappelle que l'on peut illustrer à l'aide de $\mathcal{C}$ les notions de cosinus et de sinus. On appelle ce cercle le cercle trigonométrique.



Valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique :



Parité de cosinus et de sinus
Pour tout réel θ,

- $\cos -\theta = \cos\theta$
- $\sin -\theta = -\sin\theta$

Formules d'addition de cosinus et de sinus
Pour tous réels θ et θ',

- $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$
- $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

Formules de duplication de cosinus et de sinus
Pour tout réel θ,

- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

Proposition

Pour tout réel θ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Linéarisation du carré Pour tout réel θ,

- $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni des opérations suivantes :

- **Addition** : Pour tous (a_1, b_1) et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a_1, b_1)+(a_2, b_2) = (a_1+a_2,\ b_1+b_2)$;
- **Multiplication** : Pour tous (a_1, b_1) et $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a_1, b_1).(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$.

Concernant cette addition, on peut remarquer que :

- *L'addition est associative et commutative* : Pour tous (a_1, b_1), (a_2, b_2) et $(a_3, b_3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}((a_1,b_1)+(a_2,b_2))+(a_3,b_3) &= (a_1+a_2,\ b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\ &= (a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3)\\ &= (a_1,b_1)+(a_2+a_3,\ b_2+b_3)\\ &= (a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))\end{aligned}$$
et $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2,\ b_1+b_2) = (a_2+a_1,\ b_2+b_1) = (a_2,b_2)+(a_1,b_1)$.
- $(0,0)$ *est élément neutre pour l'addition* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a,b)+(0,0) = (a+0,\ b+0) = (a,b) = (0+a,\ 0+b) = (0,0)+(a,b)$.
- *Existence d'un opposé pour l'addition* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a,b)+(-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0) = (-a,-b)+(a,b)$.

Concernant cette multiplication, on peut remarquer que :

- *La multiplication est associative et commutative* : Pour tous (a_1, b_1), (a_2, b_2) et $(a_3, b_3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}((a_1,b_1).(a_2,b_2)).(a_3,b_3) &= (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2).(a_3,b_3)\\ &= ((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3,\ (a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3)\\ &= (a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,\quad a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)\\ &= (a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(b_2a_3+a_2b_3),\ a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3))\\ &= (a_1,b_1).(a_2a_3-b_2b_3,\ b_2a_3+a_2b_3)\\ &= (a_1,b_1).((a_2,b_2).(a_3,b_3))\end{aligned}$$

et $(a_1,b_1).(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)=(a_2a_1-b_2b_1,\ a_2b_1+b_2a_1)=(a_2,b_2).(a_1,b_1)$.

- $(1,0)$ *est élément neutre pour la multiplication* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a,b).(1,0)&=(a\times 1-b\times 0,\ a\times 0+b\times 1)\\&=(a,b)=(1\times a-0\times b,\ 0\times a+1\times b)\\&=(1,0).(a,b).\end{aligned}$$

- *Existence d'un inverse pour la multiplication* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$, $(a,b).\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=\left(a.\frac{a}{a^2+b^2}-b.\frac{-b}{a^2+b^2},\ a.\frac{-b}{a^2+b^2}+b.\frac{a}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\ \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right).(a,b)$.

Enfin, on retrouve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(a_1,b_1).((a_2,b_2))+(a_3,b_3))&=(a_1,b_1).(a_2+a_3,b_2+b_3)\\&=(a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3),\ a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3))\\&=((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1a_3-b_1b_3),\ (a_1b_2+b_1a_2)+(a_1b_3+b_1a_3))\\&=(a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3,\ a_1b_3+b_1a_3)\\&=(a_1,b_1).(a_2,b_2)+(a_1,b_1).(a_3,b_3).\end{aligned}$$

Avec toutes ces propriétés, on dit que l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication précédemment définies est un corps. On l'appelle **corps des complexes** et on le note $\mathbb{C}$.

Notation dans $\mathbb{C}$: Le corps des complexes utilise généralement la notation $a+ib$.
Soit $z=(a,\ b)\in\mathbb{C}$ tel que défini précédemment. On a :

$$\begin{aligned}(a,\ b)&=(a,\ 0)+(0,\ b)\\&=(a,\ 0)+(0,\ 1).(0,\ b)\end{aligned}$$

On pose $i=(0,1)$. Alors pour tout $(a,\ b)\in\mathbb{C}$, on a : $(a,\ b)=(a,\ 0).(1,0)+i.(0,\ b)$. On associe alors au complexe $(a,\ b)$ l'écriture $a+ib$.
On remarque que $i^2=(-1,\ 0)$.

2. Écriture (ou forme) algébrique

Proposition Unicité de l'écriture algébrique

Soit $z\in\mathbb{C}$. z s'écrit de manière unique sous la forme $a+ib$ avec a et b réels. Cette écriture est appelée *écriture (ou forme) algébrique* de z.

DÉMONSTRATION

L'unicité vient de la définition de la notation $a+ib$ avec a et b réels dans $\mathbb{C}$ correspondant au couple (a,b). □

Corollaire

- Soient $x,\ y\in\mathbb{R}$. $x+iy=0$ si et seulement si $x=0$ et $y=0$.
- Soient a, b, c et d des réels. $a+ib=c+id$ si et seulement si $a=c$ et $b=d$.

Définition Parties réelles et imaginaires

Soient a et b deux réels. On pose $z=a+ib$ un nombre complexe. On dit que a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et que b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarques

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b = 0$ alors $z = a \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$ alors $z = ib$, on dit alors que z est *imaginaire pur*. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Propriétés Addition et multiplication

Soient z et s' deux nombres complexes et $a + ib$ et $a' + ib'$ leurs écritures algébriques respectives.

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;
- $zz' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$;
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Propriétés Linéarité des parties réelles et imaginaires

Soient z et s' deux nombres complexes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

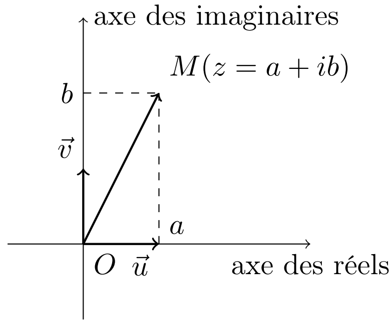
- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$;
- $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$;
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$;
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$.

3. Représentation géométrique des nombres complexes

On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition-Proposition

On associe à tout nombre complexe z d'écriture algébrique $a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$ le point M de coordonnées $(a,\ b)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z détermine M de manière unique et inversement. Le nombre z est appelé *affixe* du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Sa partie réelle est l'abscisse de M et sa partie imaginaire l'ordonnée de M. On notera $M(z)$ le point M d'affixe z.
On définit ainsi le plan complexe.



Propriétés

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

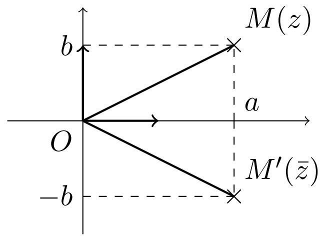
- Soient deux points $M(z)$ et $M'(z')$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à $z' - z$.
- Soient deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$. L'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ est égal à $z + z'$.
- Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit un vecteur $\vec{w}(z)$. L'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est égal à kz.
- Soient deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$. Alors $\vec{w} = \vec{w}'$ si et seulement si $z = z'$.

