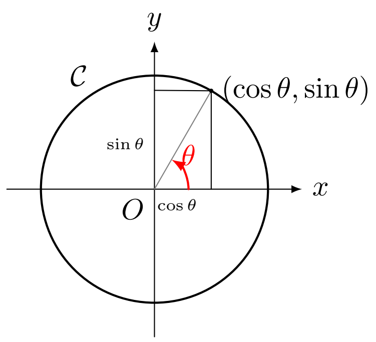
Ch. 2. Nombres complexes

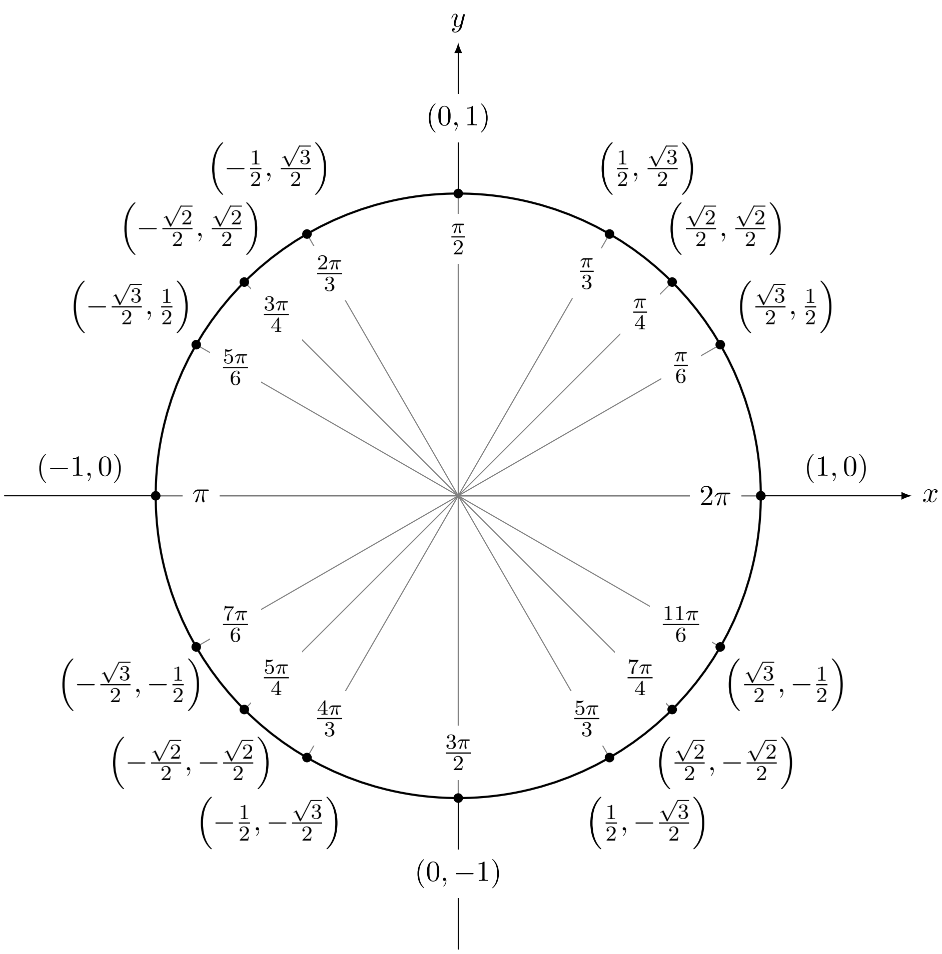
<u>Plan</u>

0. Rappels de trigonométrie

Soit $\mathcal{C}$ un cercle d'origine O de rayon 1. On rappelle que l'on peut illustrer à l'aide de $\mathcal{C}$ les notions de cosinus et de sinus. On appelle ce cercle le cercle trigonométrique.



Valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique :



Parité de cosinus et de sinus
Pour tout réel θ,

- $\cos -\theta = \cos\theta$
- $\sin -\theta = -\sin\theta$

Formules d'addition de cosinus et de sinus
Pour tous réels θ et θ',

- $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$
- $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$

Formules de duplication de cosinus et de sinus
Pour tout réel θ,

- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- $\sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$

Proposition

Pour tout réel θ, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Linéarisation du carré Pour tout réel θ,

- $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$
- $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

I. L'ensemble des nombres complexes

1. Construction de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni des opérations suivantes :

- **Addition** : Pour tous (a_1,b_1) et $(a_2,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2,\ b_1+b_2)$;
- **Multiplication** : Pour tous (a_1,b_1) et $(a_2,b_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a_1,b_1).(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2)$.

