Gliederung

Literatur

1. Lunze J.:
   Regelungstechnik 1
   6. Aufl., Springer Verlag Berlin, 2007

2. Föllinger, O.:
   Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung
   8. überarb. Auflage
   Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH, Heidelberg ,2005

3. Föllinger, O.:
   Laplace-, Fourier- und z-Transformation
   7. überarb. und erw. Aufl.
   Dr. Alfred Hüthig Verlag GmbH, Heidelberg, 2003

4. Geering H.-P.:
   Regelungstechnik
   6. Auflage.
   Springer-Verlag, Berlin, 2004

5. Unbehauen, H.
Regelungstechnik I, 11. Auflage.
Vieweg, Braunschweig, 2001

6. Cremer, M.:
Regelungstechnik
2. Aufl.
Springer-Verlag, Berlin, 1995

7. Günther, M.:
Kontinuierliche und zeitdiskrete Regelungen
B.G. Teubner Stuttgart, 1997

Zusätzlich als Taschenbuch der Mathematik

8. Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A.:
Taschenbuch der Mathematik, 2. Auflage
Verlag H. Deutsch, Frankfurt/Main 1999

In den Arbeitsblättern werden auszugsweise Tabellen und Grafiken aus oben genannten Büchern verwendet.

1. Einführung
1.1 Dynamische Vorgänge

Phasenregelkreis
Fernseher

Autopilot

Anpassung Sendeleistung

Satelittenkommunikation

ESP, ABS,
Abstandsradar,
Motorelektronik

Dynamische Vorgänge

Regelung Antriebe

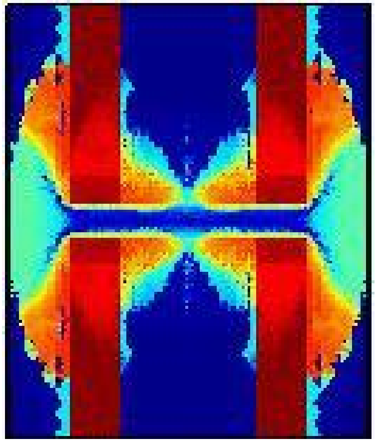
Raffinerie

Pressenhydraulik

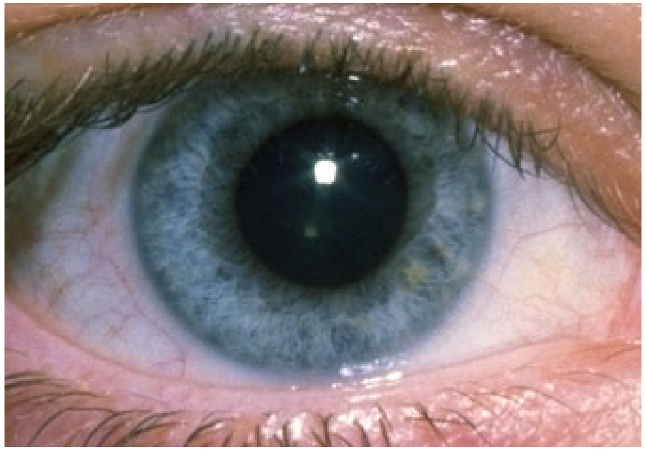
Temperatur, Füllstand, Filtration

Dynamische Vorgänge

Knochenheilungsprozeß

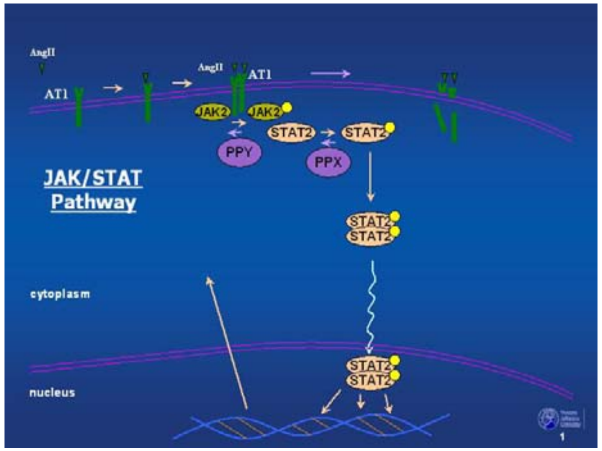


Pupille



Anästhesiegeräte

Systembiologie

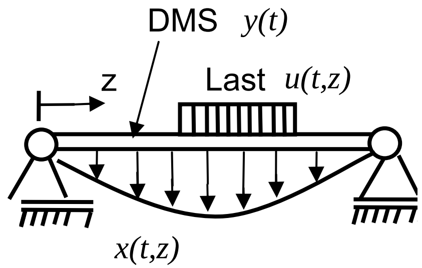


Hörgeräte

Technische System-Beispiele

Taschenlampe

Systemgrenze: Geometrie
Eingang: Schalterstellung
Ausgang: erzeugtes Licht
Zustand: nicht eindeutig

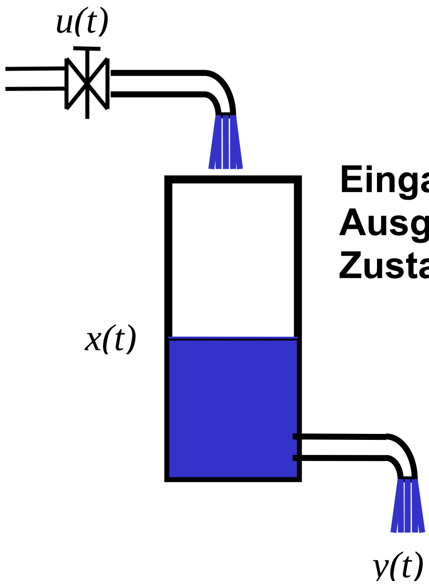


Balken

Zustand: örtliche Auslenkung

$$x(t,z), u(z,t), x(z,t)\,y(t)$$

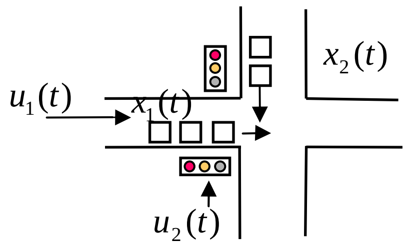
orts- und zeitabhängig
→ **SVP**

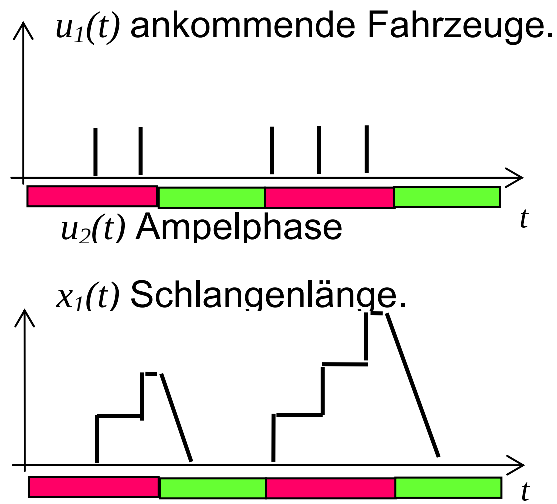


Wasserbehälter

Eingang: Ventilstellung
Ausgang: Abflussmenge
Zustand: Füllstandshöhe

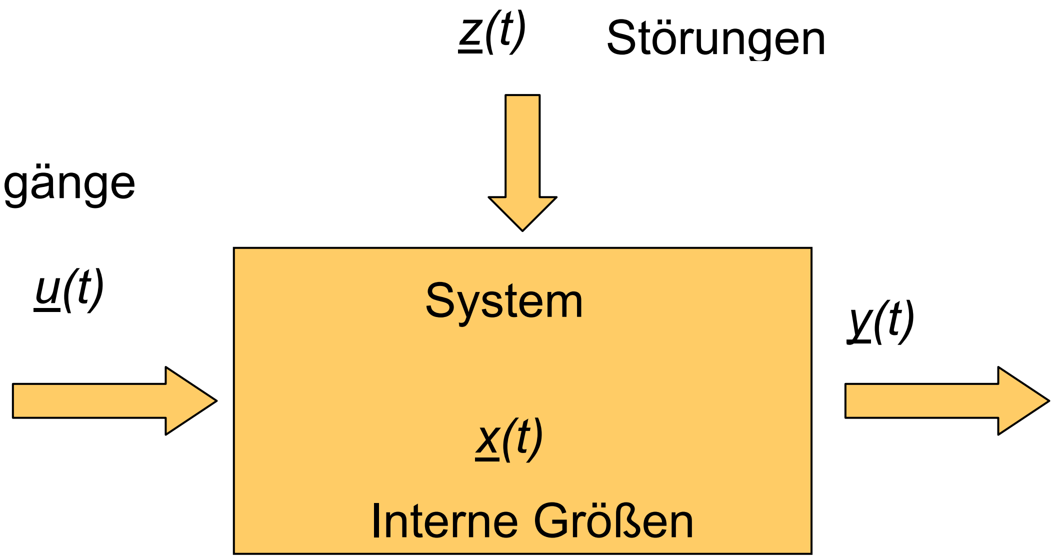
Verkehrskreuzung





Stückprozess:
- Quantisierte Signale,
- Ereignisfolgen
- Ereignisdiskrete Systeme

Dynamische Vorgänge



Fragestellungen:
Wie reagiert System auf bestimmte Anregungsfunktion
Wie reagiert System auf bestimmte Störungen
Wie soll das System ausgelegt werden

$\underline{u}(t) \Rightarrow \underline{y}(t)=?$

$\underline{z}(t) \Rightarrow \underline{y}(t)=?$

$\underline{p} \Rightarrow \underline{y}(t)=?$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Problemformulierung}}$

Dynamische Vorgänge

ESP:

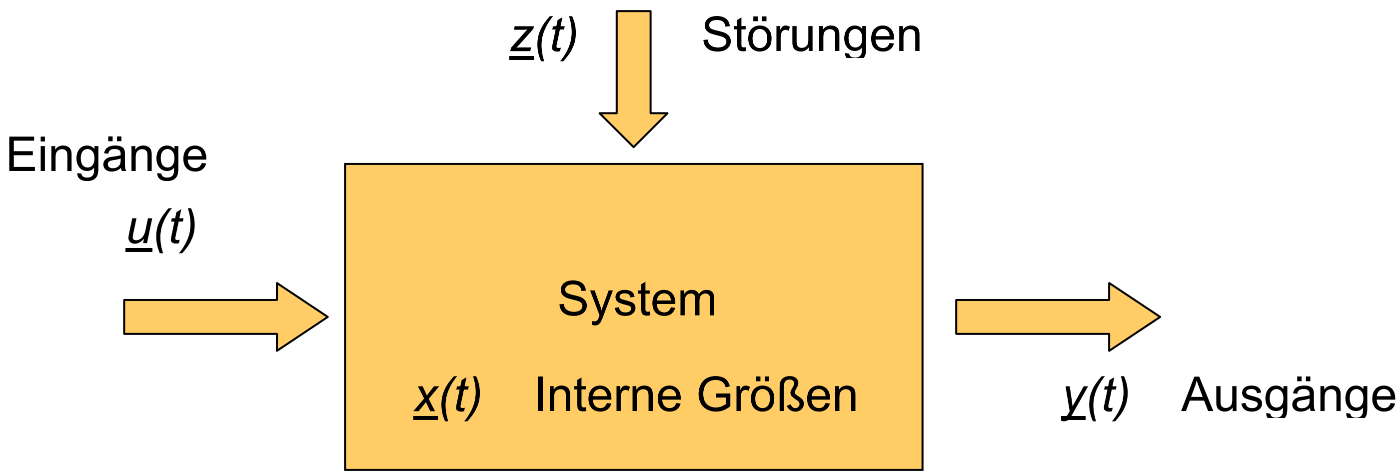
eingeschlagener Lenkwinkel ← $\underline{u}(t)$

Geschwindigkeit ← $\underline{x}(t)$

Winkelgeschwindigkeit ← $\underline{y}(t)$

Einzelne Bremskräfte am Rad ← $\underline{x}(t)$

Radschlupf ← $\underline{z}(t)$

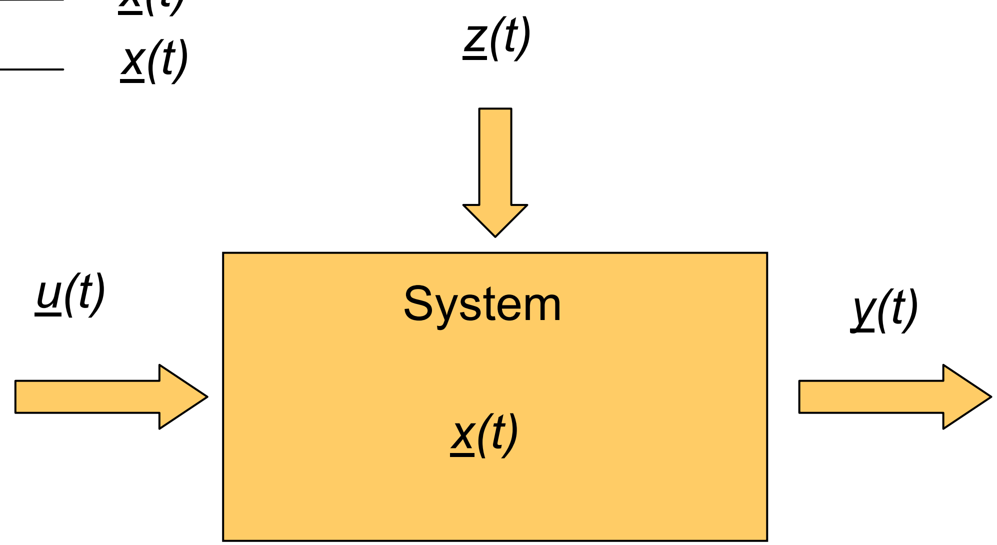


Dynamische Vorgänge

Autopilot Flugzeug:

Ruderausschläge	←	$\underline{u}(t)$
Schub	←	$\underline{u}(t)$
Klappenstellung	←	$\underline{u}(t)$
Raumgeschwindigkeit	←	$\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$
Raumwinkelgeschwindigkeit	←	$\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$

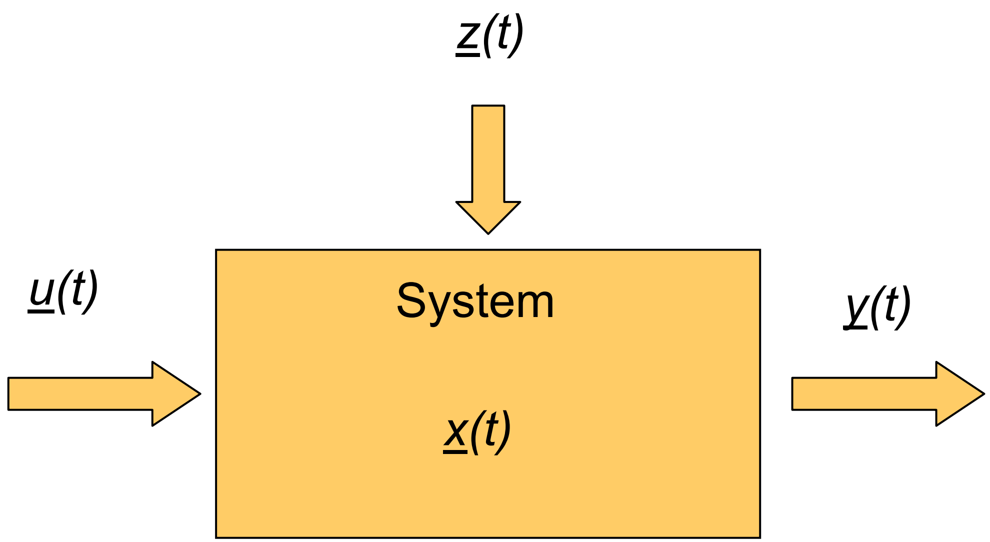
Windangriff	←	$\underline{z}(t)$
Auftriebskräfte	←	$\underline{x}(t)$
Widerstandskräfte	←	$\underline{x}(t)$



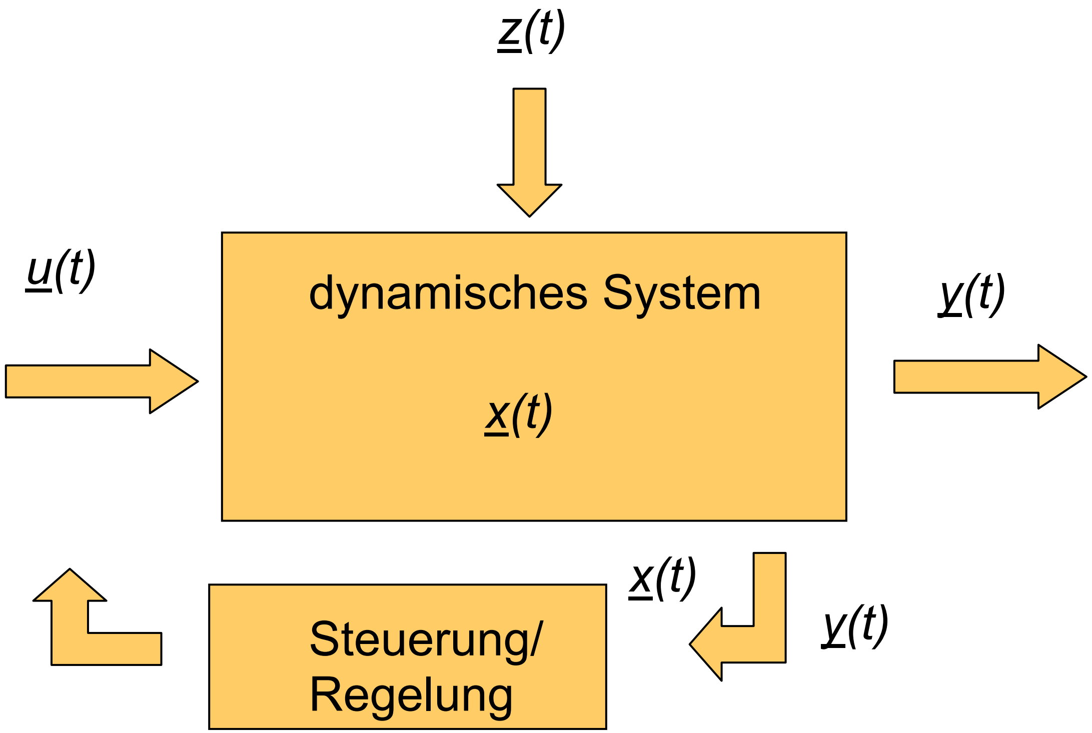
Dynamische Vorgänge

Verfahrenstechnischer Prozess:

Massenfluß Ausgangsprodukte ← $\underline{u}(t)$
Wärmetauscher ← $\underline{u}(t)$
Temperatur Reaktor ← $\underline{x}(t)$
Konzentrationen Produkte Reaktor ← $\underline{x}(t)$, $\underline{y}(t)$
Diffusion, Parameter Reaktionskinetik ← $\underline{z}(t)$



Dynamische Vorgänge



Fragestellungen:

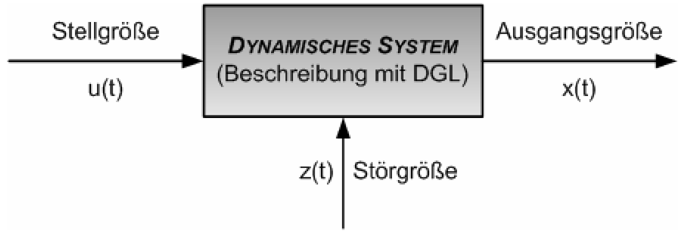
Wie kann System gezielt beeinflusst werden?

Steuerungs- / Regelungsentwurfs (Synthese)

1.2 Themenfelder der Systemdynamik und Regelungstechnik

- Modellbildung, Identifikation und Modellvalidierung
  - Abbildung des physikalischen Modells mithilfe von Differentialgleichungen
  - Ermittlung der Modell-Parameter
- Systemsimulation
  - Überprüfung des Systemverhaltens durch Vergleich von Simulationsdaten und realen Messwerten
- Systemanalyse
  - Analyse des Systemverhaltens nach Stabilität und Zeitverhalten
- Reglersynthese
  - Gezielte Veränderung des Systemverhaltens

Prinzip der Regelung



Aufgabe:

- Aufprägen eines Sollverlaufes auf die Ausgangsgröße durch Beeinflussung der Stellgröße
- Kompensation einer (zumeist unbekannten) Störgröße, bzw. Modellungenauigkeiten

Prinzip der Lösung:

- Ständige Beobachtung der Strecke durch Messung der Ausgangsgrößen
- Ändern der Stellgröße so, dass die Ausgangsgröße an den Sollwert angepasst wird.
- Die Anpassung der Stellgröße abhängig von der Messgröße heißt **Regelung**.

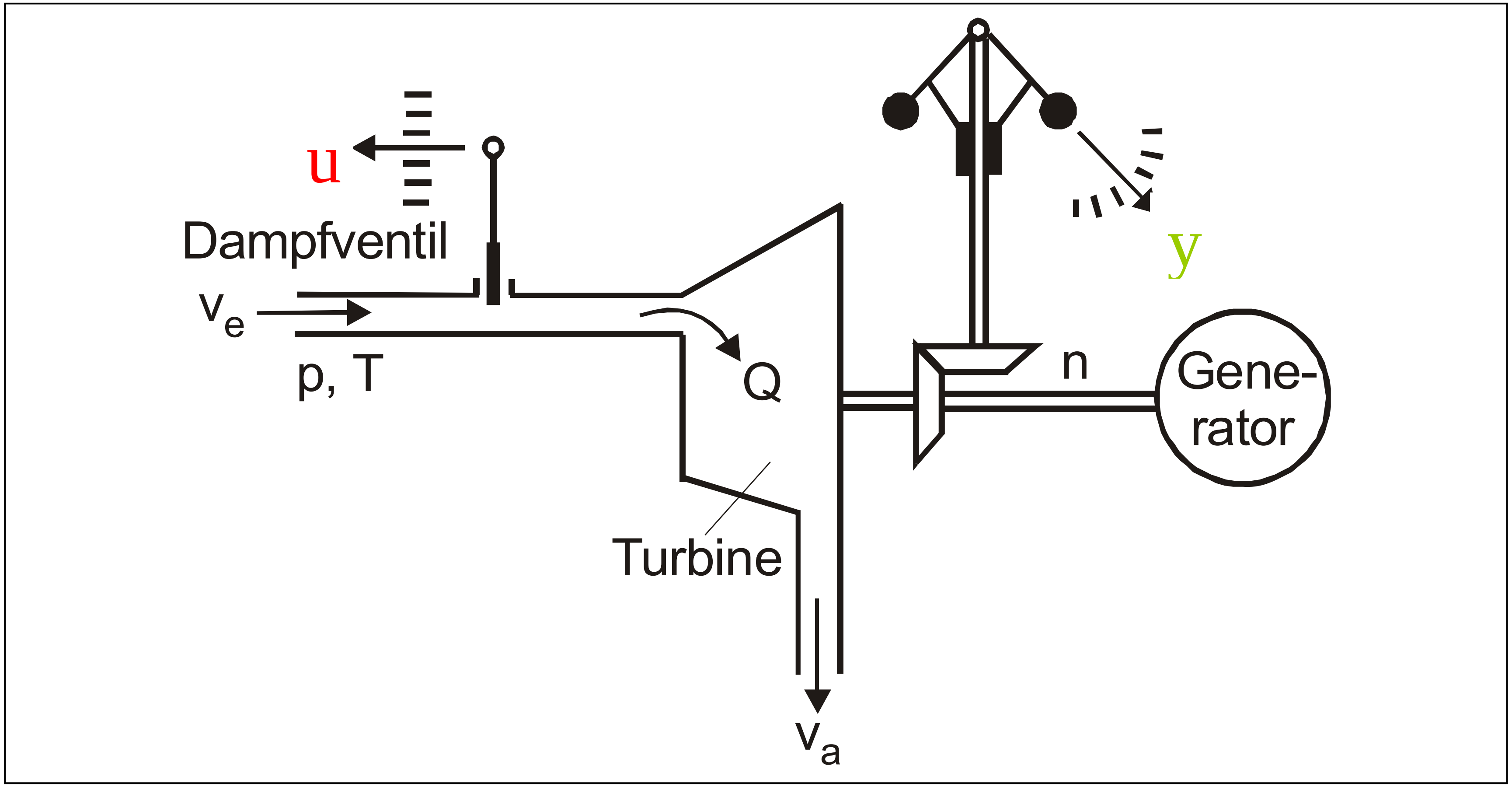
Beispiele:

- Technik – Reaktorregelung bei Temperaturschwankungen

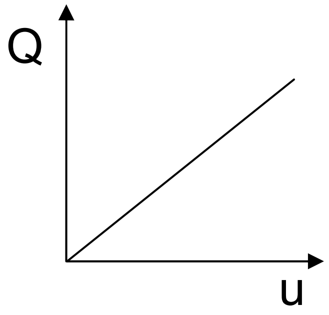
- Natur – Regelung Pupillenöffnung der Augen in Abhängigkeit von der Helligkeit
- Wirtschaft – Regelung von Angebot und Nachfrage über den Preis

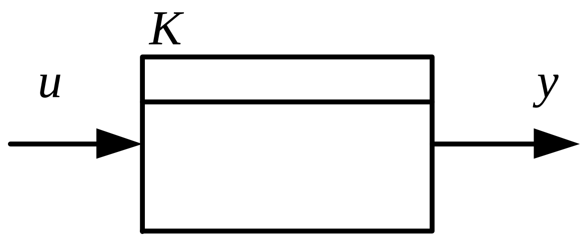
1.3 Beschreibung des Übertragungsverhaltens

Beispielsystem: Drehzahlregelung einer Dampfturbine
Frage: Wie wirkt sich eine Änderung des Ventilhubs u auf die Anzeige y aus?



1. Ventil: Reagiert auf Änderung des Eingangsignals **näherungsweise proportional**.

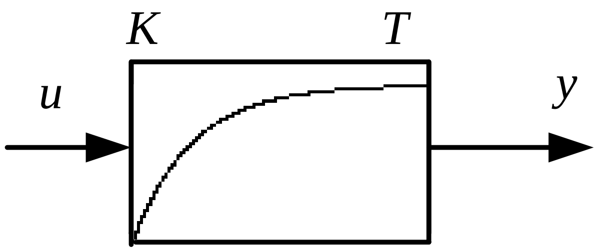




Symbol
Proportional-Glied (P-Glied)

2. Drehzahl Turbine: Turbine folgt einem erhöhten Zustrom an Dampf mit einer **Verzögerung** durch eine

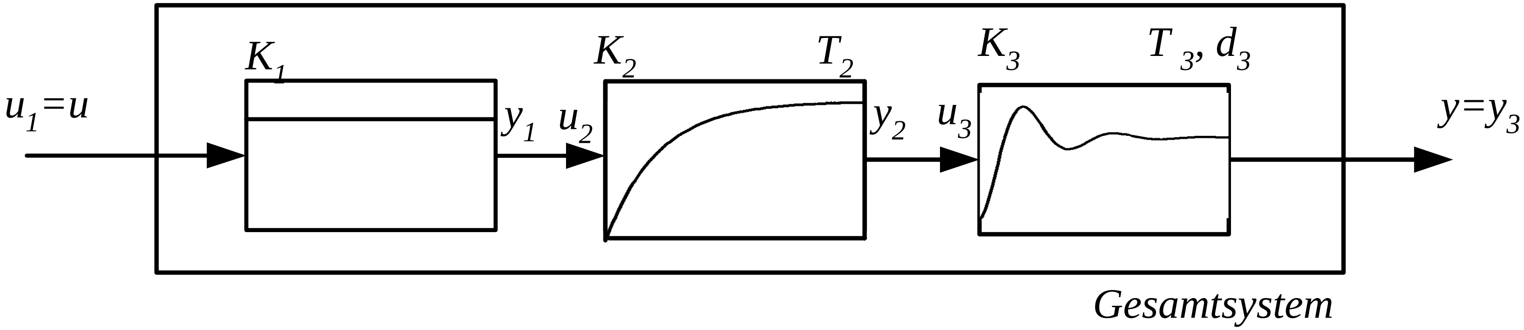
erhöhte Drehzahl.



Symbol Proportional-Glied
mit einfacher Verzögerung (PT1)

3. Anzeige Fliehkaftpendelwinkel: Auf sprunghafte Erhöhung der Drehzahl reagiert das Fliehkraftpendel mit
einer E**rhöhung der Auslenkung bei gleichzeitigen leicht gedämpften Schwingungen.**

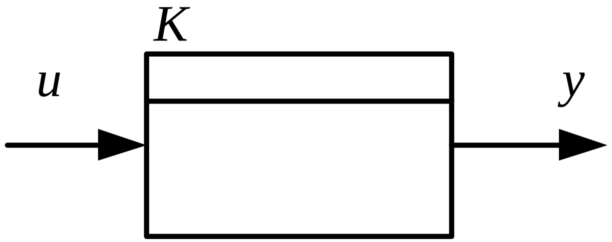
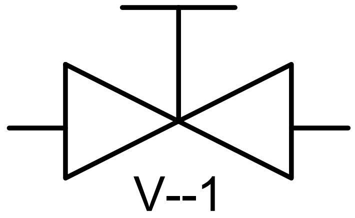
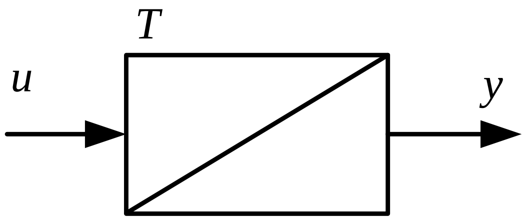
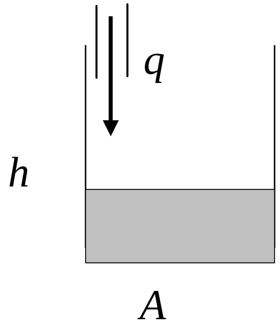
4. Gesamtsystem als Blockschaltbild:
Darstellung des Übertragungsverhaltens des Gesamtsystems durch Hintereinanderschalten der Übertragungsglieder der Teilsysteme

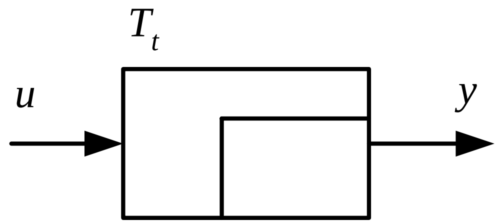


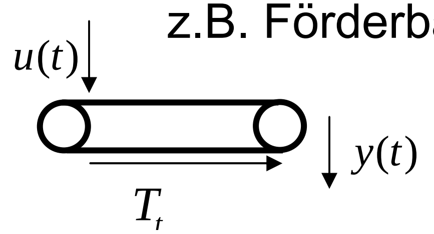
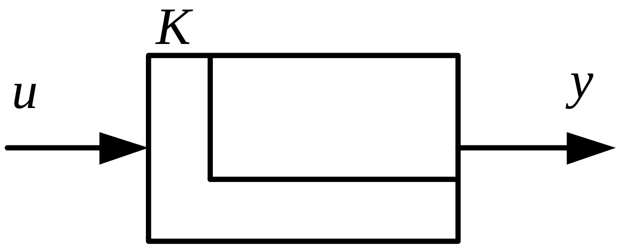
Zusammenfassung:

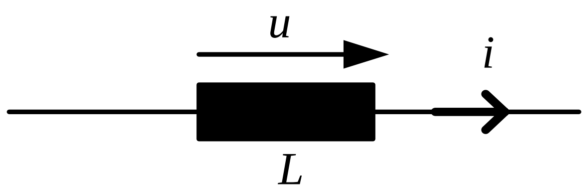
- System durch Bildung von Teilsystemen auftrennen. Dabei ist Weg der Signalübertragung nur in einer Richtung erlaubt.
- System kann aus unterschiedlichsten Teilbereichen stammen (elektrisch, mechanisch, thermisch…)