4. Nombre complexe conjugué

Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+ib$. On appelle *conjugué* de z le nombre $a-ib$ et on le note $\bar{z}$.

Interprétation géométrique
Dans le plan complexe, $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels.



Propriétés

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

DÉMONSTRATION

On pose $z = a+ib$ et $z' = c+id$ leurs écritures algébriques respectives.

- $\bar{z} = a - ib$, donc $\bar{\bar{z}} = a - (-ib) = a + ib = z$;
- $\overline{z+z'} = \overline{a+ib+c+id} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = a-ib+c-id = \bar{z}+\bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = (ac-bd)-i(ad+bc) = a(c-id) - ib(c-id) = (a-ib)(c-id) = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- Si $z \neq 0$, $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{1} = 1 = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$, donc $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.

Propriétés

Soient $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$;

DÉMONSTRATION

On pose $z = a+ib$ son écriture algébrique.

- $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(a+ib+a-ib) = a$
- $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2-}(a+ib-(a-ib)) = b$

Propriété Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Soient $z \in \mathbb{C}$. Alors

- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$;
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\bar{z}$;

Démonstration

On pose $z = a + ib$ son écriture algébrique.
Supposons que $z \in \mathbb{R}$, donc $b = 0$ et $z = a + i \times 0 = a$. Donc $\bar{z} = a - i \times 0 = a$.
Supposons que $z = \bar{z}$, donc $a + ib = a - ib$ donc $a = a$ et $b = -b$, i.e. $b = 0$.
Supposons que $z \in i\mathbb{R}$, donc $a = 0$ et $z = 0 + ib = ib$. Donc $\bar{z} = 0 - ib = -ib = -z$.
Supposons que $z = -\bar{z}$, donc $a + ib = -(a - ib)$ donc $a = -a$ et $b = b$, i.e. $a = 0$. $\square$

5. Module d'un nombre complexe

A. Définition et propriétés

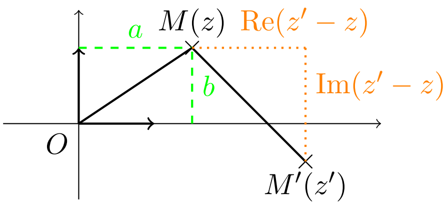
Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ d'écriture algébrique $a + ib$.
On appelle *module* de z et on note $\mid z \mid$ le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $b = 0$ et $z = a$. Alors $\mid z \mid = \sqrt{a^2} = \mid a \mid$. La notation du module est donc cohérente avec la notation de la valeur absolue.

Interprétation géométrique
On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$ et M et M' les points d'affixe z et z' respectivement. Alors $OM = \mid z \mid$ et $MM' = \mid z' - z \mid$.



Propriétés

Soient $z,\ \ z' \in \mathbb{C}$.

- $\mid \bar{z} \mid = \mid z \mid$.
- $\mid zz' \mid = \mid z \mid\mid z' \mid$. En particulier, si $z = \lambda \in \mathbb{R}$, $\mid \lambda z' \mid = \mid \lambda \mid\mid z' \mid$.
- si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Démonstration

On pose $z = a + ib$ et $z' = c + id$, avec $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

- $|\bar{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- $$\begin{aligned} |zz'| &= |(ac - bd) + i(ad + bc)| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= |z||z'| \end{aligned}$$

- Si $z \neq 0$, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1 = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$ donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

DÉMONSTRATION

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.

- Si $z = 0$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.
  Si $z \neq 0$, alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $a^2 \neq 0$ ou $b^2 \neq 0$ donc $a^2 + b^2 > 0$. Ainsi $|z| > 0$ et donc $|z| \neq 0$.
  Ainsi $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 - (i)^2 b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\bar{z}$.
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Exemple

$z = 5 - 3i$ alors $\frac{1}{z} = \frac{5+3i}{34}$.

Attention ! De manière générale, si z et $z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \neq |z| + |z'|$

Exemple

Si $z = 2 + i$ et $z' = 1 - i$, $|z + z'| = |3| = 3$ et $|z| + |z'| = \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Propriété

Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$.

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\
&= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\
&= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z}
\end{aligned}$$

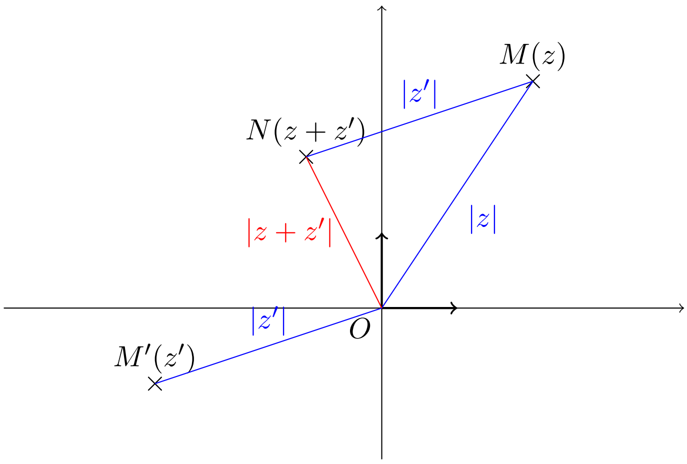
On pose $t = \bar{z}z'$ donc $\bar{t} = z\bar{z}'$. Ainsi $z\bar{z}' + z'\bar{z} = t + \bar{t} = 2\,\mathrm{Re}(t) = 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z')$.
Donc $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$. □

Proposition Inégalité triangulaire

Pour tous $z,\ z' \in \mathbb{C}$,

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Interprétation géométrique
On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$ tels que $z = 2 + 3i$ et $z' = -3 - i$. On pose M et M' les points d'affixe z et z' respectivement.
On note N le point d'affixe $z + z'$.



Pour démontrer l'inégalité triangulaire, nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Démonstration

$z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Or pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$. Donc $|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|b| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. □

Démonstration Inégalité triangulaire

On a $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$ et $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}z'| + |z'|^2$.
En utilisant le lemme précédent, on a donc que $(|z| + |z'|)^2 \geq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(\bar{z}z')| + |z'|^2$
et donc que $(|z| + |z'|)^2 \geq |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2 = |z+z'|^2$ donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$. □

B. Nombres complexes de module 1

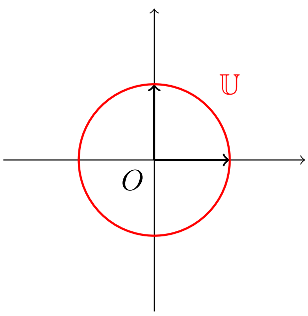
Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

Soit $z \in \mathbb{U}$ donc par définition, $|z| = 1$. Donc si on pose M point d'affixe z dans le plan complexe, alors $OM = 1$, donc M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Interprétation géométrique



Propriétés

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$.

- $\bar{z} \in \mathbb{U}$

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Proposition Caractérisation des éléments de $\mathbb{U}$

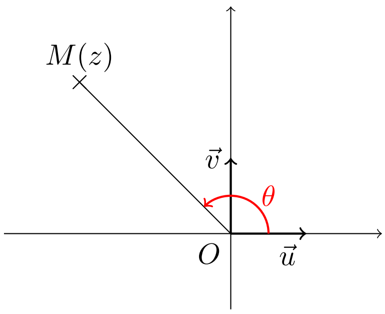
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, z est un élément de $\mathbb{U}$ si et seulement si $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

DÉMONSTRATION

Supposons $z \in \mathbb{U}$ donc $|z| = 1$. Comme $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
Inversement, supposons que $\frac{1}{z} = \bar{z}$. Donc $z \times \frac{1}{z} = z\bar{z} = |z|^2$. Donc $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$, i.e. $z \in \mathbb{U}$. □

6. Argument d'un nombre complexe

Interprétation géométrique
Soit M un point d'affixe z dans le plan complexe P.



