Corrigé partiel de la Feuille d'exercices n°1 – Arithmétique

Université Paris Cité – MM1

Année 2025-26

Bonjour à toutes et à tous,

Ce document contient les corrigés de certains exercices de la feuille d'arithmétique qui n'ont pas pu être traités en détail pendant la séance de travaux dirigés. L'objectif est de vous fournir des exemples de solutions rédigées pour vous aider dans vos révisions.

Quelques conventions de notation utilisées dans ce document :

— Le terme « entier » fait référence à un entier relatif ($n \in \mathbb{Z}$).
— Les « diviseurs » d'un entier peuvent être positifs ou négatifs.
— Les « diviseurs premiers » sont par convention positifs, car un nombre premier est lui-même défini comme un entier supérieur à 1.

N'hésitez pas à chercher les exercices par vous-mêmes avant de consulter les solutions. La réflexion personnelle est la clé de la progression en mathématiques. Si vous avez des questions sur un exercice spécifique, vous pouvez m'envoyer un e-mail à `cqin@imj-prg.fr` pour obtenir une piste ou une référence.

Je vous souhaite bon courage pour vos révisions et une excellente réussite aux examens.

Exercice 7

Exercice 1

Reste de 10^{1000} par 13.

Solution

On calcule les premières puissances de 10 modulo 13 :
- $10^1 \equiv 10 \equiv -3 (\mathrm{mod} 13)$
- $10^2 \equiv (-3)^2 = 9 (\mathrm{mod} 13)$
- $10^3 \equiv 9 \cdot 10 = 90 = 6 \cdot 13 + 12 \equiv 12 \equiv -1 (\mathrm{mod} 13)$

Avoir trouvé -1 est très utile, car en élevant au carré :
- $10^6 = (10^3)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod} 13)$.

Le cycle des puissances a une longueur de 6. On effectue la division euclidienne de l'exposant 1000 par 6 :

$$1000 = 6 \cdot 166 + 4.$$

Donc, $10^{1000} = 10^{6 \cdot 166 + 4} = (10^6)^{166} \cdot 10^4 (\mathrm{mod} 13)$.

$$10^{1000} \equiv 1^{166} \cdot 10^4 \equiv 10^4 \pmod{13}$$

On calcule $10^4 = 10^3 \cdot 10^1 \equiv (-1) \cdot (-3) \equiv 3 (\mathrm{mod} 13)$. Le reste de la division euclidienne de 10^{1000} par 13 est 3.

Exercice 8

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $5x \equiv 1 \pmod 7$
2. $x^2 \equiv 1 \pmod 7$

Solution

1. L'inverse de 5 mod 7 est 3 ($5 \times 3 = 15 \equiv 1$). On a $x \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod 7$.
2. On commence par ecririr $x = 7k + i$, avec $k,\ i \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq i < 7$, et on a $x^2 \equiv i^2 \pmod 7$. On teste les valeurs de 0 à 6 : $1^2 \equiv 1$ et $6^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$. Solutions : $x \equiv 1 \pmod 7$ et $x \equiv 6 \pmod 7$.

Exercice 12

Exercice 3

Déterminer $a \wedge b$ et une relation de Bézout $au + bv = a \wedge b$ pour les couples d'entiers (a, b) suivants (utiliser l'algorithme d'Euclide dès que nécessaire).

1. $(a, b) = (8911, 213)$
2. $(a, b) = (8, 12)$
3. $(a, b) = (169, 60)$
4. $(a, b) = (1444764, 8766)$

Solution

1. Soit $(a, b) = (8911, 213)$.

$$\begin{aligned}
8911 &= 41 \times 213 + 178 \\
213 &= 1 \times 178 + 35 \\
178 &= 5 \times 35 + 3 \\
35 &= 11 \times 3 + 2 \\
3 &= 1 \times 2 + 1 \\
2 &= 2 \times 1 + 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{pgcd}(8911, 213) = 1$.

