Corrigé de la Feuille d'exercices n°3 – Polynome et Arithmetique

Année 2025-26

Exercice 1

Exercice 12 Soient $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 - 1$. Trouver deux polynomes U, $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

Solution

Étape 1 : Application de l'algorithme d'Euclide pour le PGCD
L'algorithme d'Euclide effectue des divisions polynomiales successives jusqu'à ce que le reste soit constant. Notez que $\deg(A) = 7$ et $\deg(B) = 5$.
Étape 1.1 : Division de A par B

$$A = X^7 - X - 1$$
$$B = X^5 - 1$$

Quotient $Q_1 = X^2$ (car $X^7/X^5 = X^2$).

$$X^2 \cdot B = X^2(X^5 - 1) = X^7 - X^2$$

Reste $R_1 = A - Q_1B = (X^7 - X - 1) - (X^7 - X^2) = X^2 - X - 1$.

$$R_1 = X^2 - X - 1 \quad \text{(degré 2)}$$

Étape 1.2 : Division de B par R1

$$B = X^5 - 1$$
$$R_1 = X^2 - X - 1$$

Nous effectuons la division polynomiale longue (Ou vous pouvez utiliser la division longue comme nous l'avons fait en classe, c'était juste pour que ce soit plus pratique à taper) :

- Étape 1 : $X^5/X^2 = X^3$.
  $X^3 \cdot R_1 = X^3(X^2 - X - 1) = X^5 - X^4 - X^3$.
  Reste temp. : $B - X^3R_1 = (X^5 - 1) - (X^5 - X^4 - X^3) = X^4 + X^3 - 1$ (degré 4).
- Étape 2 (degré $4 \geq 2$) : $X^4/X^2 = X^2$.
  $X^2 \cdot R_1 = X^2(X^2 - X - 1) = X^4 - X^3 - X^2$.
  Reste temp. : $(X^4 + X^3 - 1) - (X^4 - X^3 - X^2) = 2X^3 + X^2 - 1$ (degré 3).

— Étape 3 (degré $3 \geq 2$) : $2X^3/X^2 = 2X$.
$2X \cdot R_1 = 2X(X^2 - X - 1) = 2X^3 - 2X^2 - 2X$.
Reste temp. : $(2X^3 + X^2 - 1) - (2X^3 - 2X^2 - 2X) = 3X^2 + 2X - 1$ (degré 2).

— Étape 4 (degré $2 = 2$) : $3X^2/X^2 = 3$.
$3 \cdot R_1 = 3(X^2 - X - 1) = 3X^2 - 3X - 3$.
Reste $R_2 = (3X^2 + 2X - 1) - (3X^2 - 3X - 3) = 5X + 2$ (degré 1).

Quotient $Q_2 = X^3 + X^2 + 2X + 3$.

$$R_2 = 5X + 2$$

Étape 1.3 : Division de R1 par R2

$$\begin{aligned} R_1 &= X^2 - X - 1 \\ R_2 &= 5X + 2 \end{aligned}$$

Division polynomiale (degré 2 $\div$ degré 1) :

— Étape 1 : $X^2/(5X) = \frac{1}{5}X$.
$\frac{1}{5}X \cdot R_2 = \frac{1}{5}X(5X + 2) = X^2 + \frac{2}{5}X$.
Reste temp. : $(X^2 - X - 1) - (X^2 + \frac{2}{5}X) = -X - \frac{2}{5}X - 1 = -\frac{7}{5}X - 1$ (degré 1).

— Étape 2 (degré $1 = 1$) : $(-\frac{7}{5}X)/(5X) = -\frac{7/5}{5} = -\frac{7}{25}$.
$-\frac{7}{25} \cdot R_2 = -\frac{7}{25}(5X + 2) = -\frac{35}{25}X - \frac{14}{25} = -\frac{7}{5}X - \frac{14}{25}$.
Reste $R_3 = (-\frac{7}{5}X - 1) - (-\frac{7}{5}X - \frac{14}{25}) = -1 + \frac{14}{25} = -\frac{25}{25} + \frac{14}{25} = -\frac{11}{25}$.

Quotient $Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25}$.

$$R_3 = -\frac{11}{25} \quad \text{(constante, degré 0)}$$

Étape 1.4 : Condition d'arrêt Le reste R_3 est une constante non nulle ($-\frac{11}{25}$), donc le PGCD(A, B) est une constante (A et B sont premiers entre eux). Nous pouvons continuer avec la partie étendue pour trouver U et V.

Étape 2 : Partie étendue (Remontée pour U et V)

Maintenant, nous remontons pour exprimer R_3 comme une combinaison linéaire de A et B : $R_3 = AU' + BV'$. Ensuite, comme nous voulons $= 1$, et que $R_3 = -\frac{11}{25}$, nous aurons $U = U' \cdot (-\frac{25}{11})$ et $V = V' \cdot (-\frac{25}{11})$.