M peut être aussi défini par la longueur OMet l'angle $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On considère le point M d'affixe z.
On appelle *argument de* z, et on le note $\mathrm{Arg}(z)$, toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Remarques

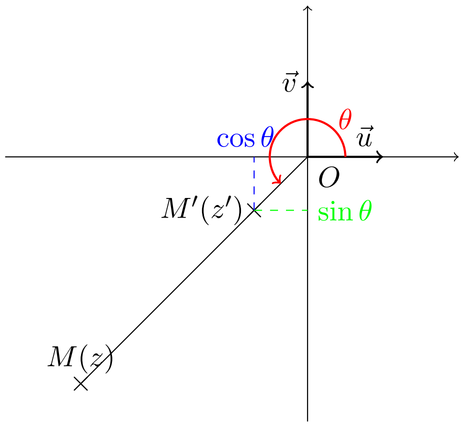
- On utilise généralement la mesure de l'angle entre $[0, 2\pi[$.
- L'argument est défini à $2k\pi$ près, i.e. modulo 2π.

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $\theta = \arg(z)$.
Alors $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$.

DÉMONSTRATION

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z|\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)$.
On pose $z' = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$, alors $|z'| = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)^2$, i.e. $|z'| = \frac{\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2}{|z|^2} = 1$. Donc $z' \in \mathbb{U}$, de plus $\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \leq 1$ et $\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \leq 1$. Donc $M'(z')$ appartient au cercle trigonométrique. Donc $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ par définition de l'écriture algébrique. □



Règles de calcul :
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $z_1 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv 0 \mod \pi$
- $z_1 \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$
- $\operatorname{Arg}(-z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \pi \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}(\bar{z_1}) \equiv -\operatorname{Arg}(z_1) \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\operatorname{Arg}(z_1) \mod 2\pi$

Démonstration

On pose $\theta_1 = \arg(z_1)$ et $\theta_2 = \arg(z_2)$.

- $z_1 \in \mathbb{R}$ ssi $M(z_1)$ se trouve sur l'axe des réels ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \pi[2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0[\pi]$
- $z_1 \in i\mathbb{R}$ ssi $M(z_1)$ se trouve sur l'axe des imaginaires ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
- $M_1(-z_1)$ est le symétrique de $M(z_1)$ par rapport à O donc $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM_1}$ donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{M_1O}) \equiv \pi[2\pi]$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ soit $\operatorname{Arg}(-z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \pi \mod 2\pi$.
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)}{|z_1|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_1)}{|z_1|}\right)\left(\frac{\operatorname{Re}(z_2)}{|z_2|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_2)}{|z_2|}\right)$
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{|z_1||z_2|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{|z_1||z_2|}\right) = |z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$. Donc $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.
- $\operatorname{Arg}(z_1\bar{z_1}) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(\bar{z_1}) = \operatorname{Arg}(|z_1|) \equiv 0[2\pi]$ donc $\operatorname{Arg}(\bar{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$
- De même $\operatorname{Arg}\left(z_1\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(1) \equiv 0[2\pi]$ donc $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

7. Écritures polaire et exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $r = |z|$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.
Alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée écriture (ou forme) polaire (ou trigonométrique).
Dans cette écriture, r est un réel *positif* et est unique, θ est un réel déterminé à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

A. Fonction exponentielle complexe

Proposition

La fonction

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & z = a + ib \mapsto e^{a}(\cos b + i \sin b) \end{aligned}$$

est un prolongement de la fonction exponentielle réelle.
Cette fonction est appelée *exponentielle complexe* et est notée e^{z}.

Propriété

Pour tous $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}.$$

Démonstration

On pose $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$. Alors $z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$.
Donc $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{a+c}(\cos(b + d) + i \sin(b + d)) = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{c}((\cos b \cos d - \sin b \sin d) + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)) = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{c}(\cos b(\cos d + i \sin d) + i^2 \sin b \sin d + i \sin b \cos d) = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{c}(\cos b(\cos d + i \sin d) + i \sin b(\cos d + i \sin d)) = \mathrm{e}^{a}\mathrm{e}^{c}(\cos b + i \sin b)(\cos d + i \sin d) = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$. □

Corollaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{-z} = (\mathrm{e}^{z})^{-1}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{pz} = (\mathrm{e}^{z})^{p}$.

Corollaire Cas des imaginaires purs

Pour tous $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{i(\theta_1+\theta_2)} = \mathrm{e}^{i\theta_1}\mathrm{e}^{i\theta_2}$.
Pour tous $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{e}^{ip\theta} = (\mathrm{e}^{i\theta})^{p}$.

Propriété

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

Démonstration

$\mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{0}(\cos\theta + i \sin\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$.
$\overline{\mathrm{e}^{i\theta}} = \cos\theta - i \sin\theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$ □

B. Ecriture exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note $r = |z|$ et θ un argument de z. Alors z peut s'écrire $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.

Proposition Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition Fomule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^{n} = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Démonstration

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\mathrm{e}^{i\theta})^n = \mathrm{e}^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$. □

II. Racines et puissances n^{e} d'un nombre complexe

1. Équation du second degré

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche les « racines carrées de z_0 » (« racines 2^{e} de z_0 »), c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Remarque

L'équation $z^2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution $z = 0$

Démonstration

Il est clair que 0 est une solution.

On suppose par l'absurde que $z \neq 0$ et $z^2 = 0$. En multipliant deux fois de suite chaque membre de l'égalité $z^2 = 0$ par $\frac{1}{z}$, on en déduit que $1 = 0$. Contradiction. □

Proposition (racines carrées en coordonnées polaires)

Soit $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a deux solutions qui sont : $\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration

Cela découle de l'égalité suivante : $z^2 - z_0 = (z - \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(z + \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}))$. □

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Les racines carrées de $1 + \mathrm{i}$ sont : $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Proposition (racines carrées en coordonnées cartésiennes)

Soit $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \left\{\begin{array}{cc} x^2 - y^2 = x_0 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = y_0 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ \boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \text{(égalité des modules, redondante)} \end{array}\right. .$$

Ce point de vue permet de résoudre l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, en commençant par chercher x^2 et y^2 avec une condition de signe pour xy.

Démonstration

L'équivalence est immédiate. L'affirmation de la fin découle ensuite de :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \left\{\begin{array}{l} |x| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + x_0} \\ |y| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - x_0} \\ \mathrm{sg}(xy) = \mathrm{sg}(y_0) \quad \text{si } y_0 \neq 0 \end{array}\right. .$$

Parmi les $\underbrace{2}_{\text{cas } z_0 = 0}$ ou 4 nombres complexes z déduit des deux premières égalités, seuls $\underbrace{1}_{\text{cas } z_0 = 0}$ ou 2 nombres complexes (opposés) réalisent la dernière condition. □

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac$ et fixe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$\boxed{-\tfrac{b}{2a} \text{ si } \Delta = 0, \quad \text{ou,} \quad \tfrac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \tfrac{-b+\delta}{2a} \text{ (distinctes) si } \Delta \neq 0}.$$

Démonstration

Cela découle de l'égalité suivante : $az^2+bz+c = a\Big((z+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\delta}{2a})^2\Big)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. □

2. Puissance n^{e}

Notation

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On pose : $z^0 = 1$ et $z^n = \overbrace{z \times \cdots \times z}^{n \text{ termes (récurrence)}}$ quand $n \geq 1$.
On note ensuite : $z^n = \frac{1}{z^{-n}}$ quand $n < 0$ et $z \neq 0$.