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 1 \times 2 \\
&= 3 - 1 \times (35 - 11 \times 3) \\
&= 12 \times 3 - 35 \\
&= 12 \times (178 - 5 \times 35) - 35 \\
&= 12 \times 178 - 61 \times 35 \\
&= 12 \times 178 - 61 \times (213 - 178) \\
&= 73 \times 178 - 61 \times 213 \\
&= 73 \times (8911 - 41 \times 213) - 61 \times 213 \\
&= 73 \times 8911 - 3054 \times 213
\end{aligned}$$

2.
$$\mathrm{pgcd}(8, 12) = 4.$$

Relation de Bézout :
$$8u + 12v = 4.$$

On peut simplifier par 4 :
$$2u + 3v = 1.$$

Une solution évidente est
$$u = -1, \quad v = 1.$$

Vérification :
$$8(-1) + 12(1) = -8 + 12 = 4.$$
Donc
$$(u, v) = (-1, 1).$$

3. On utilise l'algorithme d'Euclide : $169 = 2 \times 60 + 49$
   $60 = 1 \times 49 + 11$
   $49 = 4 \times 11 + 5$
   $11 = 2 \times 5 + 1$. Le PGCD est 1. On remonte l'algorithme : $1 = 11 - 2 \times 5$
   $1 = 11 - 2 \times (49 - 4 \times 11) = 9 \times 11 - 2 \times 49$
   $1 = 9 \times (60 - 1 \times 49) - 2 \times 49 = 9 \times 60 - 11 \times 49$
   $1 = 9 \times 60 - 11 \times (169 - 2 \times 60) = 31 \times 60 - 11 \times 169$.
   La relation est $169(-11) + 60(31) = 1$.
4. Soit $(a, b) = (1444764, 8766)$.
$$\begin{aligned}
1444764 &= 164 \times 8766 + 7560 \\
8766 &= 1 \times 7560 + 1206 \\
7560 &= 6 \times 1206 + 324 \\
1206 &= 3 \times 324 + 234 \\
324 &= 1 \times 234 + 90 \\
234 &= 2 \times 90 + 54 \\
90 &= 1 \times 54 + 36 \\
54 &= 1 \times 36 + 18 \\
36 &= 2 \times 18 + 0
\end{aligned}$$
   Donc $\mathrm{pgcd}(1444764, 8766) = 18$.
$$\begin{aligned}
18 &= 54 - 36 \\
&= 54 - (90 - 54) = 2 \times 54 - 90 \\
&= 2 \times (234 - 2 \times 90) - 90 = 2 \times 234 - 5 \times 90 \\
&= 2 \times 234 - 5 \times (324 - 234) = 7 \times 234 - 5 \times 324 \\
&= 7 \times (1206 - 3 \times 324) - 5 \times 324 = 7 \times 1206 - 26 \times 324 \\
&= 7 \times 1206 - 26 \times (7560 - 6 \times 1206) = 163 \times 1206 - 26 \times 7560 \\
&= 163 \times (8766 - 7560) - 26 \times 7560 = 163 \times 8766 - 189 \times 7560 \\
&= 163 \times 8766 - 189 \times (1444764 - 164 \times 8766) \\
&= -189 \times 1444764 + (163 + 189 \times 164) \times 8766 \\
&= -189 \times 1444764 + 31159 \times 8766
\end{aligned}$$

Exercice 13

Exercice 4

On pose
$$a = 46848, \quad b = 2379, \quad c = 8633, \quad d = 4183.$$

Calcul de $a \wedge b$ et $c \wedge d$. Quelle méthode est la plus efficace entre l'algorithme d'Euclide et la décomposition en facteurs premiers ?

Solution

— **Algorithme d'Euclide :**

$$\begin{aligned} 46848 &= 19 \times 2379 + 1647 \\ 2379 &= 1 \times 1647 + 732 \\ 1647 &= 2 \times 732 + 183 \\ 732 &= 4 \times 183 + 0 \end{aligned}$$

$8633 = 2 \times 4183 + 267$
$4183 = 15 \times 267 + 178$
$267 = 1 \times 178 + 89$
$178 = 2 \times 89 + 0$. Le pgcd(c, d) est 89.

