为什么要做数学题和如何学会解数学题

张荫南

从小学到中学，再进入大学，数学课是必不可少的，做数学题是永远逃不掉的功课。如果计算一下在这十年的学习过程中，学生付出的劳动，老师付出的心力，家长们付出的关注，可能会得出一笔巨大得难以想象的数字。其涉及的社会物质资源也是十分可观的。加之数学又是中考与高考的必考内容，这更加重了做数学题目的重要性和份量。要学会数学,就要多做题！这是近百年的数学教学实践确立的真理。为了应付考试更要大量地做各种题目，各种类型的典型题、难题、怪题。好学生挑灯夜战，在题海中拼搏，精疲力倦,渐渐地失去了对数学的兴趣。差一点的学生越做越感到困难重重，对数学产生了畏惧。高考、中考结束后，大部份学生就告别了数学课本。那么，除了令人兴奋或遗憾的分数外，还能留下什么呢?

近年来，我一直为大学一年级新生上高等数学。不知为什么，总体上说来,学生独立地解决问题的能力日益下降。他们老是抱怨，老师上课时我都能听懂，但要做时,就不知如何入手了。大学主要的目标是培养能解决问题，从事各种专业工作的人。而在目前的升学应试的大背景下的中学教学不得不将主要的精力放在应试上面。题目做了很多，老师和同学

付出很多，但是解决问题的能力却并未形成。我们是不是应该去探究一下做数学题背后的深层次理由，**为什么要做数学题？它要达到的目的是什么？怎样训练学生做题目？能做到能力训练和考试成绩都丰收吗?**

我觉得做数学题的终极目的是培养运用数学知识去解决数学问题的能力。大家一定认为这是一句套话，没有任何新意。其实不然，这里的关键词是“能力”二字。能力是可移植的，是有普适意义的。今天我们通过做数学题学会如何分析问题、准备问题、转化问题，明天我们就可以运用在解数学题的过程中获得的经验去解决各种现实的问题。每个人的面前都摆放着应用某种知识去解决具体问题的任务。如果我们能正确和科学地进行数学解题的训练，我们就可利用数学题目作为载体，使我们的学生具有整合知识，运用知识去解决问题的能力。数学考试的成绩自然也是这种能力的一种体现。

当然，大家会问，为什么要通过数学练习来达到这个目标呢？因为数学课是从幼儿园开始就有的课程，数学题最容易取得,也最容易说明白，不需要很多专业知识作为先导。这是一个很好的训练场，实验基地。成本也极低廉，只要有一支笔、一张纸和坐下来静心用功的决心而已。当然还要有好的老师和一套科学的能力训练方法。各位, 如果我们能在目标上取得共识，请跟我来，一道去探究做数学题背后的奥秘。

你将会发现一个新世界。

题海战术，魔鬼式训练，以做大量的题目来达到考试时的快速反应,这类解题的训练模式的确对提高考试成绩能起到立竿见影的效果，多为家教老师采用之。多年的教学也总结出许多很好的方法，例如，典型题的总结，题目分类，解法归纳，举一反三，关键点拨等。“学海无边，苦作舟”，反映了我们在学习上应持的勤奋努力的态度，这无疑是正确的道理。但是简单地苦练带来的后遗症却应引起严重的关注。久而久之，学生碰到题目时，就会产生将它与做过的，听过的，看到过的题目挂钩来寻求解答的习惯性思维反射。这种方法是很辛苦的。首先，要做大量的题目，否则你将难以找到解答和模板。其次，题目的变化是千姿百态的，只是简单地对比和模仿常常不能解决问题,这时你会感到很慌张，考试时不知所措。世界上的题目千千万，解法万万千，你能穷尽吗？何况，年年都考试，年年题不同。为了改变这种消极防御的阵地战方法，我们应找出解数学问题能力的基础和要素。

这个解题能力的基础是经过整合的知识，而并非题库与解题模板。学生毕竟是不成熟的，他们在学习进程中获得的知识常是不连贯和破碎的，甚至要犯多次错误后才能形成正确的理解。因此，需要老师在一定的学习段落上进行总结，将知识整合成很精要的知识点。这项工作并不容易做好。对整合好的知识，我们应要求学生做相当数量的练习，以形成

对知识点的快速、正确灵活的反应。这类似于邓亚萍每天要练习打斜线数千下，练发球几百次，才造就出这位乒乓名将。这就是基本训练。这是能解出题目的前提。有句名言，“重复造就完美”。不但要分章节练，还要合起来反复练。有位著名的数学家每年避暑时总要做一段矩阵计算的练习,可能就是这个原因。如何设计基本训练题，确定合理的训练量和通过训练的标准。是一个新课题。