Wichtige Übertragungsglieder

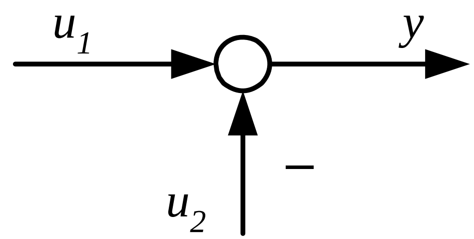
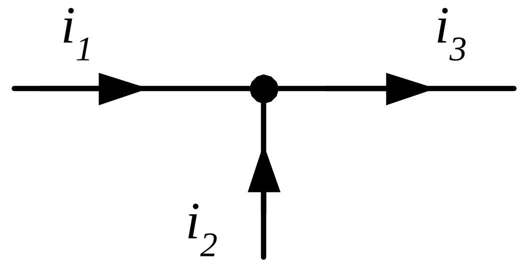
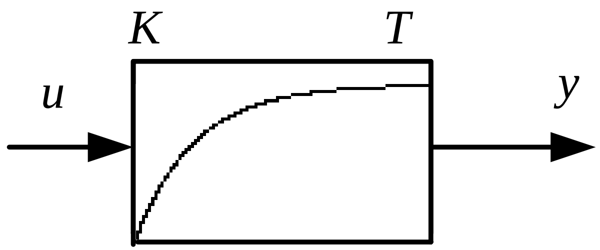
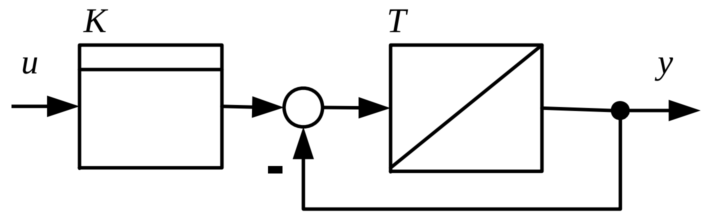
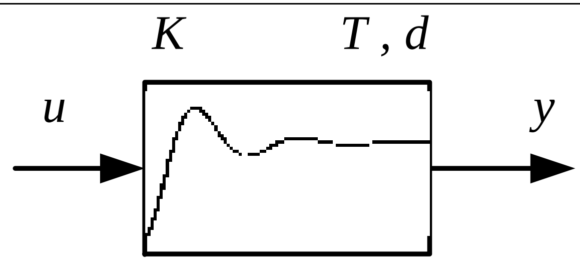
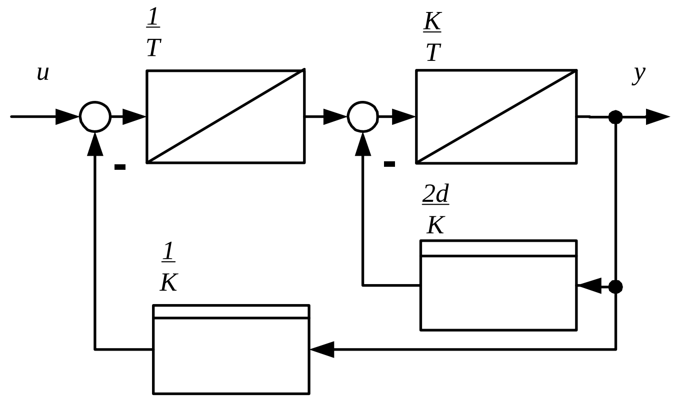
Proportionalglied	 $y = K \cdot u$	z.B. Ventil (näherungsweise proportional) 
Integrator	 $y = \frac{1}{T}\int_0^t u(\tau)d\tau$	z.B. Speicher  $h = \frac{1}{A}\int q dt$

<table>
<tr>
<td>Totzeitglied</td>
<td>

$$y = u(t - T_t)$$</td>
<td>z.B. Förderband

</td>
</tr>
<tr>
<td>Differenzierer</td>
<td>

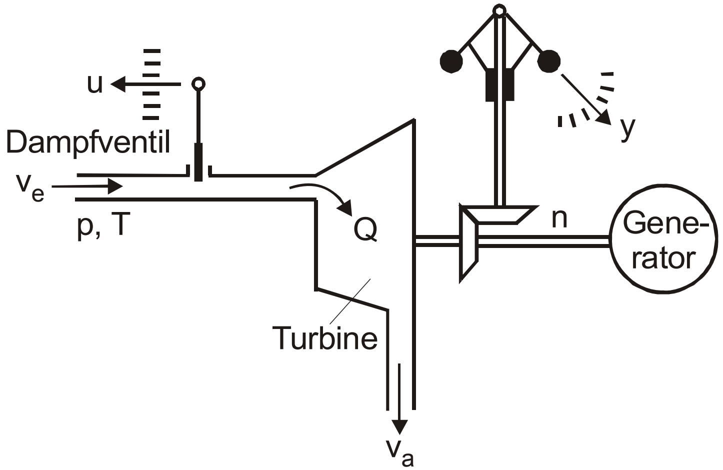
$$y = K \cdot \dot{u}$$</td>
<td>z.B. Induktivität


$$u = L \cdot \dot{i}$$</td>
</tr>
</table>

Summierer	 $y = +u_1 - u_2$	z.B. elektrische Schaltung (Knotenregel) 
PT_1-Glied	 $\dot{y} \cdot T + y = K \cdot u$	
PT_2-Glied	 $T^2 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot dT \cdot \dot{y} + y = K \cdot u$	

1.4 Steuerung und Regelung

Steuerung

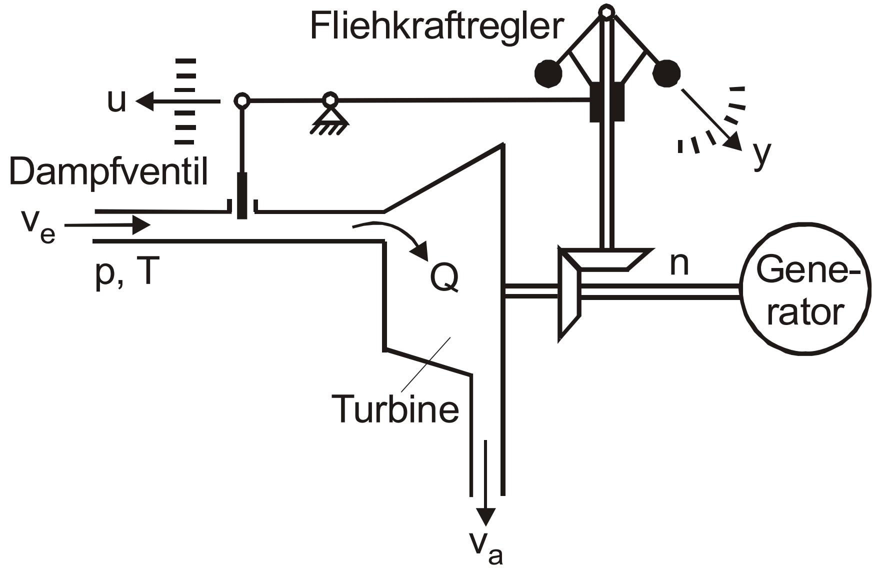


Aus Drehzahl wird erforderliche Ventilstellung berechnet und auf das System gegeben.

- **Aber:** Durchfluss abhängig vom Speisedampfdruck , damit Abweichungen von der Solldrehzahl

Kennzeichnend für eine Steuerung ist der Weg der Signalverarbeitung in einer Richtung (offener Wirkungsablauf)

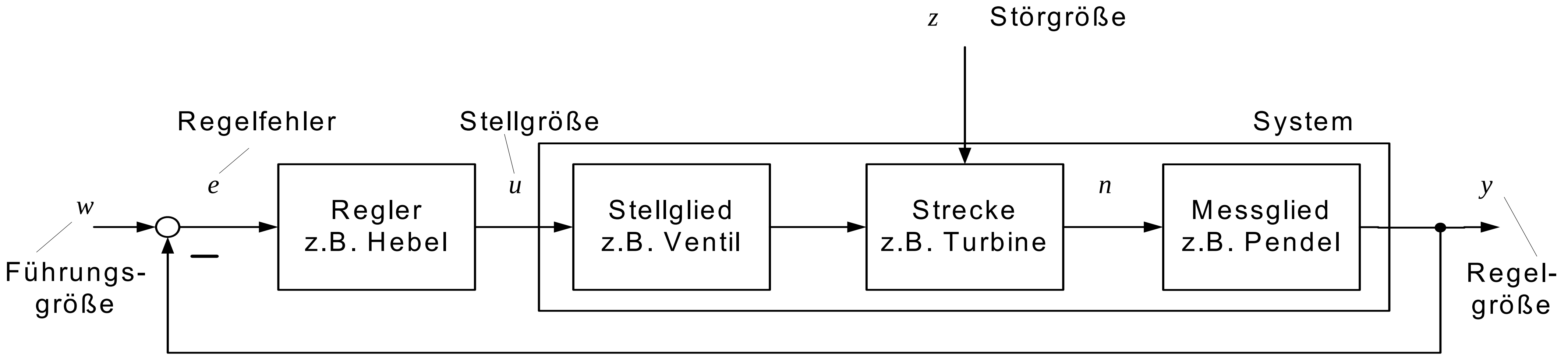
Regelung



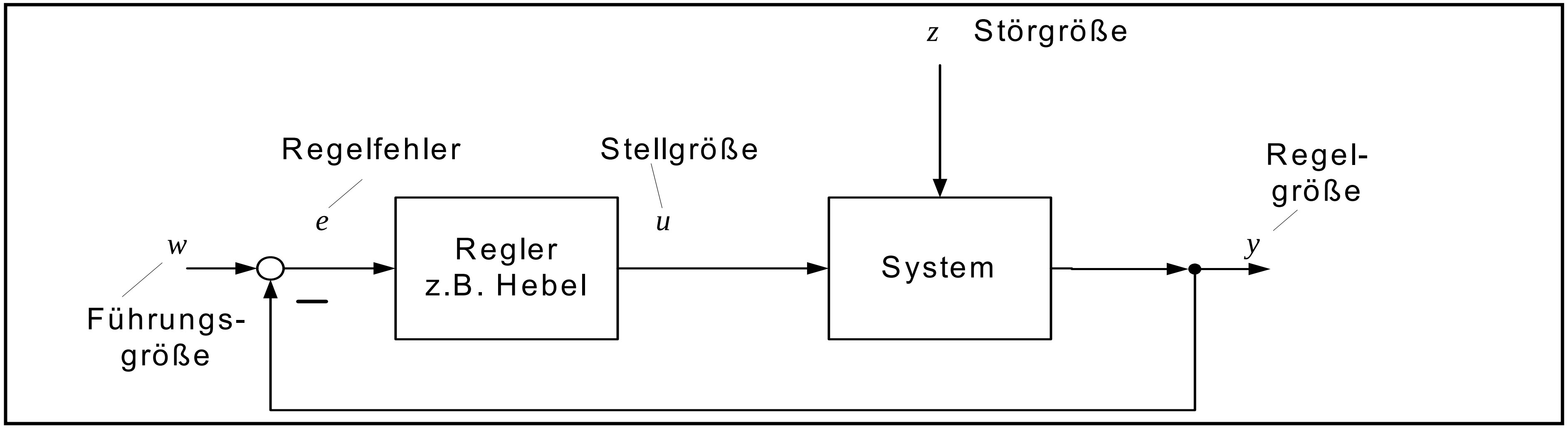
Signal des Fliehkraftpendels wird mit Sollwert verglichen und die Abweichung über einen Hebel auf das Ventil zurückgeführt → dynamische Anpassung des Ventilwertes, u.a. abhängig von Speisedampfdruck

Kennzeichnend für eine Regelung ist der geschlossene Wirkungsablauf. Dadurch können Störungen ausgeregelt werden.

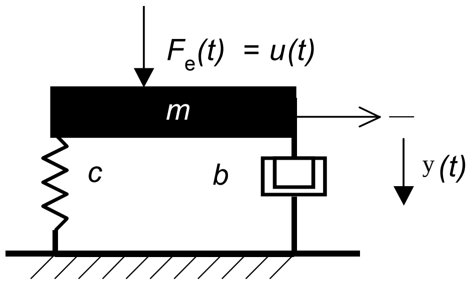
1.5 Grundstruktur und Bezeichnungen in Regelkreisen



Allgemeiner geschlossener Regelkreis



2. Mathematische Modelle
Beispiel 1: Feder-Masse-Dämpfungs-System



F_e: erregende Kraft

Ordnung der DGL = doppelte Anzahl der Freiheitsgrade

Newton:

$$m \cdot \ddot{y} = F_e - b \cdot \dot{y} - c \cdot y$$

$$m \cdot \ddot{y} + b \cdot \dot{y} + c \cdot y = F_e$$

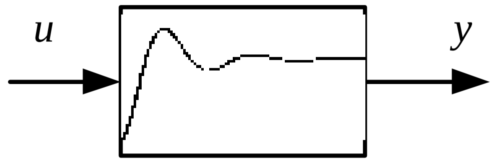
Struktur wie PT_2 – Glied

standardisierte Darstellung $T^2 \cdot \ddot{y} + 2 \cdot d \cdot T \cdot \dot{y} + y = u$

$\frac{1}{c}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{m}{c}}, \frac{b}{2\sqrt{mc}}$

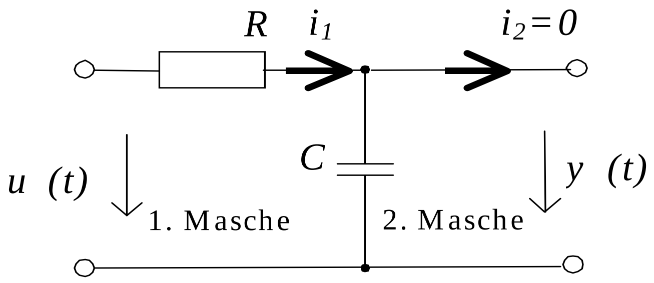
hier:

$$\frac{m}{c} \cdot \ddot{y} + \frac{b}{c} \cdot \dot{y} + y = \frac{1}{c} \cdot F_e$$



Dynamik wird durch lineare gewöhnliche DGL
2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben.

Beispiel 2: RC-Tiefpass



Ausgang hochohmig

Ordnung der DGL = Anzahl der Speicher (hier Kondensator)

Kirchhoffsche Regeln

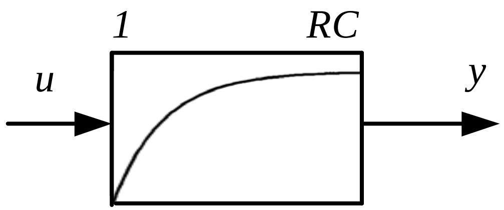
$$1.\ \ Masche: u = R \cdot i_1 + \frac{1}{C}\int i_1 dt$$

$$2.\ \ Masche: y = \frac{1}{C}\int i_1 dt \qquad \Rightarrow \qquad C \cdot \dot{y} = i_1$$

$$R \cdot C \cdot \dot{y} + y = u$$ mit $$T = R \cdot C$$

Damit: $$T \cdot \dot{y} + y = u$$

Dynamik wird durch lineare gewöhnliche DGL 1. Ordnung beschrieben. (PT1-Struktur)



Modelle können durch Übertragungsglieder, die lineare gewöhnliche DGL mit konstanten Koeffizienten darstellen, repräsentiert werden.

- Physikalische Grundlagen zum Aufstellen der DGL:
    - **Mechanik**: Newtonsche Gesetze, Erhaltungssätze, Lagrange Formalismus
    - **Elektrotechnik**: Kirchhoff'sche Gesetze, Maxwell'sche Gleichungen und Folgerungen daraus (Induktionen, Kapazitäten)
    - **Thermodynamik**: Wärmeleitungs- und Wärmeübertragungsgesetze, Erhaltungssätze von Energie und Enthalpie
    - **Fluiddynamik**: Diffusionsgesetz, Strömungsgesetz, ideale Gastheorie,…

3. Analyse linearer Übertragungsglieder im Zeitbereich

3.1 Beschreibung durch Differentialgleichungen

Lineare Übertragungsglieder (PT_1-, PT_2-, P-Glieder …) führen auf Differentialgleichungen der Form

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + ... + a_1 \cdot \dot{y}(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + ... + b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_0 \cdot u(t)$$

(inhomogene Differentialgleichung n-ter Ordnung)

Homogene Differentialgleichung: $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \cdot y^{(\nu)}(t) = 0$

- beschreibt Verhalten für $t > 0$
- vollständig wenn $y_0^{(\nu)}(t_0) = 0$ gegeben

Lösung der Differentialgleichungen

Vorgehensweise:

1) allgemeine Lösung $y_H(t)$ der homogenen Differentialgleichung
2) eine partikuläre Lösung $y_P(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung
3) allgemeine Lösung $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ der inhomogenen Differentialgleichung
4) Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

zu 1): Ansatz: $y(t) = y_H(t) = C \cdot e^{s \cdot t}$ mit $s = \delta + j\omega$ und allg. Konstanten C

einsetzen in DGL: $\left(a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0 \cdot s\right) \cdot C \cdot e^{s \cdot t} = 0$

damit muss für alle t gelten: $a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot s + a_0 \cdot s = 0$

charakteristische Gleichung des Systems; Polynom n-ter Ordnung zur Bestimmung von s

- Charakteristische Gleichung besitzt n Lösungen s_K
- Koeffizienten a_ν reell, dann folgt s_K auch reell oder konjugiert komplexes Paar

Annahme (o.B.d.A.): $y_H(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)$

bei mehrfachen Eigenwerten:
(o.B.d.A.) ein mehrfacher Eigenwert mit Vielfachheit ζ

$$y_k(t) = C_k \cdot t^{k-1} \cdot e^{s_k \cdot t} \qquad \text{mit}\, k = 1, 2, \ldots, \zeta$$

bei einfachen Eigenwerten:

$$y_k(t) = C_k \cdot e^{s_k \cdot t} \qquad \text{mit}\, k = \zeta + 1, \ldots, n$$

zu 2): Methode der Variation der Konstanten zur Bestimmung der partikulären Lösung
Voraussetzung: $u(t)$ muss bekannt sein (Integralauflösung)

zu 4): C_k aus Anfangsbedingungen bestimmen

Beispiel: PT_1-Glied

$$y(t) = \underbrace{y_0(t_0 = 0) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}}_{\substack{\text{homogener Teil} \\ \text{(freie Bewegung)}}} + \underbrace{\int_0^t \frac{k}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot u(\tau) d\tau}_{\substack{\text{zusätzlicher inhomogener Teil} \\ \rightarrow \text{ partikuläre Lösung} \\ \text{(durch u(t) bestimmt)}}}$$

Einfügen: Lösungsmethodik aus HM dcer Partikulärlösung; daraus Faltungsintegral ableiten

3.2 Übertragungsverhalten, Faltung und Linearität

Beispiel: PT_1-Glied

$$y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{T_1}} + \int_0^t \underbrace{\frac{k}{T_1} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{T_1}}}_{\substack{\text{durch Übertragungsverhalten} \\ \text{des Systems determiniert}}} u(\tau) d\tau$$

$$g(t-\tau)$$

Jetzt: AB =0

$$y(t) = 0 + \int_0^t \underbrace{g(t-\tau)}_{\substack{\text{durch Übertragungsverhalten} \\ \text{des Systems determiniert}}} u(\tau) d\tau$$

FALTUNGSINTEGRAL

$$y(t) = g(t) * u(t)$$ Kurzschreibweise

g(t) wird auch die Gewichtsfunktion des Systems genannt. Das Übertragungsverhalten des Systems ist durch die Gewichtsfunktion vollständig bestimmt.

Allgemeine Rechenoperationen:

Faltungsintegral: $$f_1(t) * f_2(t) = \int_{\tau=0}^{t} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau)\, d\tau$$

In der komplexen Ebene: $f_1(t) * f_2(t) = F_1(s) \cdot F_2(s)$

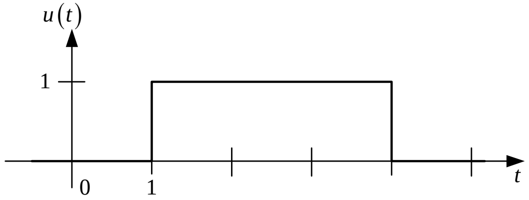
Kommutativ-Gesetz: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$

Assoziativ-Gesetz: $\left(f_1(t) * f_2(t)\right) * f_3(t) = f_1(t) * \left(f_2(t) * f_3(t)\right)$

Distributiv-Gesetz: $\left(f_1(t) + f_2(t)\right) * f_3(t) = f_1(t) * f_3(t) + f_2(t) * f_3(t)$

Bsp.: Systemantwort eines Integrators

$g(t) = \sigma(t)$ … Einheitssprung (Impulsantwort eines Integrators)



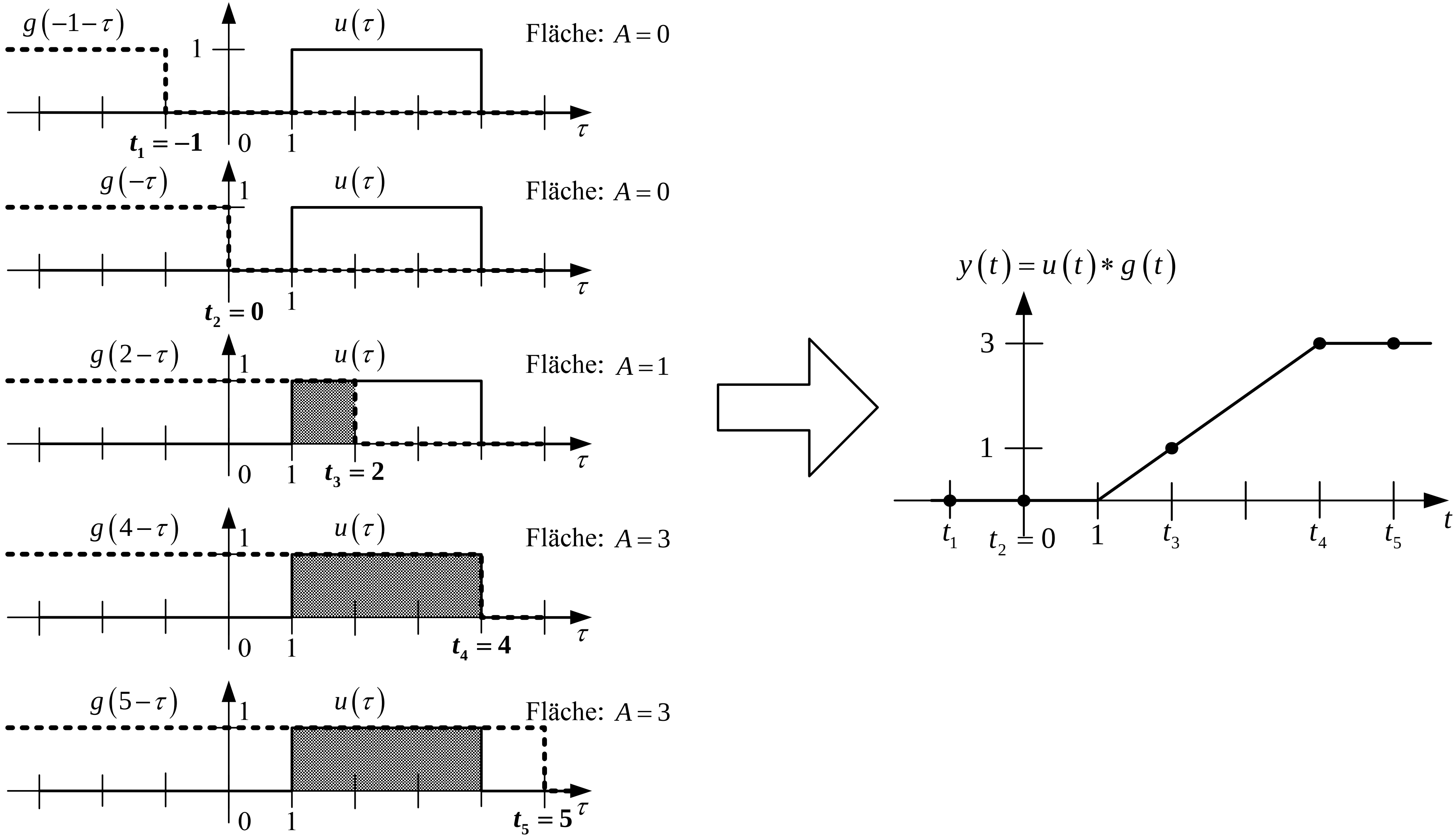
$$u(t) = \begin{cases} 0; & t < 1 \\ 1; & 1 \le t < 4 \\ 0; & t \le 4 \end{cases}$$

Faltung:

$$f(t) = g(t) * u(t) = u(t) * g(t) \overset{Def.}{=} \int_{\tau=0}^{t} u(\tau) \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_{\tau=1}^{4} 1 \cdot \sigma(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \begin{cases} 0; & t < 1 \\ t-1; & 1 \le t < 4 \\ 3; & t \ge 4 \end{cases}$$

Graphische Lösung:



Linearität

Definition: allgemeiner Operator $y(t) = L\{u(t)\}$

Der Operator L{u(t)} heißt linear, wenn das Superpositionsprinzip (Überlagerungsprinzip) und das Verstärkungsprinzip erfüllt sind.
Eine Differentialgleichung heißt linear, wenn der Differentialoperator linear ist, d.h. wenn der Zusammenhang zwischen *y(t)* und *u(t)* linear ist.

SUPERPOSITIONSPRINZIP

Ruft das Eingangssignal $u(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ und das Eingangssignal $\tilde{u}(t)$ das Ausgangssignal $\tilde{y}(t)$ hervor, so erzeugt der Operator L aus der Summe $u(t)+\tilde{u}(t)$ auch am Ausgang die Summe $y(t)+\tilde{y}(t)$ für beliebige Eingangssignale $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$.

VERSTÄRKUNGSPRINZIP

Ruft das Eingangssignal $u(t)$ das Ausgangssignal $y(t)$ hervor, so ruft $\alpha \cdot u(t)$ das Ausgangssignal $\alpha \cdot y(t)$ für ein beliebiges Eingangssignal $u(t)$ und eine beliebige Konstante α hervor.

$$L\left\{\alpha \cdot u(t)\right\} = \alpha \cdot L\left\{u(t)\right\}$$

$$L\left\{u(t) + \tilde{u}(t)\right\} = L\left\{u(t)\right\} + L\left\{\tilde{u}(t)\right\}$$

LINEARITÄTSRELATION

$$L\left\{\alpha_1 \cdot u(t) + \alpha_2 \cdot \tilde{u}(t)\right\} = \alpha_1 \cdot L\left\{u(t)\right\} + \alpha_2 \cdot L\left\{\tilde{u}(t)\right\}$$

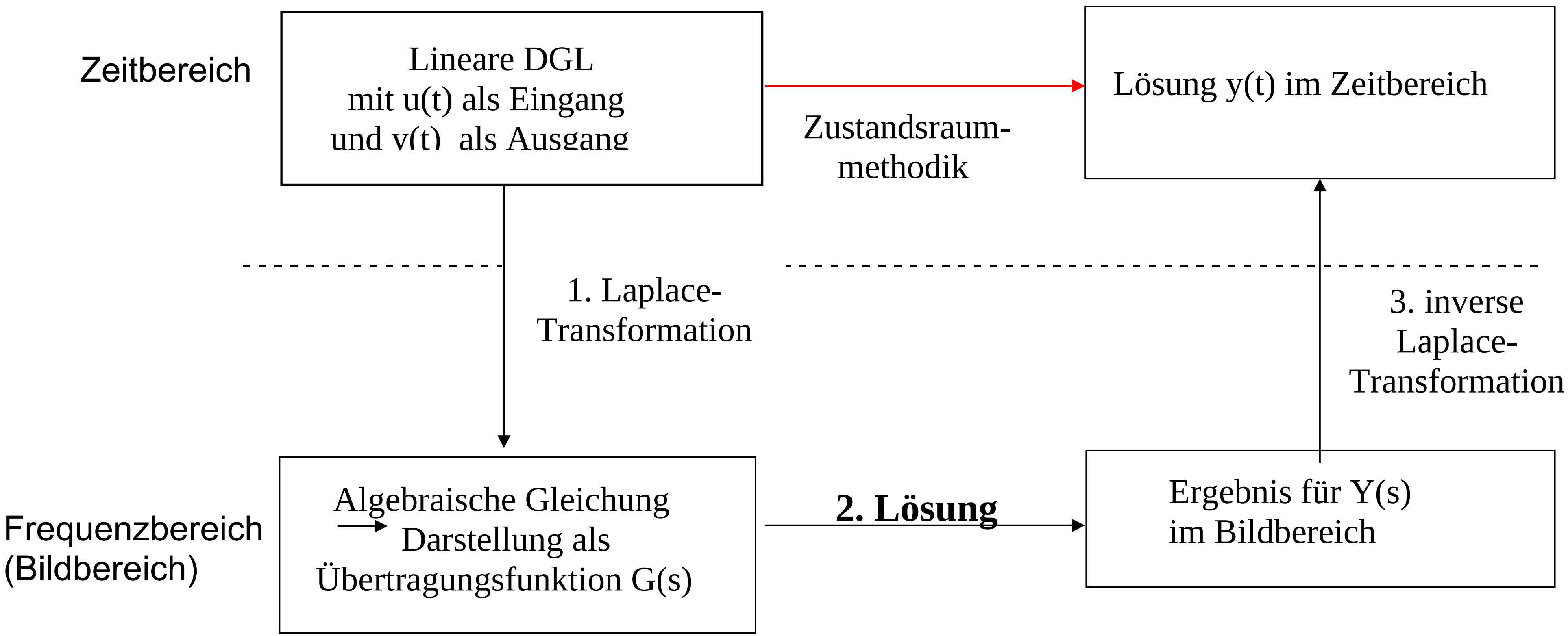
➡ Lässt sich ein Übertragungsglied durch eine Differentialgleichung der Form

$$a_n \cdot y^{(n)} + \ldots + a_1 \cdot \dot{y} + a_0 \cdot y = b_m \cdot u^{(m)} + \ldots + b_1 \cdot \dot{u} + b_0 \cdot u$$

beschreiben, so gelten bezüglich $u(t)$ und $y(t)$ die Linearitätsbedingungen.

4. Analyse linearer Übertragungsglieder im Frequenzbereich

Lösung von Differentialgleichungen



4.1 Laplace-Transformation

Ziel: Hilfsmittel für die Lösung von Differentialgleichungen. Durch Transformation wird aus einer DGL eine algebraische Gleichung.

Definition: $$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt; \qquad s = \delta + j\omega$$

$$F(s) = \mathfrak{L}\{f(t)\}$$

oder $F(s) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$

dabei ist $f(t) = 0 \; \forall \; t < 0$; das uneigentliche Integral muss konvergieren

Beispiel: $f(t) = \sigma(t) = 1 \ \forall \ t \geq 0$

$$F(s) = \int_{t=0}^{\infty} \sigma(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty} e^{-s \cdot t} dt$$

$$= -\frac{1}{s}\left[\underbrace{e^{-s \cdot \infty}}_{=0} - \underbrace{e^{-s \cdot 0}}_{=1}\right]$$

$$= \frac{1}{s}$$

üblich: Korrespondenztabellen

➡ Geben Zusammenhang zwischen einer Zeitfunktion $f(t)$ und deren transformierter Funktion $F(s)$ im Bildbereich an. Dabei ist die Zuordnung umkehrbar und eindeutig.