Lorsque $p, q \in \mathbb{N}$, ou $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $z \neq 0$, on obtient facilement :

$$z^p\, z^q = z^{p+q} \quad \text{et} \quad (z^p)^q = z^{pq}.$$

Remarque

Les propriétés habituelles des sommes partielles des suites arithmétiques et géométriques de nombres réels restent valables pour les suites de nombres complexes (cf. la suite du cours).

Par exemple, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on a :

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Notation

(a) On note : $\boxed{0! = 1}$ et $\boxed{n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n}$ « factorielle n », quand $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(b) On note : $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \overset{\text{si } k \neq 0}{=} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}}$ « k parmi n », quand $n, k \in \mathbb{N}$ et $k \leq n$.

Proposition

On a :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ quand } n, k \in \mathbb{N} \text{ vrifient } 1 \leq k \leq n.$$

Cela donne un algorithme pour construire la table des $\binom{n}{k}$, appelée « triangle de Pascal »

Démonstration

On a : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{k}{k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)\cdots 1} + \frac{n-k+1}{k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)\cdots 1} = \frac{n+1}{k} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+2)}{(k-1)\cdots 1}$. □

Proposition « formule du binôme de Newton »

Soient $u, v \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On notera $\sum_{k=0}^{n} z_k := z_0 + \cdots + z_n$ lorsque $z_0, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

On a : $\boxed{(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} u^n + \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} u^{n-1} v + \binom{n}{2} u^{n-2} v^2 + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n}}_{1} v^n}.$

Démonstration

On effectue une récurrence sur n.

- (i) On a : $(u+v)^0 = 1 = \binom{0}{0} u^0 v^0$.
- (ii) On suppose la formule vraie pour un certain $n \geq 0$. On a :

$$(u+v)^{n+1} = u\,(u+v)^n + v\,(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{n+1-k} v^k + \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} u^{n-k'} v^{k'+1}$$
$$\{=\}_{\text{CV } k = l \text{ et } k'+1 = l} \underbrace{\binom{n}{0}}_{\binom{n+1}{0}} u^{n+1} + \sum_{l=1}^{n} \underbrace{\left(\binom{n}{l} + \binom{n}{l-1}\right)}_{\binom{n+1}{l}} u^{n+1-l} v^l + \underbrace{\binom{n}{n}}_{\binom{n+1}{n+1}} v^{n+1}.$$

Cela signifie que la formule est vraie pour l'exposant $n+1$.

- En conclusion la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. La formule du binôme permet de calculer les parties réelles $\cos(n\theta)$ et imaginaires et $\sin(n\theta)$ de $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ à l'aide des réels $\cos^k\theta$ et $\sin^k\theta$, avec $0 \leq k \leq n$.

2. La formule du binôme permet aussi d'exprimer $\cos^n\theta$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^n$ et $\sin^n\theta$ qui vaut $\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n$ à l'aide des réels $\cos(k\theta)$ et $\sin(k\theta)$, avec $0 \leq k \leq n$.

Exemple

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. On a : $\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\sin^2\theta$.
2. On a aussi : $\cos^3\theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{1}{4}\cos(3\theta) + \frac{3}{4}\cos\theta$.

3. Racine n^{e}

Dans ce paragraphe, on fixe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposition

Soit $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation $Z^n = z$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a n solutions qui sont :

$$Z_k := r^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad \text{où} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Démonstration

Il est clair que $Z = 0$ n'est pas solution de $Z^n = z$.

Soit $Z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de décomposition polaire $Z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}$. On a :

$$\begin{aligned}
Z^n = z &\iff R^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\Theta} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \\
&\iff R^n = r \quad \text{et} \quad n\Theta \equiv \theta\ [2\pi] \\
&\iff R = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad n\Theta = \theta + 2k\pi \\
&\iff R = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \Theta = \tfrac{\theta+2k\pi}{n}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $Z^n = z$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ est donc :

$$\mathscr{S} := \{Z_k\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}, \text{ où } Z_k := r^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \qquad \text{avec}$$

$$\forall k, l \in \mathbb{Z} \qquad Z_l = Z_k \iff \left(\exists p \in \mathbb{Z} \quad \tfrac{\theta+2l\pi}{n} = \tfrac{\theta+2k\pi}{n} + 2p\pi\right) \iff (\exists p \in \mathbb{Z} \quad l = k + pn).$$

D'où : $\mathscr{S} = \{Z_0, \ldots, Z_{n-1}\}$ avec $Z_0, \ldots, Z_{n-1}$ distincts. □

Remarques

1. L'équation $Z^n = 0$ d'inconnue $Z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution 0 (clair).

2. Les images M_0, ..., M_{n-1} de Z_0, ..., Z_{n-1} (cf. la proposition) dans $\mathbb{R}^2$ sont les sommets d'un polygone régulier à n cotés inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $r^{\frac{1}{n}}$:

Définition

(a) On appelle racine n^{e} de l'unité toute solution de l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(b) On dit qu'une racine n^{e} de l'unité ζ est *une racine primitive* si le plus petit $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\zeta^l = 1$ est égal à n.

Proposition

(a) Les racines n^{e} de l'unité sont les n nombres complexes $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ où $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Leur somme, qui vaut donc $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k$, est égale à 0 quand $n \geq 2$.

(b) Soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. La racine n^{e} de l'unité $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ est une racine n^{e} primitive de l'unité si et seulement si le seul diviseur $d \in \mathbb{N}$ commun à k et n est 1.

Démonstration

(a) Le début découle de la proposition précédente.

Ensuite, lorsque $n \geq 2$: $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^{(n-1)+1}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}} = 0.$

(b) Soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Pour tout $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a :

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}\right)^l = 1 \iff \frac{2\pi k l}{n} \equiv 0 \; [2\pi] \iff n \text{ divise } kl.$$

Si le seul diviseur $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ commun à k et n est 1, alors la condition « n divise kl » implique que n divise l (décomposer n, k, et l en facteurs premiers) et a fortiori $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ est une racine n^{e} primitive de l'unité.

Si $d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ est un diviseur commun à k et n, alors $d \neq 0$ et $\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}\right)^{\frac{n}{d}} = 1$ puis $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi k}{n}}$ n'est pas une racine n^{e} primitive de l'unité. □

Exemple

Les racines 4^{e} de l'unité sont 1, i, -1, $-$i.

Les racines 4^{e} primitives de l'unité sont i et $-$i.

III. Applications à la géométrie plane

Soit $\mathcal{P}$ un plan.

A. Généralités

Définition Transformation du plan et transformation du plan complexe associée

Une *transformation T du plan* est une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M du plan associe un point M' du plan. On appelle *transformation du plan complexe associée à T* l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à tout $z \in \mathbb{C}$ associe $z' \in \mathbb{C}$ tel que si z est l'affixe du point M, z' est l'affixe du point M' tel que $T(M) = M'$.