解一道数学题的过程就是应用你的数学知识去完成一项任务的过程。如果能持一种较为抽象的方式去分析这个思维运动，我们发现任何成功的解题过程都由四个要素组成。它们是，

读懂题目

找出关键

用对知识

正确表达

这里，读懂是前提，突破靠关键，用对知识是保证，正确表达才最终完成了任务。现就解题四要素发表一些看法，与大家讨论和交流。

每道题目就是一项要去完成的任务，它必定包含已知条件和目标任务二部份。大部份的数学题均用中文的语句、数学式子、辅助的图来表述。读题的任务就是利用我们的数学知识和理念对原始的题目进行加工和转化的过程。这是一个

重要的对题目进行予处理的过程，最后我们将已知信息的数学内涵用数学的术语进行正确且清楚的表达，对于要我们做的事也转化为一种适合进一步思考的形式。这时，我们会领悟到我们的题目原来是这样的！我们要坚持从分析出发，从数学知识出发。每步之间都是思维运动的自然进步，不要天上突然掉下个林妹妹！决不通过简单地对比样题来工作。读题的过程可能不会一次完成，它会采取渐进的形式，逐步地将不清楚的变得数学上更清楚，不易入手的变得易于处理。当然，解一定数量的题才能增强读题能力，使我们又快又准地将题目读出来。

读懂题目的过程中常会发现要实现从已知走向目标的征途中必需攻克的难点。难点常是关键所在，它为我们指出了前进的方向。但，真要解决难点的根本方法还是靠我们对知识的理解和掌握，只有将难点进行分解和转化后，才能在数学上提出我们的解决方案，这时我们实现了突破，找到了关键。当然，很多题目是有可类比性的，已经做过问题的解法和经验是可贵和必需的，它们能帮助我们迅速地找出关键，解决问题。

找到关键后我们对解这道题就有了明确的思路，但是可能还是有些杂乱无章。为了将你的思路整理得更清楚，反思一下在解题过程中所用的数学知识和公式是十分有益。这将为我们给出正确的表达打下基础。另外，回忆用到的知识也

是对自己活用知识的经验总结。

正确的表达是保证我们最终地完成这道题的最后一步，是我们提供结果的重要环节。可惜，这一点并不为大家所重视。

上面我们讨论了解数学题能力的四个要素，它是与具体的数学题无关的，在解任何具体问题时应遵守的工作流程与规范，也是我们在解决任何问题时应有的一种理念。坚持这种理念去进行数学训练，持之以恒，必有所获。因为这四个要素也是我们做好世界上各种各样其它工作所必需做好的事情。例如，为了完成一个计算机的软件开发，我们首先要理解客户需求，这就是读懂题目。其次，要找出开发的关键，是算法设计，还是数据整理呢？用对知识的环节对应于开发工具、开发平台的选择。最后提供正确的文档才能算完成了项目。请想象一下具有四要素概念和训练的项目经理是否会有更出色的表现呢？

中学是人生的起点，形成正确的工作理念和良好的工作习惯是受用一辈子的事情。具体的几何三角题都会成为你生活的往事，但通过解数学题的四要素训练所形成的工作理念、工作习惯、工作程序将伴随你一生。

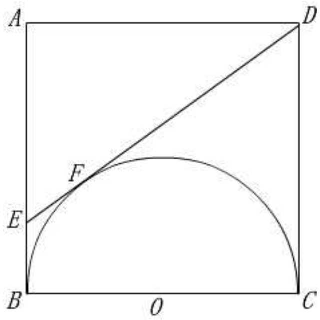
系统的解题四要素能力训练将帮助学生系统、生动、灵活地掌握知识，并能取得应用数学工具去解题的实战经验。因为他们不是用题目套题目的模式去工作，而是从知识到题

目再回到知识的方式去做题，这样学生的头脑将变得更清楚，思路更明白。当然，解题能力的四要素训练也是要有相当的强度，是需要苦练的真功夫。最终它将大大增强学生的考试能力。这一点在大学的教学中已得到证明。顺便我想指出的是，四要素训练与传统的助考方法并无冲突，它们是互补和互相促进的关系。

以上是我的一些极不成熟的想法，供各位参考，也希望能得到批评与指正。最后给出两道例题作为附件,说明四要素训练在中学数学和高等数学中的应用。

附件

例　如图，正方形 ABCD 中，以 BC 为直径作半圆，过 D 作⊙O 的切线 DE 切⊙O 于 F 交 AB 于 E. 若 AB=a, 求⊿ADE 与四边形 EBCD 周长的比。



〔读题〕

几何学是关于图形的数学。我们首先要读图。从上图可知，$AB=BC=CD=DA=a$，ED 是关于半圆 BFC 的切线，F 是切点。四边形 $ABCD$ 是正方形和半圆 BFC 的事实推出，EB, DC 也

是关于半圆 BFC 的切线。这可能是读图的关键之处。我们立刻可以到

$$EF = EB, \quad DF = DC = a$$

本题的目标是求ΔAED的周长与四边形 $DEBC$ 的周长之比。

注　读题题的过程是利用数学知识对题目进行加工、转化的过程。

因为,

$$\Delta AED\text{的周长} = AE + EF + FD + DA = AE + EB + FD + DA = 3a$$

$$\text{四边形 } DEBC \text{ 的周长} = FE + EB + BC + CD + DF = 2FE + 2a + a$$
$$= 2FE + 3a$$