Laplace-Transformation - Korrespondenzen (1)

Zeitbereich $\circ\!\!-\!\!-\!\!\bullet$ Bildbereich		
	Zeitfunktion $f(t)$ **für** $t \geq 0$	**Laplace-Transformation** $F(s)$
1	$T_0 \quad \delta(t)$	$T_0 \cdot 1$
2	$1 \;\; (\sigma(t))$	$\frac{1}{s}$
3	$\frac{t}{T_1}$	$\frac{1}{s^2 T_1}$
4	$(\frac{t}{T_1})^2$	$\frac{2}{s^3 T_1^2}$
5	$(\frac{t}{T_1})^n$	$\frac{n!}{s^{n+1} T_1^n}$
6	e^{-t/T_1}	$\frac{1}{s+1/T_1}$

7	$\frac{t}{T_1} e^{-t/T_1}$	$\frac{1}{T_1} \frac{1}{\left(s+1/T_1\right)^2}$
8	$\left(\frac{t}{T_1}\right)^2 e^{-t/T_1}$	$\frac{2}{T_1^2} \frac{1}{\left(s+1/T_1\right)^3}$
9	$\left(\frac{t}{T_1}\right)^n e^{-t/T_1}$	$\frac{n!}{T_1^n} \frac{1}{\left(s+1/T_1\right)^{n+1}}$
10	$1-e^{-t/T_1}$	$\frac{1}{s\left(1+sT_1\right)}$
11	$1-e^{-t/T_1} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(t/T_1\right)^i}{i!}$	$\frac{1}{s\left(1+sT_1\right)^n}$
12	$\left(1-e^{-t/T_1}\right)^n$	$\frac{1}{s\prod_{i-1}^{n}\left(1+s\frac{T_1}{i}\right)}$

Laplace-Transformation – Korrespondenzen (2)

Zeitbereich $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ Bildbereich		
	Zeitfunktion $f(t)$ **für** $t \geq 0$	**Laplace-Transformation** $F(s)$
13	$\frac{t}{T_1} - 1 + e^{-t/T_1}$	$\frac{1}{s^2 \; T_1 (1 + s \; T_1)}$
14	$e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2} \;\; ; \;\; T_1 \neq T_2$	$\frac{T_1 - T_2}{(1 + s \; T_1)(1 + s \; T_2)}$
15	$1 - \varsigma \; e^{-t/T_1} + (\varsigma - 1) e^{-t/T_2} ; T_1 \neq T_2$ $\varsigma = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$	$\frac{1}{s \; (1 + s \; T_1)(1 + s \; T_2)}$
16	$\sin \; \omega \; t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

17	$\cos \quad \omega \quad t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
18	$e^{-t/T_1} \quad \sin \quad \omega \quad t$	$\dfrac{\omega}{(s+1/T_1)^2+\omega^2}$
19	$e^{-t/T_1} \quad \cos \quad \omega \quad t$	$\dfrac{s+1/T_1}{(s+1/T_1)^2+\omega^2}$
20	$\dfrac{e^{-D\,t/T_0}}{\sqrt{1-D^2}} \quad \sin \quad (\sqrt{1-D^2}\ \dfrac{t}{T_0})\ ;\ D<1$	$\dfrac{T_0}{(1+s \quad 2DT_0+s^2 \quad T_0{}^2)}$
21	$1-\dfrac{e^{-D\,t/T_0}}{\sqrt{1-D^2}} \quad \cos \quad (\sqrt{1-D^2}\ \dfrac{t}{T_0}-\psi)\ ;$ $\psi = arc \quad \tan\dfrac{D}{\sqrt{1-D^2}} = arc \quad \cos\sqrt{1-D^2}$ $= arc \quad \sin \quad D$	$\dfrac{T_0}{s \quad \left(1+s \quad 2DT_0+s^2 \quad T_0{}^2\right)}$

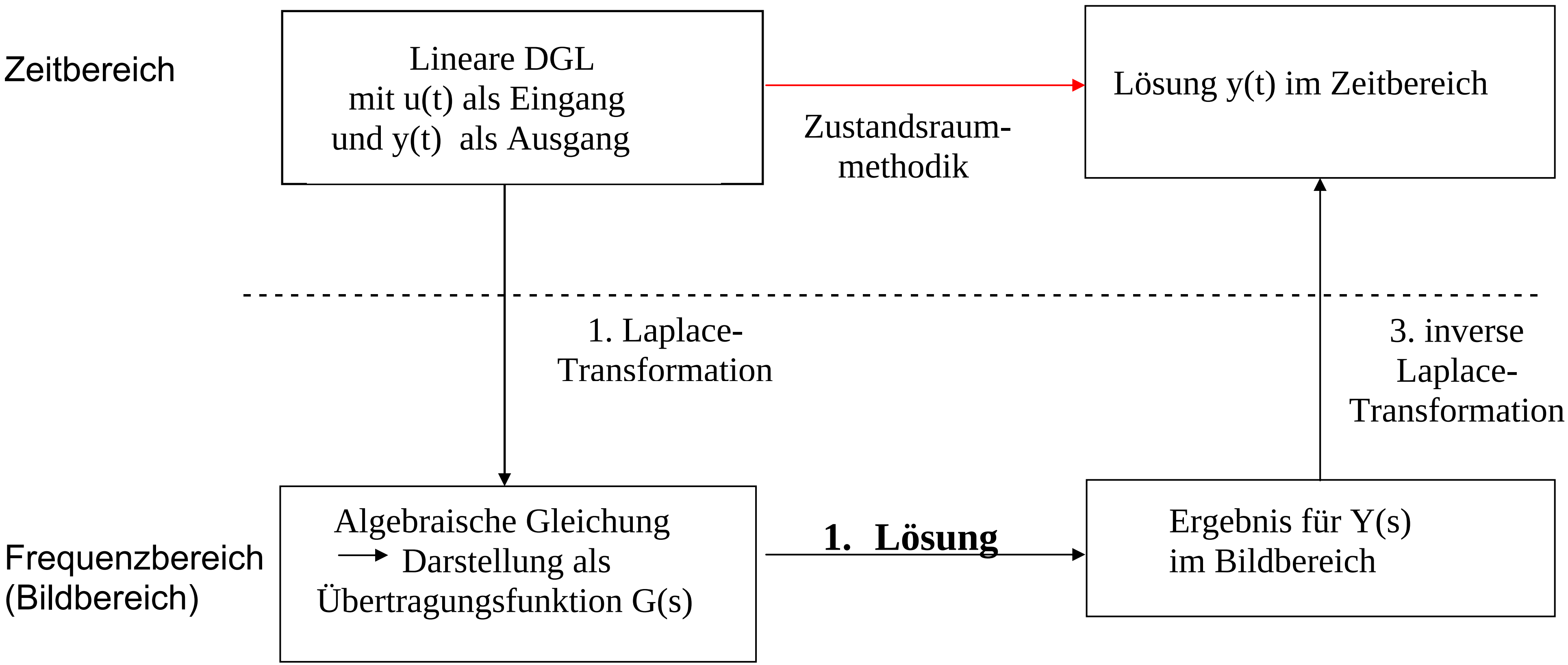
4.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation - Regeln und Sätze

Regel	**Zeitbereich**	**Bildbereich**
Linearitäts–R. (Überlagerungs-R.)	$a \quad f_1(t)+b \quad f_2(t)$	$a \quad F_1(s)+b \quad F_2(s)$
Differentiations-R. (für verallg. Diff.)	$\dot{f}(t)$ $\ddot{f}(t)$ $\dddot{f}(t)$	$s \quad F(s)-f(0^+)$ $s^2F(s)-s \quad f(0^+)-\dot{f}(0^+)$ $s^3F(s)-s^2 f(0^+)-s \quad \dot{f}(0^+)-\ddot{f}(0^+)$
Integrations-R.	$\int_{0^-}^{1} f(\tau) \quad d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Verschiebungs-R. (Rechtsversch.)	$f(t-t_0)$	e^{-s}
Dämpfungs-R.	$f(t)e^{\alpha t}$	$F(s-\alpha)$
Faltungs-R.	$f_1(t) \; {}^* \; f_2(t)=\int_{0^-}^{t} f_1(t-\tau)\,f_2(\tau) \quad d\tau$	$F_1(s)\cdot F_2(s)$

Grenzwertsätze der Laplace-Transformation

Anfangswertsatz $\lim\limits_{t \to +0} f(t) = \lim\limits_{s \to \infty} s \quad F(s)$

Endwertsatz $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{s \to 0} sF(s)$ wenn für $t \to \infty$ ein endlicher Grenzwert von $f(t)$ existiert.


Zeitbereich
Lineare DGL
mit u(t) als Eingang
und y(t) als Ausgang
Zustandsraum-
methodik
Lösung y(t) im Zeitbereich
1. Laplace-
Transformation
3. inverse
Laplace-
Transformation
Frequenzbereich
(Bildbereich)
Algebraische Gleichung
→ Darstellung als
Übertragungsfunktion G(s)
1. Lösung
Ergebnis für Y(s)
im Bildbereich

4.3 Lösung von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen mit Hilfe der Laplace-Tansformation

Ausgangspunkt:

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_0 u + b_1 \dot{u} + \ldots + b_m u^{(m)}$$

Laplace-Transformation (vgl. AB 46)

$$\begin{aligned}
&\left[a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right] Y(s) && && \left[b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m\right] U(s) \\
&-\left[a_n y(0)\right] s^{n-1} && && -\left[\mathrm{b}_\mathrm{m} u(0)\right] \mathrm{s}^{\mathrm{m-1}} \\
&-\left[\mathrm{a}_\mathrm{n} \dot{y}(0) + a_{n-1} y(0)\right] s^{n-2} && = && \vdots \\
&\qquad \vdots && && \vdots \\
&-\left[a_n y^{(n-1)}(0) + \ldots. + a_1 y(0)\right] && && -\left[b_1\left(u(0)\right) + \ldots + b_m u^{(m-1)}(0)\right]
\end{aligned}$$

Damit wird:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\overbrace{b_0 + b_1 s + \ldots + b_m s^m}^{Z(s)}}{\underbrace{a_0 + a_1 s + \ldots a_n s^n}_{N(s)}}}_{\substack{\text{komplexe} \\ \text{Übertragungsfunktion} \\ \text{G(s)}}} \; \mathrm{U(s)} - \underbrace{\frac{\mathrm{b_m} u(0) s^{m-1}}{N(s)} - \ldots + \frac{a_n y(0) s^{n-1}}{N(s)} + \ldots}_{\text{Anfangsbedingung}}$$

→ Aus einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten wird nach der Laplace-Transformation eine algebraische Gleichung.

→ Nach Umformung nach *Y*(*s*) wird bei verschwindenden Anfangsbedingungen

$$\left(u(0) \ldots u^{(m-1)}(0), \quad y(0) \ldots y^{(n-1)}(0) = 0\right)$$

die Differentialgleichung durch die **komplexe Übertragungsfunktion** *G*(*s*) repräsentiert.

Also:

$$\boxed{Y(s) = G(s) \cdot U(s) + \text{Anfangsbedingungen}}$$

→ Eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstantem Koeffizienten ergibt für *G*(*s*) eine gebrochen rationale Funktion

- mit einem Zählerpolynom *Z(s),*
- Einem Nennerpolynom *N*(*s*).
- Die Ordnung in der Differentialgleichung entspricht der Ordnung des Nennerpolynoms.

Hinweis:
Die für die Berechnung des Faltungintegrals benötigte Gewichtsfunktion *g(t)* ist die Laplace-Rücktransformierte der Übertragungsfunktion *G(s)*.

Laplace-Rücktransformation:
Für die Rücktransformation ist die faktorisierte Darstellung des Nenners günstig.

$$G(s) = K \cdot \frac{Z(s)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)....(s-\alpha_n)}$$

$\alpha_1 \ldots . \alpha_n$ sind Nullstellen von $N(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ und werden *Pole* genannt, *Pole* sind reell oder konjugiert komplex.

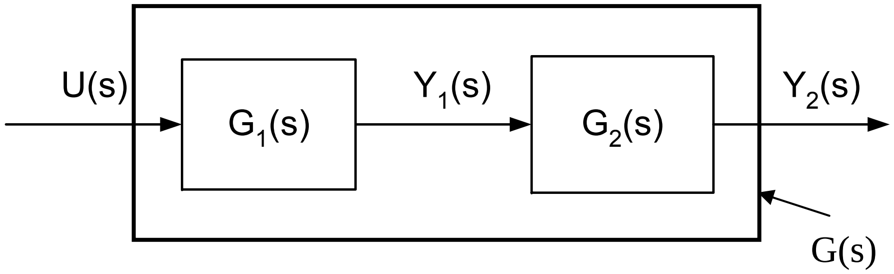
Laplace-Transformierte wichtiger Übertragungsglieder

P-Glied	$y(t) = K \cdot u(t)$	$Y(s) = K \cdot U(s)$
I-Glied	$y(t) = \frac{1}{T}\int_0^t u(\tau)d\tau$	$Y(s) = \frac{1}{T\,s} \cdot U(s)$
D-Glied	$y(t) = K \cdot \dot{u}(t)$	$Y(s) = K \cdot s \cdot U(s)$
PT1-Glied	$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$	$Y(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot U(s)$
PT2-Glied	$T^2 \cdot \ddot{y}(t) + 2dT \cdot \dot{y}(t) + y(t) = K \cdot u(t)$	$Y(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2dTs + 1} \cdot U(s)$
T_t-Glied	$y(t) = u(t - T_t)$	$Y(s) = e^{-T_t s} U(s)$

Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$; Anfangswerte $y(0) = 0, \quad u(0) = 0$

Übertragungsfunktionen von Grundschaltungen

1. Serienschaltung

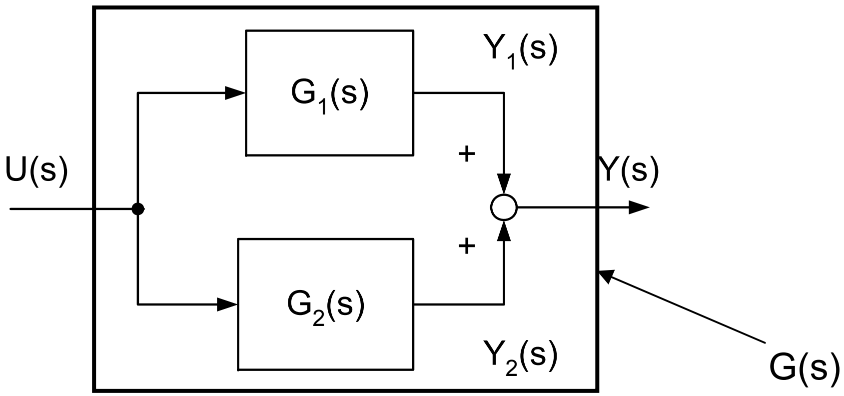


$$Y_1 = G_1 \cdot U, \quad Y_2 = G_2 \cdot Y_1$$

$$Y_2 = \underbrace{G_1 \cdot G_2} \cdot U$$

$$\boxed{G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)}$$

2. Parallelschaltung



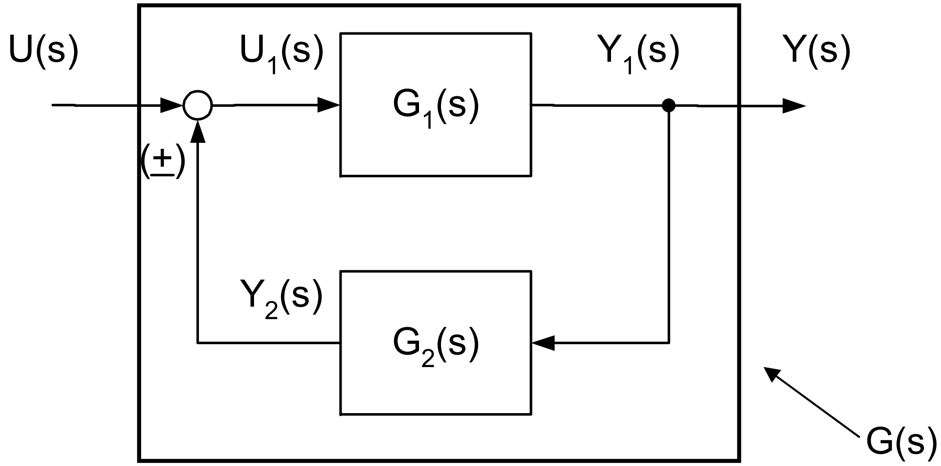
$$Y_1 = G_1 \cdot U, \quad Y_2 = G_2 \cdot U$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = G_1 U + G_2 U$$

$$= \underbrace{(G_1 + G_2)} \cdot U$$

$$\boxed{G(s) = G_1(s) + G_2(s)}$$

3. Rückkopplung



$Y_1 = G_1 \cdot U$, $Y_2 = G_2 \cdot Y_1$,

$Y = Y_1$

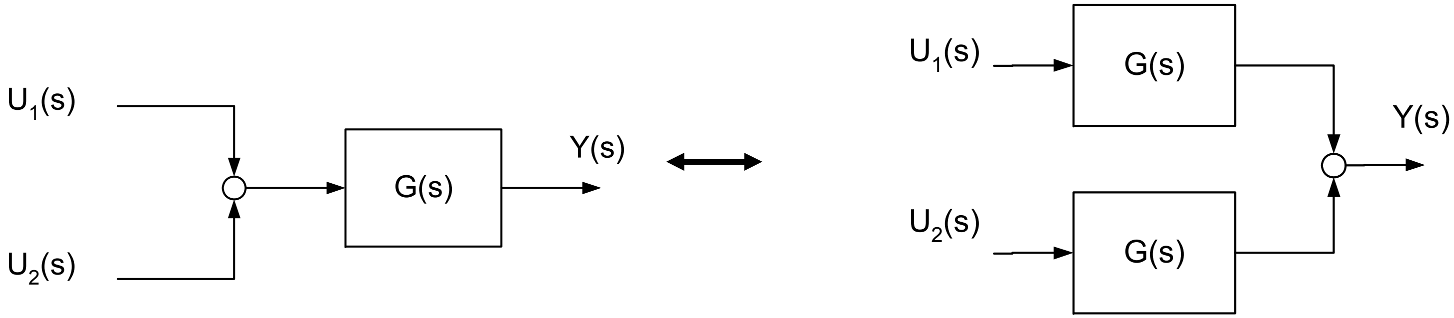
$U_1 = U \pm Y_2$

$Y_1 = G_1 \cdot (U \pm G_2 Y_1)$,

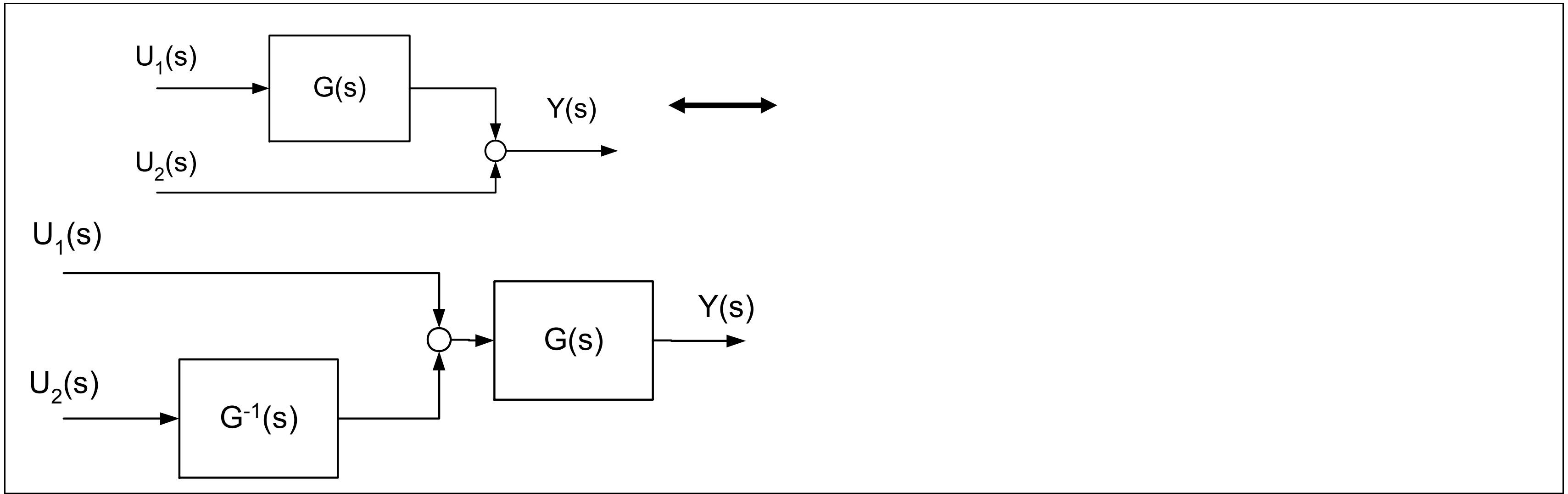
$Y_1 \mp G_1 \cdot G_2 \cdot Y_1 = G_1 U$

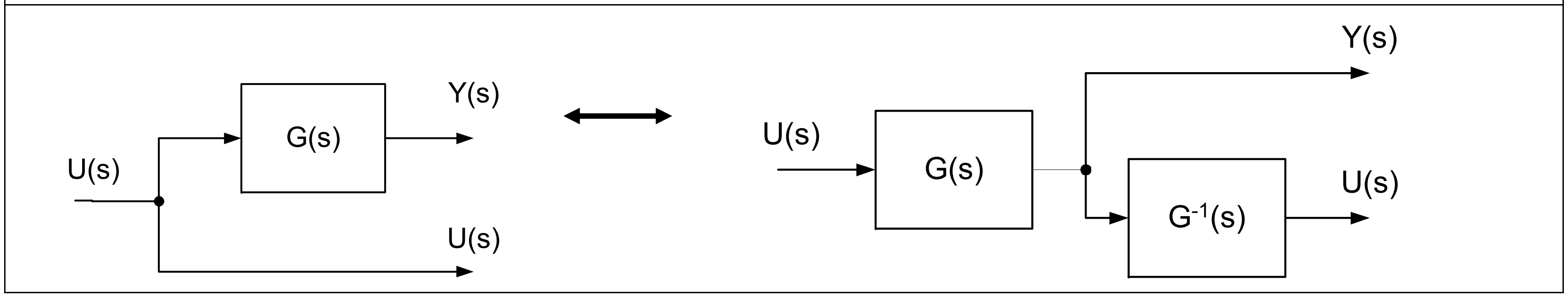
$$\boxed{Y(s) = \underbrace{\frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s) G_2(s)}}_{G(s)} U(s)}$$

4. Verlegen von Blöcken



$$Y = G \cdot (U_1 + U_2) = GU_1 + GU_2$$


U1(s)
G(s)
Y(s)
U2(s)
U1(s)
G(s)
Y(s)
U2(s)
G-1(s)


G(s)
Y(s)
U(s)
U(s)
Y(s)
U(s)
G(s)
U(s)
G-1(s)

4.4 Frequenzgangdarstellung

Darstellungsmöglichkeiten für die komplexe Übertragungsfunktion

→ physikalisch interpretierbar; Grundlage für Reglerentwurfsverfahren; (Voraussetzung: System im eingeschwungenen Zustand)

Setze: $\sigma = 0$ dann wird aus: *G(s)* mit $s = \sigma + j\omega$ die Funktion $G(j\varpi)$.

→ *G(jω)* wird als Frequenzgang bezeichnet

G(jω) ist eine gebrochen rationale Funktion und kann in Realteil und Imaginär-Teil aufgespaltet werden:

$$G(j\omega) = \mathrm{Re}(G(j\omega)) + j\,\mathrm{Im}(G(j\omega)) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

mit

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(G(j\omega)) + \mathrm{Im}^2(G(j\omega))}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\,G(j\omega)}{\mathrm{Re}\,G(j\omega)}\right)$$

Darstellung von *G(jω)*

- in der komplexen Ebene heißt **Ortskurve**
- im logarithmischen Maßstab getrennt nach Amplitude *A(ω)* und Phase *φ(ω)* heißt **Bodediagramm**

Die Darstellung nach Betrag und Phase kann physikalisch interpretiert werden. Anregung eines linearen Systems mit $u(t) = \hat{u}\sin\omega t$, liefert nach der Einschwingphase am Ausgang wieder eine sinusförmige Funktion, die nur in Amplitude *A(ω)* und Phase *φ(ω)* verschoben ist

Allgemeine Betrachtung von Ortskurven für gebrochen rationale Funktionen

$$G\left(j\omega\right)=\frac{b_0+b_1 j\omega+\ldots+b_m\left(j\omega\right)^m}{a_0+a_1 j\omega+\ldots+a_n\left(j\omega\right)} \qquad \mathrm{m}\leq\mathrm{n}$$

1.) $\omega=0$

jetzt: $K=\frac{b_0}{a_0}\rightarrow \qquad \omega\rightarrow 0 \qquad \lim_{\varpi\rightarrow 0} G\left(j\omega\right)=\frac{b_0}{a_0}$

d.h. Ortskurve beginnt auf der reellen Achse bei $K=\frac{b_0}{a_0}$.

Jetzt: integrierendes Verhalten mit Vielfachheit *p. (*$a_0 \ldots a_{p-1}=0$)

$$\lim_{\varpi\rightarrow 0} G(j\omega)=\lim_{\varpi\rightarrow 0}\left(\frac{b_0}{a_p}\cdot\frac{1}{\left(j\omega\right)^p}\cdot\underbrace{\frac{1+\ldots}{1+\ldots}}_{\text{gebr. rat. Funktion}}\right)=\frac{b_0}{a_p}\cdot\frac{1}{\underbrace{\omega^p}_{\infty}}e^{-jp\frac{\pi}{2}}$$

d.h. bei integrierendem Verhalten kommt Ortskurve aus dem Unendlichen mit Phasenwinkel $-p\cdot\frac{\pi}{2}$.

2.) $\omega \to \infty$: Technische Systeme: Verzögerungsverhalten *m<n*

$$A(\omega) \to 0 \qquad \text{für} \qquad \omega \to \infty$$

i) System: *m=1*; *n>1*

$$\lim_{\varpi \to \infty} G(j\omega) = \underbrace{\lim_{\varpi \to \infty}}_{\text{Höchste Potenz dominiert}} \frac{b_0}{a_n} \cdot \frac{1}{\ldots + \left(j\omega\right)^n} \approx \frac{b_0}{a_n} \cdot \frac{1}{\left(j\omega\right)^n} = \frac{b_0}{a_n \omega^n} e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

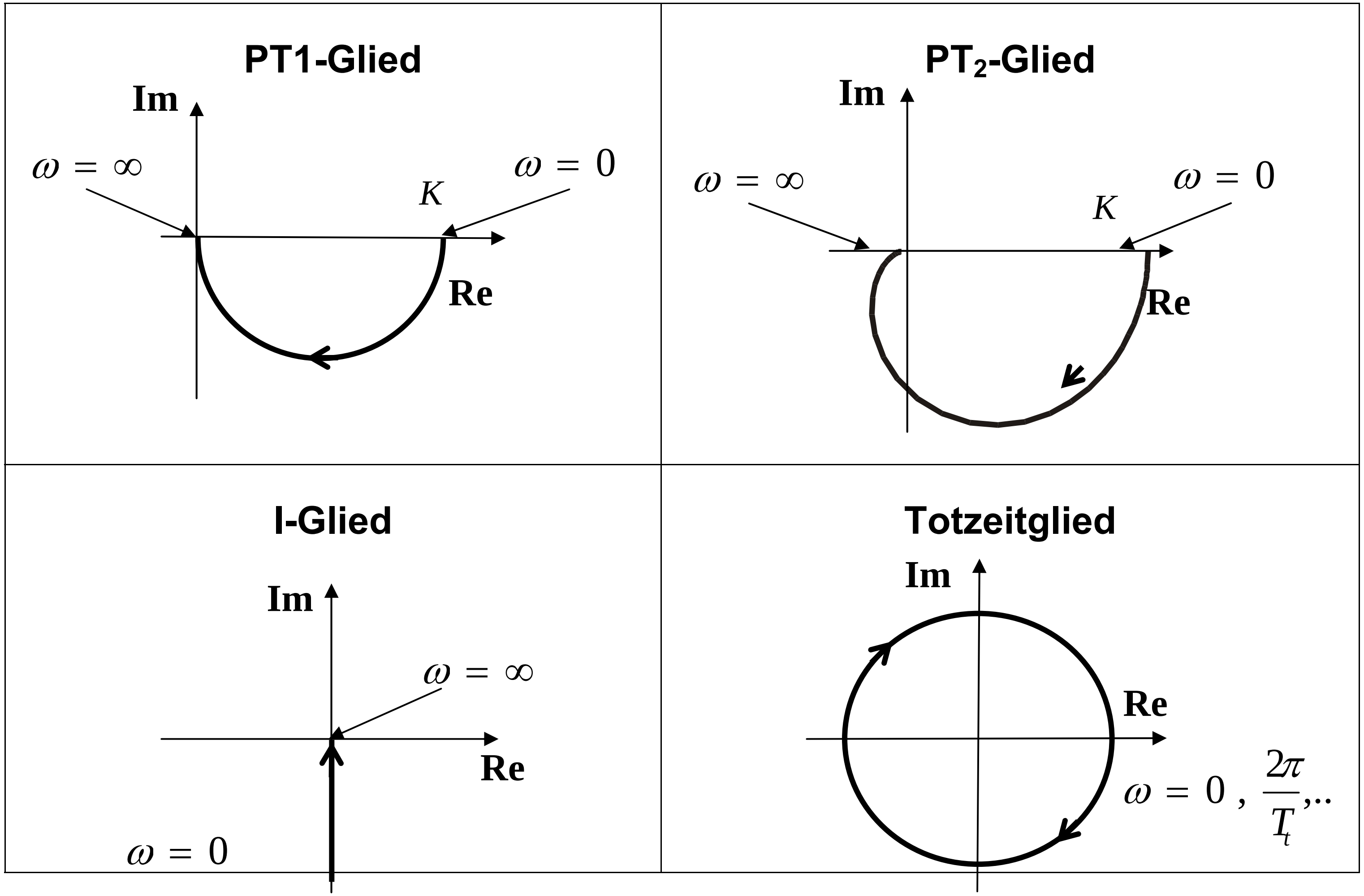
D.h. Ortskurve unter Winkel $-n \cdot \frac{\pi}{2}$ in den Ursprung.

ii) System $\qquad m < n \qquad\qquad m > 1$

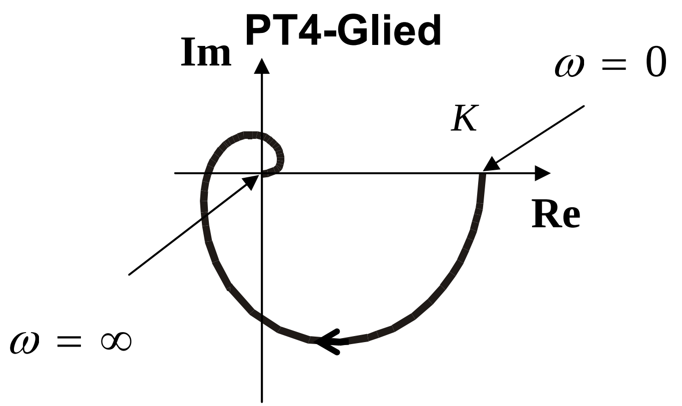
$$\lim_{\varpi \to \infty} G(j\omega) = \lim \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{\ldots + (j\omega)^m}{\ldots + (j\omega)^n} = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{1}{(j\omega)} n - m) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{1}{\omega^{n-m}} e^{-j(n-m)\frac{\pi}{2}}$$

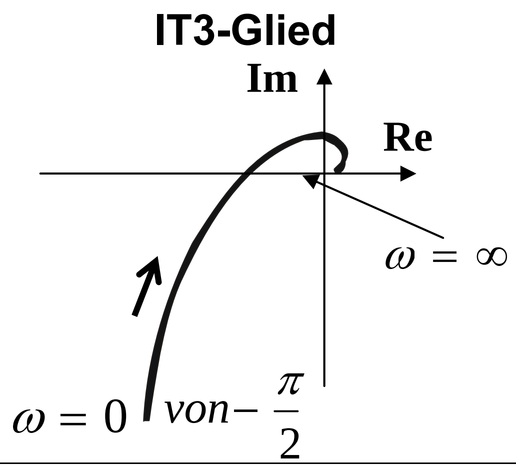
Ortskurve läuft unter Winkel $-(n-m)\dfrac{\pi}{2}$ in Ursprung.

