　作者：解学武

数据结构中的图存储结构

通过前面的学习，已经接触到了线性表和树两种数据结构。对于之间具有“一对一”关系的数据，可以选择使用线性表进行表示和存储；之间具有“一对多”关系的数据，可以考虑使用树进行表示和存储。除此之外，对于之间还可能具有“多对多”关系的数据，数据结构表示和存储这类数据的结构使用的是——图。

有关图的基本常识

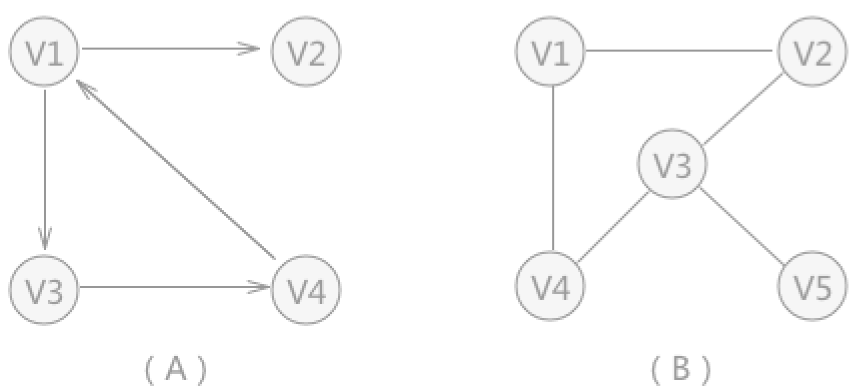


图 1 有向图和无向图

顶点： 使用图表示的每个数据元素称作顶点（Vertex），图中所有顶点构成的集合习惯上用 V 表示。

> 例如，图 1（A） 表示的就是一个图，其中 V1、V2、V3、V4 都是构成图的顶点，用集合 V 表示为：`{V1,V2,V3,V4}` 。

VR： VR 本身是集合，存储的是任意两个顶点之间的关系。

> 顶点之间的关系有两种：如图 1 中的两个图所示，（A）中顶点 V1 和 V2 只有单方向的关系，只能通过 V1 找到 V2，反过来行不通，因此两顶点之间的关系表示为：`<V1,V2>`；另一种关系如（B），顶点之间具有双向的关系，之间用直线连通，对于V1 和 V2 顶点来说，既可以通过 V1 找到 V2，也可以通过 V2 找到 V1，两顶点之间的关系表示为：`(V1,V2)`。

图 1（A）中，VR 集合存储的顶点之间的关系为：`{<v1,v2>,<v1,v3>,<v3,v4>,<v4,v1>};`
图 1（B）中，VR 集合存储的顶点之间的关系为：`{(v1,v2),(v1,v4),(v2,v3),(v3,v4),(v3,v5)}`

有向图和无向图： 之间只具有单向关系的顶点构成的图称为有向图，如图 1 （A）； 之间具有双向关系的顶点构成的图称为无向图，如图 1（B）。

“弧”和“边”：在有向图中，`<v,w>` 表示为从 v 到 w 的一条弧；在无向图中，`(v,w)` 表示为顶点 v 和顶点 w 之间的一条边。

例如，图 1（A）为有向图，每个箭头表示从一个顶点到另一个顶点的一条弧，其中无箭头一端的顶点又被称为“弧尾”或者“初始点”；有箭头一端的顶点称为“弧头”或者“终端点”。图 1（B）为无向图，每条直线表示顶点之间的一条边。