从此可知，关键是求FE。

〔关键〕

设 $FE = x$。由于ΔAED是直角三角形，故

$$(a - x)^2 + a^2 = (a + x)^2$$

故，$x = \dfrac{a}{4}$。

〔知识〕正方形的性质;切线的基本性质;勾股定理。

〔表达〕

从图可知，$AB = BC = CD = DA = a$，ED 是关于半圆 BFC 的切线，F 是切点。四边形 $ABCD$ 是正方形和半圆 BFC 的事实推出，EB, DC 也是关于半圆 BFC 的切线。我们立刻可以到

$$EF = EB, \quad DF = DC = a$$

因为,

ΔAED 的周长 $= AE + EF + FD + DA = AE + EB + FD + DA = 3a$

四边形 $DEBC$ 的周长 $= FE + EB + BC + CD + DF = 2FE + 2a + a$

$= 2FE + 3a$

从此可知，关键是求 FE。

设 $FE = x$。由于 ΔAED 是直角三角形，故

$$(a-x)^2 + a^2 = (a+x)^2$$

得到，$x = \dfrac{a}{4}$。从而

ΔAED 的周长/四边形 $DEBC$ 的周长=6/7。

例　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是二列实数，$b_n > 0$，$n \geq 1$。

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\text{，}\quad y_n = \sum_{k=1}^{n} b_k\text{，}\quad n \geq 1$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \in (-\infty,\ \infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

我们分四步进行

[读题]

$x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$y_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$。该题要求从

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A \in (-\infty,\ \infty),$$

来研究，当$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$时，比值$\dfrac{x_n}{y_n}$的变化。

我们进一步可将$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{a_k}{b_k} = A$改写成，

$$a_k = Ab_k + \varepsilon_k b_k，\quad \varepsilon_k = o(1)，\quad k \to \infty$$

[关键]

因为$x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，$y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$，故

$$x_n = A\sum_{k=1}^{n} b_k + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k = Ay_n + \sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k$$

因此，

$$\frac{x_n}{y_n} = A + \left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right)\Big/ y_n$$

这指明，本题的关键是说明

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k}{y_n} \to 0，\quad n \to \infty.$$

因为$\varepsilon_k = o(1)$，$k \to \infty$，故对任何$\varepsilon > 0$，必存 在K，当$k \geq K$时，$|\varepsilon_k| < \varepsilon$，

那么当$n > K$时，

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k = \sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k b_k + \sum_{K+1}^{n}\varepsilon_k b_k，$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k b_k\right| + \varepsilon\left(\sum_{K+1}^{n} b_k\right),$$

$$\frac{\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right|}{y_n} \leq \frac{1}{y_n}\left|\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k b_k\right| + \varepsilon$$

令$n \to +\infty$，可知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}\left(\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k b_k\right)=0$$

[知识]

无穷小量的性质，极限与无穷小量的关系。

[表达]

从极限的定义可知，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A\in(-\infty,\ \infty)$$

的充要条件是，

$$a_k=Ab_k+\varepsilon_k b_k\,,\qquad k\geq 1,$$

$$\varepsilon_k=o(1)\,,\qquad k\to\infty$$

因为 $x_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$， $y_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$， 故

$$x_n=Ay_n+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\,,$$

从而

$$\frac{x_n}{y_n}=A+\left(\frac{1}{y_n}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\,.$$

因 $\varepsilon_k=o(1)$， $k\to\infty$， 故对任何 $\varepsilon>0$， 必有正整数 K， 当 $k\geq K$ 时， $|\varepsilon_k|<\varepsilon$。利用 $y_n\to+\infty$， $n\to\infty$，可知，必有正整数 N， $N>K$， 当 $n\geq N$ 时，

$$\left|\frac{1}{y_n}\left(\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k b_k\right)\right|<\varepsilon\,,$$

这时，

$$\frac{x_n}{y_n}=A+\frac{1}{y_n}\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right)$$

$$\frac{1}{y_n}\left(\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right)=\frac{1}{y_n}\sum_{k=1}^{K}\varepsilon_k b_k+\frac{1}{y_n}\sum_{K+1}^{n}\varepsilon_k b_k \text{ ,}$$

故

$$\left|\frac{1}{y_n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right|\le\varepsilon+\frac{1}{y_n}\sum_{K+1}^{n}|\varepsilon_k|b_k \text{ ,}$$

因 $\sum_{K+1}^{n}|\varepsilon_k|b_k\le\varepsilon\sum_{K+1}^{n}b_k$ ，

当 $n\ge N$ 时，

$$\left|\frac{1}{y_n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k b_k\right|\le 2\varepsilon$$

这说明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=A .$$