Ortskurven typischer Übertragungsglieder



Beispiele für Systeme 4. Ordnung





4.5 Bodediagramm typischer Übertragungsglieder

Das Bodediagramm für lineare dynamische Systeme

Getrennte Darstellung von *A(ω)* und *φ(ω)* über Frequenz *ω* (vgl. Ortskurve: gemeinsame Darstellung in komplexer Ebene)

Dabei: $$G(j\omega) = \underbrace{A(\omega)}_{\text{Graph für A}(\omega)} \, e^{\overbrace{j\varphi(\omega)}^{\text{Graph für } \varphi(\omega)}}$$

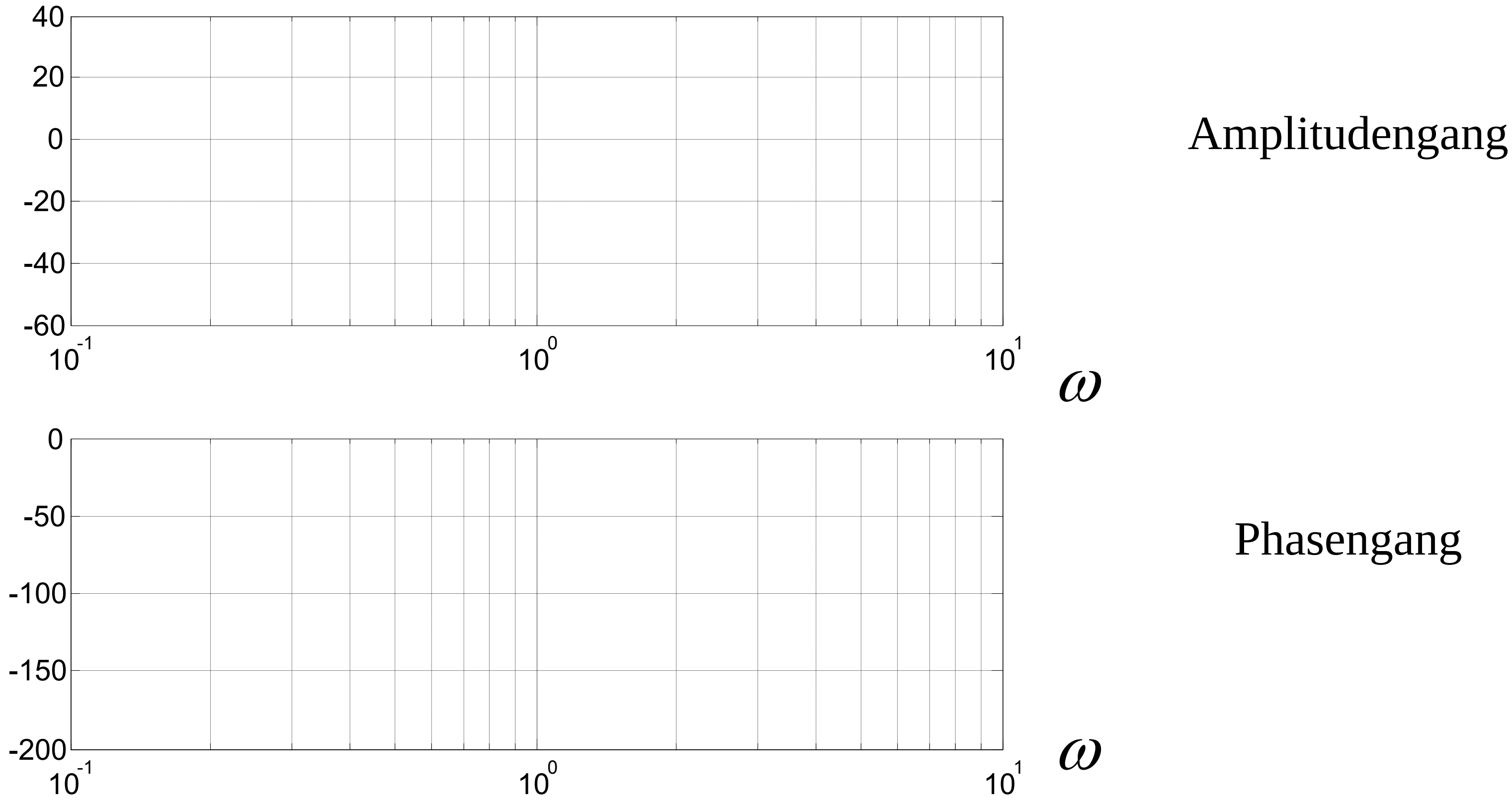
Amplitudendiagramm meist doppelt logarithmisch mit $A(\omega)\big|_{dB} = 20\log_{10}\left(A(\omega)\right)$, wobei

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)}$$

Phasendiagramm in Grad mit logarithmischer *ω*-Achse

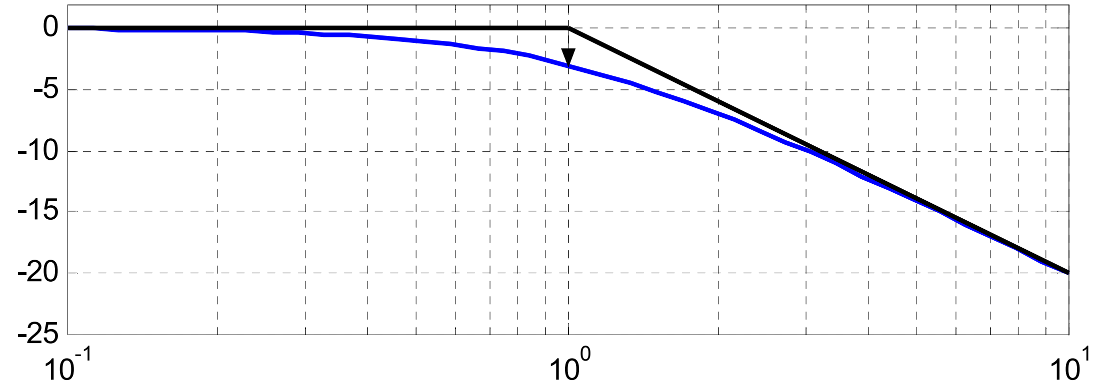
$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(j\omega)}{\mathrm{Re}(j\omega)}$$

Bodediagramm (allgemein)



Bodediagramm für PT1- Glied mit $G(s) = \dfrac{1}{1 + s \cdot T_0}; \quad T_0 = 1s$

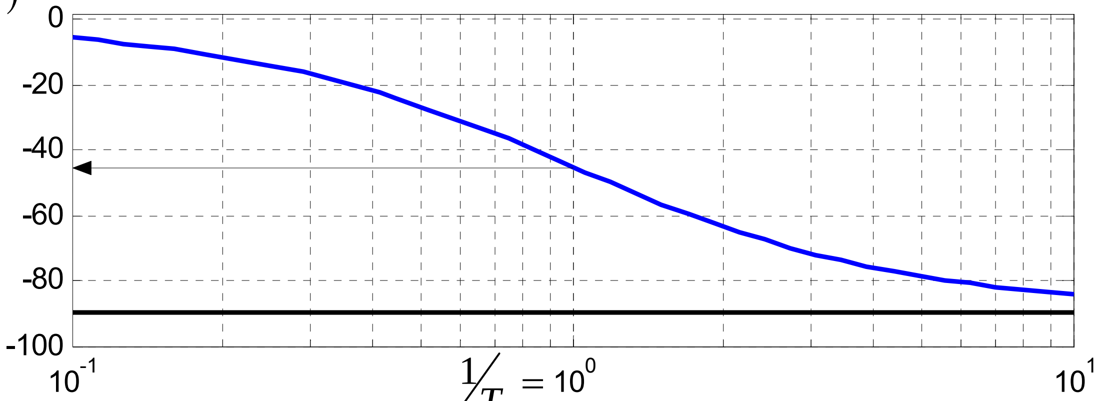
$\left|G(j\omega)\right|_{dB}$



$$\left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20 \cdot \log \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T_0^{\,2}}}$$

ωT_0	$\left\|G(j\omega)\right\|_{dB}$
0,2	-0,17
0,5	-0,97
1	-3
2	-7
5	-14,15
10	-20

$\varphi(\omega)$



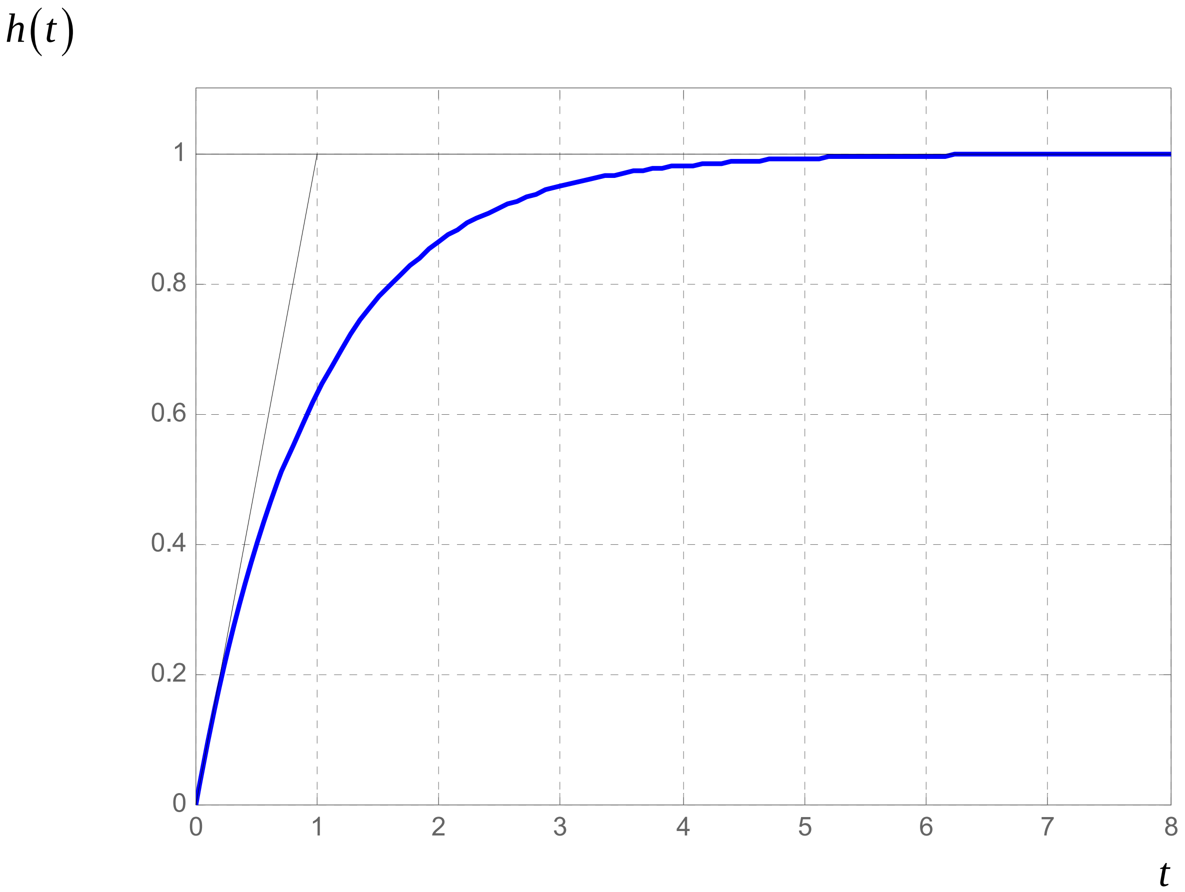
$1/T_0 = 10^0$

ω

$$\varphi(\omega) = -arc\,\tan_0(\omega T_0)$$

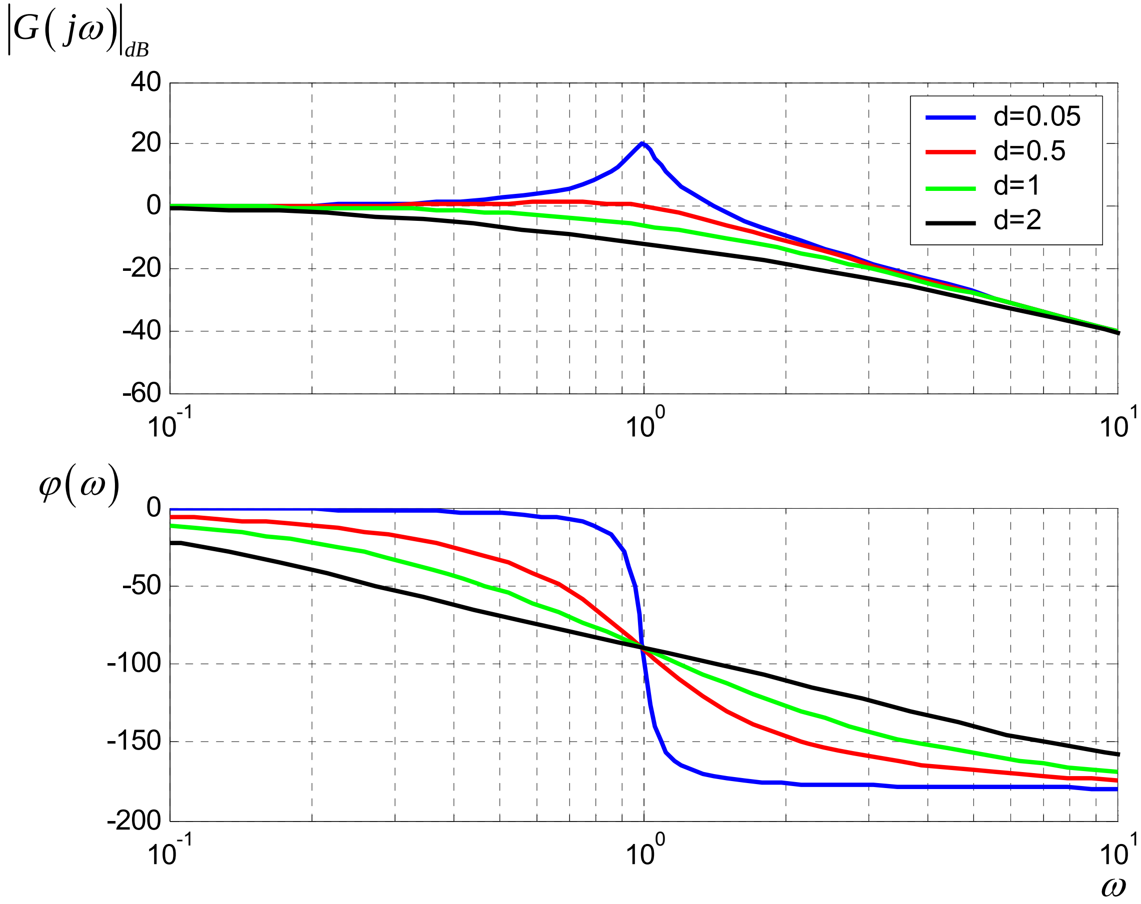
ωT_0	$\varphi(\omega)/^o$
0,2	-11,3
0,5	-26,56
1	-45
2	-63,43
5	-78,69
10	-84,29

Sprungantwort für PT1-Glied mit $u(t) = \sigma(t)$

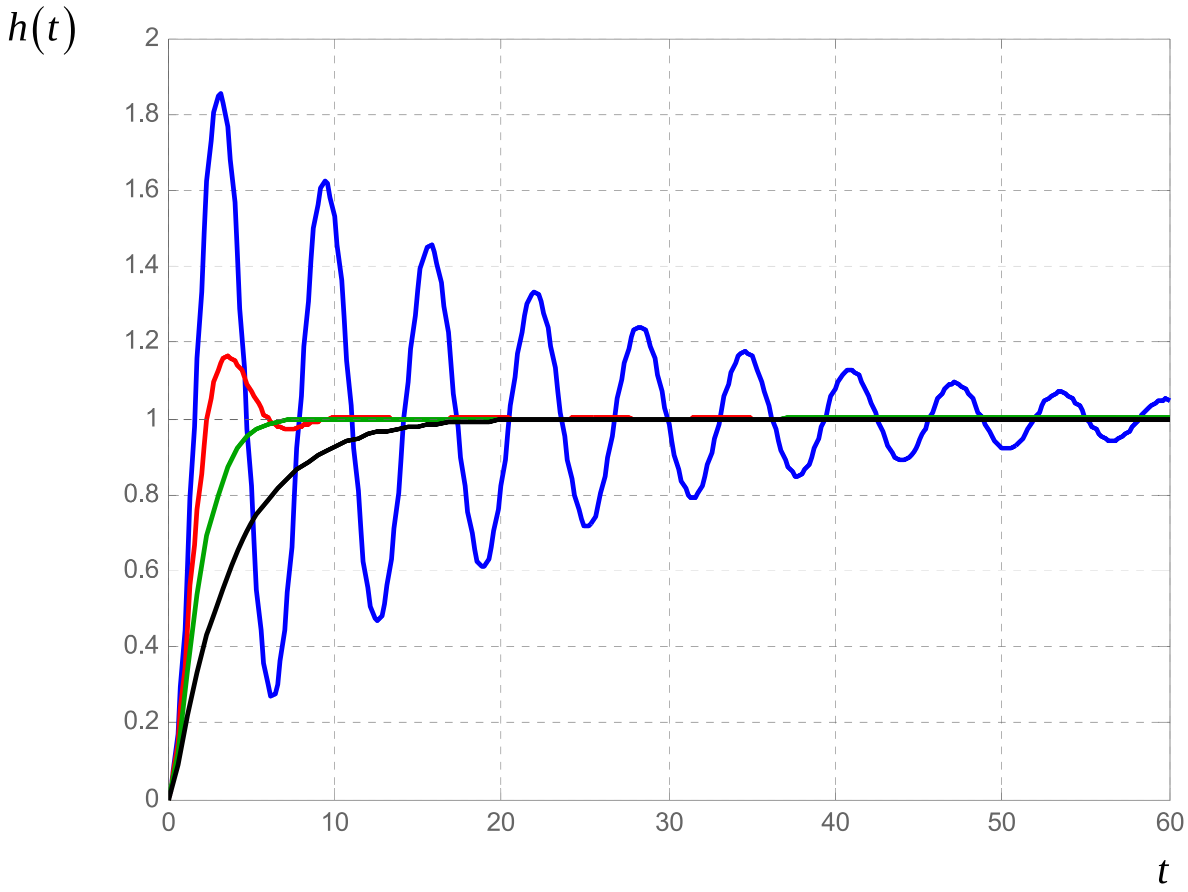


Bodediagramm für PT2-Glied mit

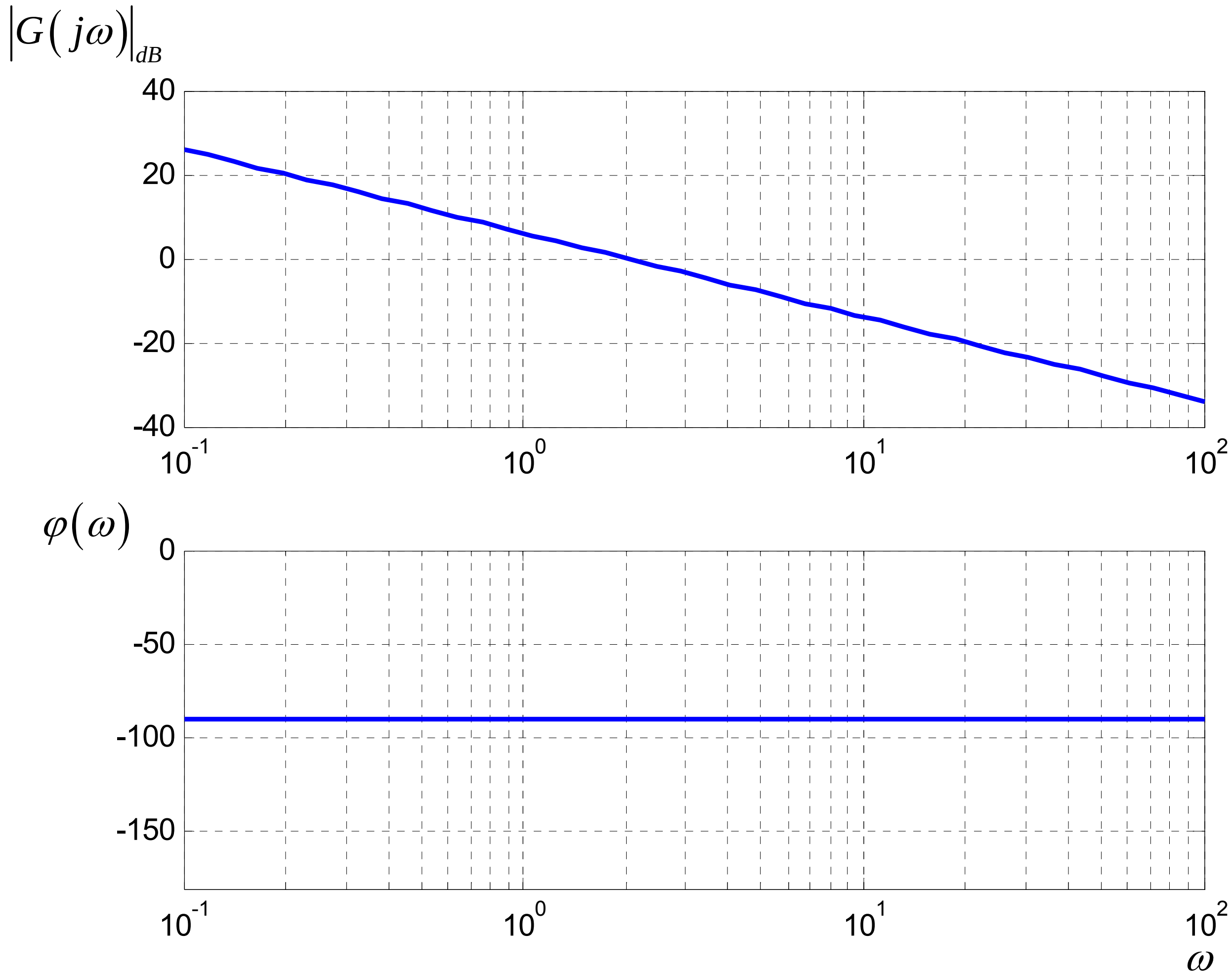
$$G(s)=\frac{1}{1+2\ d\ T_0\ s+T_0^{\,2}\ s^2}\ ;T_0=1\ ;\ d=0,05\ldots2$$



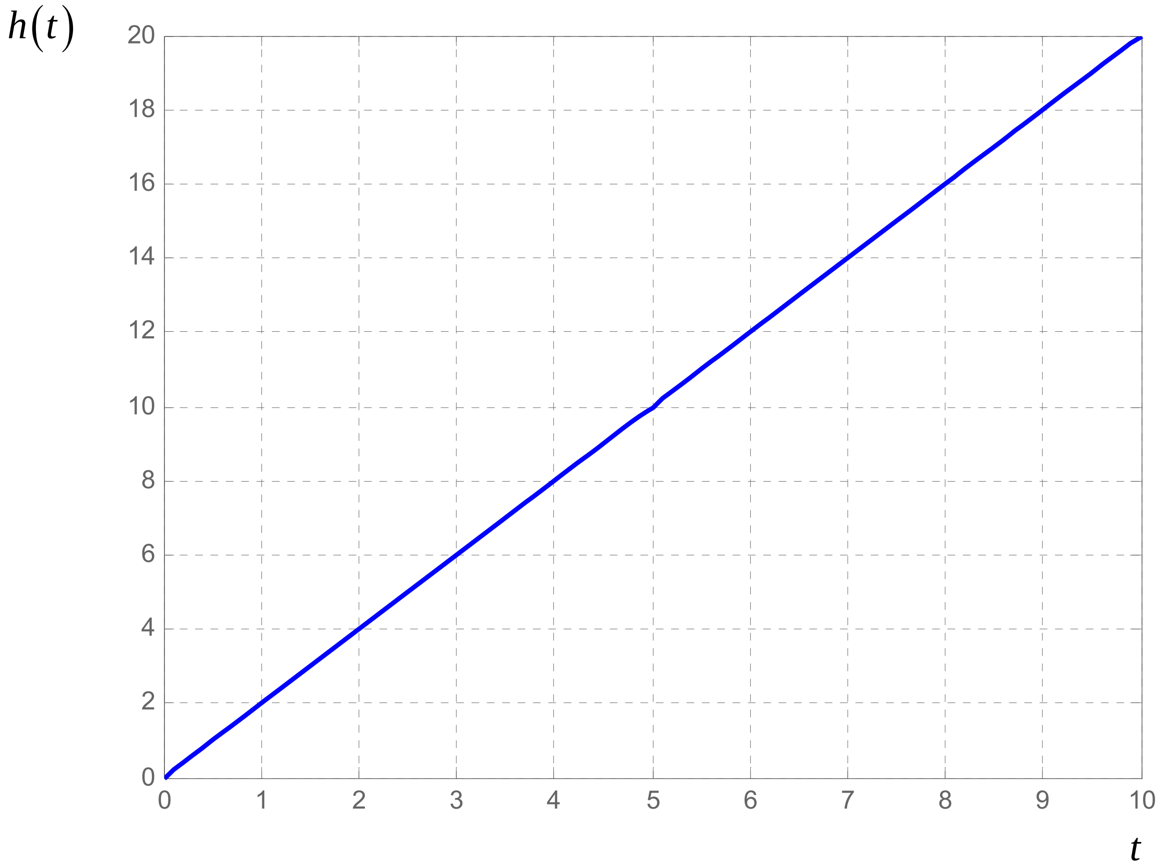
Sprungantwort für PT2-Glied $u(t) = \sigma(t)$



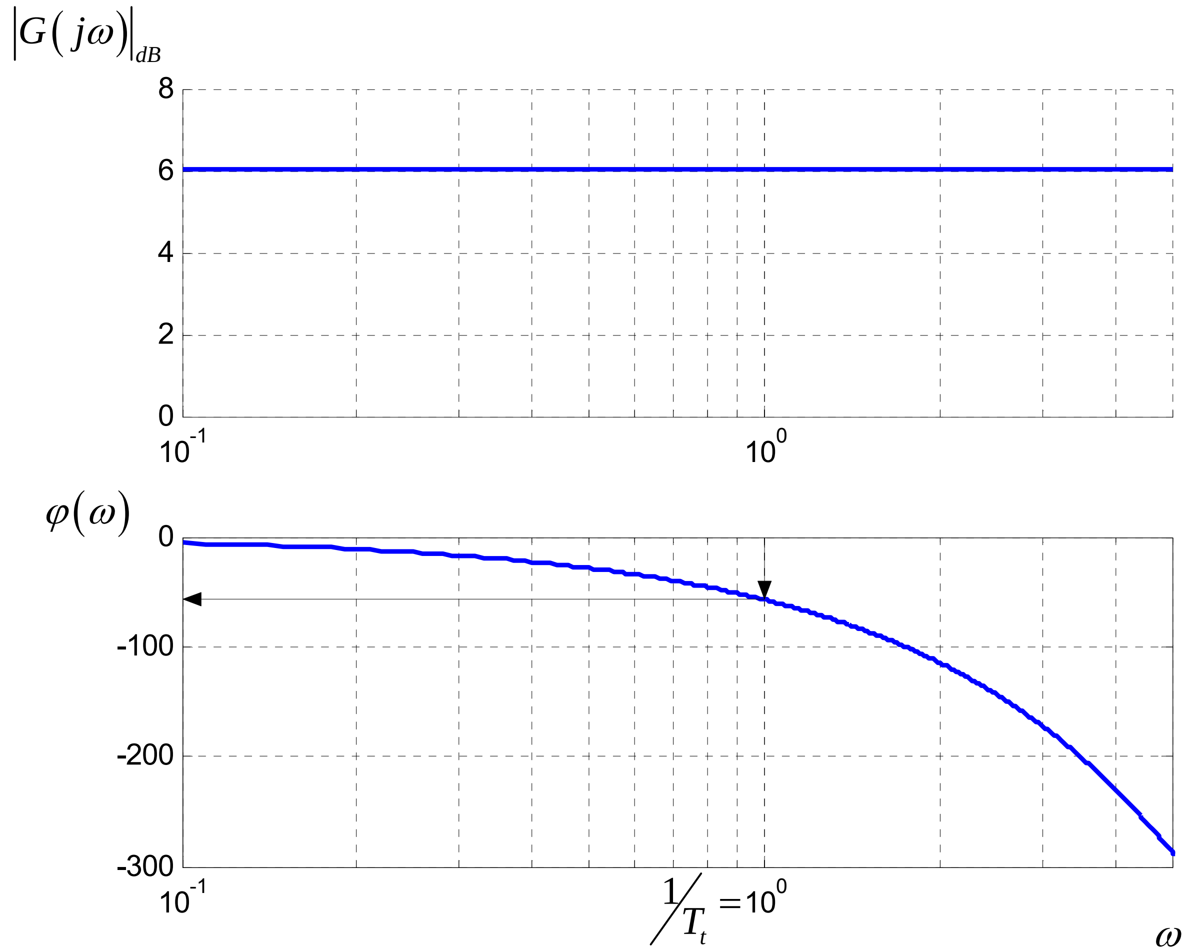
Bode-Diagramm für I-Glied: $G(s) = \frac{K_I}{s}; \quad (K_I = 2)$



Sprungfunktion für I-Glied: $u(t) = \sigma(t)$

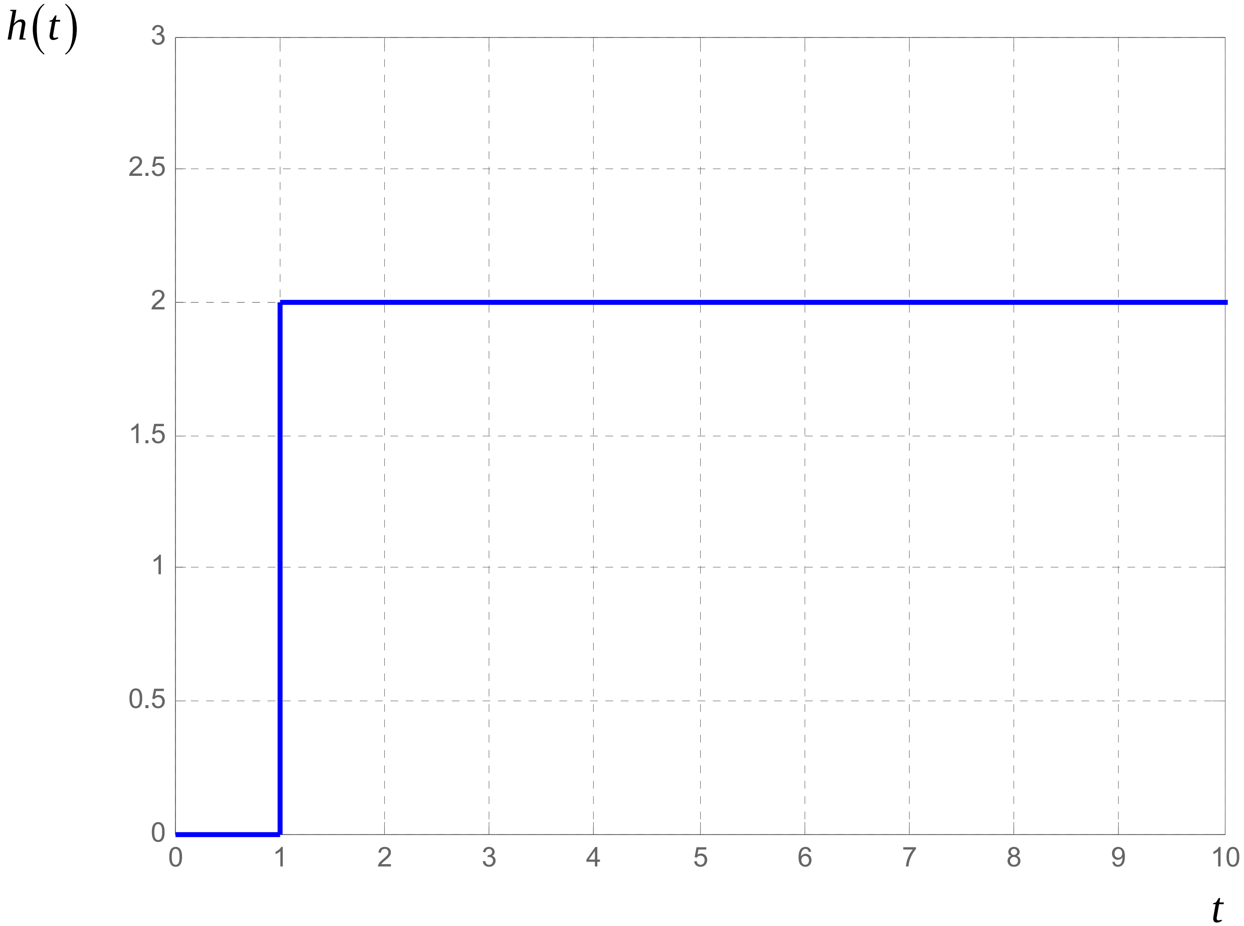


Bode-Diagramm für Totzeitglied: $G(s) = K_0 \cdot e^{-T_t \cdot s}$; $(K_0 = 2\,, T_t = 1s)$

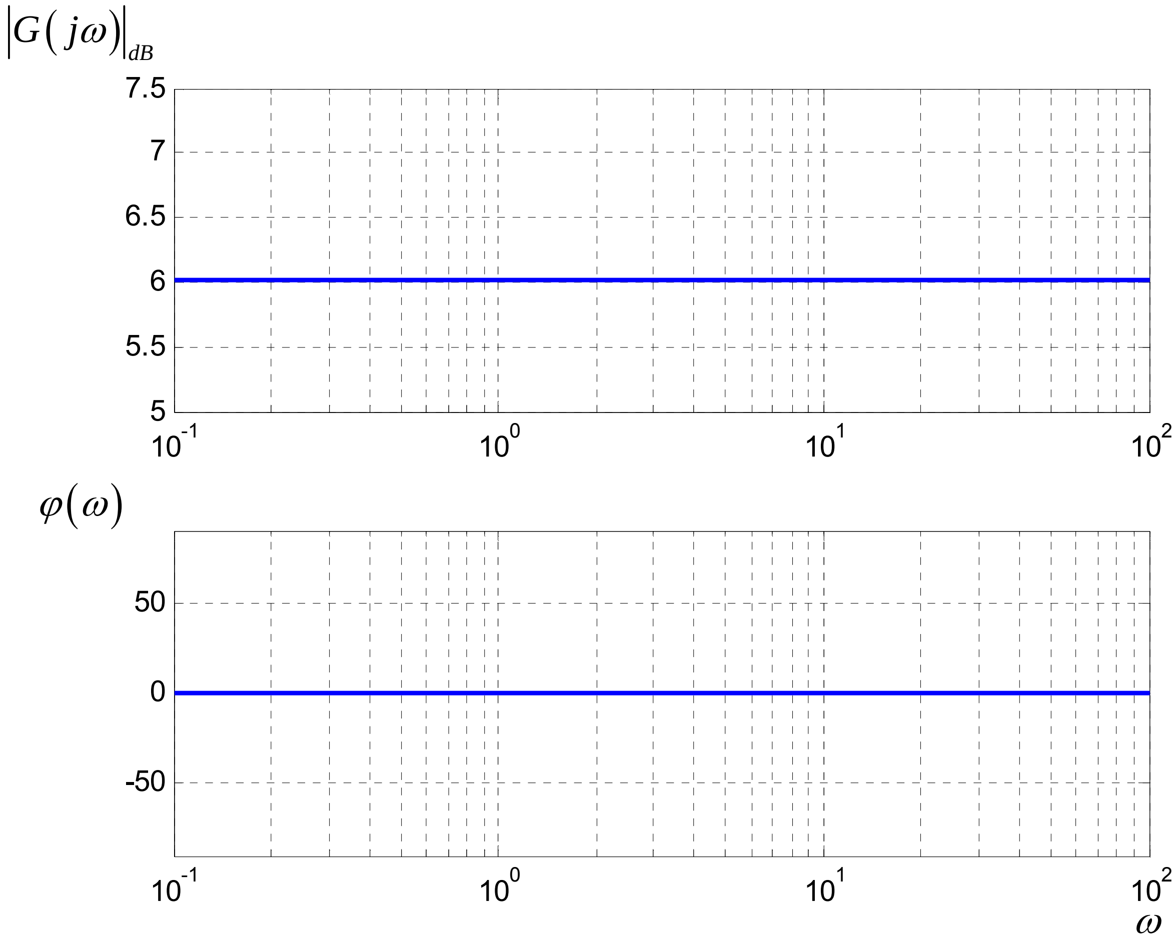


ω	$\varphi(\omega)/^o$
0,1	- 5,73
0,2	- 11.46
0,5	- 28,65
1	- 57,3
10	-573,0

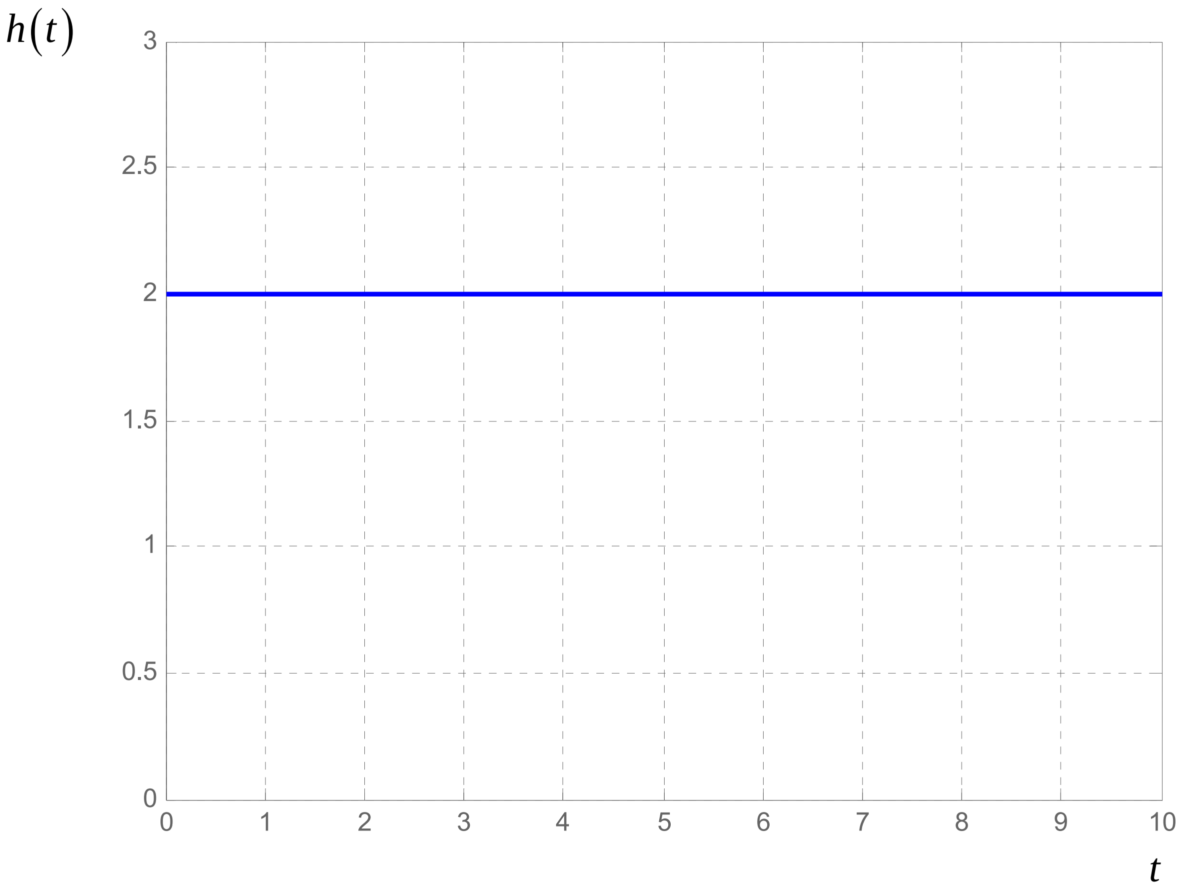
Sprungantwort für Totzeit-Glied: $u(t) = \sigma(t)$