完全图：对于无向图来说，如果图中每个顶点都和除自身之外的所有顶点有关系，那么就称这样的无向图为完全图。如图 2 所示就是一个完全图。

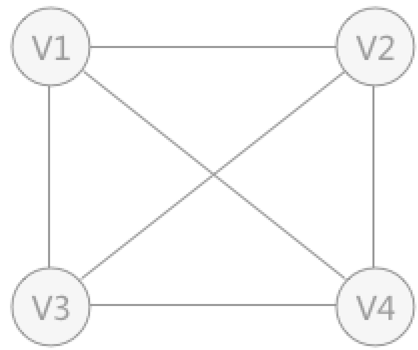


图 2 完全图

对于有 n 个顶点的完全图，其中的边的数目为：

$$\frac{1}{2}n(n-1)$$

有向完全图：对于有向图来说，通过图中的每个顶点，都能找到图中的所有其它的顶点，那么就称这样的有向图为有向完全图。如图 3 所示就是一个有向完全图。

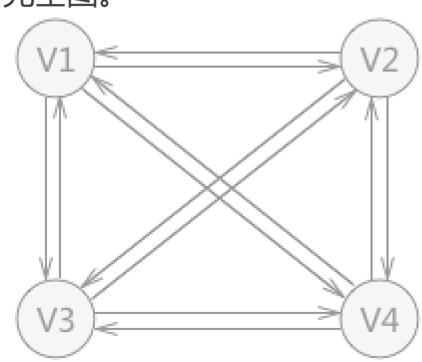


图 3 有向完全图

对于有 n 个顶点的有向完全图，所具有的弧的数目为：

$$n(n-1)$$

稀疏图和稠密图：如果图中具有很少的边或弧，就称这个图为“稀疏图”；反之，称为“稠密图”。

> 稀疏和稠密的判断条件是：`e < nlogn` （e表示图中边或弧的数量，n为顶点数），满足条件即为稀疏图；反之为稠密图。

权：图中的边或者弧有时会携带有一个与之相匹配的数，这种与边或弧相匹配的数被称为“权”。相应地，带权的图通常称为“网”（Network）。

每一条边或者弧的权往往具备某种意义，例如代表从一个顶点到另一个顶点之间的距离，等等。

子图： 图中的一部分顶点和边构成的图，称为原图的子图。

出度和入度

在有向图中，对于一个顶点 v 来说，箭头指向顶点 v 的弧的数目为该顶点的入度（InDegree，记为ID（v））；箭头远离顶点 v 的弧的数目为该顶点的出度（OutDegree，记为OD（v））。 有向图顶点的度就是该顶点出度和入度的和。例如图 1（A）中，顶点 V1 的入度为 1 ，出度为 2 ，所以顶点V1的度为 3 。

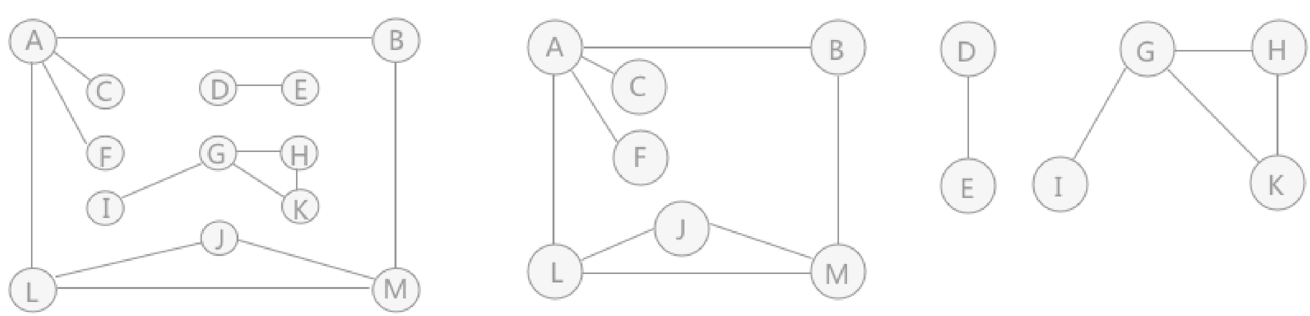
路径和回路

路径： 在图中从一个顶点到另一个顶点所走过的多个顶点组成的序列，就称为“路径”。 在有向图中，路径是有向的。如果在路径中第一个顶点和最后一个顶点相同，此路径称为“回路”或“环”。 如果路径中每个顶点互相都不重复，这个路径就是简单路径；同样，一个回路中顶点之间不重复出现，称为“简单回路”或“简单环”。 例如，在图 1（A）中，从 V1 回到 V1 存在一条路径，为：`（V1，V3，V4，V1）`，此路径是一个环，也是一条简单回路。

连通图

在无向图中，如果一个顶点到另一个顶点存在至少一条路径，称它们之间是连通的。 如果图中任意两个顶点之间都是连通的，则此图为连通图。例如图 1（B）就是一个连通图。 如果一个图本身不是连通图，但是图中某个子图是连通图，那么这个子图又被称为“连通分量”。

> 注意：这里的“子图”指的是无向图中最大的连通子图。



(a)　　　　　　　　(B)

