阅读：108,862　　作者：解学武

克鲁斯卡尔算法(Kruskal算法)求最小生成树

上一节介绍了求最小生成树之普里姆算法。该算法从顶点的角度为出发点，时间复杂度为 $O(n^2)$，更适合与解决边的绸密度更高的连通网。

本节所介绍的克鲁斯卡尔算法，从边的角度求网的最小生成树，时间复杂度为 $O(eloge)$。和普里姆算法恰恰相反，更适合于求边稀疏的网的最小生成树。

对于任意一个连通网的最小生成树来说，在要求总的权值最小的情况下，最直接的想法就是将连通网中的所有边按照权值大小进行升序排序，从小到大依次选择。

由于最小生成树本身是一棵生成树，所以需要时刻满足以下两点：

- 生成树中任意顶点之间有且仅有一条通路，也就是说，生成树中不能存在回路；
- 对于具有 n 个顶点的连通网，其生成树中只能有 n-1 条边，这 n-1 条边连通着 n 个顶点。

> 连接 n 个顶点在不产生回路的情况下，只需要 n-1 条边。

所以克鲁斯卡尔算法的具体思路是：将所有边按照权值的大小进行升序排序，然后从小到大一一判断，条件为：如果这个边不会与之前选择的所有边组成回路，就可以作为最小生成树的一部分；反之，舍去。直到具有 n 个顶点的连通网筛选出来 n-1 条边为止。筛选出来的边和所有的顶点构成此连通网的最小生成树。

> 判断是否会产生回路的方法为：在初始状态下给每个顶点赋予不同的标记，对于遍历过程的每条边，其都有两个顶点，判断这两个顶点的标记是否一致，如果一致，说明它们本身就处在一棵树中，如果继续连接就会产生回路；如果不一致，说明它们之间还没有任何关系，可以连接。

假设遍历到一条由顶点 A 和 B 构成的边，而顶点 A 和顶点 B 标记不同，此时不仅需要将顶点 A 的标记更新为顶点 B 的标记，还需要更改所有和顶点 A 标记相同的顶点的标记，全部改为顶点 B 的标记。

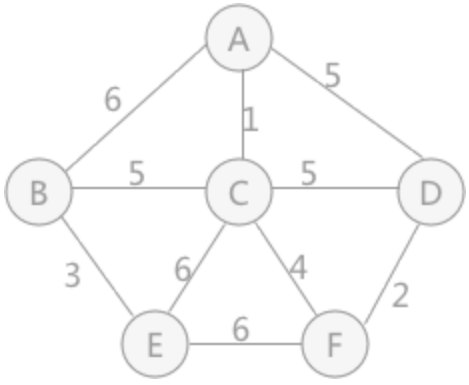
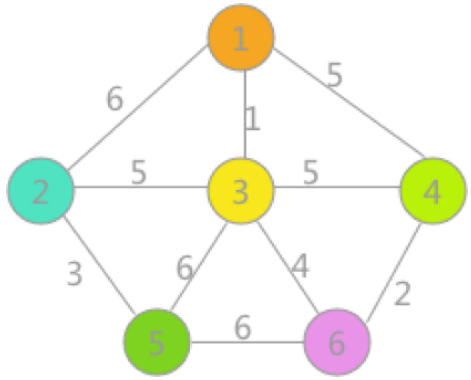


图 1 连通网

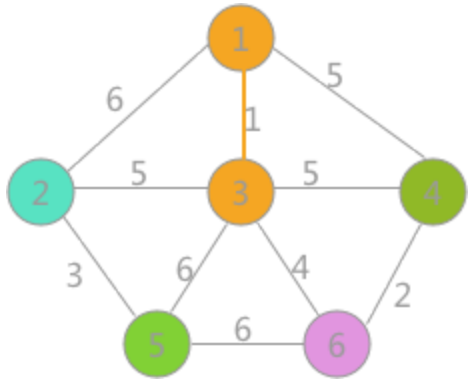
例如，使用克鲁斯卡尔算法找图 1 的最小生成树的过程为：

首先，在初始状态下，对各顶点赋予不同的标记（用颜色区别），如下图所示：



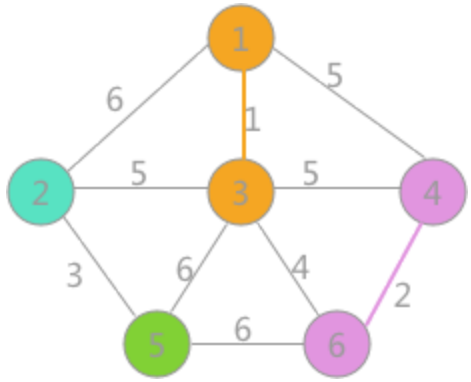
（1）

对所有边按照权值的大小进行排序，按照从小到大的顺序进行判断，首先是（1，3），由于顶点 1 和顶点 3 标记不同，所以可以构成生成树的一部分，遍历所有顶点，将与顶点 3 标记相同的全部更改为顶点 1 的标记，如（2）所示：