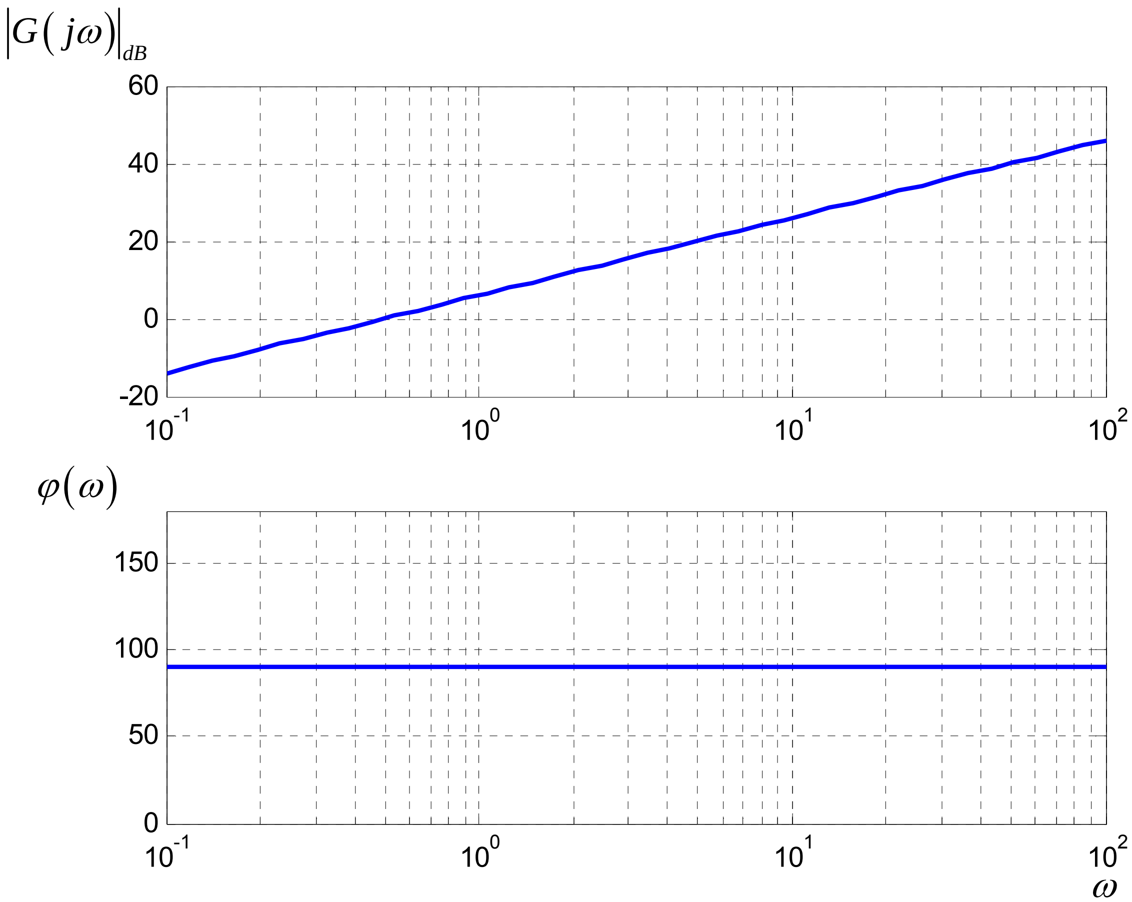
Bode-Diagramm für P-Glied: $G(s) = K_P \;;\; (K_P = 2)$



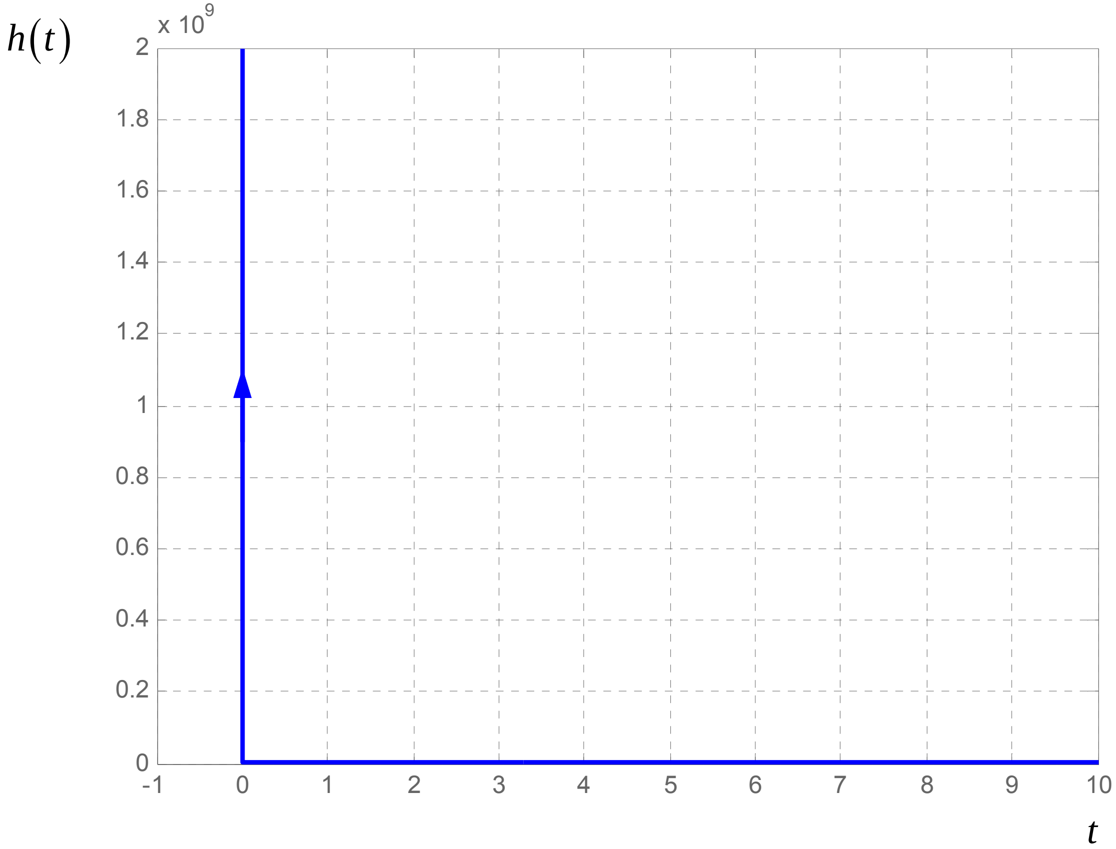
Sprungantwort für P-Glied: $u(t) = \sigma(t)$



Bodediagramm für D-Glied: $G(s) = K_0 \cdot s; \quad (K_0 = 2)$

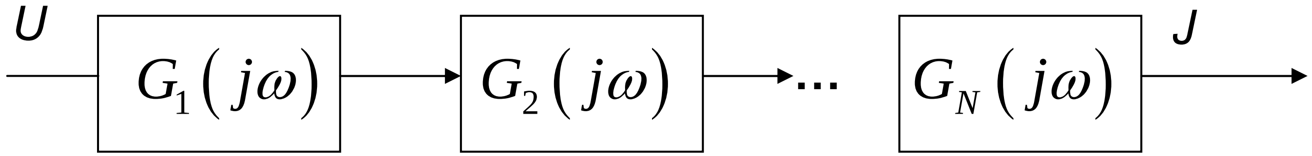


Sprungfunktion für D-Glied: $u(t)=\sigma(t)$



Vorteile der logarithmischen Bodediagrammdarstellung

Serienschaltung von Übertragungsgliedern:



$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \cdot \ldots \cdot G_N(j\omega)$$

Wobei jeweils $\quad G_k(j\omega) = A_k(\omega) e^{j\varphi_k(\omega)}$

Damit

$$G(j\omega) = A_1(\omega) \ldots . A_N(\omega) e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\ldots+\varphi_n(\omega))}$$

Wird $\quad A(\omega) = A_1(\omega) \cdot \ldots \cdot A_N(\omega)$

$$A\Big|_{dB} = 20\log\left(A_1 \ldots A_N\right) = \underbrace{20\log A_1}_{A_1\big|_{dB}} + \underbrace{20\log A_2}_{A_2\big|_{dB}} + \ldots.$$

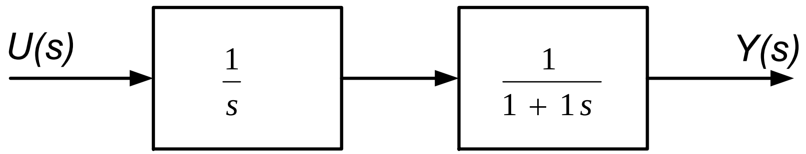
Additive Überlagerung

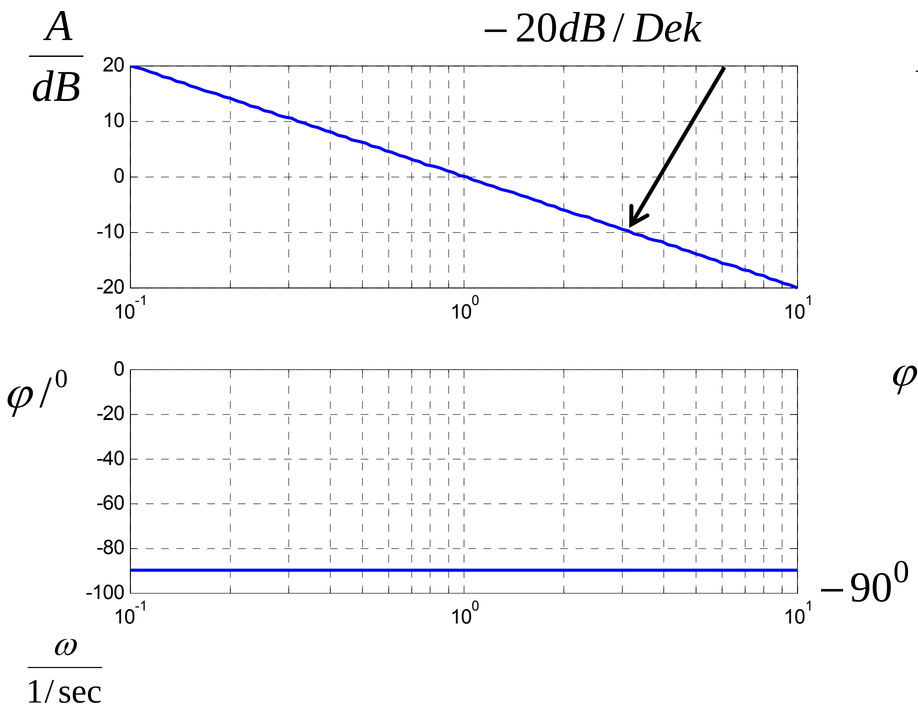
Phase $$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \ldots \varphi_N(\omega)$$

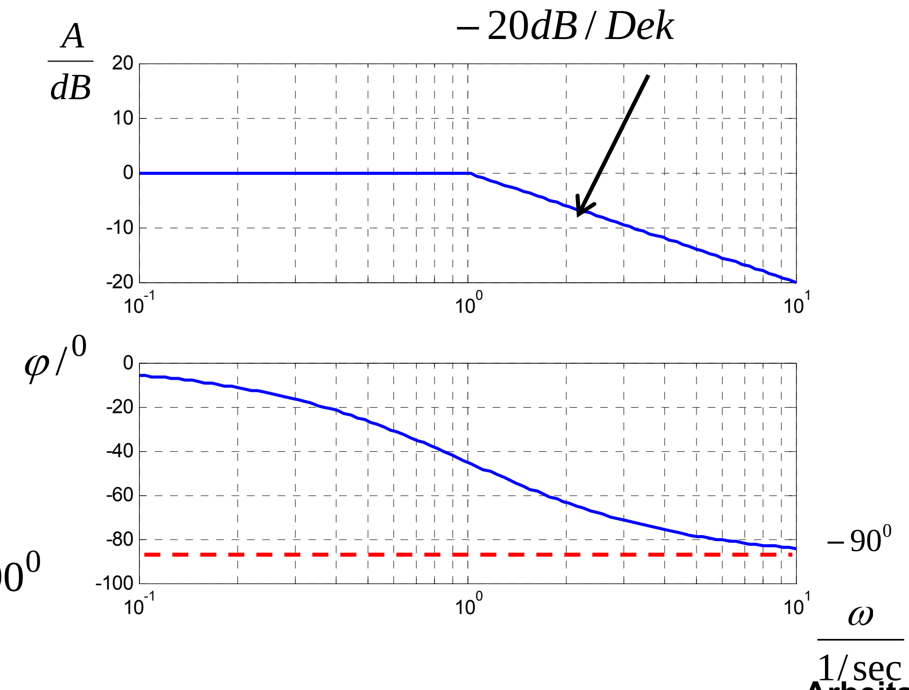
$\Longrightarrow$ Gesamtfrequenzgang als Bodediagramm einer Serienschaltung folgt durch Addition der einzelnen Frequenzkennlinien für $A\big|_{dB}$ und φ.

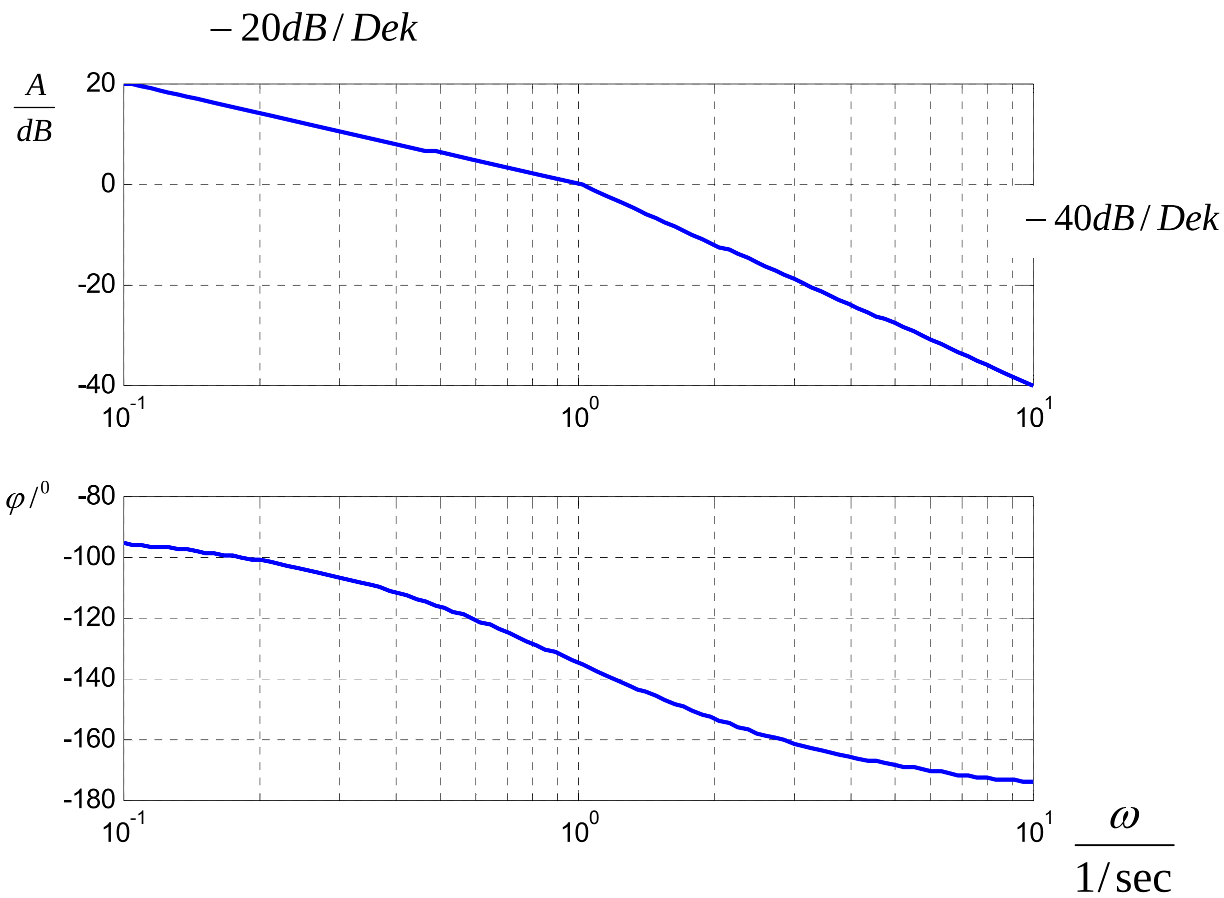
Eine Anleitung sowie Hinweise zum Zeichnen des Bodediagramms werden in der Übung besprochen.

Bodediagramm am Beispiel einer I-T1-Strecke








$-20dB/Dek$
$\frac{A}{dB}$
20
0
-20
-40
$-40dB/Dek$
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$\varphi/^0$
-80
-100
-120
-140
-160
-180
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
$\frac{\omega}{1/\sec}$

5. Stabilität und Zeitverhalten

5.1 Stabilität linearer dynamischer Systeme

Stabilität ist eine Systemeigenschaft, die unabhängig von

- der Darstellung des Systems und
- der gewählten Eingangsfunktion *u(t)* ist.

Ausgangspunkt für Stabilitätsuntersuchungen ist das Verhalten des Systems auf eine beliebige Anfangsbedingung $y_{0\nu}\left(\nu = 0 \ldots n-1\right)$.

$$y_{0\nu} = y^{(\nu)}\left(0\right)$$

Maßgeblich für das Verhalten ist daher die homogene Differentialgleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \, y^{(\nu)}\left(t\right) = 0$$

Definition: **a)** **asymptotische Stabilität**

Ein System heißt *asymptotisch stabil*, wenn *y(t)* nach Anfangsauslenkung für wachsende *t* gegen $y = 0$ geht:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

b) **Instabilität**

Ein System heißt instabil, wenn $|y(t)|$, für eine beliebig kleine Anfangsauslenkung für wachsendes *t*, über alle Grenzen wächst.

$$|y(t)| \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

c) **Grenzstabilität**

Ein System heißt grenzstabil, wenn es weder asymptotisch stabil, noch instabil ist.

Wie kann ein System auf Stabilität hin überprüft werden?

Ziel: Ableitung von Kriterien, damit System stabil.

Erinnerung (Lösung der homogenen DGL): $y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)$ wobei $y_k(t)$ für

Einfache Pole s_k

$$y_k(t) = C_k e^{s_k t}$$

mehrfache Pole s_k

$$y_k(t) = \sum_{k=1}^{\varphi} C_k t^{t-1} e^{s_k t}$$

$$k = 1,2,\dots\varphi$$

wobei s_k Nullstellen von charakteristischer Gleichung $a_n s^n + \dots a_1 s + a_0 = 0$

Beispiel:

System zweiter Ordnung mit einfachen Polen s_1 und s_2.

Lösung der DGL: $y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}$.

Für $s_1<0$ und $s_2<0$ ist das System asymptotisch stabil, d.h. $y(t) \rightarrow 0$.

Ist $s_1>0$ oder $s_2>0$, so ist das System instabil, d.h. $y(t) \rightarrow \infty$

Für $s_1=0$ oder $s_2=0$, ist das System grenzstabil.

Allgemein: Für $t \to \infty$ ist Realteil $\delta_k = \mathrm{Re}\{s_k\}$ entscheidend.

i) einfache Pole

$$\lim_{t\to\infty} y_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s_k\} < 0 \\ 1 & \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s_k\} = 0 \\ \infty & \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s_k\} > 0 \end{cases}$$

ii) mehrfache Pole

$$\lim_{t\to\infty} y_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s_k\} < 0 \\ \infty & \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s_k\} = 0 \\ \infty & \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s_k\} > 0 \end{cases}$$

Folgerung Pole und Stabilitätsverhalten

- *Asymptotische Stabilität* liegt vor, wenn

  $\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$ für alle s_k.

  Hinweis: offener Kreis hat dann P-Verhalten.

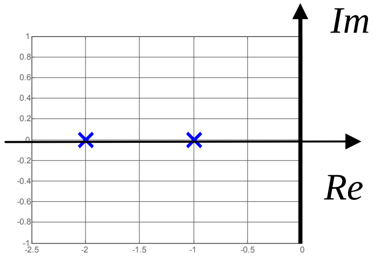
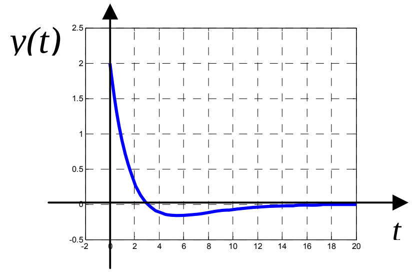
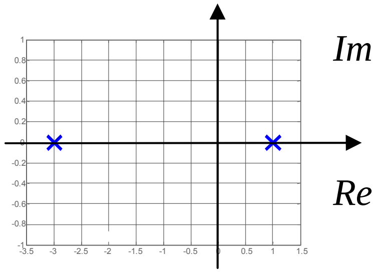
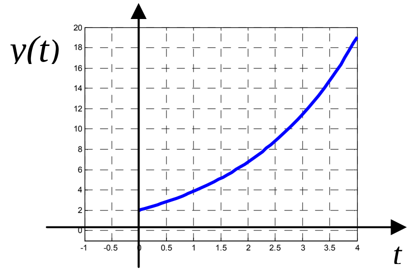
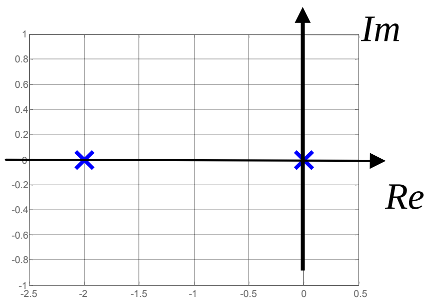
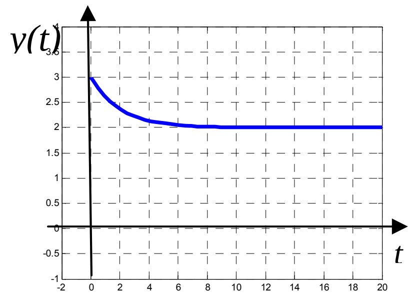
- *Instabilität* liegt vor, wenn mindestens ein

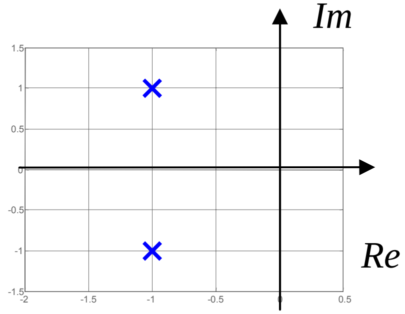
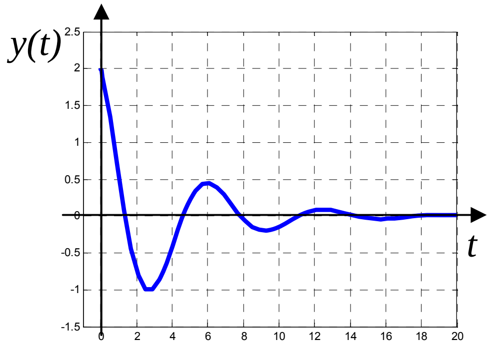
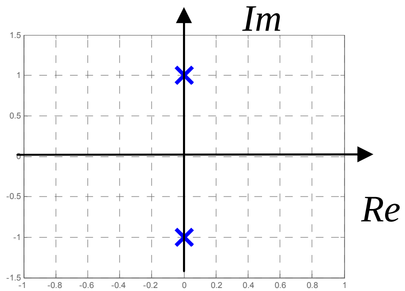
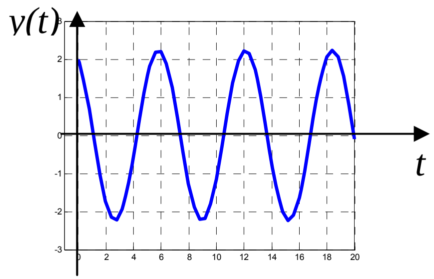
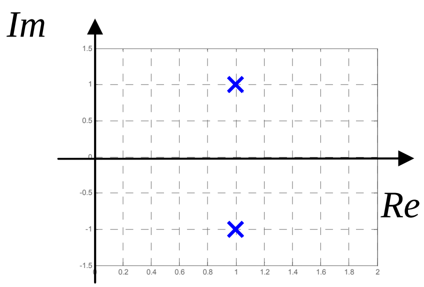
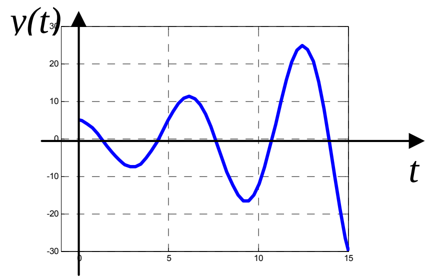
  $\mathrm{Re}\{s_k\} > 0$ oder ein mehrfacher Pol mit $\mathrm{Re}\{s_k\} = 0$ vorliegt.

- *Grenzstabilität* liegt vor, wenn mindestens ein

  $\mathrm{Re}\{s_k\} = 0$ ist, wobei diese Pole nicht mehrfach auftreten dürfen und alle anderen $\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$ sind.
  Hinweis: offener Kreis hat dann I-Verhalten

5.2 Polkonfiguration und Zeitverhalten

Polstellen-Bild		Zeitverhalten
	Pol auf reeller Achse $Re\{s_k\}<0$ **Asymptotisch stabil**	
	ein Pol mit $Re\{s_k\}>0$ **Instabil**	
	ein Pol mit $Re\{s_k\}=0$, sonst alle <0 **Grenzstabil**	

	konj. komplexes Pol-Paar ***asymptotisch stabil***	
	konj. komplexes Pol-Paar ***Grenzstabil***	
	konj. komplexes Pol-Paar ***Instabil***	

5.3 Kriterien zur Überprüfung der Stabilität

Ausgangspunkt: Nullstellen der charakteristischen Gleichung berechnen.

1.) Möglichkeit: Numerische Nullstellenbestimmung
→ z.B. mit Matlab: roots(…), fzero(…).

2.) Möglichkeit: analytisches Verfahren
→ Hurwitzkriterium

<u>Herleitung:</u>

Notwendiges Kriterium für asymptotische Stabilität:
Für die asymptotische Stabilität eines linearen Systems n-ter Ordnung ist es **notwendig**, dass alle Koeffizienten $a_\nu \ (\nu = 0 \ldots n)$ der charakteristischen Gleichung, von 0 verschieden sind und das gleiche Vorzeichen haben.
(für *n=0,1, 2* auch **hinreichend**)

Ansatz für Herleitung der hinreichenden Bedingung für $n \geq 3$: notwendiges Stabilitätskriterium sei erfüllt.

Charakteristische Gleichung $a_n s^n + ... a_1 s + a_0 = 0$ habe Nullstellen bei $s_k = \pm j\omega_k$ ein konjugiert komplexes Polpaar auf imaginärer Achse, d.h. System ist grenzstabil und reagiert auf Anfangsauslenkung mit Dauerschwingung

$$y_k = c_k \cdot \cos\left(\omega_k t - \gamma_k\right)$$

weil $s_k = \pm j\omega_k$ Nullstelle ist, muss gelten

$$a_n \left(j\omega_k \right)^n + ... + a_1 j\omega_k + a_0 = 0$$

aufgespaltet nach Real- und Imaginär-Teil:

$$\left(... a_4 \omega_k^4 - a_2 \omega_k^2 + a_0\right) + j\left(... + a_5 \omega_k^5 - a_3 \omega_k^3 + a_1 \omega_k\right) = 0$$

Mit dieser Bedingung kann Bedingung für kritische Frequenz ω_k berechnet werden.

System 1.Ordnung: Bedingung nicht erfüllbar → System 1. Ordnung kann keine Dauerschwingung ausführen.

System 2 Ordnung: $a_1 = 0 - a_2\omega_k^2 + a_0 = 0$

$$\omega_k^2 = \sqrt{\frac{a_0}{a_1}}$$

System 3. Ordnung: $-a_2\omega_k^2 + a_0 = 0$ und $-a_3\omega_k^2 + a_1 = 0$

Nach Elimination von ω_k:

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0$$

Hurwitzkriterium zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität (1)

Gegeben:

$$G(s)=\frac{Z(s)}{N(s)} \text{ mit } N(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0;\ a_\nu > 0 \text{ und reell, sowie } a_n \neq 0$$

Man bilde die Matrix *H* mit *n* Spalten und *n* Zeilen:

$$H = \left.\underbrace{\left|\begin{array}{cccccccccc}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_2 & a_0 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & a_1 & 0 & \cdots & & 0 \\
0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & & a_2 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\
\vdots & & & & & & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\
0 & \cdots & & & & & \cdots & a_4 & a_2 & a_0
\end{array}\right|}_{n \text{ Spalten}}\right\} n \text{ Zeilen}$$

Sind nun alle Unterdeterminanten $H_1 ... H_n$ positiv, so liegen alle Nullstellen des Nennerpolynoms links der j-Achse, d.h. das System ist asymptotisch stabil.