Définition Point invariant

Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée. On dit que M, point du plan d'affixe z, est *invariant* par T si $T(M) = M$ que l'on peut aussi écrire $f(z) = z$.

Définition Isométrie

Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée. On dit que T est une *isométrie* si T conserve les distances, i.e. pour tous points $M_1,\ M_2$ du plan d'affixe respectivement z_1 et z_2, $\|\overrightarrow{T(M_1)T(M_2)}\| = \|\overrightarrow{M_1M_2}\|$ que l'on peut aussi écrire $|f(z_2) - f(z_1)| = |z_2 - z_1|$.

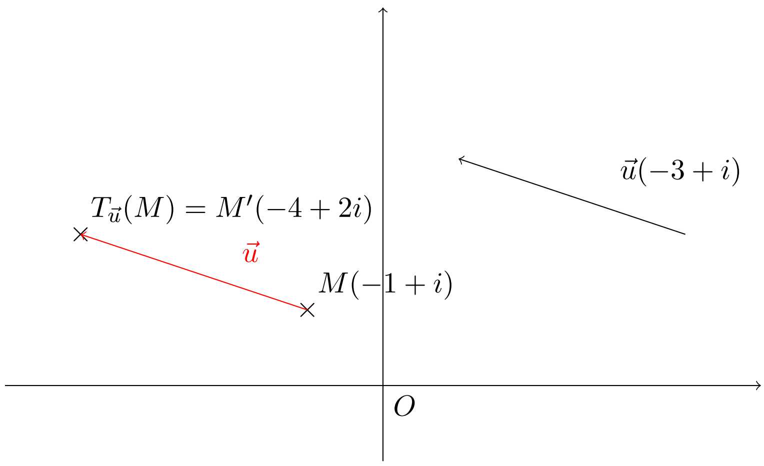
B. Translations

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe b (donc $b \neq 0$).
On appelle *translation de vecteur* $\vec{u}$ la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Sa transformation du plan complexe associée est l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, associe $f(z) = z + b$.

Notation

On notera $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b et t_b sa transformation du plan complexe associée.



Propriété

Une translation n'admet pas de point invariant.

Démonstration

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul d'affixe b. Considérons la translation $T_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ et t_b sa transformation du plan complexe associée. $T_{\vec{u}}$ admet un point invariant si et seulement si il existe un point M d'affixe z tel que $T_{\vec{u}}(M) = M$ i.e. $t_b(z) = z$.
Donc $z + b = z$, donc $b = 0$ ce qui contredit la définition de $\vec{u}$. □

Proposition Caractérisation des translations

Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée.
T est une translation si et seulement si $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) - f(z_2) = z_1 - z_2$ et $f(0) \neq 0$.

Démonstration

Supposons que T est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z + b$.
Soient $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$. On a donc $f(z_1) = z_1 + b$ et $f(z_2) = z_2 + b$, alors $f(z_1) - f(z_2) = z_1 - z_2$.

Inversement, supposons que $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) - f(z_2) = z_1 - z_2$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Donc $f(z) - f(0) = z - 0$ donc $f(z) = z + f(0)$ donc f est la transformation du plan complexe associée à une transition de vecteur d'affixe $f(0)$. □

Proposition

Toute translation est une isométrie.

Démonstration

Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
Soient M_1, M_2 deux points du plan d'affixe respectivement z_1 et z_2. Alors $t_b(z_1) = z_1 + b$ et $t_b(z_2) = z_2 + b$ donc $t_b(z_1) -_b (z_2) = z_1 - z_2$. On a donc $|t_b(z_1) - t_b(z_2)| = |z_1 - z_2|$. Donc T est une isométrie. □

Proposition Composée de deux translations

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respectivement $b,\ c \in \mathbb{C}^*$ tels que $a+b \neq 0$. La composée de deux translations de vecteur respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Démonstration

Soient t_b et t_c les transformations du plan complexe associées aux translations. Soit $z \in \mathbb{C}$, $t_b \circ t_c(z) = t_b(z + c) = z + c + b = z + b + c = t_c(z + b) = t_c \circ t_b(z)$. Donc la composée des deux translations de vecteur respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ d'affixe $b + c$. □

Corollaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixe respectivement $b,\ c \in \mathbb{C}^*$. Alors $T_{\vec{u}}$ et $T_{\vec{v}}$ commutent (i.e. $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$) et de manière similaire, t_b et t_c commutent (i.e. $t_b \circ t_c = t_c \circ t_b$).

C. Homothéties

Définition

Soient Ω un point du plan d'affixe ω et soit k un nombre réel non nul.
On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport k* la transformation du plan qui à un point M d'affixe z associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$. Sa transformation du plan complexe associée est l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, associe $f(z) = \omega + k(z - \omega)$.

Notation

On notera $H_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k et $h_{\omega,k}$ sa transformation du plan complexe associée.

Remarque

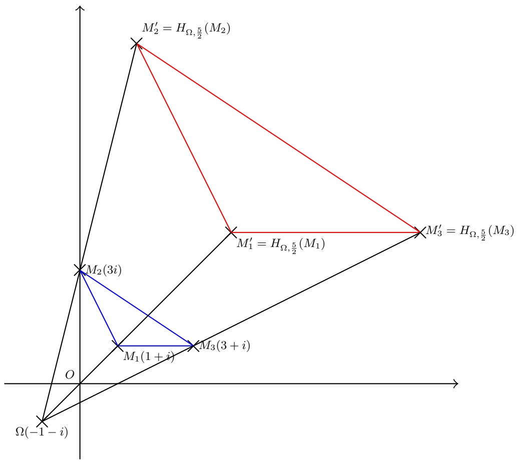
Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan.

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$. Une homothétie de rapport k admet un unique point invariant, son centre.

Démonstration

Soient Ω un point du plan d'affixe ω et soit k un nombre réel non nul et différent de 1. Soient $H_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k et $h_{\omega,k}$ sa transformation du plan complexe associée.
Supposons que M d'affixe z est un point invariant de $H_{\Omega,k}$. On a donc $h_{\omega,k}(z) = z$ i.e. $\omega + k(z - \omega) = z$ donc $z(1-k) = \omega(1-k)$. Par hypothèse, $k \neq 1$ donc $1-k \neq 0$ donc $z = \omega$. L'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k admet donc Ω comme unique point invariant. □



Homothétie de centre Ω et de rapport 2

Définition

On appelle *homothétie-translation* une transformation du plan qui est une homothétie ou une translation.

Proposition Caractérisation des homothéties-translations

Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée.
T est une homothétie-translation si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.

Démonstration

Supposons que T est une homothétie-translation. Si T est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b non nul, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z + b$ ce qui est de la forme annoncée. Si T est une homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k, réel non nul, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega + k(z - \omega) = kz + (1 - k)\omega$ ce qui est de la forme annoncée.

Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.
Supposons $a = 1$,

- si $b \neq 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = z + b$ et f est la transformation du plan complexe associée à la translation de vecteur d'affixe b.
- si $b = 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = z$ et f est l'identité du plan soit une homothétie de rapport 1.