— **Décomposition en facteurs premiers :**

$$\begin{aligned} 46848 &= 2^8 \times 3 \times 61 \\ 2379 &= 3 \times 13 \times 61 \end{aligned}$$

Les facteurs communs sont 3 et 61 :

$$46848 \wedge 2379 = 3 \times 61 = 183$$

Il faut factoriser les nombres. On peut tester les diviseurs premiers. On trouve que 89 est premier. $8633 = 89 \times 97$ (97 est premier). $4183 = 89 \times 47$ (47 est premier). Le seul facteur commun est 89. Le pgcd est 89.

Pour des grands nombres, l'algorithme d'Euclide est nettement plus efficace car la décomposition en facteurs premiers peut être extrêmement longue si les facteurs sont grands.

Exercice 20

Exercice 5

1. Donner l'ensemble des diviseurs de 10, de 30, de 2^5 et de 36.
2. Combien y a-t-il de diviseurs de $5!$?
3. Quel est le nombre de diviseurs de 7, de 105, de 2020 et de 10000 ?
4. Donner la liste des diviseurs de 36 et de 100.

Solution

Pour un entier n dont la décomposition en facteurs premiers de sa valeur absolut est $|n| = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, le nombre de ses diviseurs positifs est donné par la formule $\tau(n) = 2(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$.

1. **Ensemble des diviseurs :**
   — Pour $10 = 2 \times 5$: $D(10) = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.
   — Pour $30 = 2 \times 3 \times 5$: $D(30) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$.
   — Pour $2^5 = 32$:$D(32) = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$.
   — Pour $36 = 2^2 \times 3^2$: $D(36) = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$.
2. **Nombre de diviseurs de** $5!$
   On décompose d'abord $5!$ en facteurs premiers :

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times (2^2) \times 5 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

   Le nombre de diviseurs positifs est $(3+1)(1+1)(1+1) = 4 \times 2 \times 2 = 16$. Le nombre total de diviseurs (positifs et négatifs) est donc de $2 \times 16 = 32$.
3. **Calcul du nombre de diviseurs :**
   — Pour 7 : C'est un nombre premier, il a donc 2 diviseurs positifs (1 et 7). Le nombre total de diviseurs est $2 \times 2 = 4$.
   — Pour $105 = 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$: Le nombre de diviseurs positifs est $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$. Le nombre total est $2 \times 8 = 16$.
   — Pour $2020 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 101^1$: Le nombre de diviseurs positifs est $(2+1)(1+1)(1+1) = 12$. Le nombre total est $2 \times 12 = 24$.
   — Pour $10000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4$: Le nombre de diviseurs positifs est $(4+1)(4+1) = 25$. Le nombre total est $2 \times 25 = 50$.
4. **Liste des diviseurs :**
   — Pour $36 = 2^2 \cdot 3^2$: $D(36) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$.
   — Pour $100 = 2^2 \cdot 5^2$: $D(100) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10, \pm 20, \pm 25, \pm 50, \pm 100\}$.

Exercice 21

Exercice 6

Donner tous les diviseurs premiers de 2025.

Solution

Pour trouver les diviseurs premiers d'un nombre, nous devons d'abord le décomposer en un produit de facteurs premiers. La décomposition de 2025 s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned} 2025 &= 5 \times 405 \\ &= 5 \times (5 \times 81) \\ &= 5^2 \times 9^2 \\ &= 5^2 \times (3^2)^2 \\ &= 3^4 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

La décomposition en facteurs premiers de 2025 est donc $3^4 \cdot 5^2$. Les diviseurs premiers sont les nombres premiers qui apparaissent comme bases dans cette décomposition. Par conséquent, les diviseurs premiers de 2025 sont **3** et **5**.