Concernant cette addition, on peut remarquer que :

- *L'addition est associative et commutative* : Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}((a_1,b_1)+(a_2,b_2))+(a_3,b_3) &= (a_1+a_2,\ b_1+b_2)+(a_3,b_3)\\ &= (a_1+a_2+a_3,\ b_1+b_2+b_3)\\ &= (a_1,b_1)+(a_2+a_3,\ b_2+b_3)\\ &= (a_1,b_1)+((a_2,b_2)+(a_3,b_3))\end{aligned}$$
et $(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2,\ b_1+b_2) = (a_2+a_1,\ b_2+b_1) = (a_2,b_2)+(a_1,b_1)$.
- $(0,0)$ *est élément neutre pour l'addition* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a,b)+(0,0) = (a+0,\ b+0) = (a,b) = (0+a,\ 0+b) = (0,0)+(a,b)$.
- *Existence d'un opposé pour l'addition* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(a,b)+(-a,-b) = (a-a,b-b) = (0,0) = (-a,-b)+(a,b)$.

Concernant cette multiplication, on peut remarquer que :

- *La multiplication est associative et commutative* : Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}((a_1,b_1).(a_2,b_2)).(a_3,b_3) &= (a_1a_2-b_1b_2,\ a_1b_2+b_1a_2).(a_3,b_3)\\ &= ((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3,\ (a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3)\\ &= (a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,\ \ a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3)\\ &= (a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(b_2a_3-a_2b_3),\ a_1(a_2b_3+b_2a_3)+b_1(a_2a_3-b_2b_3))\\ &= (a_1,b_1).(a_2a_3-b_2b_3,\ b_2a_3-a_2b_3)\\ &= (a_1,b_1).((a_2,b_2).(a_3,b_3))\end{aligned}$$

et $(a_1,b_1).(a_2,b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2) = (a_2a_1 - b_2b_1,\ a_2b_1 + b_2a_1) = (a_2,b_2).(a_1,b_1)$.

- $(1,0)$ *est élément neutre pour la multiplication* : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a,b).(1,0) &= (a \times 1 - b \times 0,\ a \times 0 + b \times 1)\\ &= (a,b) = (1 \times a - 0 \times b,\ 0 \times a + 1 \times b)\\ &= (1,0).(a,b).\end{aligned}$$

- *Existence d'un inverse pour la multiplication* : Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $(a,b) \neq (0,0)$, $(a,b).\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(a.\frac{a}{a^2+b^2} - b.\frac{-b}{a^2+b^2},\ a.\frac{-b}{a^2+b^2} + b.\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2},\ \frac{-ab+ab}{a^2+b^2}\right) = (1,0) = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right).(a,b)$.

Enfin, on retrouve la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :
Pour tous (a_1,b_1), (a_2,b_2) et $(a_3,b_3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(a_1,b_1).((a_2,b_2)) + (a_3,b_3)) &= (a_1,b_1).(a_2+a_3, b_2+b_3)\\ &= (a_1(a_2+a_3) - b_1(b_2+b_3),\ a_1(b_2+b_3) + b_1(a_2+a_3))\\ &= ((a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1a_3 - b_1b_3),\ (a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1b_3 + b_1a_3))\\ &= (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3,\ a_1b_3 + b_1a_3)\\ &= (a_1,b_1).(a_2,b_2) + (a_1,b_1).(a_3,b_3).\end{aligned}$$

Avec toutes ces propriétés, on dit que l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ muni de l'addition et la multiplication précédemment définies est un corps. On l'appelle **corps des complexes** et on le note $\mathbb{C}$.

Notation dans $\mathbb{C}$: Le corps des complexes utilise généralement la notation $a+ib$.
Soit $z = (a,\ b) \in \mathbb{C}$ tel que défini précédemment. On a :

$$\begin{aligned}(a,\ b) &= (a,\ 0) + (0,\ b)\\ &= (a,\ 0) + (0,\ 1).(0,\ b)\end{aligned}$$

On pose $i = (0,1)$. Alors pour tout $(a,\ b) \in \mathbb{C}$, on a : $(a,\ b) = (a,\ 0).(1,0) + i.(0,\ b)$. On associe alors au complexe $(a,\ b)$ l'écriture $a+ib$.
On remarque que $i^2 = (-1,\ 0)$.