Die Unterdeterminanten $H_1 ... H_n$ sind dabei

$$H_1 = a_{n-1}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$H_n = H$$

Hurwitzkriterium zur Überprüfung der asymptotischen Stabilität (2)

Für System der Ordnung 2 gilt damit (wenn alle $a_v > 0$):

$$H_1 = a_1 \quad \rightarrow \quad a_1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad a_0 a_1 > 0 \quad \rightarrow \quad a_0 > 0$$

für System der Ordnung 3 gilt damit (wenn alle $a_v > 0$):

$$H_1 = a_2 \quad \rightarrow \quad a_2 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad a_0 H_2 > 0$$

für System der Ordnung 4 gilt damit (wenn alle $a_v > 0$):

$$H_1 = a_3 \qquad \rightarrow \qquad a_3 > 0$$

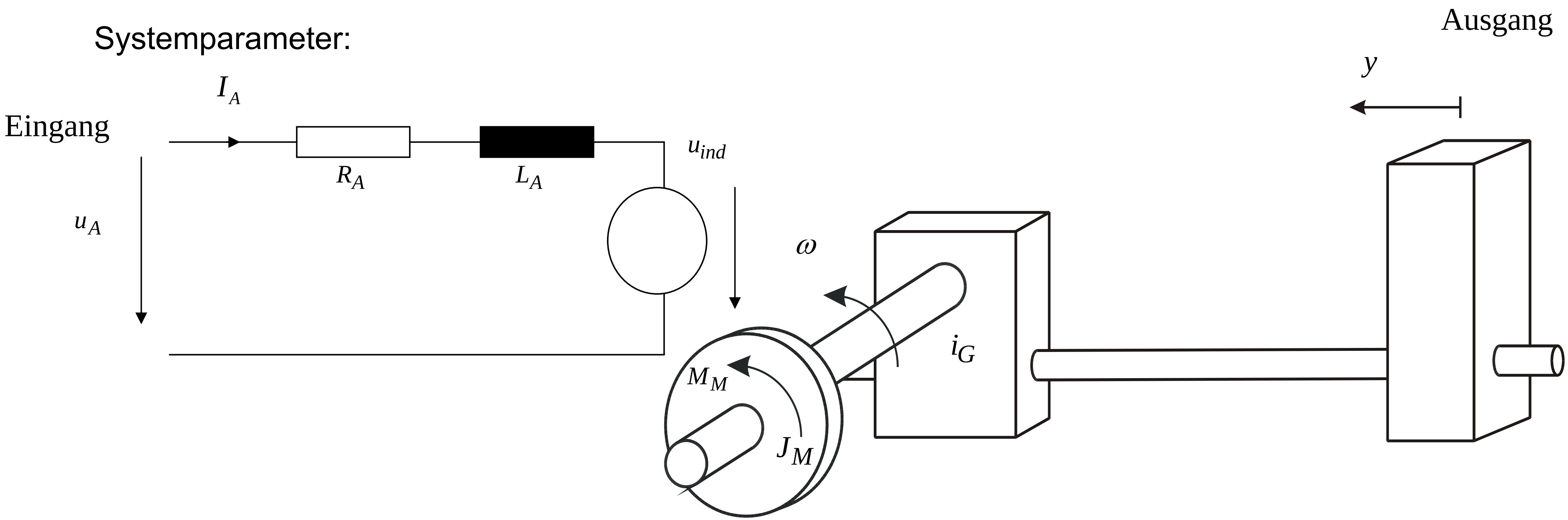
$$H_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \qquad a_3 a_2 - a_1 a_4 > 0$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \qquad a_1 H_2 - a_0 a_3^2 > 0$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \qquad \rightarrow \qquad a_0 H_3 > 0$$

Beispiel Positionierantrieb

Systemparameter:



$$
\begin{aligned}
R_A &= 0.2\ \Omega & L_A &= 8\ mH \\
\phi &= 2.27\ Vs & J_M &= 1.1\ Ws^3 \\
i_G &= \frac{0.01m}{2\cdot\pi} & n_N &= 1500\ \ 1/\min \\
P_N &= 30\ kW & u_{AN} &= 400\ V \\
i_{AN} &= 75\ A & &
\end{aligned}
$$

Aufstellen der Modellgleichungen (alle Anfangsbedingungen gleich null)

1. Elektrischer Wirkungskreis

   Maschenregel: $\boxed{u_A = R_A I_A + L_A \dot{I}_A + u_{ind} \quad \text{mit} \quad u_{ind} = \phi\omega}$

2. Mechanischer Wirkungskreis

   Drallsatz: $\boxed{J_M \dot{\omega} = M_M \quad \text{mit} \quad M_M = \phi i_A}$

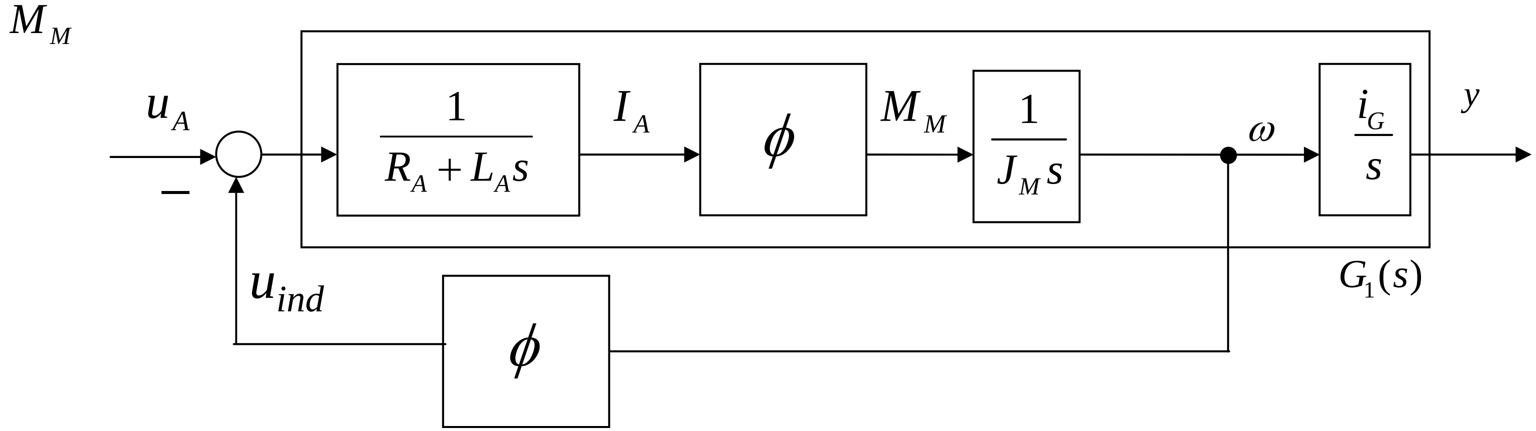
   Impulssatz: $\boxed{\ddot{y} = i_G \cdot \dot{\omega} \quad \rightarrow \quad \dot{y} = i_G \cdot \omega}$

Laplace-Transformation der Übertragungsglieder:

$R_A I_A(s) + s \cdot L_A I_A(s) = u_A(s) - u_{ind}(s)$ daraus $\boxed{I_A(s) = \dfrac{1}{R_A + L_A s}\left(u_A(s) - u_{ind}(s)\right)}$

$\boxed{\omega(s) = \dfrac{M_M}{J_M \cdot s}}$ und $\boxed{y(s) = \dfrac{i_G}{s}\omega(s)}$

Damit ergibt sich das Strukturbild des Geamtsystems



Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ergibt sich aus obigem Strukturbild

$$G(s) = \frac{y(s)}{u_A(s)}$$

$$y(s) = \frac{i_G}{s}\omega(s) = \frac{i_G}{s}\cdot\underbrace{\phi\cdot\left(\frac{1}{J_M s}\right)\cdot I_A}_{\omega(s)} = \frac{i_G}{s}\cdot\underbrace{\phi\cdot\left(\frac{1}{J_M s}\right)\cdot\left(\frac{1}{R_A + L_A s}\right)}_{G_1(s)}\cdot\left(u_A - u_{ind}\right)$$

$$y(s) = G_1(s)\cdot\left(u_A - u_{ind}\right) = G_1(s)\cdot\underbrace{\left(u_A - \frac{\phi\cdot s}{i_G}y\right)}_{u_A - u_{ind}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y(s)}{u_A(s)} = G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)\cdot\frac{\phi\cdot s}{i_G}} = \cdots = \frac{i_G\cdot\phi}{s^3 L_A J_M + s^2 R_A J_M + s\phi^2}$$

Daraus ergibt sich im Zeitbereich die Differentialgleichung

$$J_M L_A \dddot{y} + R_A J_M \ddot{y} + \phi^2 \dot{y} = i_G \phi u_A$$

Für Frequenz- und Amplitudengang ergibt sich mit

$$G(s) = \frac{i_G \cdot \phi}{s^3 L_A J_M + s^2 R_A J_M + s\phi^2}$$

$$A(\omega) = \frac{i_G \phi}{\sqrt{(J_M L_A)^2 \omega^6 + \left[(J_M R_A)^2 - 2 J_M L_A \phi^2\right]\omega^4 + \phi^4 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{J_M L_A \omega^2 - \phi^2}{R_A J_M \omega}$$

Ortskurve und Bodediagramm:

$$\omega \to 0: \quad A(\omega) \to \infty \quad \varphi(\omega) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \to \infty: \quad A(\omega) \to 0 \quad \varphi(\omega) \to -\frac{3}{2}\pi$$

Stabilität und Zeitverhalten:

Nenner der Übertragungsfunktion bzw. Nullstellen der charakteristischen Gleichung:

$\underbrace{J_M L_A}_{a_3} s^3 + \underbrace{R_A J_M}_{a_2} s^2 + \underbrace{\phi^2}_{a_1} s = 0 \quad ; \quad a_0 = 0$ Hurwitz: $a_{1,2,3} > 0 \quad a_0 = 0!$

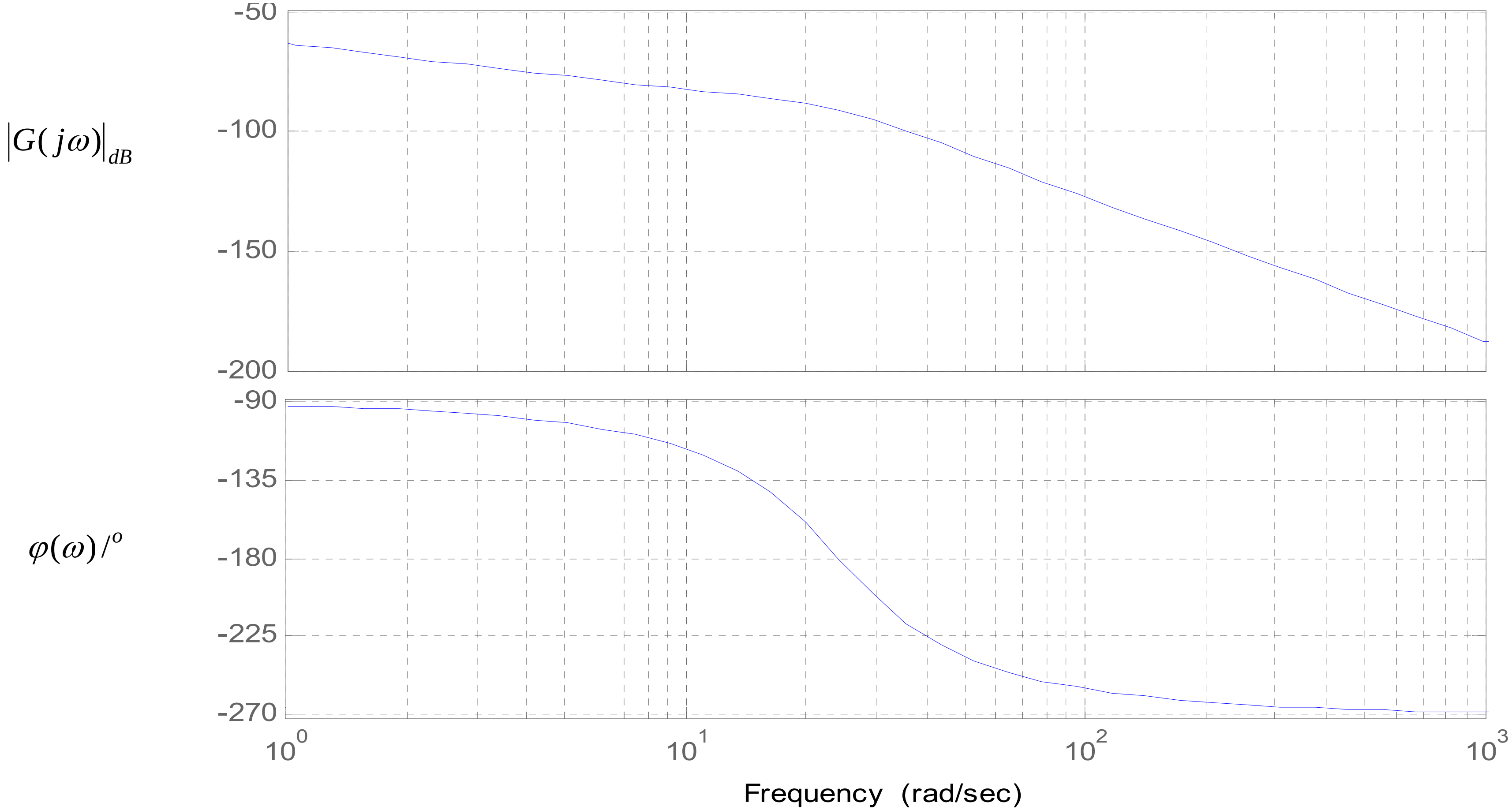
$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Berechnung der Nullstellen:

$$s_1 = 0; \quad s_{2/3} = \frac{-J_M \pm \sqrt{J_M^2 - 4\frac{J_M L_A \phi^2}{R_A^2}}}{2\frac{J_M L_A}{R_A}}$$

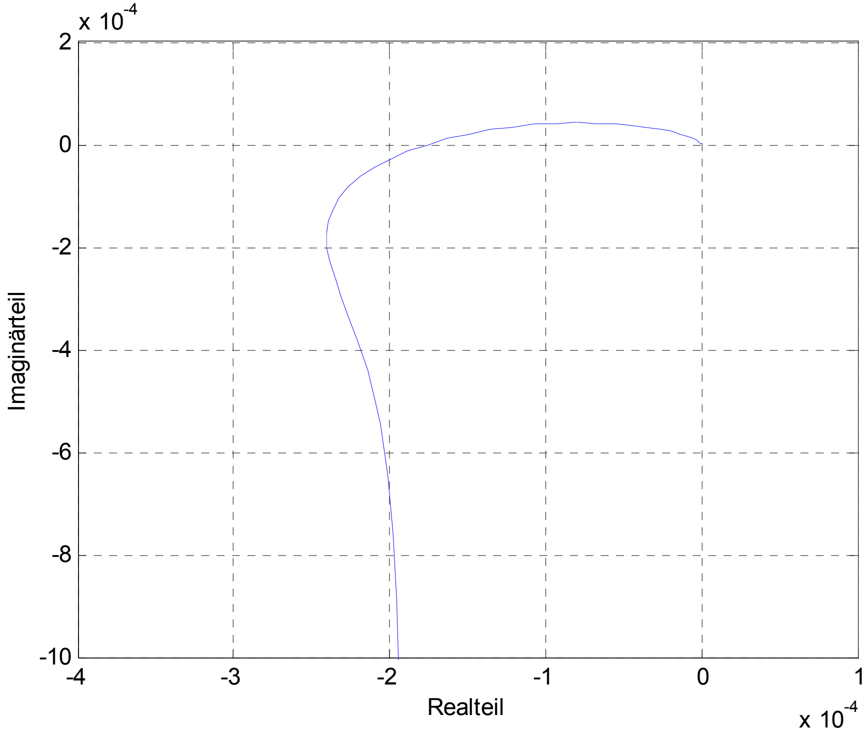
mit Zahlenwerten für Beispielsystem: $s_1 = 0; \quad s_{2/3} = \underbrace{-12.5}_{T = 1/\sigma = 0.08 \triangleq 80\,ms} \pm j \cdot \underbrace{20.71}_{\varpi = 2\pi f \;\rightarrow f = 3.29\,Hz}$

Bodediagramm für Beispielsystem $G(j\omega) = \frac{y}{u_A}$

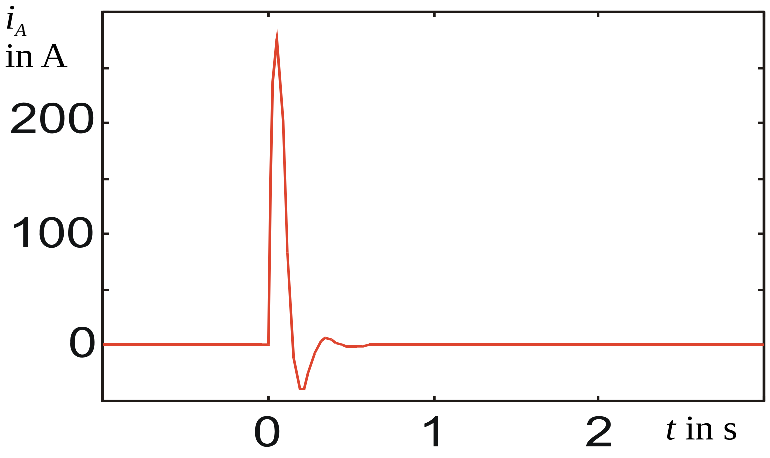


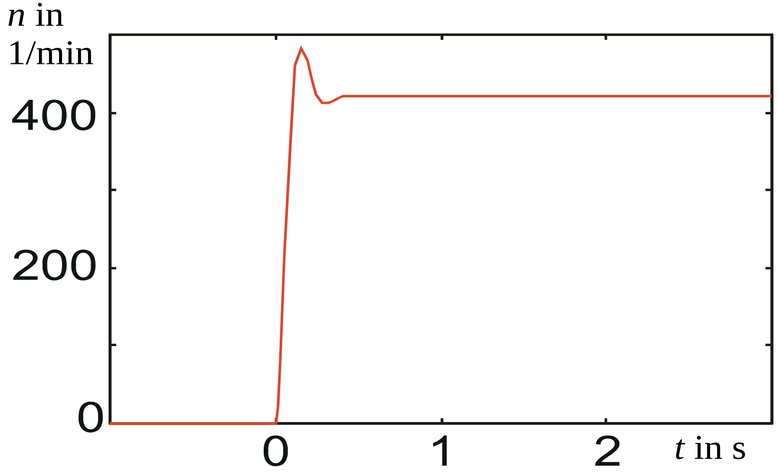
ω

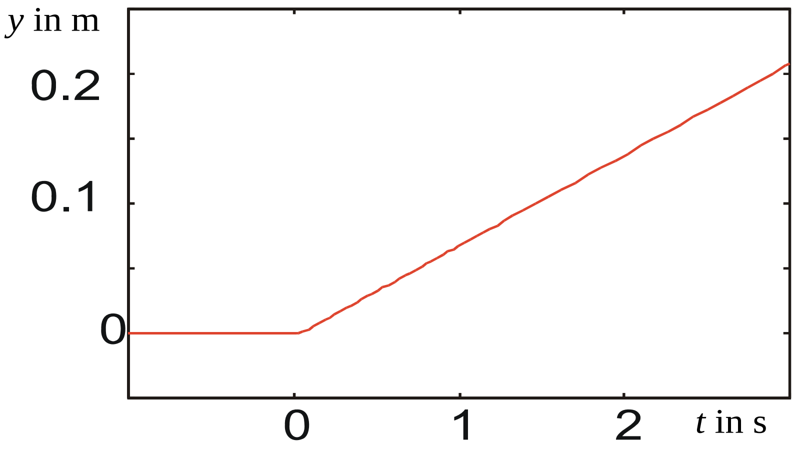
Ortskurve für Beispielsystem $G(j\omega) = \dfrac{y}{u_A}$



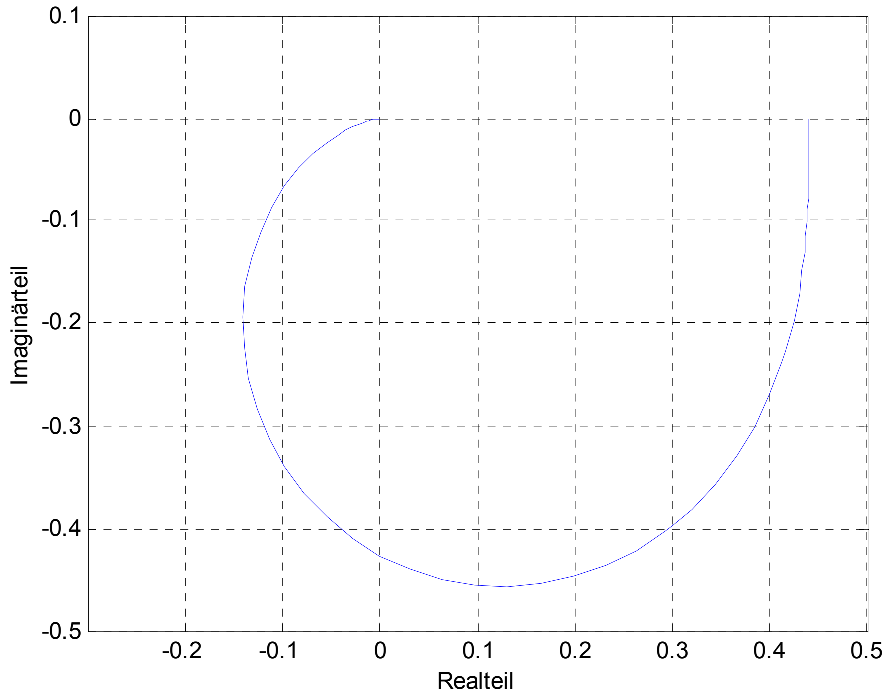
Zeitantwort für Beispielsystem $u_A = \sigma(t) \cdot 100\ V$





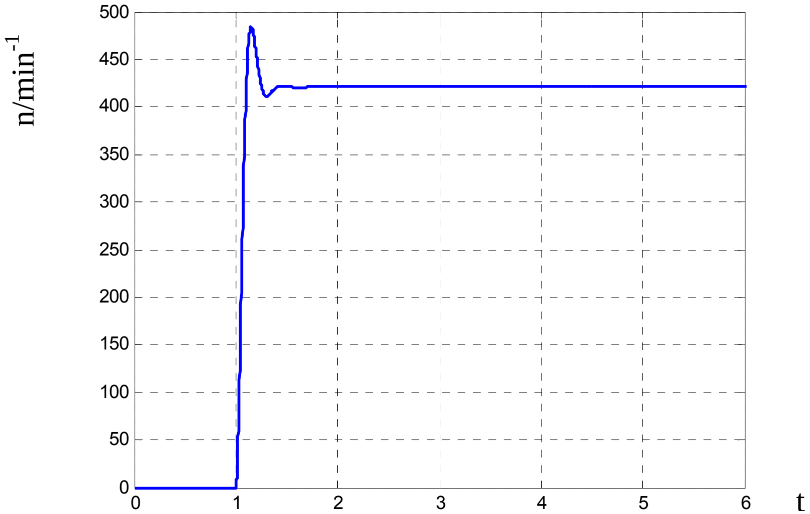


Ortskurve für Beispielsystem $G(j\omega) = \dfrac{n}{u_A}$

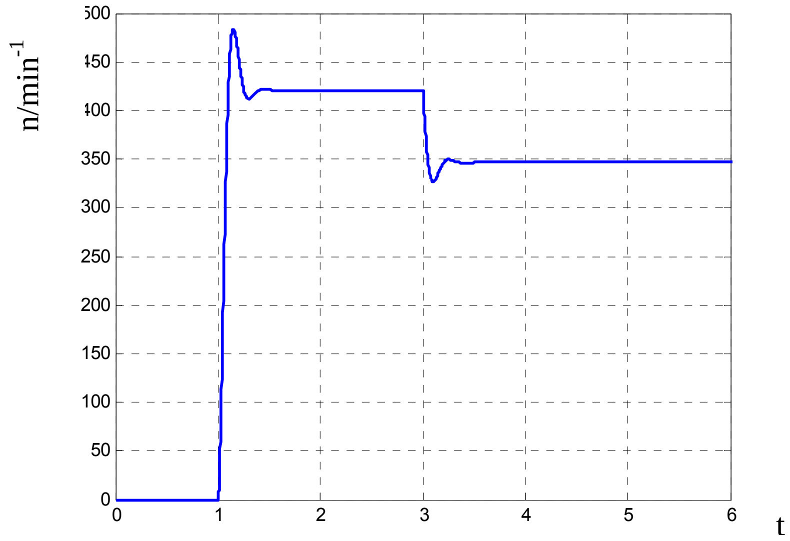


Dynamisches Verhalten der Drehzahlstrecke

Sprungantwort bei u_A:0 → 100 V



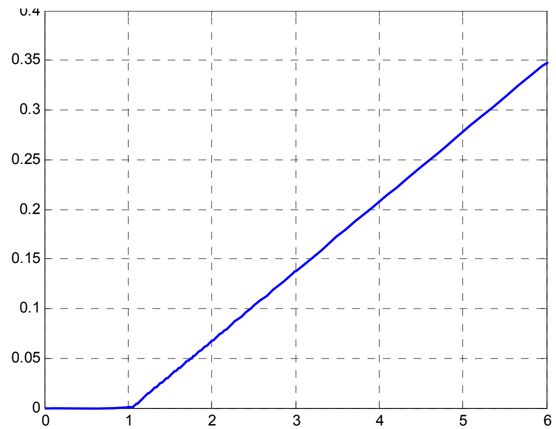
Störung durch M_L:0 → 200 Nm bei t = 3s



Dynamisches Verhalten der Positionsstrecke

Sprungantwort bei u_A:0 → 100 V

y

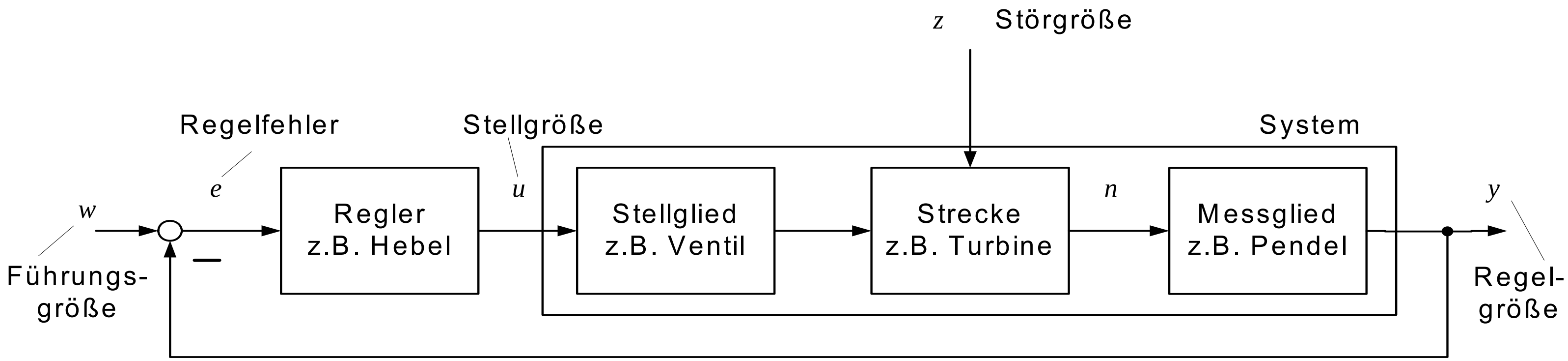


Arbeitsblatt 103

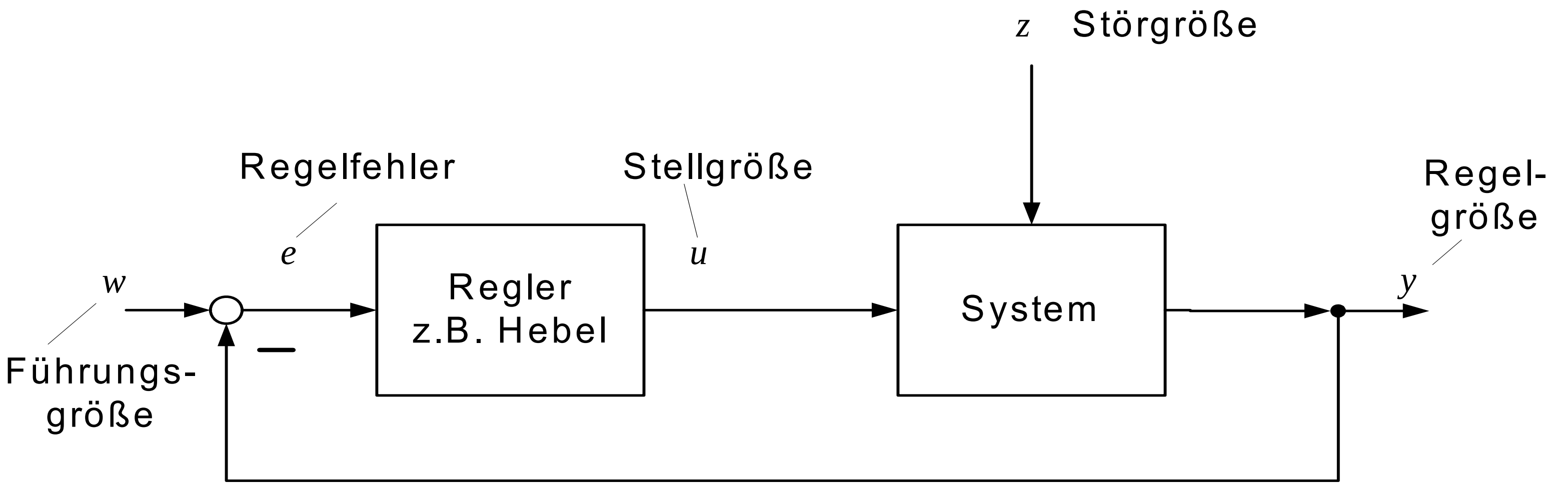
t

6. Struktur und Beschreibung eines Regelkreises

6.1 Der Standardregelkreis
Beispiel: Dampfturbine

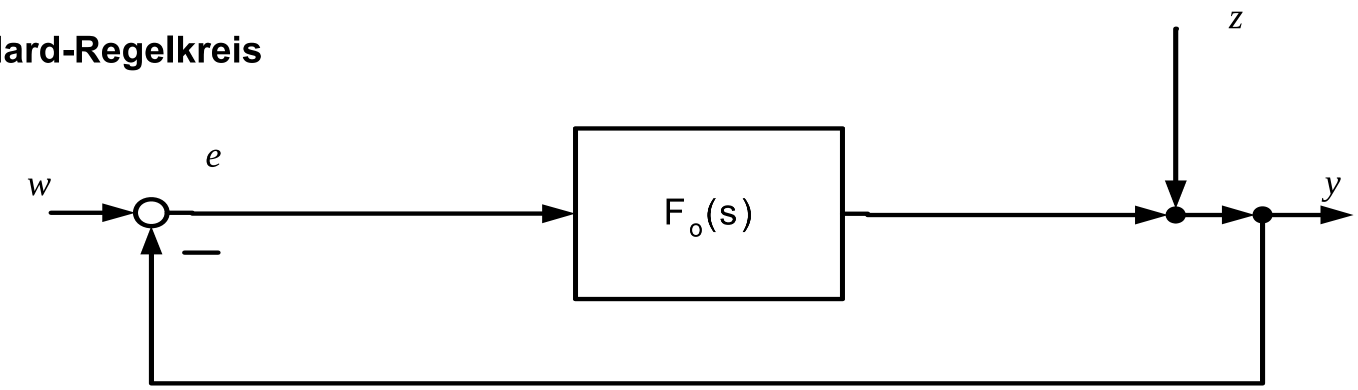


Verallgemeinerte Grundstruktur eines Regelkreises



Vereinfachung des Strukturbildes

Standard-Regelkreis



$$y(s) = \underbrace{\frac{F_o(s)}{1+F_o(s)}}_{\text{Führungs-ÜF}} w(s) - \underbrace{\frac{1}{1+F_o(s)}}_{\text{Stör-ÜF}} z(s)$$

Die **Führungsübertragungsfunktion** charakterisiert das Verhalten der Regelung auf Änderungen der Führungsgröße. Die **Störübertragungsfunktion** charakterisiert das Verhalten der Regelung auf Änderungen der Störgröße.

6.2 Eigenschaften von $F_o(s)$ und Auswirkungen auf den Regelkreis

i) Bsp.: Antrieb Ausgangsgröße Drehzahl: $n(s) = \frac{\phi}{\left(J_M L_A s^2 + J_M R_A s + \phi^2\right)} u_A(s)$

Betrachtung stationärer Zustand für $u_A(t) = \hat{u}_{A0}\sigma(t)$:

$\lim\limits_{s\to 0} s \cdot F_o(s) u_A(s) = s \frac{\phi}{\phi^2} \cdot \frac{\hat{u}_{A0}}{s} = \frac{\hat{u}_{A0}}{\phi}$, d.h. der Ausgang des offenen Kreises strebt bei Aufschaltung von $u_A(t) = \hat{u}_{A0}\sigma(t)$ dem Wert $n_\infty = \frac{\hat{u}_{A0}}{\phi}$ zu.

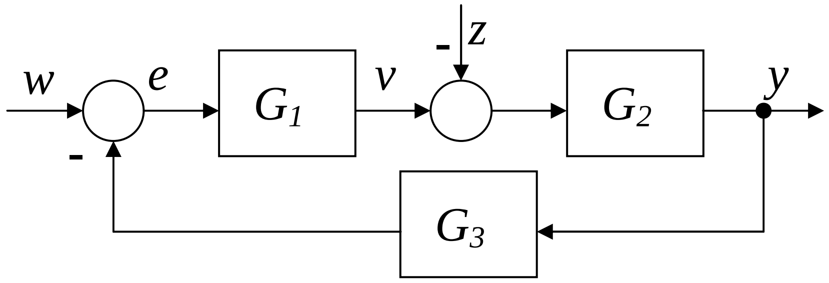
Dieses Verhalten wird als **P-Verhalten des offenen Kreises** bezeichnet.

ii) Bsp.: Antrieb Ausgangsgröße Position: $$y(s) = \frac{i_G \phi}{s\left(J_M L_A s^2 + J_M R_A s + \phi^2\right)} u_A(s)$$

Betrachtung stationärer Zustand für $u_A(t) = \hat{u}_{A0}\sigma(t)$: $\lim\limits_{s\to 0} s \cdot F_o(s) u_A(s) \to \infty$, d.h. der Ausgang des offenen Kreises strebt bei Aufschaltung von $u_A(t) = \hat{u}_{A0}\sigma(t)$ gegen unendlich.