图 4 连通分量

例如，图 4（a）中本身不是连通图，但是本身有 3 个连通分量，如（B）所示。 在有向图中，如果任意一对顶点 Vi 和 Vj，从 Vi 到 Vj 和从 Vj 到 Vi 都含有至少一条通路，那么称此图为强连通图。如果有向图的连通分量也具有此特征，则为强连通分量。 例如，图 1（A）本身不是强连通图，但是如果删除 V2 这个顶点，就是一个强连通图，如图 5 所示。

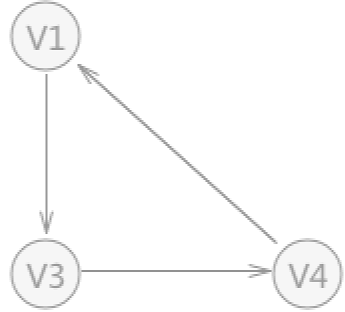


图 5 强连通图

生成树和生成森林

对于连通图来说，如果对其进行遍历，遍历过程中经过的顶点和边其实质是一棵树，在这里称之为“生成树”。

> 由于连通图中，任意两顶点之间可能含有多条通路，所以一个连通图可能会对应多个生成树。

对于连通图来说，它的生成树须满足两个要求：

- 包含图中所有的顶点。
- 任意两顶点之间有且仅有一条通路。

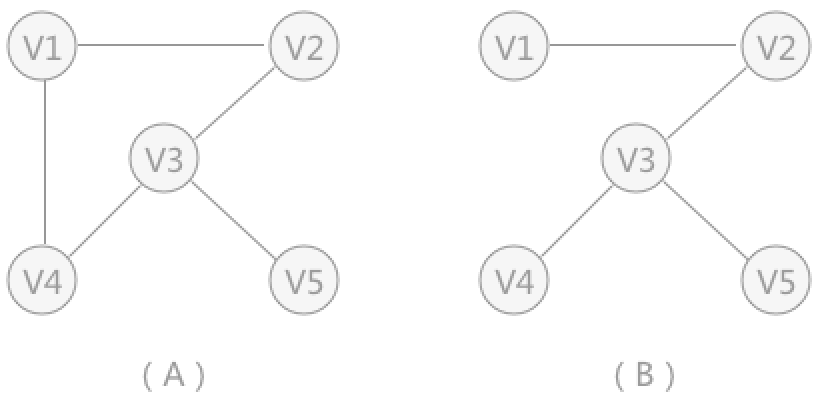


图 6 连通图及其生成树

例如，图 6（A）是一个连通图，（B）为它的生成树（不唯一）。 连通图的生成树中，边的数量永远要比顶点的数量少1。如果少更多，顶点之间无法做到连通；反之，生成树中会存在回路（环）。 生成树是针对于连通图而言的，如果是非连通图，其中含有的多个连通分量，每个连通分量对应不止一棵生成树，所以非连通图对应的是由多棵生成树组成的生成森林。

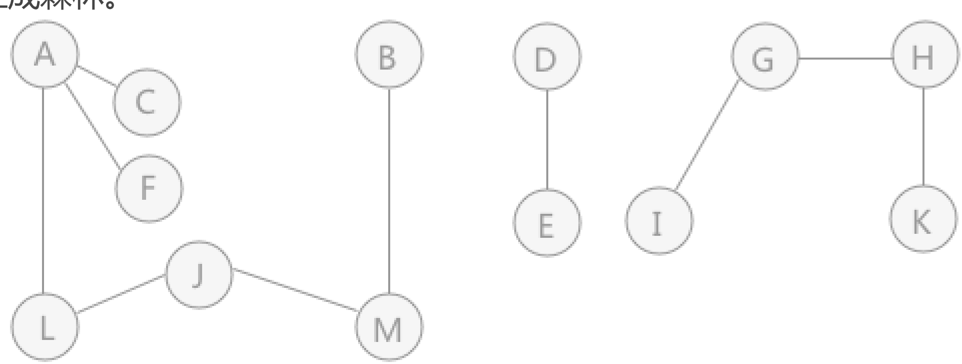


图 7 非连通图的生成森林

例如，图 4（a）本身为非连通图，其有 3 个连通分量（如图2（b）所示），每个连通分量分别对应的生成树如图 7 所示，3 个生成树构成的为非连通图的生成森林。

> 本节主要设计到有关图的一些基本概念，只有了解了这些基本常识，后边章节的内容才能看得懂。