2. Écriture (ou forme) algébrique

Proposition Unicité de l'écriture algébrique

Soit $z \in \mathbb{C}$. z s'écrit de manière unique sous la forme $a+ib$ avec a et b réels. Cette écriture est appelée *écriture (ou forme) algébrique* de z.

DÉMONSTRATION

L'unicité vient de la définition de la notation $a+ib$ avec a et b réels dans $\mathbb{C}$ correspondant au couple (a,b).

Corollaire

- Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$. $x+iy = 0$ si et seulement si $x=0$ et $y=0$.
- Soient a, b, c et d des réels. $a+ib = c+id$ si et seulement si $a=c$ et $b=d$.

Définition Parties réelles et imaginaires

Soient a et b deux réels. On pose $z = a+ib$ un nombre complexe. On dit que a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$ et que b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Remarques

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- Si $b = 0$ alors $z = a \in \mathbb{R}$, donc $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- Si $a = 0$ alors $z = ib$, on dit alors que z est *imaginaire pur*. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Propriétés Addition et multiplication

Soient z et s' deux nombres complexes et $a + ib$ et $a' + ib'$ leurs écritures algébriques respectives.

- $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$;
- $zz' = (a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$;
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$

Propriétés Linéarité des parties réelles et imaginaires

Soient z et s' deux nombres complexes et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

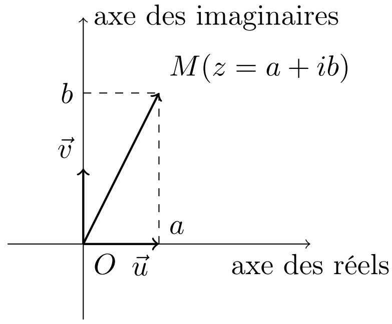
- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$;
- $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$;
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \, \mathrm{Re}(z)$;
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \, \mathrm{Im}(z)$.

3. Représentation graphique des nombres complexes

On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition-Proposition

On associe à tout nombre complexe z d'écriture algébrique $a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$ le point M de coordonnées $(a,\ b)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z détermine M de manière unique et inversement. Le nombre z est appelé *affixe* du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Sa partie réelle est l'abscisse de M et sa partie imaginaire l'ordonnée de M. On notera $M(z)$ le point M d'affixe z.
On définit ainsi le plan complexe.



Propriétés

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

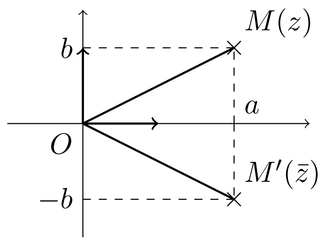
- Soient deux points $M(z)$ et $M'(z')$. L'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égal à $z - z'$.
- Soient deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$. L'affixe du vecteur $\vec{w} + \vec{w}'$ est égal à $z + z'$.
- Soit $k \in \mathbb{R}$ et soit un vecteur $\vec{w}(z)$. L'affixe du vecteur $k\vec{w}$ est égal à kz.
- Soient deux vecteurs $\vec{w}(z)$ et $\vec{w}'(z')$. Alors $\vec{w} = \vec{w}'$ si et seulement si $z = z'$.

4. Nombre complexe conjugué

Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+ib$. On appelle *conjugué* de z le nombre $a-ib$ et on le note $\bar{z}$.

Interprétation géométrique
Dans le plan complexe, $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à l'axe des réels.



Propriétés

Soient z et $z' \in \mathbb{C}$.

- $\bar{\bar{z}} = z$;
- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Démonstration

On pose $z = a+ib$ et $z' = c+id$ leurs écritures algébriques respectives.

- $\bar{z} = a - ib$, donc $\bar{\bar{z}} = a - (-ib) = a + ib = z$;
- $\overline{z+z'} = \overline{a+ib+c+id} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = a+c-i(b+d) = a-ib+c-id = \bar{z}+\bar{z'}$;
- $\overline{zz'} = \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd)+i(ad+bc)} = ac-bd) - i(ad+bc) = a(c-id) - ib(c-id) = (a-ib)(c-id) = \bar{z} \times \bar{z'}$;
- Si $z \neq 0$, $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{1} = 1 = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$, donc $\frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$.