Étape 2.1 : Partir de $R_3 = R_1 - Q_3R_2$

$$R_3 = R_1 - Q_3R_2$$

Étape 2.2 : Substituer $R_2 = B - Q_2R_1$

$$\begin{aligned} R_3 &= R_1 - Q_3(B - Q_2R_1) \\ &= R_1 - Q_3B + Q_3Q_2R_1 \\ &= (1 + Q_3Q_2)R_1 - Q_3B \end{aligned}$$

Étape 2.3 : Substituer $R_1 = A - Q_1B$

$$\begin{aligned} R_3 &= (1 + Q_3Q_2)(A - Q_1B) - Q_3B \\ &= (1 + Q_3Q_2)A - (1 + Q_3Q_2)Q_1B - Q_3B \\ &= (1 + Q_3Q_2)A - [(1 + Q_3Q_2)Q_1 + Q_3]B \end{aligned}$$

Donc :

$$U' = 1 + Q_3Q_2$$
$$V' = -[(1 + Q_3Q_2)Q_1 + Q_3]$$

Étape 2.4 : Calculer Q_3Q_2

$$Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25}$$
$$Q_2 = X^3 + X^2 + 2X + 3$$

— $\frac{1}{5}X \cdot Q_2 = \frac{1}{5}(X^4 + X^3 + 2X^2 + 3X) = \frac{1}{5}X^4 + \frac{1}{5}X^3 + \frac{2}{5}X^2 + \frac{3}{5}X$
— $-\frac{7}{25} \cdot Q_2 = -\frac{7}{25}X^3 - \frac{7}{25}X^2 - \frac{14}{25}X - \frac{21}{25}$

En combinant (dénominateur commun 25) :
— X^4 : $\frac{5}{25}$
— X^3 : $\frac{5}{25} - \frac{7}{25} = -\frac{2}{25}$
— X^2 : $\frac{10}{25} - \frac{7}{25} = \frac{3}{25}$
— X : $\frac{15}{25} - \frac{14}{25} = \frac{1}{25}$
— Constante : $-\frac{21}{25}$

$$Q_3Q_2 = \frac{5}{25}X^4 - \frac{2}{25}X^3 + \frac{3}{25}X^2 + \frac{1}{25}X - \frac{21}{25}$$

Étape 2.5 : Calculer $U' = 1 + Q_3Q_2$ $1 = \frac{25}{25}$. Le terme constant devient : $\frac{25}{25} - \frac{21}{25} = \frac{4}{25}$.

$$U' = \frac{5}{25}X^4 - \frac{2}{25}X^3 + \frac{3}{25}X^2 + \frac{1}{25}X + \frac{4}{25}$$

Ou écrit :

$$U' = \frac{1}{25}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)$$

Étape 2.6 : Calculer V' Rappel : $V' = -[U'Q_1 + Q_3]$.
— D'abord, $U'Q_1 = U' \cdot X^2 = \frac{1}{25}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2)$.
— Ajoutons $Q_3 = \frac{1}{5}X - \frac{7}{25} = \frac{5}{25}X - \frac{7}{25}$.
— La somme $[U'Q_1 + Q_3]$ est :
$\frac{5}{25}X^6 - \frac{2}{25}X^5 + \frac{3}{25}X^4 + \frac{1}{25}X^3 + \frac{4}{25}X^2 + \frac{5}{25}X - \frac{7}{25}$.

Donc $V' = -[\text{Somme}]$:

$$V' = \frac{1}{25}(-5X^6 + 2X^5 - 3X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X + 7)$$

Étape 2.7 : Mise à l'échelle pour obtenir = 1 Nous avons $R_3 = -\frac{11}{25} = AU' + BV'$. Pour obtenir 1, nous multiplions tout par $(-\frac{25}{11})$:

$$1 = A\left(U' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)\right) + B\left(V' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right)\right)$$

Calculons U et V :

$$\begin{aligned} U &= U' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= \left[\frac{1}{25}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)\right] \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\ &= -\frac{1}{11}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V &= V' \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\
&= \left[\frac{1}{25}(-5X^6 + 2X^5 - 3X^4 - X^3 - 4X^2 - 5X + 7)\right] \cdot \left(-\frac{25}{11}\right) \\
&= \frac{1}{11}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)
\end{aligned}
$$

Résultat final

$$U = -\frac{1}{11}(5X^4 - 2X^3 + 3X^2 + X + 4)$$

$$V = \frac{1}{11}(5X^6 - 2X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 + 5X - 7)$$

Vérification et remarques

— Vous pouvez utiliser un logiciel de calcul formel (comme Mathematica ou Sage) pour vérifier si $AU + BV$ est bien égal à 1.

— **Remarque :** U et V ne sont pas uniques. Toute solution de la forme $U' = U + BK$ et $V' = V - AK$ (où K est un polynôme quelconque) est également une solution. La solution trouvée est celle de degré minimal (pour U).