Verhalten wird als **I-Verhalten des offenen Kreises** bezeichnet.
(Hinweis: Pol bei *s*=0)

Folgen für den geschlossenen Kreis:



Voraussetzung: es gebe stationären Zustand für $w = w_0\sigma(t)$ bzw. $z = z_0\sigma(t)$; Verstärkung von G_3 sei K=1.

i) G_1 enthalte I-Glied: y_∞ stationär $\rightarrow e_\infty = 0 \rightarrow y_\infty = w_0$ **günstig!!**

ii) G_1 ohne I-Glied; G_2 enthalte I-Glied: $v_\infty - z_0 = 0 \quad \underbrace{G_1(s=0)}_{K_1} \cdot e_\infty - z_0 = 0 \rightarrow e_\infty = \frac{1}{K_1} z_0$

bleibende Regeldifferenz bei Störeingriff $y_\infty \neq w_0$

iii) G_1, G_2 ohne I-Glied:

$$e_\infty = w_0 - \underbrace{G_3(0)}_{K_3}\underbrace{G_2(0)}_{K_2}(-z_0 + \underbrace{G_1(0)}_{K_1} \cdot e_\infty)$$

$$e_\infty = w_0 + K_2 K_3 z_0 - K_1 K_2 K_3 \cdot e_\infty$$ bleibende Regeldifferenz $y_\infty \neq w_0$

$$e_\infty = \frac{K_2 K_3}{1 + K_1 K_2 K_3} z_0 + \frac{1}{1 + K_1 K_2 K_3} w_0$$

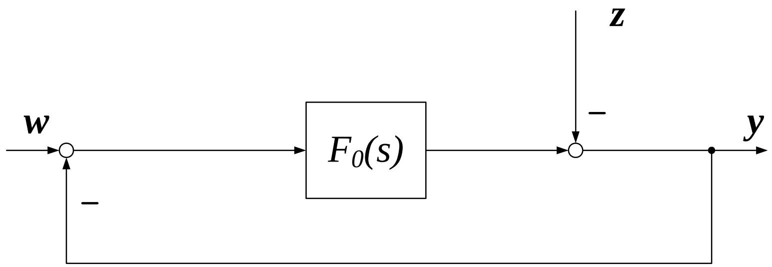
Aber: durch K_1 groß kann Regeldifferenz klein gehalten werden!

Schlussfolgerung: G_1 **habe I-Glied, dann verschwindet Regeldifferenz im stationären Zustand.** Sonst bleibende Regeldifferenz, die jedoch durch großes K_1 klein gehalten werden kann.

7. Reglerentwurf im Frequenzbereich

7.1 Anforderungen an den geschlossenen Regelkreis

- Stabilität
  d.h. die Pole der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises **müssen in der linken Halbebene liegen**.



$$y(s) = \underbrace{\frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}}_{\text{Führungs-ÜF}} w(s) - \underbrace{\frac{1}{1 + F_o(s)}}_{\text{Stör-ÜF}} z(s)$$

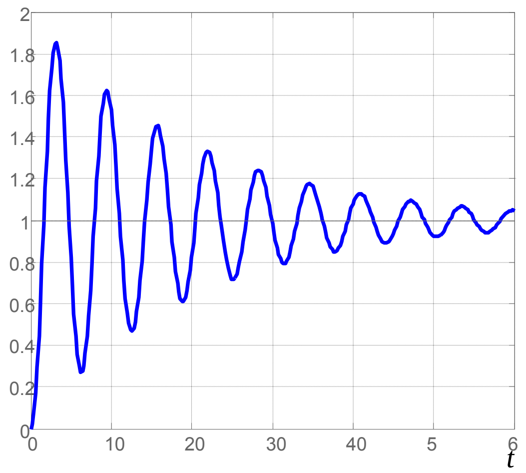
Pole des geschlossenen Kreises in der linken Halbebene bedeutet:

Nullstellen des Nenners der Führungs- bzw. Stör-ÜF müssen alle Re(s_k) < 0 haben.

- Stationarität der Regelgröße
  d.h. für $t \to \infty$ soll y_∞ bei Aufschaltung eines Führungssprungs $w = w_0\sigma(t)$ beim Standard-Regelkreis gegen w_0 gehen (auch bei Störungseingriff).

$$y_\infty \to w_0 \text{ für } t \to \infty\text{; d.h. für Regeldifferenz: } e_\infty \to 0 \text{ bzw.} \left|\frac{e_\infty}{w_0}\right| < \varepsilon$$

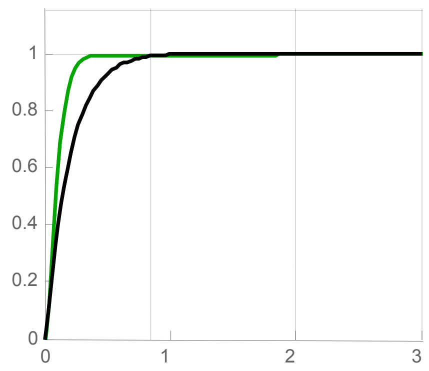
- Regelkreis soll kein oszillierendes schwach gedämpftes Verhalten aufweisen.



RK zwar stabil, aber schwach gedämpft.

d.h. Pole von $1 + F_o(s) = 0$
- möglichst ohne Imaginärteil
- wenn Imag.-Teil, dann Realteil möglichst klein (schnell) abklingend.

- Regelkreis sollte möglichst hohe Dynamik haben,



d.h. die Regelgröße *y* sollte möglichst schnell den stationären Endwert erreichen.

- d.h. Pole von $1+F_o(s)=0$
- möglichst weit links
  - aber nicht zu weit wegen Störwelligkeit der Meßgrößen

7.2 Stabilität des geschlossenen Regelkreises

Stabilität heißt: Die Pole des Übertragungsfunktion in der linken Halbebene

Maßgebliche Übertragungsfunktion: $y(s)=\underbrace{\frac{F_o(s)}{1+F_o(s)}}_{\text{Führungs-ÜF}}w(s)-\underbrace{\frac{1}{1+F_o(s)}}_{\text{Stör-ÜF}}z(s)$

Für Stabilität des geschlossenen Kreises entscheidend: Nullstellen von: $1+F_o(s)$

1.) Nullstellen von $1+F_o(s)$ numerisch berechnen

i) $F_o(s)=\dfrac{Z_o(s)}{N_o(s)}$ dann ist Nenner im geschl. RK: $N_o(s)+Z_o(s)=0$ wieder ein Polynom

Matlab-Befehl **roots()**

ii) $F_o(s)=\dfrac{Z_o(s)}{N_o(s)}e^{-T_t s}$ dann ist Nenner im geschl. RK: $N_o(s)+Z_o(s)e^{-T_t s}=0$

transzendente Gleichung; Matlab-Befehl **fzero()**

2.) Algebraische Kriterien

i) $F_o(s)=\dfrac{Z_o(s)}{N_o(s)}$ Nenner geschl. RK: $N_o(s)+Z_o(s)=0$ Polynom → Hurwitz anwendbar

ii) $F_o(s)=\dfrac{Z_o(s)}{N_o(s)}e^{-T_t s}$ Nenner geschl. RK: $N_o(s)+Z_o(s)e^{-T_t s}=0$ → Hurwitz **nicht** anwendbar

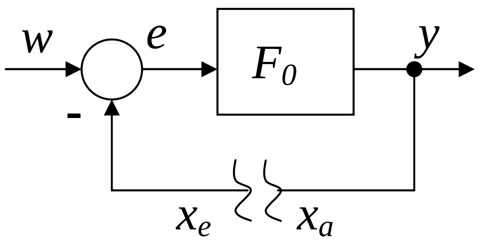
3.) Geometrische Kriterien

Nyquist Kriterium: Systeme mit Totzeit können behandelt werden !

7.3 Nyquist-Kriterium

Stabilitätsgrenze

Regelkreis sei an der Stabilitätsgrenze (d.h. ein Pol an 0): Regelkreis führt nach Anfangsauslenkung ungedämpfte Schwingung als Dauerschwingung aus.

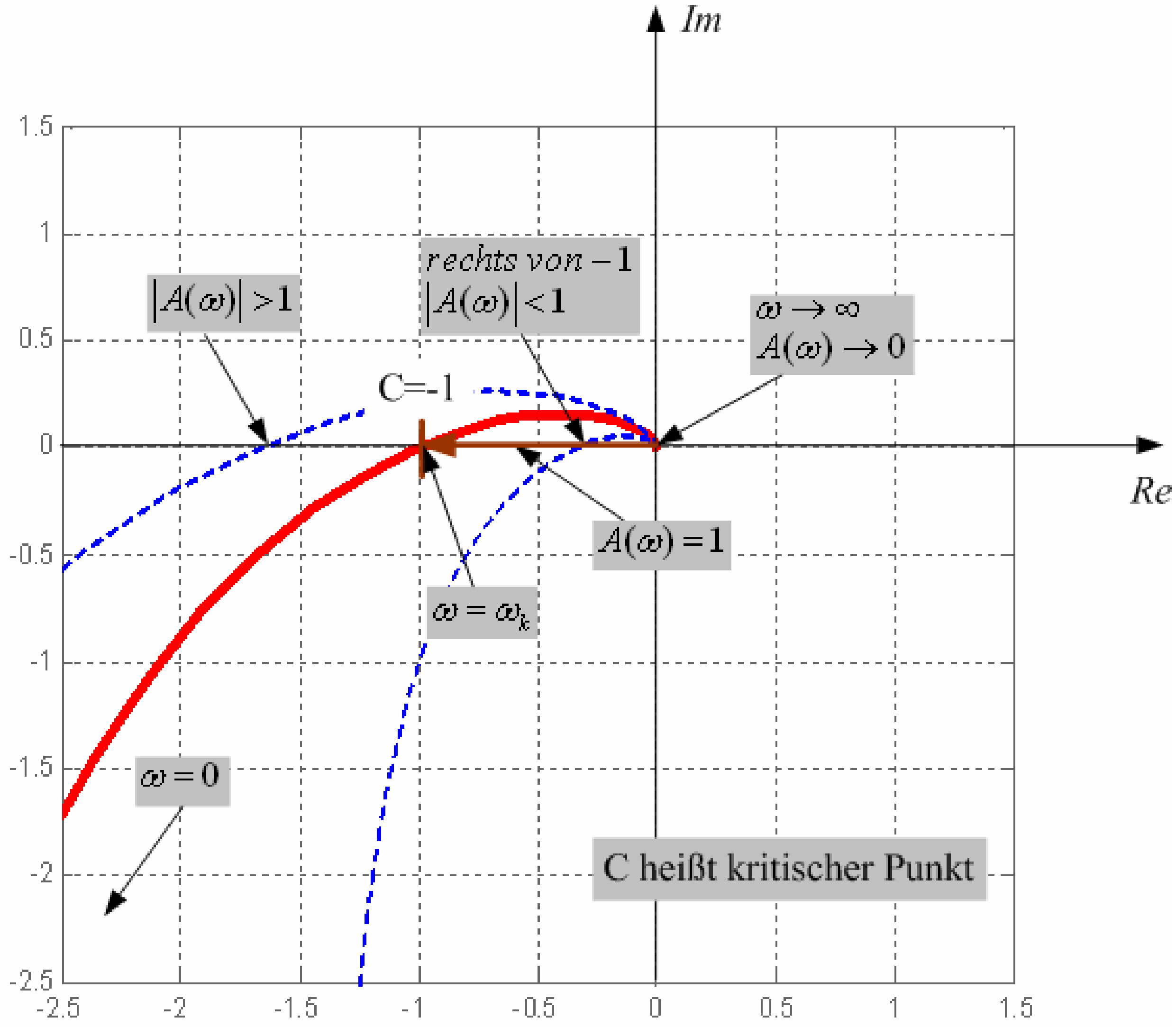


1.) RK wird gedanklich aufgeschnitten
2.) Dauerschwingung $x_a(t) = x_e(t)$ Frequenz sei ω_k
3.) Damit gilt für Transformierte im Frequenzbereich
$X_a(j\omega) = X_e(j\omega)$
4.) Zudem gilt $X_a(j\omega) = -F_0(j\omega)X_e(j\omega)$

5.) Wg. $X_a(j\omega) = X_e(j\omega)$ gilt damit an Stabilitätsgrenze $F_0(j\omega) = -1$

Das heißt: Geht die Ortskurve des **offenen** Kreises $F_0(j\omega)$ durch den Punkt *C*=(-*1;0*) der komplexen Ebene, so führt der **geschlossene** Kreis an dieser Stelle Dauerschwingungen mit der Frequenz $\omega = \omega_k$ aus. *C* heißt kritischer Punkt.

Ortskurve und Nyquist-Kriterium



Spezielle Form des Nyquist-Kriteriums

Voraussetzungen:

- Übertragungsfunktion $F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)} e^{-sT_t} = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots} e^{-sT_t} \quad K > 0; T_t > 0, q = 0,1,2$

  Zählergrad < Nennergrad
- $F_o(s)$ habe Pole links der j-Achse; erlaubt ist ein maximal 2-facher Pol bei s=0.
- $Z_o(s), N_o(s)$ haben keine gemeinsame Nullstelle

Nyquist-Kriterium in spezieller Form: (Ortskurvendarstellung)

Der geschlossene Regelkreis ist **genau dann asymptotisch stabil**, wenn die Ortskurve $F_0(j\omega)\,(0 \le \omega < \infty)$ des **offenen Kreises** den Punkt $C = (-1;0)$der komplexen Ebene in Richtung wachsender Frequenzen **links** liegen läßt. (heißt auch „Linke Hand Regel“).

Läßt die Ortskurve den kritischen Punkte **rechts** liegen, so ist der geschlossene Kreis **instabil.**

Nyquist-Kriterium in spezieller Form (Bodediagrammdarstellung):

Annahme: Ortskurve des offenen Kreises schneidet Einheitskreis nur einmal bei Durchtrittsfrequenz ω_D. Statische Verstärkung der offenen Kette nicht negativ, d.h.

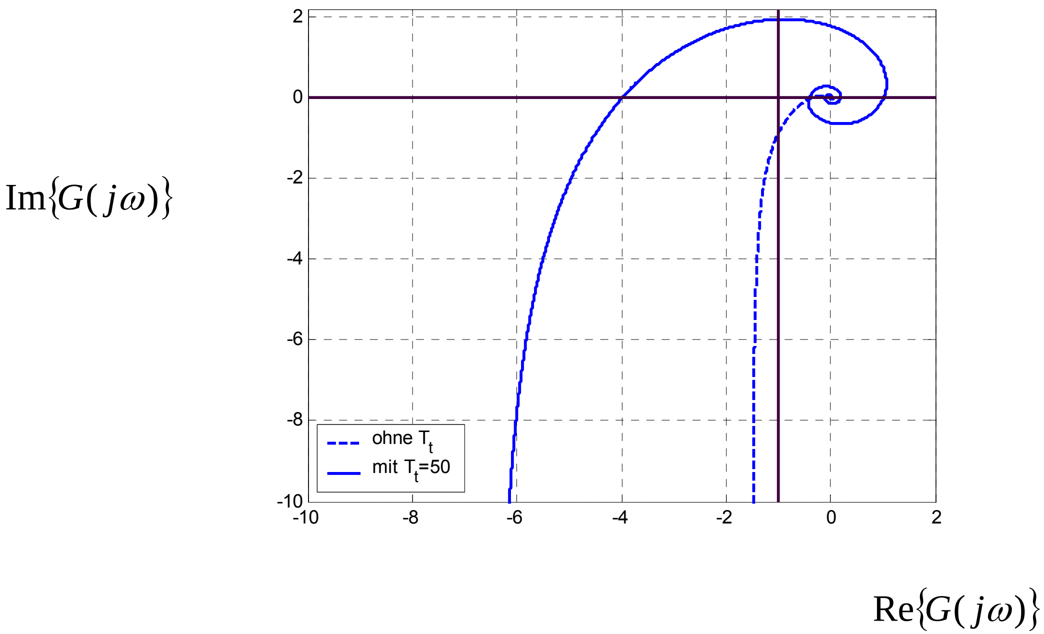
$$F_O(0) \geq 0$$

Im **asymptotisch stabilen** Fall ist bei $\omega = \omega_D$ die Phase **noch nicht auf** $\varphi = -180°$ **abgesunken**; bei Werten von ω bei denen $\varphi \leq -180°$ ist $|A(\omega)| < 1$.

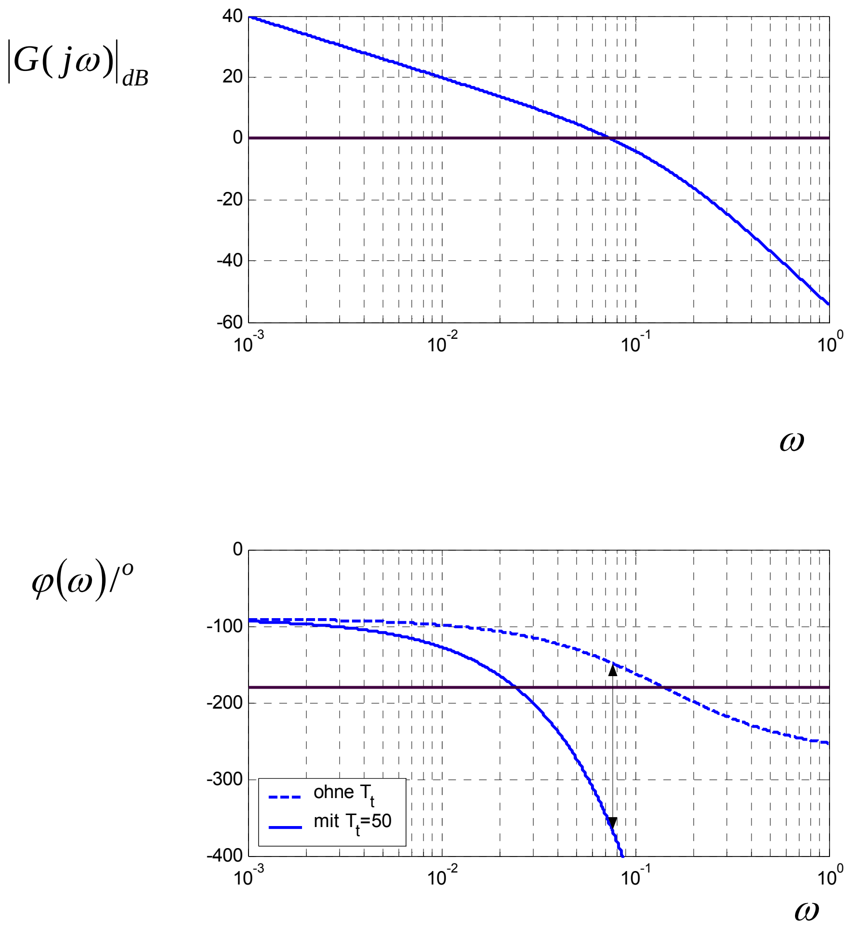
Im **instabilen Fall ist** bei $\omega = \omega_D$ die Phase φ **bereits unter** $-180°$ **abgesunken**; d.h. bei Werten von $\varphi \leq -180°$ ist $|A(\omega)| > 1$ (Mitkopplung).

Bsp.: Geg.: $G(s) = \dfrac{0{,}1 \cdot e^{-s \cdot T_t}}{s(1+s10)(1+s5)}$

Ortskurve

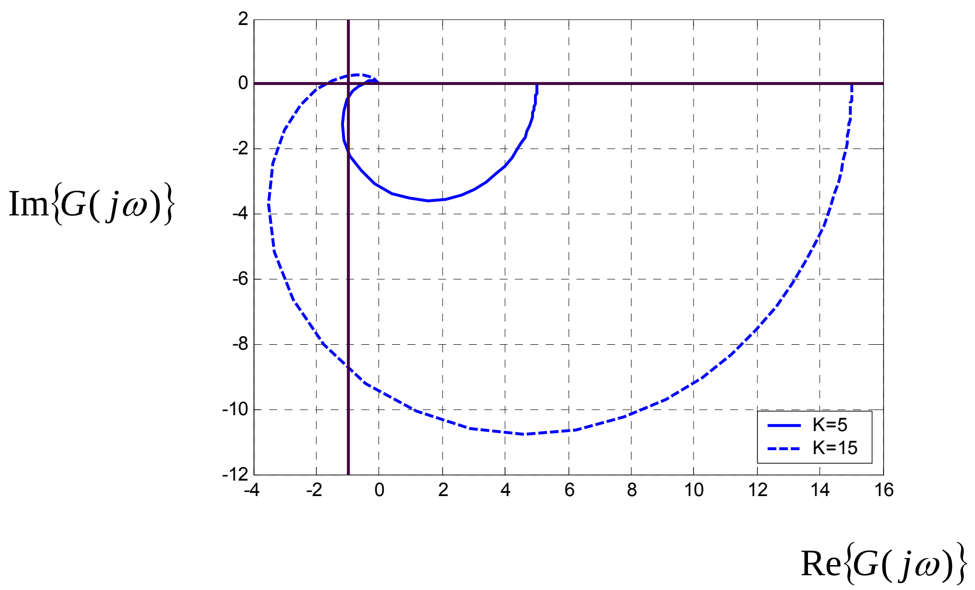


Bodediagramm

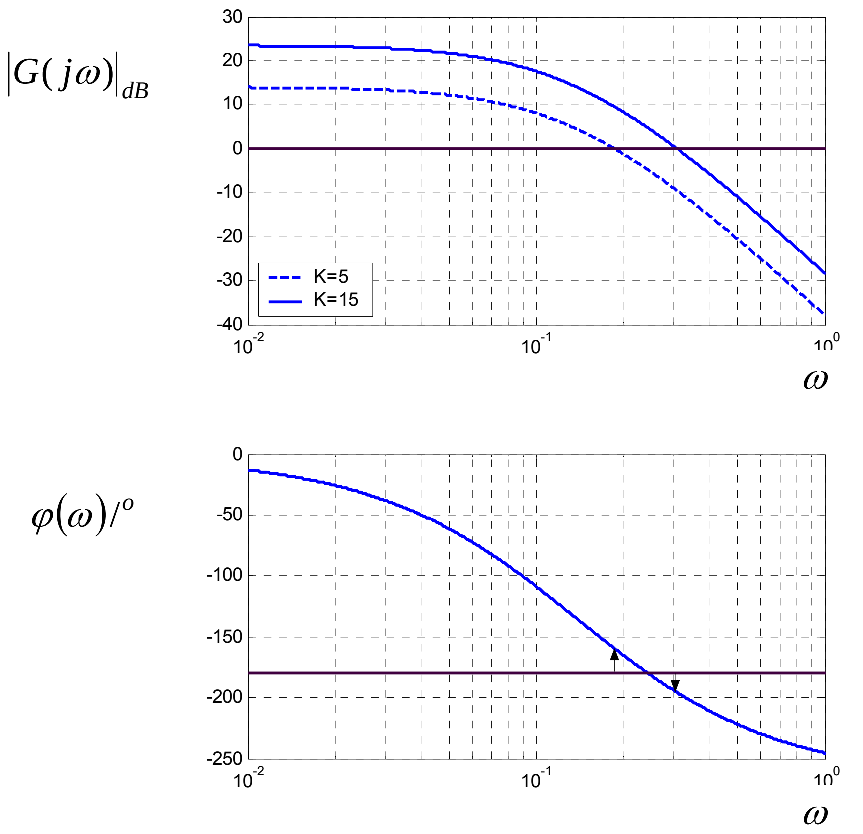


Bsp.: Geg.: $G(s) = \dfrac{K}{(1+s10)(1+s7{,}5)(1+s5)}$

Ortskurve

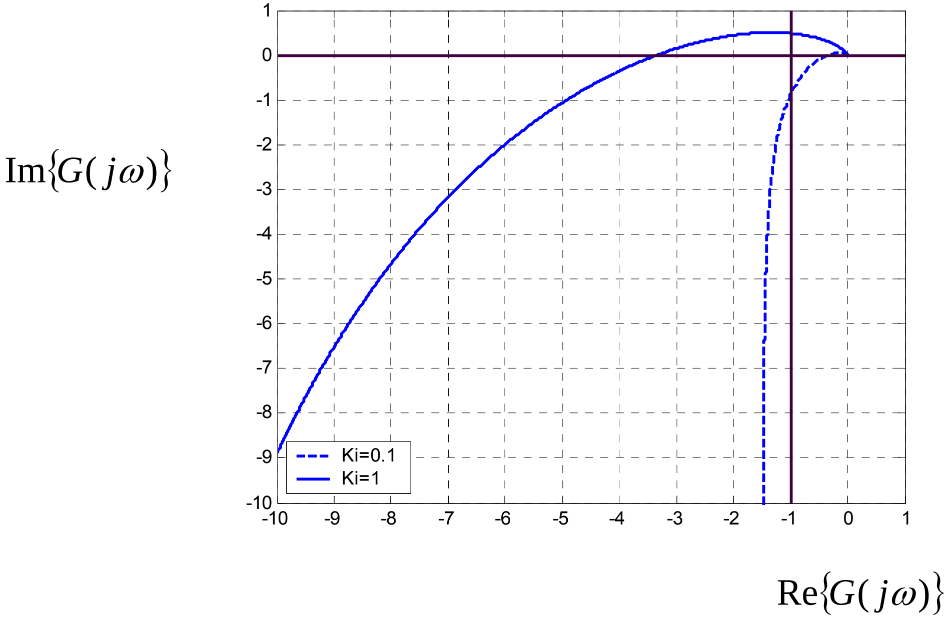


Bodediagramm

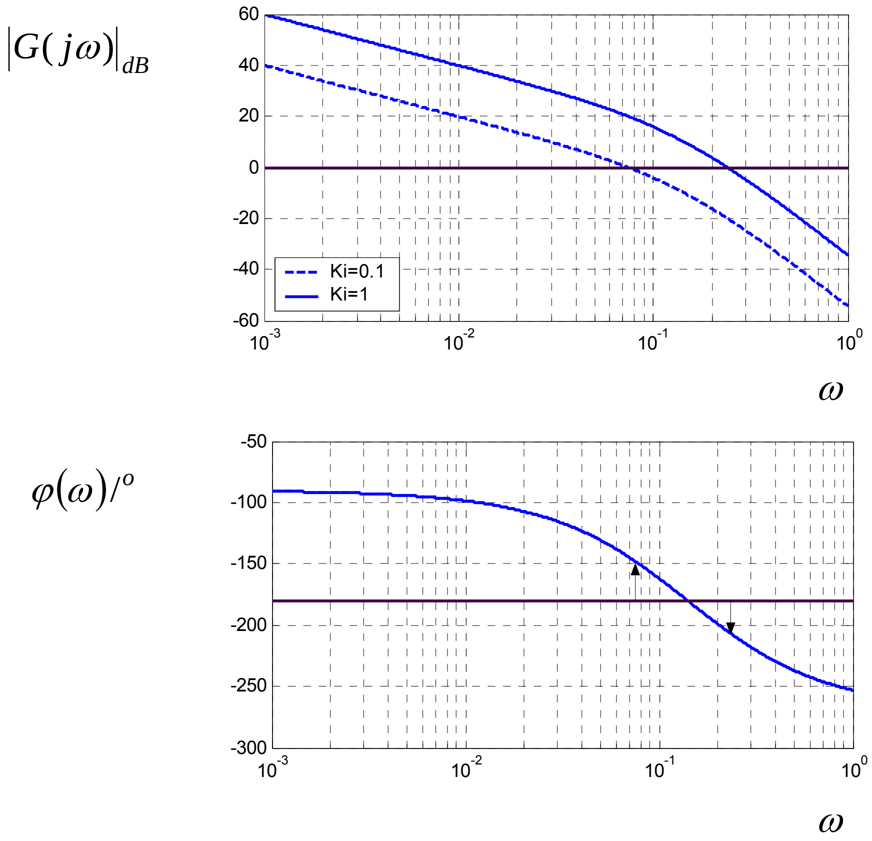


Bsp.: Geg.: $G(s) = \dfrac{K_i}{s(1+s10)(1+s5)}$

Ortskurve

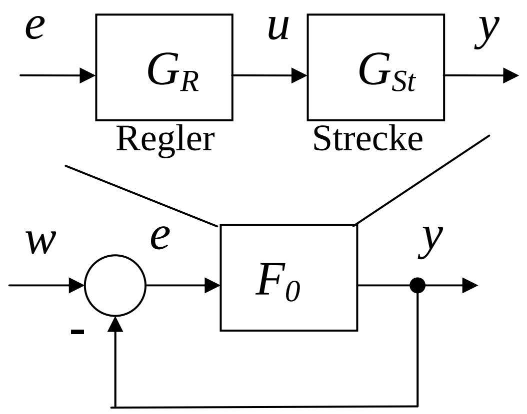


Bodediagramm



7.4 Grundstrukturen des Reglers

Diskussion der Forderungen an das Regelkreisverhalten:



a) Stabilität
b) Stationäre Genauigkeit / verschwindende Regelabweichung
c) Kein oszillierendes und damit schlecht gedämpftes Verhalten
d) Hohe Dynamik

Zu b) Maßnahme: I-Glied in $F_o(s)$ oder hohe Verstärkung *K*
Aber: Beides wirkt destabilisierend!!!

- Für Stabilität im Bodeplot relevant: Schnittpunkt mit reeller Achse, Durchtrittsfrequenz, 180 Grad Stabilitätsgrenze

- I-Glied einfügen: I-Glied verschiebt Phase pauschal um -90 Grad. Stabilitätsgrenze wird früher erreicht.

- K-Erhöhung schiebt Amplitude nach oben, damit steigt die Durchtrittsfrequenz, mit steigender Durchtrittsfrequenz sinkt Phase, Stabilitätsgrenze wird früher erreicht.

Folgerung:
Forderungen
a) Stabilität und
b) stationäre Genauigkeit
sind gegenläufig und erfordern einen Kompromiss!

Forderungen
d) hohe Dynamik und
c) Dämpfung
sind ebenfalls gegenläufig.

Herleitung einer günstigen Reglerstruktur:

Wichtige Eigenschaft: stationäre Genauigkeit: deshalb Regler hat I-Glied (Ausnahme Strecke hat bereits ein I-Glied)
Wie kann aber jetzt die Stabilität gesichert werden?

Struktur der Strecke: $G(j\omega)=\frac{Z(j\omega)}{N(j\omega)}=\frac{K}{j\omega}\cdot\frac{\dots}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)\dots}$

Jeder Faktor im Nenner bewirkt Phasenabfall um -90 Grad

Lösungsweg:

Mit Regler zusätzliche Zählerfaktoren einführen, da diese die Phase um 90 Grad anheben und eine Tendenz von der -180 Grad Stabilitätsgrenze weg einbringen.

$$G(j\omega)=\frac{Z(j\omega)}{N(j\omega)}=\frac{K}{j\omega}\cdot\frac{\dots(1+T_{R1} j\omega)\dots}{(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)\dots}$$

Damit hat Regler die Struktur: $G_R(j\omega)=\frac{K}{j\omega}\cdot(1+T_{R1} j\omega)(1+T_{R2} j\omega)\cdots(1+T_{Rm} j\omega)$

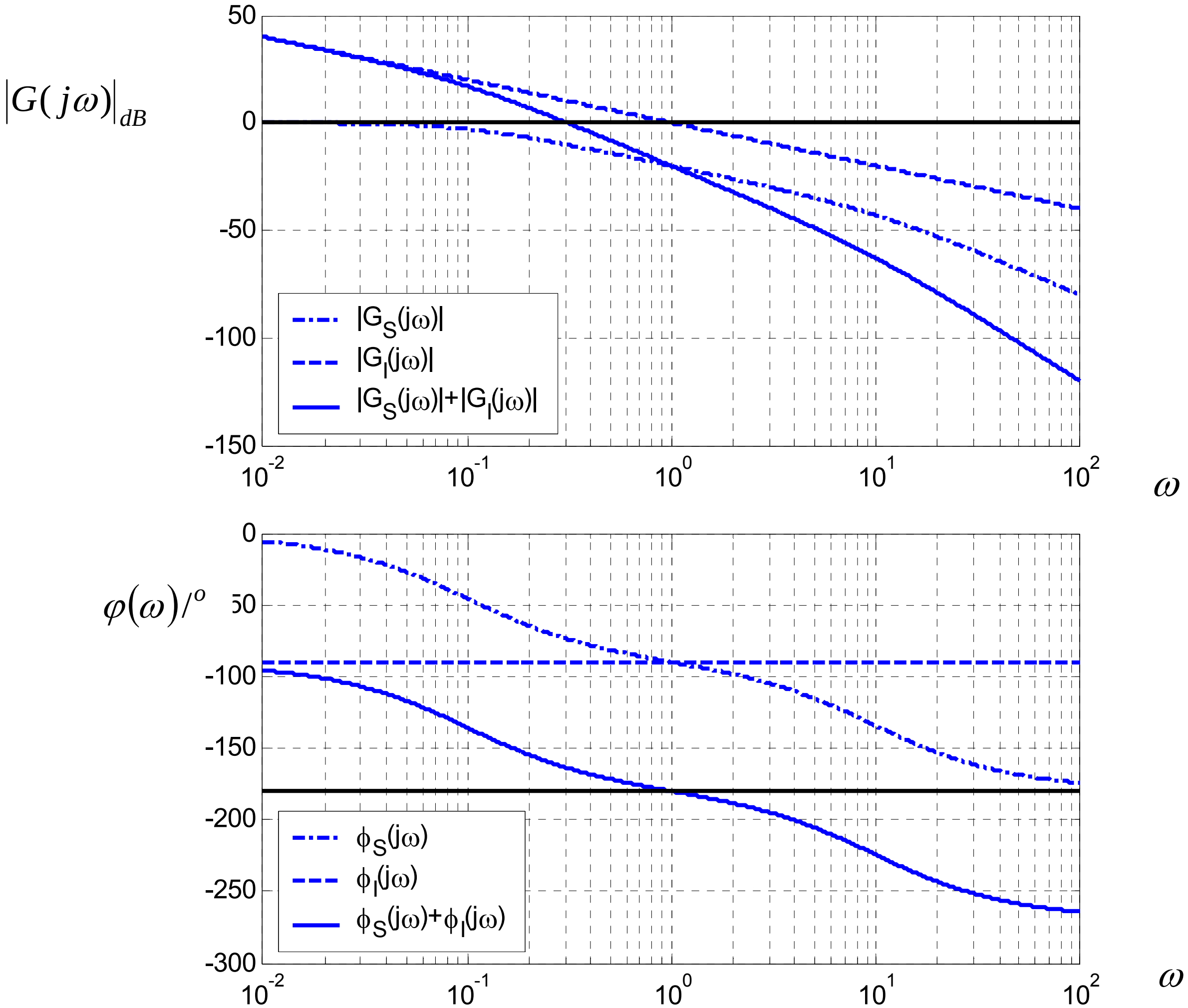
ausmultiplizieren ergibt: $G_R(j\omega)=\underbrace{\frac{a_{-1}}{j\omega}}_{I-Glied}+\underbrace{a_0}_{P-Glied}+\underbrace{a_1\cdot j\omega}_{D-Glied}+\underbrace{a_2\cdot(j\omega)^2}_{D2-Glied}$

D2 wegen Störwelligkeit des Messsignals problematisch!