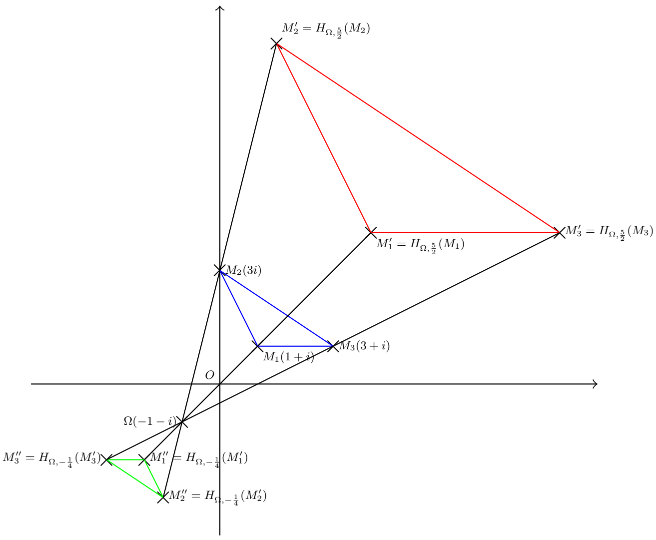
Supposons maintenant $a \neq 1$. Regardons si f admet un point invariant. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $f(\omega) = \omega$ i.e. $\omega = a\omega + b$ et donc $\omega = \frac{b}{1-a}$ (défini parce que $a \neq 1$).
Soit $z \in \mathbb{C}$. $f(z) = az + b = \omega - \omega + a(z - \omega + \omega) + b = \omega + a(z - \omega) + b + a\omega - \omega = \omega + a(z-\omega) + b + (a-1)\omega = \omega + a(z-\omega) + b + (a-1)\frac{b}{1-a} = \omega + a(z-\omega) + b - b = \omega + a(z-\omega)$.
Donc f est la transformation du plan complexe associée à l'homothétie de centre Ω d'affixe ω et de rapport k. $\square$

Proposition Caractérisation des homothéties

Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée. Soit $k \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.
T est une homothétie de rapport k si et seulement si $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) - f(z_2) = k(z_1 - z_2)$.

Démonstration

Supposons que T est une homothétie de rapport k et de centre Ω un point du plan d'affixe ω. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega + k(z - \omega)$.



Composée d'homothéties de même centre Ω et de rapport $\frac{5}{2}$ et $-\frac{1}{4}$ respectivement

Soient $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, on a donc $f(z_1) = \omega + k(z_1 - \omega)$ et $f(z_2) = \omega + k(z_2 - \omega)$, alors $f(z_1) - f(z_2) = k(z_1 - z_2)$.

Inversement, supposons que $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) - f(z_2) = k(z_1 - z_2)$.
Soit Ω un point du plan d'affixe ω.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Donc $f(z) - f(0) = k(z - 0)$ donc $f(z) = kz + f(0)$ et donc comme $k \neq 1$, f est la transformation du plan complexe associée à une homothétie de rapport k. □

Propriété

La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie. Plus précisément, $H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'} = H_{\Omega,k+k'}$.

Démonstration

Soient $h_{\omega,k}$ et $h_{\omega,k'}$ les transformations du plan complexe associées respectivement aux homothéties $H_{\Omega,k}$ et $H_{\Omega,k'}$ avec Ω d'affixe ω.
Soit $z \in \mathbb{C}$. $h_{\omega,k} \circ h_{\omega,k'}(z) = h_{\omega,k}(\omega + k'(z - \omega)) = \omega + k(\omega + k'(z - \omega) - \omega) = \omega + kk'(z - \omega)$ et comme $k, k' \in \mathbb{R}^*$, $kk' \in \mathbb{R}^*$.
De plus on remarque que $h_{\omega,k'} \circ h_{\omega,k}(z) = h_{\omega,k'}(\omega + k(z - \omega)) = \omega + k'(\omega + k(z - \omega) - \omega) = \omega + k'k(z - \omega) = h_{\omega,k} \circ h_{\omega,k'}(z)$. □

Corollaire

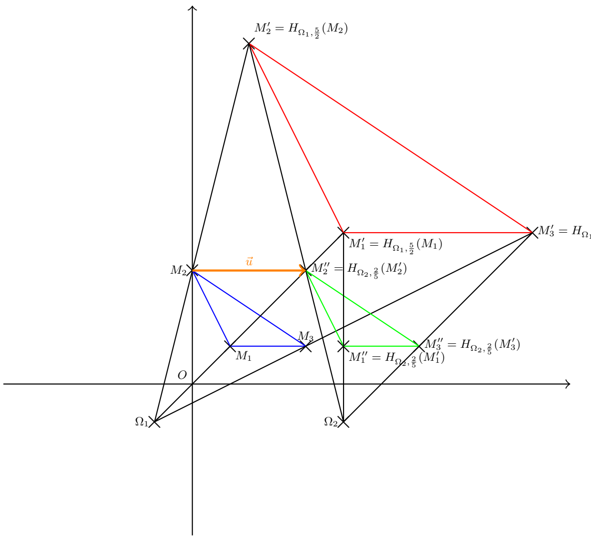
Deux homothéties de même centre commutent.

Propriété

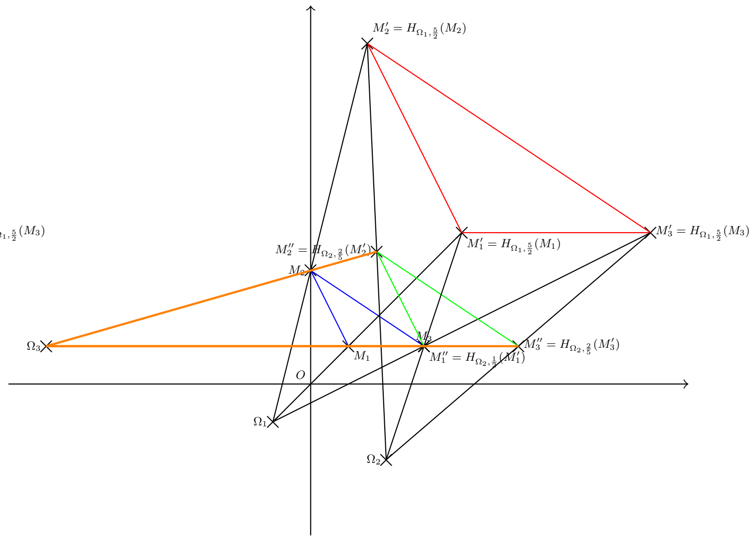
La composée de deux homothéties-translations est une homothétie-translation.