Propriétés

Soient $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$;

Démonstration

On pose $z = a+ib$ son écriture algébrique.

- $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(a+ib+a-ib) = a$
- $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2-}(a+ib-(a-ib)) = b$

Propriété Caractérisation des réels et des imaginaires purs

Soient $z \in \mathbb{C}$. Alors

- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $z = \bar{z}$;
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $z = -\bar{z}$;

Démonstration

On pose $z = a + ib$ son écriture algébrique.
Supposons que $z \in \mathbb{R}$, donc $b = 0$ et $z = a + i \times 0 = a$. Donc $\bar{z} = a - i \times 0 = a$.
Supposons que $z = \bar{z}$, donc $a + ib = a - ib$ donc $a = a$ et $b = -b$, i.e. $b = 0$.
Supposons que $z \in i\mathbb{R}$, donc $a = 0$ et $z = 0 + ib = ib$. Donc $\bar{z} = 0 - ib = -ib = -z$.
Supposons que $z = -\bar{z}$, donc $a + ib = -(a - ib)$ donc $a = -a$ et $b = b$, i.e. $a = 0$. □

5. Module d'un nombre complexe

A. Définition et propriétés

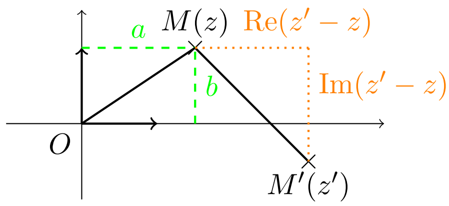
Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ d'écriture algébrique $a + ib$.
On appelle *module* de z et on note $\mid z \mid$ le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque

Si $z \in \mathbb{R}$, alors $b = 0$ et $z = a$. Alors $\mid z \mid = \sqrt{a^2} = \mid a \mid$. La notation du module est donc cohérente avec la notation de la valeur absolue.

Interprétation géométrique
On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$ et M et M' les points d'affixe z et z' respectivement. Alors $OM = \mid z \mid$ et $MM' = \mid z' - z \mid$.



Propriétés

Soient $z,\ \ z' \in \mathbb{C}$.

- $\mid \bar{z} \mid = \mid z \mid$.
- $\mid zz' \mid = \mid z \mid\mid z' \mid$. En particulier, si $z = \lambda \in \mathbb{R}$, $\mid \lambda z' \mid = \mid \lambda \mid\mid z' \mid$.
- si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Démonstration

On pose $z = a + ib$ et $z' = c + id$, avec $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$.

- $|\bar{z}| = |a - ib| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- $$\begin{aligned} |zz'| &= |(ac - bd) + i(ad + bc)| \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ &= |z||z'| \end{aligned}$$

- Si $z \neq 0$, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1 = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$ donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

Propriétés

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$
- $|z|^2 = z\bar{z}$
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

DÉMONSTRATION

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = a + ib$ avec $a,\ b \in \mathbb{R}$.

- Si $z = 0$, alors $|z| = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$.
  Si $z \neq 0$, alors $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ donc $a^2 \neq 0$ ou $b^2 \neq 0$ donc $a^2 + b^2 > 0$. Ainsi $|z| > 0$ et donc $|z| \neq 0$.
  Ainsi $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.
- $|z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 - (i)^2 b^2 = (a + ib)(a - ib) = z\bar{z}$.
- Si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Exemple

$z = 5 - 3i$ alors $frac1z = \frac{5+3i}{34}$.

Attention ! De manière générale, si z et $z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \neq |z| + |z'|$

Exemple

Si $z = 2 + i$ et $z' = 1 - i$, $|z + z'| = |3| = 3$ et $|z| + |z'| = \sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Propriété

Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$.

$$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$$

DÉMONSTRATION

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')(\overline{z + z'}) \\ &= (z + z')(\bar{z} + \bar{z}') \\ &= z\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z} + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + z\bar{z}' + z'\bar{z} \end{aligned}$$