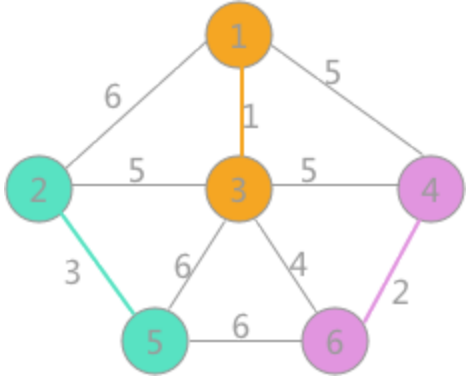
（2）

其次是（4，6）边，两顶点标记不同，所以可以构成生成树的一部分，更新所有顶点的标记为：



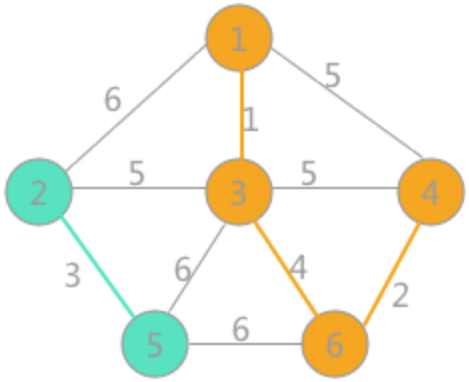
（3）

其次是（2，5）边，两顶点标记不同，可以构成生成树的一部分，更新所有顶点的标记为：



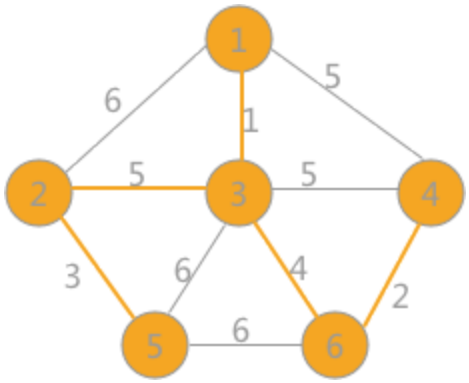
(4)

然后最小的是（3，6）边，两者标记不同，可以连接，遍历所有顶点，将与顶点 6 标记相同的所有顶点的标记更改为顶点 1 的标记：



(5)

继续选择权值最小的边，此时会发现，权值为 5 的边有 3 个，其中（1，4）和（3，4）各自两顶点的标记一样，如果连接会产生回路，所以舍去，而（2，3）标记不一样，可以选择，将所有与顶点 2 标记相同的顶点的标记全部改为同顶点 3 相同的标记：



(6)

当选取的边的数量相比与顶点的数量小 1 时，说明最小生成树已经生成。所以最终采用克鲁斯卡尔算法得到的最小生成树为（6）所示。

实现代码：

```
01.  #include "stdio.h"
02.  #include "stdlib.h"
03.  #define MAX_VERtEX_NUM 20
04.  #define VertexType int
```

```c
typedef struct edge{
    VertexType initial;
    VertexType end;
    VertexType weight;
}edge[MAX_VERtEX_NUM];
//定义辅助数组
typedef struct {
    VertexType value;//顶点数据
    int sign;//每个顶点所属的集合
}assist[MAX_VERtEX_NUM];

assist assists;

//qsort排序函数中使用，使edges结构体中的边按照权值大小升序排序
int cmp(const void *a,const void*b){
    return  ((struct edge*)a)->weight-((struct edge*)b)->weight;
}
//初始化连通网
void CreateUDN(edge *edges,int *vexnum,int *arcnum){
    printf("输入连通网的边数：\n");
    scanf("%d %d",&(*vexnum),&(*arcnum));
    printf("输入连通网的顶点：\n");
    for (int i=0; i<(*vexnum); i++) {
        scanf("%d",&(assists[i].value));
        assists[i].sign=i;
    }
    printf("输入各边的起始点和终点及权重：\n");
    for (int i=0 ; i<(*arcnum); i++) {
        scanf("%d,%d,%d",&(*edges)[i].initial,&(*edges)[i].end,&(*edges)[i].weight);
    }
}
//在assists数组中找到顶点point对应的位置下标
int Locatevex(int vexnum,int point){
    for (int i=0; i<vexnum; i++) {
        if (assists[i].value==point) {
            return i;
        }
    }
    return -1;
}
int main(){

    int arcnum,vexnum;
    edge edges;
    CreateUDN(&edges,&vexnum,&arcnum);
    //对连通网中的所有边进行升序排序，结果仍保存在edges数组中
    qsort(edges, arcnum, sizeof(edges[0]), cmp);
```

```
    //创建一个空的结构体数组，用于存放最小生成树
    edge minTree;
    //设置一个用于记录最小生成树中边的数量的常量
    int num=0;
    //遍历所有的边
    for (int i=0; i<arcnum; i++) {
        //找到边的起始顶点和结束顶点在数组assists中的位置
        int initial=Locatevex(vexnum, edges[i].initial);
        int end=Locatevex(vexnum, edges[i].end);
        //如果顶点位置存在且顶点的标记不同，说明不在一个集合中，不会产生回路
        if (initial!=-1&& end!=-1&&assists[initial].sign!=assists[end].sign) {
            //记录该边，作为最小生成树的组成部分
            minTree[num]=edges[i];
            //计数+1
            num++;
            //将新加入生成树的顶点标记全不更改为一样的
            for (int k=0; k<vexnum; k++) {
                if (assists[k].sign==assists[end].sign) {
                    assists[k].sign=assists[initial].sign;
                }
            }
            //如果选择的边的数量和顶点数相差1，证明最小生成树已经形成，退出循环
            if (num==vexnum-1) {
                break;
            }
        }
    }
    //输出语句
    for (int i=0; i<vexnum-1; i++) {
        printf("%d,%d\n",minTree[i].initial,minTree[i].end);
    }
    return 0;
}
```

测试数据：

输入连通网的边数：
6 10
输入连通网的顶点：
1
2
3
4
5
6
输入各边的起始点和终点及权重：

1,2,6
1,3,1
1,4,5
2,3,5
2,5,3
3,4,5
3,5,6
3,6,4
4,6,2
5,6,6
1,3
4,6
2,5
3,6
2,3