Démonstration

Soient T_1 et T_2 deux homothéties-translations et f_1 et f_2 leur transformation du plan complexe associées respectivement. On pose a_1 et a_2 deux réels non nuls et $b_1,\ b_2$ deux nombres complexes tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_1(z) = a_1 z + b_1$ et $f_2(z) = a_2 z + b_2$. Alors $f_1 \circ f_2(z) = f_1(a_2 z + b_2) = a_1(a_2 z + b_2) + b_1 = a_1 a_2 z + (a_1 b_2 + b_1)$. Comme $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}^*$, $a_1 a_2 \in \mathbb{R}^*$ et $a_1 b_2 + b_1 \in \mathbb{C}$, ce qui est la transformation du plan complexe associée à une homothétie-translation. □



$H_{\Omega_2,\frac{2}{5}} \circ H_{\Omega_1,\frac{5}{2}} = t_{\vec{u}}$ avec $\vec{u}$ d'affixe 3



$H_{\Omega_2,\frac{1}{2}} \circ H_{\Omega_1,\frac{5}{2}} = H_{\Omega_3,\frac{5}{4}}$

Propriété Composée de deux homothéties

Soient Ω_1 et Ω_2 deux points du plan d'affixe respectivement ω_1 et ω_2 et soient k_1 et k_2 deux nombres réels non nuls.
La composée de l'homothétie de centre Ω_2 et de rapport k_2 avec l'homothétie de centre Ω_1 et de rapport k_1 est :

- si $k_1k_2 = 1$, une translation de vecteur d'affixe $(1-k_2)(\omega_2-\omega_1)$,
- si $k_1k_2 \neq 1$, une homothétie de rapport k_1k_2 et de centre le point d'affixe $\frac{(1-k_2)\omega_2+k_2(1-k_1)\omega_1}{1-k_1k_2}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}$.
$h_{\omega_2,k_2} \circ h_{\omega_1,k_1}(z) = h_{\omega_2,k_2}(\omega_1 + k_1(z-\omega_1)) = \omega_2 + k_2(\omega_1 + k_1(z-\omega_1) - \omega_2) = k_1k_2z + (1-k_2)\omega_2 + (k_2 - k_2k_1)\omega_1$.

- si $k_1k_2 = 1$, alors $h_{\omega_2,k_2} \circ h_{\omega_1,k_1}(z) = z + (1-k_2)\omega_2 + (k_2-1)\omega_1 = z + (1-k_2)(\omega_2-\omega_1)$, c'est donc une translation de vecteur d'affixe $(1-k_2)(\omega_2-\omega_1)$,
- si $k_1k_2 \neq 1$, $h_{\omega_2,k_2} \circ h_{\omega_1,k_1}$ est une homothétie de rapport k_1k_2. On pose ω affixe du point invariant de $h_{\omega_2,k_2} \circ h_{\omega_1,k_1}$.
  Donc $h_{\omega_2,k_2} \circ h_{\omega_1,k_1}(\omega) = \omega$ donc $\omega = k_1k_2\omega + (1-k_2)\omega_2 + (k_2-k_2k_1)\omega_1$ donc $\omega = \frac{(1-k_2)\omega_2+k_2(1-k_1)\omega_1}{1-k_1k_2}$.

D. Rotations

Définition

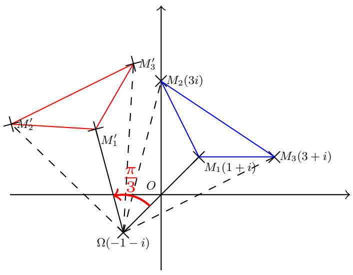
Soient Ω un point du plan d'affixe ω et soit θ un nombre réel.
On appelle *rotation de centre* Ω *et d'angle* θ la transformation du plan qui à un point M d'affixe z associe le point M' tel que $\Omega M = \Omega M'$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \theta \mod 2\pi$. Sa transformation du plan complexe associée est l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, associe $f(z) = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.

Notation

On notera $R_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ et $r_{\omega,\theta}$ sa transformation du plan complexe associée.

Remarque

Une rotation d'angle 0 mod 2π est l'identité du plan.



Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Propriété

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$. Une rotation d'angle θ admet un unique point invariant, son centre.

Démonstration

Soient Ω un point du plan d'affixe ω et soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$. Soient $R_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ et $r_{\omega,\theta}$ sa transformation du plan complexe associée. Supposons que M d'affixe z est un point invariant de $R_{\Omega,\theta}$. On a donc $r_{\omega,k}(z) = z$ i.e. $\omega + e^{i\theta}(z-\omega) = z$ donc $z(1-e^{i\theta}) = \omega(1-e^{i\theta})$. Par hypothèse, $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ donc $1-\theta \neq 0$ donc $z = \omega$. L'homothétie de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ admet donc Ω comme unique point invariant. $\square$

Définition

On appelle *rotation-translation* une transformation du plan qui est une rotation ou une translation.

Proposition Caractérisation des rotations-translations

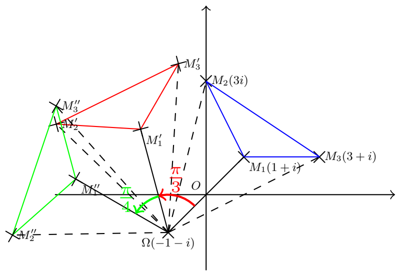
Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée.
T est une rotation-translation si et seulement si il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| = 1$ (i.e. $a \in \mathbb{U}$) et $b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.

Démonstration

Supposons que T est une rotation-translation. Si T est une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b non nul, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z + b$ ce qui est de la forme annoncée. Si T est une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ, réel non nul, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega + e^{i\theta}(z-\omega) = e^{i\theta}z + (1-e^{i\theta})\omega$ ce qui est de la forme annoncée.
Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{U}$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.
Supposons $a = 1$,

- si $b \neq 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = z + b$ et f est la transformation du plan complexe associée à la translation de vecteur d'affixe b.
- si $b = 0$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ $f(z) = z$ et f est l'identité du plan soit une rotation d'angle $0 \bmod 2\pi$.

Supposons maintenant $a \neq 1$. Donc il existe $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$ tel que $a = e^{i\theta}$. Regardons si f admet un point invariant. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $f(\omega) = \omega$ i.e. $\omega = a\omega + b$ et donc $\omega = \frac{b}{1-a}$ (défini parce que $a \neq 1$).
Soit $z \in \mathbb{C}$. $f(z) = az+b = \omega - \omega + a(z-\omega+\omega) + b = \omega + a(z-\omega) + b + a\omega - \omega = \omega + a(z-\omega) + b + (a-1)\omega = \omega + a(z-\omega) + b + (a-1)\frac{b}{1-a} = \omega + a(z-\omega) + b - b = \omega + a(z-\omega) = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$.
Donc f est la transformation du plan complexe associée à la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ. $\square$



Composée d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$

Proposition Caractérisation des rotations

Soient T une transformation du plan et f sa transformation du plan complexe associée. Soit $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$.
T est une rotation d'angle θ si et seulement si $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) - f(z_2) = e^{i\theta}(z_1 - z_2)$.

Démonstration

Soit $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$.
Supposons que T est une rotation d'angle θ et de centre Ω un point du plan d'affixe ω. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$.
Soient $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, on a donc $f(z_1) = \omega + e^{i\theta}(z_1 - \omega)$ et $f(z_2) = \omega + e^{i\theta}(z_2 - \omega)$, alors $f(z_1) - f(z_2) = e^{i\theta}(z_1 - z_2)$.

Inversement, supposons que $\forall z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},\ f(z_1) - f(z_2) = e^{i\theta}(z_1 - z_2)$.
Soit Ω un point du plan d'affixe ω.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Donc $f(z)-f(0) = e^{i\theta}(z-0)$ donc $f(z) = e^{i\theta}z+f(0)$ et donc comme $\theta \not\equiv 0 \bmod 2\pi$, f est la transformation du plan complexe associée à une rotation d'angle θ. □

Proposition

Toute rotation est une isométrie.