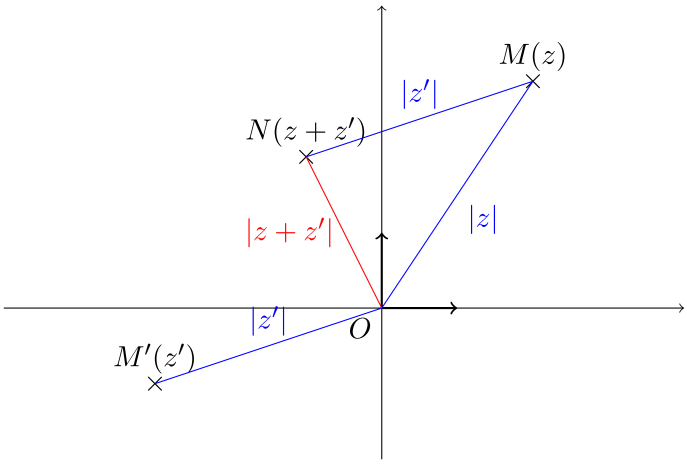
On pose $t = \bar{z}z'$ donc $\bar{t} = z\bar{z}'$. Ainsi $z\bar{z}' + z'\bar{z} = t + \bar{t} = 2\,\mathrm{Re}(t) = 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z')$.
Donc $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$.

Proposition Inégalité triangulaire

Pour tous $z,\ z' \in \mathbb{C}$,

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Interprétation géométrique
On se place dans le plan complexe $\mathcal{P}$ muni du repère $(O,\ \vec{u},\ \vec{v})$.
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$ tels que $z = 2 + 3i$ et $z' = -3 - i$. On pose M et M' les points d'affixe z et z' respectivement.
On note N le point d'affixe $z + z'$.



Pour démontrer l'inégalité triangulaire, nous allons utiliser le résultat suivant :

Lemme

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

Démonstration

$z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ alors $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Or pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$. Donc $|a| \leq \sqrt{a^2+b^2}$ et $|b| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

Démonstration Inégalité triangulaire

On a $|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2$ et $(|z|+|z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}||z'| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|\bar{z}z'| + |z'|^2$.
En utilisant le lemme précédent, on a donc que $(|z|+|z'|)^2 \geq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(\bar{z}z')| + |z'|^2$
et donc que $(|z|+|z'|)^2 \geq |z|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}z') + |z'|^2 = |z+z'|^2$ donc $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.

B. Nombres complexes de module 1

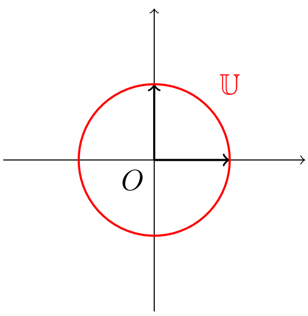
Notation

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque

Soit $z \in \mathbb{U}$ donc par définition, $|z| = 1$. Donc si on pose M point d'affixe z dans le plan complexe, alors $OM = 1$, donc M appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Interprétation géométrique



Propriétés

Soient $z, z' \in \mathbb{U}$.

- $\bar{z} \in \mathbb{U}$

- $zz' \in \mathbb{U}$
- $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$

Proposition Caractérisation des éléments de $\mathbb{U}$

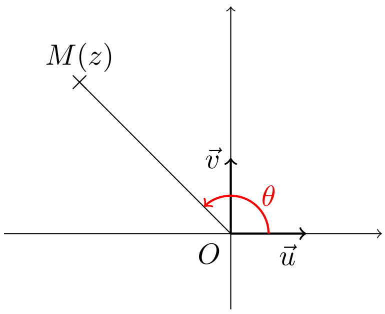
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, z est un élément de $\mathbb{U}$ si et seulement si $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Démonstration

Supposons $z \in \mathbb{U}$ donc $|z| = 1$. Comme $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, on a donc $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
Inversement, supposons que $\frac{1}{z} = \bar{z}$. Donc $z \times \frac{1}{z} = z\bar{z} = |z|^2$. Donc $|z|^2 = 1$ donc $|z| = 1$, i.e. $z \in \mathbb{U}$.

6. Argument d'un nombre complexe

Interprétation géométrique
Soit M un point d'affixe z dans le plan complexe P.



M peut être aussi défini par la longueur OMet l'angle $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On considère le point M d'affixe z.
On appelle *argument de z*, et on le note $\mathrm{Arg}(z)$, toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Remarques

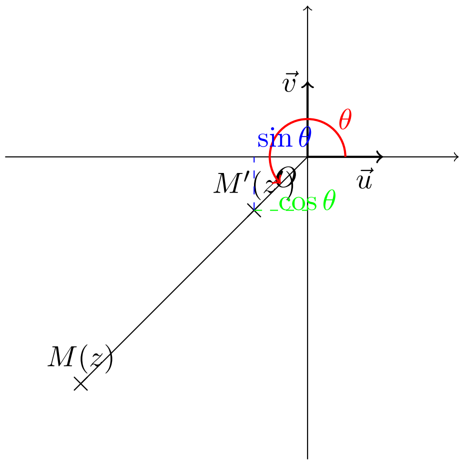
- On utilise généralement la mesure de l'angle entre $[0, 2\pi[$.
- L'argument est défini à $2k\pi$ près, i.e. modulo 2π.