Démonstration

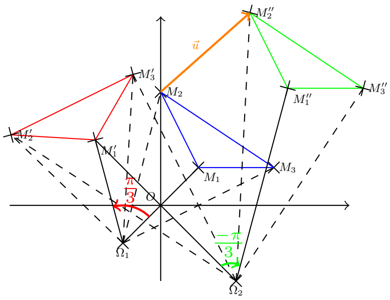
Soit R la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ et r sa transformation du plan complexe associée.
Soient $z_1,\ z_2$ deux nombres complexes. Alors $r_{\omega,\theta}(z_1) = e^{i\theta}z_1 + b$ et $r_{\omega,\theta}(z_2) = e^{i\theta}z_2 + b$ donc $r_{\omega,\theta}(z_1) - r_{\omega,\theta}(z_2) = e^{i\theta}z_1 - z_2$. On a donc $|r_{\omega,\theta}(z_1) - r_{\omega,\theta}(z_2)| = |e^{i\theta}(z_1 - z_2)| = |e^{i\theta}||(z_1 - z_2)| = |(z_1 - z_2)|$. Donc R est une isométrie. □

Propriété

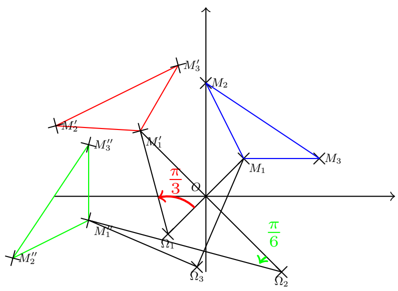
La composée de deux rotations de même centre est une rotation. Plus précisément, $R_{\Omega,\theta} \circ R_{\Omega,\theta'} = R_{\Omega,\theta+\theta'}$.

Démonstration

Soient $r_{\omega,\theta}$ et $r_{\omega,\theta'}$ les transformations du plan complexe associées respectivement aux rotations $R_{\Omega,\theta}$ et $R_{\Omega,\theta'}$ avec Ω d'affixe ω.
Soit $z \in \mathbb{C}$. $r_{\omega,\theta} \circ r_{\omega,\theta'}(z) = r_{\omega,\theta}(\omega + e^{i\theta'}(z-\omega)) = \omega + e^{i\theta}(\omega + e^{i\theta'}(z-\omega) - \omega) = \omega + e^{i\theta}e^{i\theta'}(z-\omega) = \omega + e^{i(\theta+\theta')}(z - \omega)$
De plus on remarque que $r_{\omega,\theta'} \circ r_{\omega,\theta}(z) = r_{\omega,\theta'}(\omega + e^{i\theta}(z - \omega)) = \omega + e^{i\theta'}(\omega + e^{i\theta}(z - \omega) - \omega) = \omega + e^{i(\theta'+\theta)}(z - \omega) = r_{\omega,\theta} \circ r_{\omega,\theta'}(z)$. □



$R_{\Omega_2,\frac{-\pi}{3}} \circ R_{\Omega_1,\frac{\pi}{3}} = t_{\vec{u}}$



$R_{\Omega_2,\frac{\pi}{6}} \circ R_{\Omega_1,\frac{\pi}{3}} = R_{\Omega_3,\frac{\pi}{2}}$

Corollaire

Deux rotations de même centre commutent.

Propriété

La composée de deux rotations-translations est une rotation-translation.

Démonstration

Soient T_1 et T_2 deux rotations-translations et f_1 et f_2 leur transformation du plan complexe associées respectivement. On pose a_1 et a_2 deux complexes de module 1 et b_1, b_2 deux nombres complexes tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_1(z) = a_1 z + b_1$ et $f_2(z) = a_2 z + b_2$. Alors $f_1 \circ f_2(z) = f_1(a_2 z + b_2) = a_1(a_2 z + b_2) + b_1 = a_1 a_2 z + (a_1 b_2 + b_1)$. Comme a_1, $a_2 \in \mathbb{U}$, $a_1 a_2 \in \mathbb{U}$ et $a_1 b_2 + b_1 \in \mathbb{C}$, ce qui est la transformation du plan complexe associée à une rotation-translation. □

Propriété Composée de deux rotations

Soient Ω_1 et Ω_2 deux points du plan d'affixe respectivement ω_1 et ω_2 et soient θ_1 et θ_2 deux nombres réels.
La composée de la rotation de centre Ω_2 et d'angle θ_2 avec la rotation de centre Ω_1 et d'angle θ_1 est :

- si $\theta_1 \equiv -\theta_2 \mod 2\pi$, une translation de vecteur d'affixe $(1 - e^{i\theta_2})(\omega_2 - \omega_1)$,
- si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \mod 2\pi$, une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$ et de centre le point d'affixe $\frac{\omega_2(1-e^{i\theta_2})+e^{i\theta_2}\omega_1(1-e^{i\theta_1})}{1-e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$.

Démonstration

Soient r_{ω_1,θ_1} et r_{ω_2,θ_2} les transformations du plan complexe associées respectivement aux rotations R_{Ω_1,θ_1} et R_{Ω_2,θ_2} avec Ω_1 et Ω_2 d'affixe respectivement ω_1 et ω_2.
Soit $z \in \mathbb{C}$.
$r_{\omega_2,\theta_2} \circ r_{\omega_1,\theta_1}(z) = r_{\omega_2,\theta_2}(\omega_1 + e^{i\theta_1}(z - \omega_1)) = \omega_2 + e^{i\theta_2}(\omega_1 + e^{i\theta_1}(z - \omega_1) - \omega_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}z + \omega_2(1 - e^{i\theta_2}) + e^{i\theta_2}\omega_1(1 - e^{i\theta_1})$

- si $\theta_1 + \theta_2 \equiv 0 \mod 2\pi$ soit $\theta_1 \equiv -\theta_2 \mod 2\pi$, alors $r_{\omega_2,\theta_2} \circ r_{\omega_1,\theta_1}(z) == e^{i(\theta_1+\theta_2)}z + \omega_2(1 - e^{i\theta_2}) + (e^{i\theta_2} - e^{i(\theta_1+\theta_2)})\omega_1 = z + (1 - e^{i\theta_2})(\omega_2 - \omega_1)$, c'est donc une translation de vecteur d'affixe $(1 - e^{i\theta_2})(\omega_2 - \omega_1)$,
- si $\theta_1 + \theta_2 \not\equiv 0 \mod 2\pi$, $r_{\omega_2,\theta_2} \circ r_{\omega_1,\theta_1}$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. On pose ω affixe du point invariant de $r_{\omega_2,\theta_2} \circ r_{\omega_1,\theta_1}$.
Donc $r_{\omega_2,\theta_2} \circ r_{\omega_1,\theta_1}(\omega) = \omega$ donc $\omega = e^{i(\theta_1+\theta_2)}\omega + \omega_1(1 - e^{i\theta_1}) + e^{i\theta_1}\omega_2(1 - e^{i\theta_2})$ donc $\omega = \frac{\omega_2(1-e^{i\theta_2})+e^{i\theta_2}\omega_1(1-e^{i\theta_1})}{1-e^{i(\theta_1+\theta_2)}}$.

IV. Théorème de d'Alembert-Gauss ou Théorème fondamental de l'algèbre

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ (i.e. les coefficients a_n, a_{n-1}, ..., a_1 et a_0 sont des nombres complexes).

Théorème Théorème de d'Alembert-Gauss aussi appelé Théorème fondamental de l'algèbre

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Alors P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, i.e. $\exists r \in \mathbb{C}$ tel que $P(r) = 0$.

Corollaire

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Alors P peut être factorisé en un produit de facteurs linéaires (i.e. de degré 1).