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $\theta = \arg(z)$.
Alors $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$.

Démonstration

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
$z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z|\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\right)$.
On pose $z' = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} + i\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$, alors $|z'| = \left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\right)^2 + (frac\mathrm{Im}(z)|z|)^2$, i.e. $|z'| = \frac{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}{|z|^2} = 1$.
Donc $z' \in \mathbb{U}$, de plus $\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \leq 1$ et $\frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \leq 1$. Donc $M'(z()$ appartient au cercle trigonométrique.
Donc $\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ par définition de l'écriture algébrique.



Règles de calcul :
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $z_1 \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv 0 \mod \pi$
- $z_1 \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\operatorname{Arg}(z_1) \equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$
- $\operatorname{Arg}(-z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \pi \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}(\bar{z_1}) \equiv -\operatorname{Arg}(z_1) \mod 2\pi$
- $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\operatorname{Arg}(z_1) \mod 2\pi$

Démonstration

On pose $\theta_1 = \arg(z_1)$ et $\theta_2 = \arg(z_2)$.

- $z_1 \in \mathbb{R}$ ssi $M(z_1)$ se trouve sur l'axe des réels ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \pi[2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv 0[\pi]$
- $z_1 \in i\mathbb{R}$ ssi $M(z_1)$ se trouve sur l'axe des imaginaires ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{3\pi}{2}[2\pi]$ ssi $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$
- $M_1(-z_1)$ est le symétrique de de $M(z_1)$ par rapport à O donc $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM_1}$ donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{M_1O}) \equiv \pi[2\pi]$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1})$ soit $\operatorname{Arg}(-z_1) \equiv \operatorname{Arg}(z_1) + \pi \mod 2\pi$.
- $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)}{|z_1|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_1)}{|z_1|}\right)\left(\frac{\operatorname{Re}(z_2)}{|z_2|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_2)}{|z_2|}\right)$
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\frac{\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) - \operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{|z_1||z_2|} + i\frac{\operatorname{Im}(z_1)\operatorname{Re}(z_2) + \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Im}(z_2)}{|z_1||z_2|}\right) = |z_1||z_2|((\cos\theta_1\cos\theta_1 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_1 + \cos\theta_1\sin\theta_2)) = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$. Donc $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2$.
- $\operatorname{Arg}(z_1\bar{z_1}) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(\bar{z_1}) = \operatorname{Arg}(|z_1|) \equiv 0[2\pi]$ donc $\operatorname{Arg}(\bar{z_1}) \equiv -\arg(z_1)[2\pi]$
- De même $\operatorname{Arg}\left(z_1\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) = \operatorname{Arg}(1) \equiv 0[2\pi]$ donc $\operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

7. Écritures polaire et exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On pose $r = |z|$ et $\theta = \operatorname{Arg}(z)$.
Alors $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appelée écriture (ou forme) polaire (ou trigonométrique).
Dans cette écriture, r est un réel *positif* et est unique, θ est un réel déterminé à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.

A. Fonction exponentielle complexe

Proposition

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z = a + ib &\mapsto e^a(\cos b + i \sin b) \end{aligned}$$

est un prolongement de la fonction exponentielle réelle.
Cette fonction est appelée *exponentielle complexe* et est notée e^z.

Propriété

Pour tous $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$,

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Démonstration

On pose $z_1 = a+ib$ et $z_2 = c+id$. Alors $z_1 + z_2 = (a+c) + i(b+d)$.
Donc $e^{z_1+z_2} = e^{a+c}(\cos(b+d) + i\sin(b+d)) = e^a e^c((\cos b \cos d - \sin b \sin d) + i(\sin b \cos d + \cos b \sin d)) = e^a e^c(\cos b(\cos d + i \sin d) + i^2 \sin b \sin d + i \sin b \cos d) = e^a e^c(\cos b(\cos d + i \sin d) + i \sin b(\cos d + i \sin d)) = e^a e^c(\cos b + i \sin b)(\cos d + i \sin d) = e^{z_1}e^{z_2}$.

Corollaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^{-z} = (e^z)^{-1}$.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $e^{pz} = (e^z)^p$.

Corollaire Cas des imaginaires purs

Pour tous $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$, $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$.
Pour tous $\theta_1,\ \theta_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $e^{ip\theta} = (e^{i\theta})^p$.

Propriété

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}.$$

Démonstration

$e^{i\theta} = e^0(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
$\overline{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

B. Ecriture exponentielle

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note $r = |z|$ et θ un argument de z. Alors z peut s'écrire $z = re^{i\theta}$.

Proposition Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Proposition Fomule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

Démonstration

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

II. Puissance et racine n^{e}

1. Équation du second degré

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche les « racines carrées de z_0 » (« racines 2^{e} de z_0 »), c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Remarque

L'équation $z^2 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a pour unique solution $z = 0$

Démonstration

Il est clair que 0 est une solution.

On suppose par l'absurde que $z \neq 0$ et $z^2 = 0$. En multipliant deux fois de suite chaque membre de l'égalité $z^2 = 0$ par $\frac{1}{z}$, on en déduit que $1 = 0$. Contradiction. □

Proposition (racines carrées en coordonnées polaires)

Soit $z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

L'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ a deux solutions qui sont : $\sqrt{r}\, e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}\, e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}$.

Démonstration

Cela découle de l'égalité suivante : $z^2 - z_0 = (z - \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}})(z + \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}))$. □

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$. Les racines carrées de $1 + \mathrm{i}$ sont : $2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $-2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$.

Proposition (racines carrées en coordonnées cartésiennes)

Soit $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ avec $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Pour tout $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \left\{\begin{array}{cc} x^2 - y^2 = x_0 & \text{(égalité des parties réelles)} \\ 2xy = y_0 & \text{(égalité des parties imaginaires)} \\ \boxed{x^2 + y^2 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} & \text{(égalité des modules, redondante)} \end{array}\right. .$$

Ce point de vue permet de résoudre l'équation $z^2 = z_0$ d'inconnue $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, en commençant par chercher x^2 et y^2 avec une condition de signe pour xy.

Démonstration

L'équivalence est immédiate. L'affirmation de la fin découle ensuite de :

$$z^2 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \iff \left\{\begin{array}{l} |x| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + x_0} \\ |y| = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - x_0} \\ \mathrm{sg}(xy) = \mathrm{sg}(y_0) \quad \text{si } y_0 \neq 0 \end{array}\right. .$$

Parmi les $\underbrace{2}_{\text{cas } z_0 = 0}$ ou 4 nombres complexes z déduit des deux premières égalités, seuls $\underbrace{1}_{\text{cas } z_0 = 0}$ ou 2 nombres complexes (opposés) réalisent la dernière condition. □

Exemple

On choisit $z_0 = 1 + \mathrm{i}$. Pour tout $z = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{x}} + \mathrm{i}\underset{\mathbb{R}}{\underset{\Cap}{y}} \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^2 = 1+\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \\ 2xy = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ 2xy = 1 \end{cases}.$$

Les deux racines carrées de $1+\mathrm{i}$ sont $\underbrace{\text{donc}}_{\text{(la condition } xy>0 \text{ les impose)}}$: $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $-\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$.

Proposition

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On pose $\Delta := b^2 - 4ac$ et fixe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ sont :

$$\boxed{-\frac{b}{2a} \text{ si } \Delta = 0, \quad \text{ou,} \quad \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } \frac{-b+\delta}{2a} \text{ (distinctes) si } \Delta \neq 0}.$$

DÉMONSTRATION

Cela découle de l'égalité suivante : $az^2+bz+c = a\Big((z+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{\delta}{2a})^2\Big)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. □

Remarque

Il résulte de cette démonstration que les nombres complexes obtenus par extensions quadratiques successives à partir de $\mathbb{Q}$ (« constructibles à la règle et au compas ») sont ceux dont les parties réelle et imaginaire sont obtenues à partir de $\mathbb{Q}$ en utilisant des sommes, produits, quotients et extractions de racine carrée. D'après le *théorème de Gauss-Wantzel*, le nombre complexe $e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ s'obtient ainsi si et seulement si les facteurs premiers impairs de n sont de la forme $2^{2^k} + 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$.