Einfügen von Korrekturgliedern (1)

Beispiel: $$G_s(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega 10)(1+j\omega 0{,}1)}$$

a) Einfügen eines I-Gliedes mit $G_I(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$



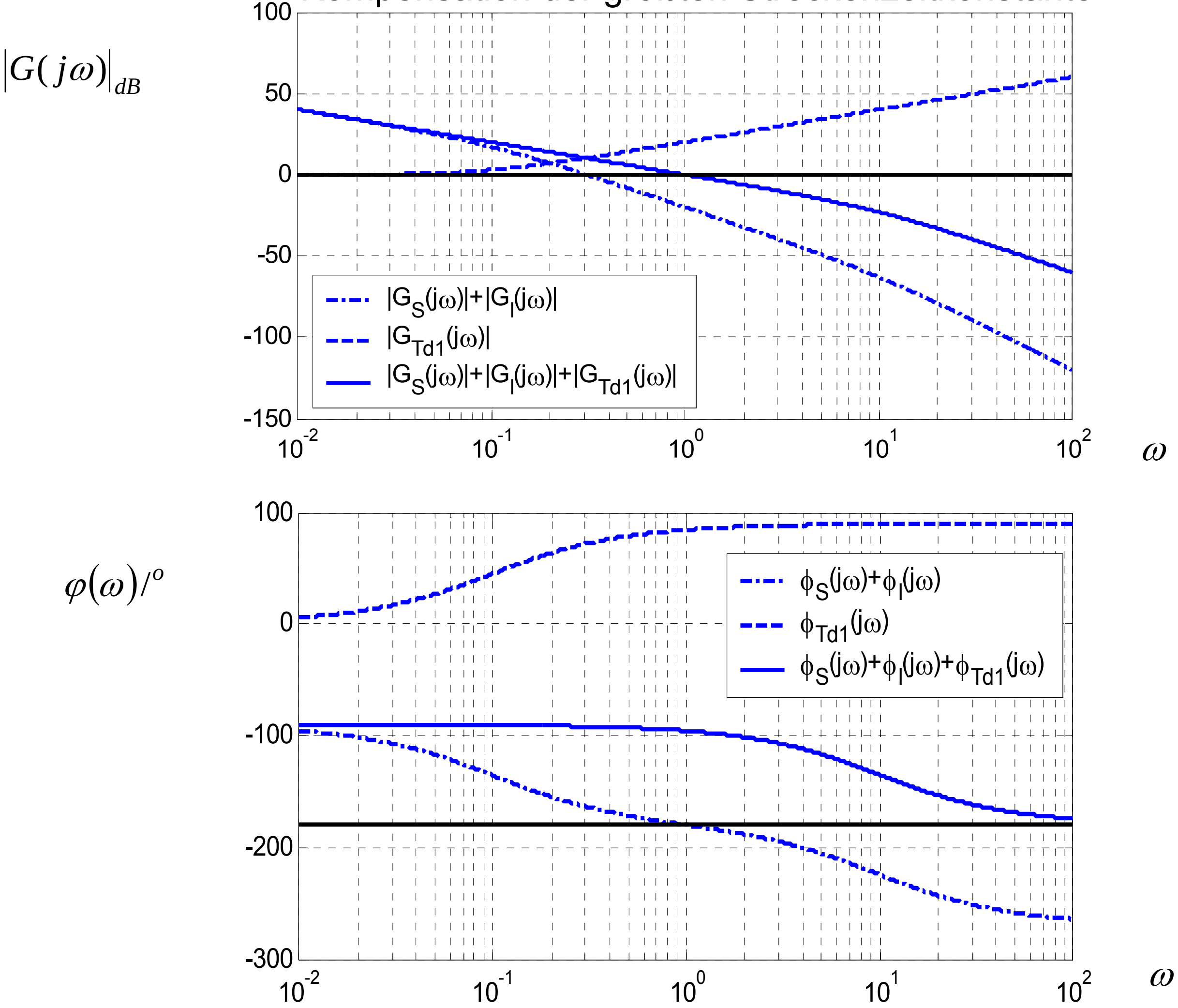
Arbeitsblatt 124

Einfügen von Korrekturgliedern (2)

Beispiel: $$G_s(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega 10)(1+j\omega\, 0{,}1)}$$

b) Einfügen eines T_{D1}-Gliedes: $G_{TD_1}(j\omega) = 1 + j\omega 10$

⇨ Kompensation der größten Streckenzeitkonstante



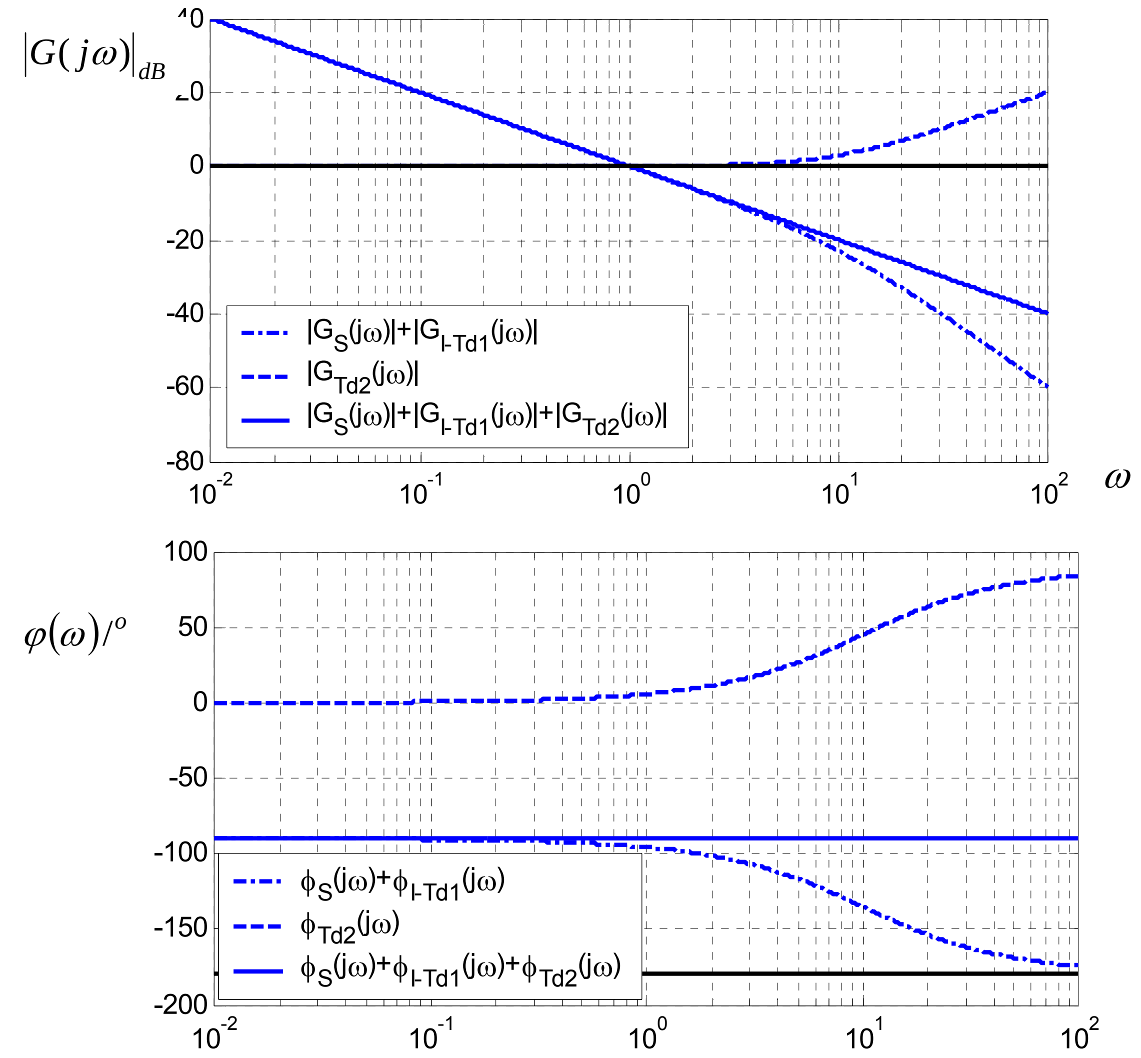
Arbeitsblatt 125

Einfügen von Korrekturgliedern (3)

Beispiel: $G_s(j\omega) = \dfrac{1}{(1+j\omega 10)(1+j\omega 0{,}1)}$

b) Einfügen eines zweiten T_{D1}-Gliedes: $G_{TD_2}(j\omega) = 1 + j\omega\ 0{,}1$ $\Longrightarrow$ Kompensation der zweiten Streckenzeitkonstante

I-Verhalten von $F_0(j\omega)$
T_1-Verhalten von $F_w(j\omega)$!



Arbeitsblatt 126

Wahl von K?
Wann ist Regler schnell?

Bei einer hohen Verstärkung *K* wird *e* klein. Dies führt zu relativ großem *u*, allerdings wird die Abweichung schnell ausgeregelt.

Im Frequenzbereich: sofern stationäre Genauigkeit: $\lim_{t \to \infty} y = \omega_0 ; \omega = \omega_0 \sigma(t)$

Bereich von positiven $A(\omega)$ geht zu möglichst hohen Frequenzen; d.h. die Durchtrittsfrequenz möglichst groß; aber Stabilitätsgrenze beachten!

2 Probleme:
Im vorangegangenen Beispiel würde $K \to \infty$ zu $\omega_D \to \infty$ sein, ohne dass Stabilitätsgrenze berührt wird.

Technisch nicht realisierbar wegen Stellgrößenbeschränkung

Typische Reglerstruktur:

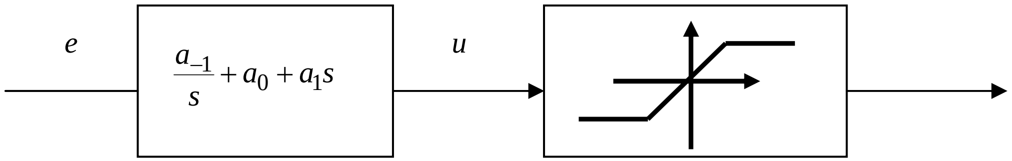
$$G = \frac{a_{-1}}{s} + a_0 + a_1 s$$

auftretende Regelabweichung (bei Störungen)

↓

z. B. $e = e_0 \cdot \sigma(t)$

Stellgrößen-Beschränkung:

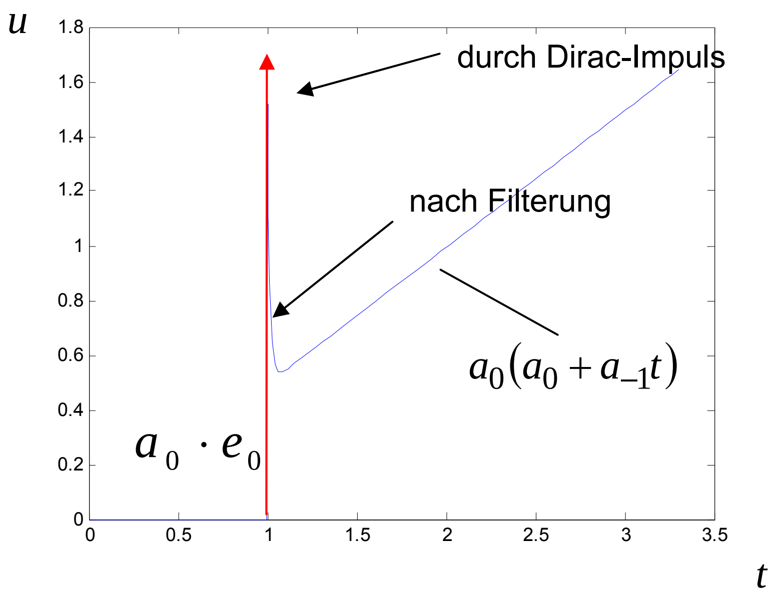


Damit wird:

$$u(t) = e_0 \cdot \left(a_{-1} \cdot t + a_0 \cdot \sigma(t) + a_1 \delta(t)\right)$$

würde nicht umgesetzt werden

Zeitantwort auf Sprung $e = e_0 \cdot \sigma(t)$



deshalb Filterung mit: $\dfrac{1}{1+T_N j\omega}$

Störwelligkeit:

Störung bei $r = A_r \cdot \sin \omega_r \cdot t$ (aus Messung abschätzbar)

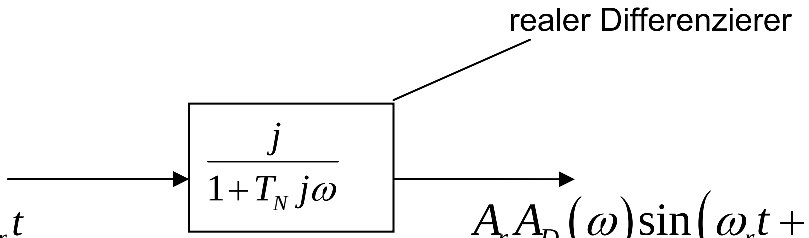
$$\xrightarrow{A_r \sin \omega_r t} \boxed{j\omega} \xrightarrow{\omega_r \cdot A_r \cdot \cos \omega_r t}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \omega_r \quad \text{groß} \\ \quad\downarrow \\ \text{Ampl. } A_r \cdot \omega_r \quad \text{groß} \end{array}$$

D-Glied vergrößert Störwelligkeit

$\Downarrow$

Abschwächung durch PT_1- Glied mit kleiner Zeitkonstante.



$A_r \sin \omega_r t$

$$G_D = A_D e^{j\varphi_D}$$

$$\underbrace{A_r A_D(\omega)}_{Ampl.A} \sin\left(\omega_r t + \varphi_D(\omega)\right)$$

$$A_D(\omega) = \frac{\omega_r}{\sqrt{1+T_N^{\,2}\omega_r^{\,2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\omega_r^{\,2}} + T_N^{\,2}}} \approx \frac{1}{T_N} \rightarrow A \approx A_r \cdot \frac{1}{T_N}$$

Realistische **Reglerstrukturen**:

Erinnerung: Problem Differentiation von e

PI-Regler:

$$\boxed{\begin{aligned} G_R(j\omega) &= \frac{K_R}{j\omega}\left(1 + T_{R1} j\omega\right) \\ &= \underbrace{\frac{K_R}{j\omega}}_{I-Anteil} + \underbrace{K_R T_{R1}}_{P-Anteil} \end{aligned}}$$

PID-Regler:

idealer PID-Regler:

$$G_R(j\omega) = \frac{K_R(1+T_{R1}j\omega)(1+T_{R2}j\omega)}{j\omega}$$

$$= \underbrace{\frac{K_R}{j\omega}}_{I} + \underbrace{K_R(T_{R1}+T_{R2})}_{P} + \underbrace{K_R T_{R1} T_{R2} j\omega}_{D}$$

$$= \underbrace{K_R(T_{R1}+T_{R2})}_{K} \cdot \left[1 + \frac{1}{\underbrace{T_{R1}+T_{R2}}_{T_I}} \cdot \frac{1}{j\omega} + \frac{T_{R1}T_{R2}}{\underbrace{T_{R1}+T_{R2}}_{T_D}} j\omega \right]$$

realer PID-Regler:

$$G_R(j\omega) = \frac{K_R}{j\omega} \frac{(1+T_{R1}j\omega)(1+T_{R2}j\omega)}{(1+T_N j\omega)}$$

Für Strecken mit I-Glied ist stationäre Genauigkeit bzgl. eines Sprungs gegeben
→ deshalb kein I-Anteil im Regler notwendig

P-Regler

$$G_R(j\omega) = K$$

Idealer PD-Regler

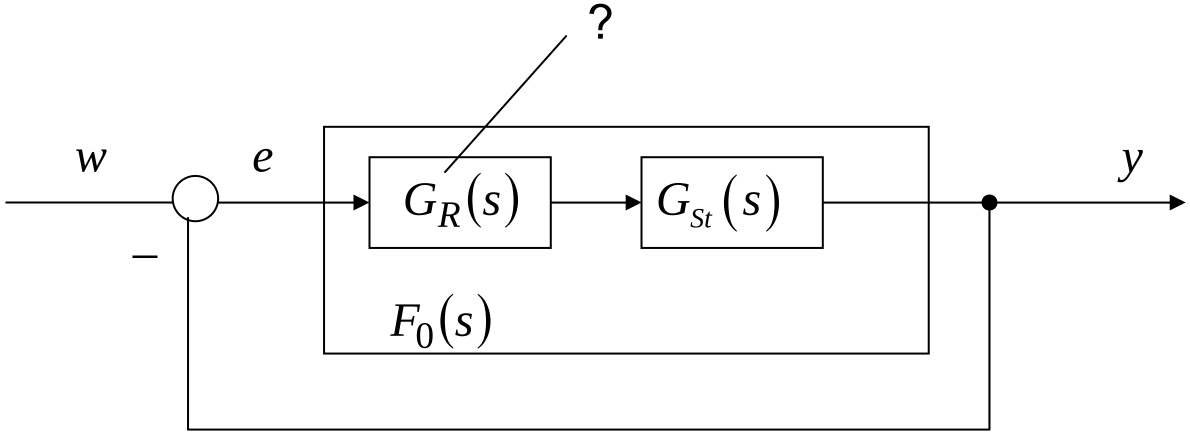
$$\begin{aligned} G_R(j\omega) &= K_R(1 + T_R j\omega) \\ &= \underbrace{K_R}_{P} + \underbrace{K_R T_R j\omega}_{D} \end{aligned}$$

Realer PD-Regler

$$G_R(j\omega) = K_R \frac{(1 + T_R j\omega)}{1 + T_N j\omega}$$

7.5 Auslegung des Reglers nach Frequenzkennlinienverfahren

Hilfsmittel:
Bodediagramm des offenen Kreises



Anforderungen:

- Stabilität
  d. h. Durchschnittsfrequenz bei Phase größer als -180°.
- Stationarität
  $(G_{St}\ \text{oder})\,G_R$ hat I-Glied oder K genügend groß
- hohe Dynamik
  → Verschiebung der Durchschnittsfrequenz zu möglichst hohem **ω**.
  → Rückdrehung der Phase durch Differenzierer
- genügende Dämpfung
  → Durchtrittsfrequenz möglichst bei einem ausreichenden Abstand zur Stabilitätsgrenze

Vorgehen Entwurf nach FKL-Verfahren:

1) **Wahl der Reglerstruktur**

Faustregel:

i) G_{St} hat integrierendes Verhalten
→ P- oder PD-Regler (höhere Dynamik, aber Problem Störwelligkeit)

ii) G_{St} hat kein integrierendes Verhalten
→ PI- oder PID- Regler (siehe oben: höhere Dynamik, aber Störwelligkeit)

2) **Bei PI- bzw. PID-Regler**

I-Anteil in offenen Kreis einfügen

3) **Kompensation der Streckenzeitkonstanten**

i) PD- oder PI-Regler
die größte Streckenzeitkonstante wird korrigiert

ii) PID-Regler
die zwei größten Streckenzeitkonstanten werden kompensiert

4) **Bei PD, PID-Regler**

T_N festlegen $\approx \frac{1}{10}$ der kleinsten durch Regler kompensierten Streckenzeitkonstanten; oder nach Störwelligkeit des Messsignals

5) **Bodediagramm** für $F_o = G_R \cdot G_{St}$ mit K=1 zeichnen (oder berechnen)

6) **Phasenreserve (Dämpfungsgrad) festlegen**

$-180°$ Stabilitäts-Grenze
$-150°$ schwache bis mittlere Dämpfung; bedeutet Phasenreserve $30°$
$-120°$ stark gedämpft; bedeutet Phasenreserve $60°$

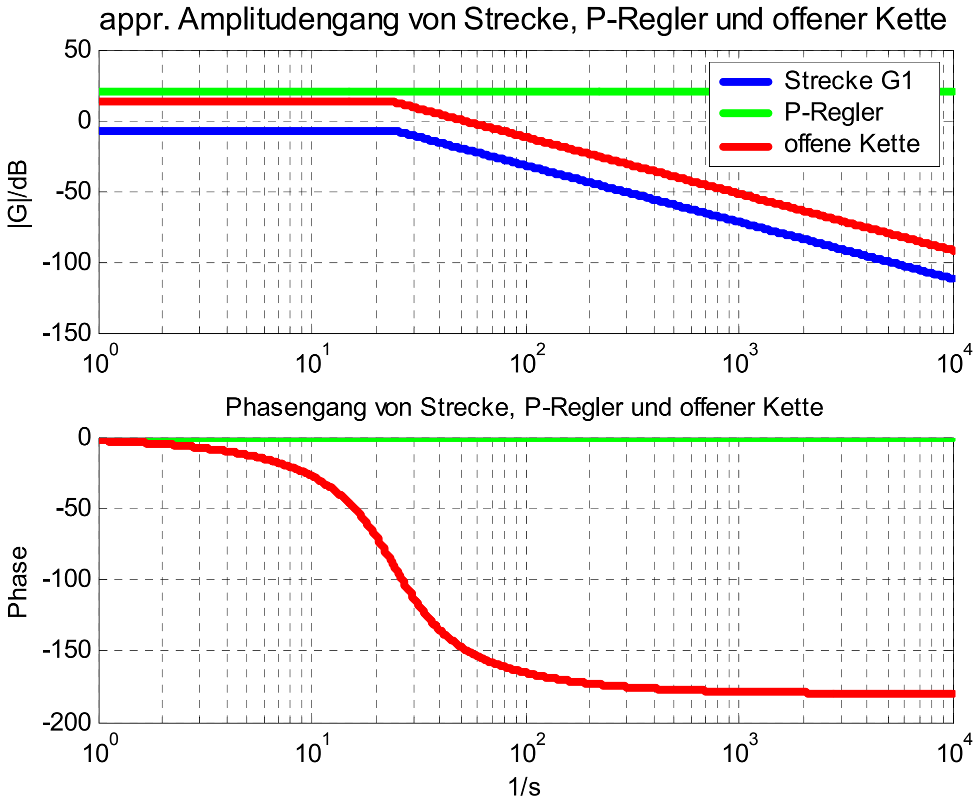
7) **K erhöhen (verringern)** bis Durchschnittsfrequenz so, dass geforderte Phasenreserve erreicht wird → Berechnung der Verstärkung **A(ω$_D$)** an der gewünschten Durchtrittsfrequenz, dann:

$$K = \frac{1}{A(\omega_D)}$$

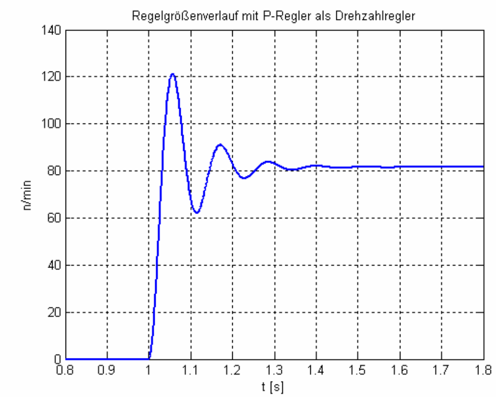
P-Drehzahlregelung

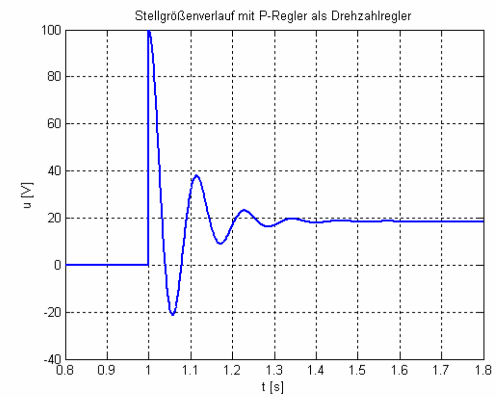
$$G_{S1}(s) = \frac{0.4406}{1 + 0.0427s + 0.0017s^2} = \frac{K_{S1}}{1 + 2D_{S1}T_{0S1}s + T_{0S1}{}^2 s^2}$$ Schwingungsglied; $G_{RH}(s) = K_{RH}$ P-Regler

$T_{0S1} = 0{,}0413$ $\quad 1/T_{0S1} = 24{,}2$ $\quad D_{S1} = 0{,}5169$ $\quad T_N = 0.004s$ $\quad 1/T_N = 250$ $\quad K_{RH} = 10$



Phasenreserve=30,9^0

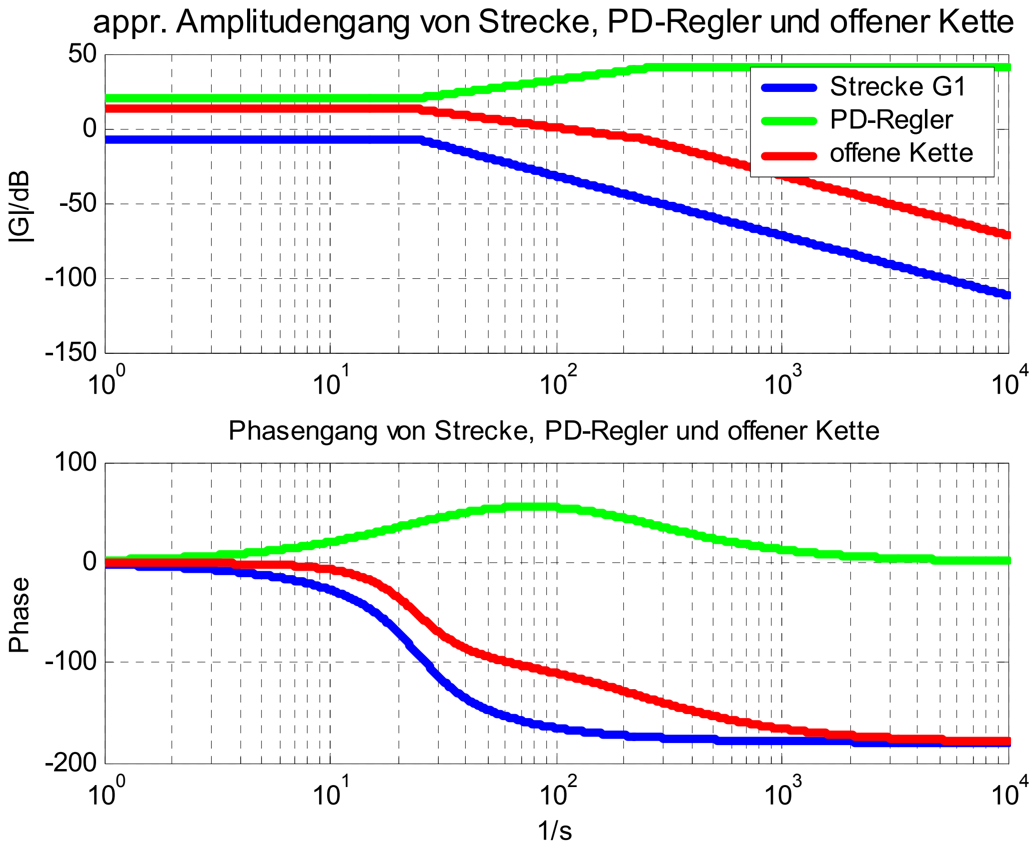




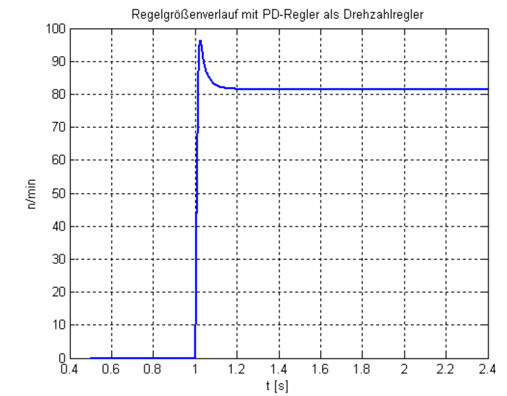
PD-Drehzahlregelung

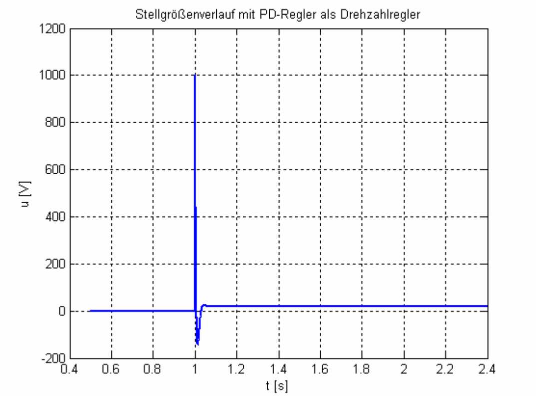
$$G_{S1}(s) = \frac{0.4406}{1 + 0.0427s + 0.0017s^2} = \frac{K_{S1}}{1 + 2D_{S1}T_{0S1}s + T_{0S1}{}^2 s^2}$$ Schwingungsglied; $$G_{RH}(s) = K_{RH}\frac{(1+T_0 s)}{(1+T_N s)}$$ realer PD-Regler

$T_{0S1} = 0{,}0413$ $1/T_{0S1} = 24{,}2$ $D_{S1} = 0{,}5169$ $T_N = 0.004s$ $1/T_N = 250$ $K_{RH} = 10$



Phasenreserve=$68{,}6^0$

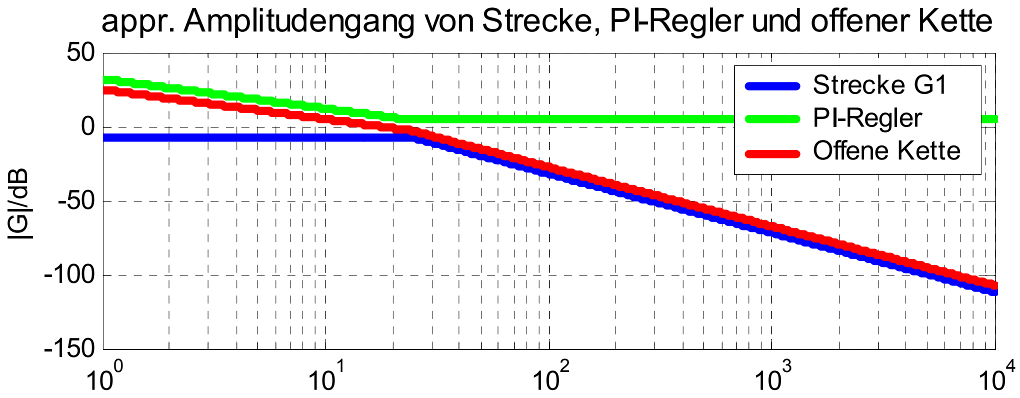


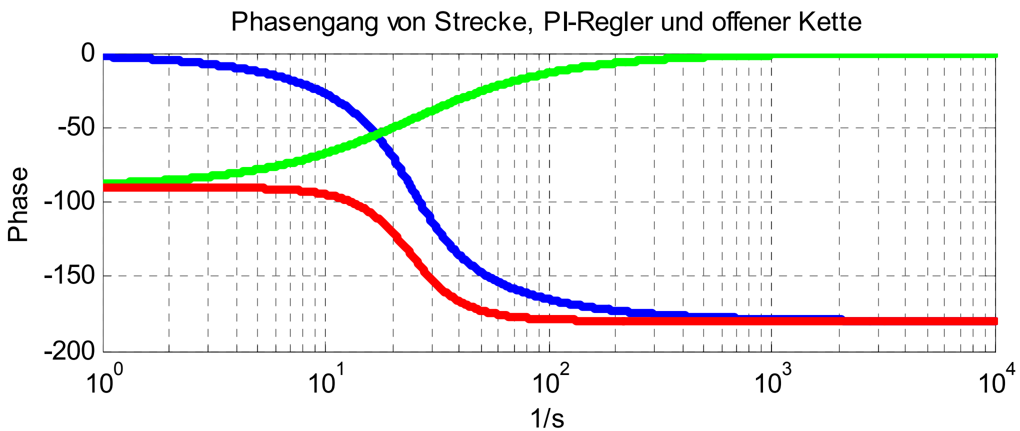


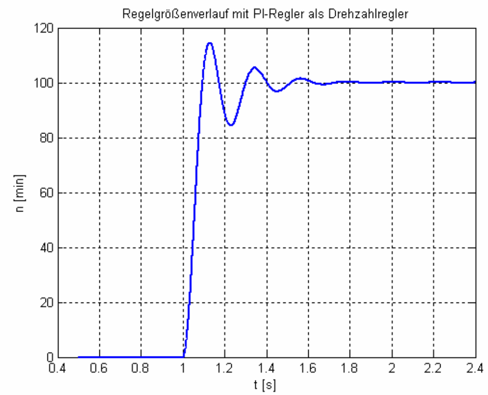
PI-Drehzahlregelung

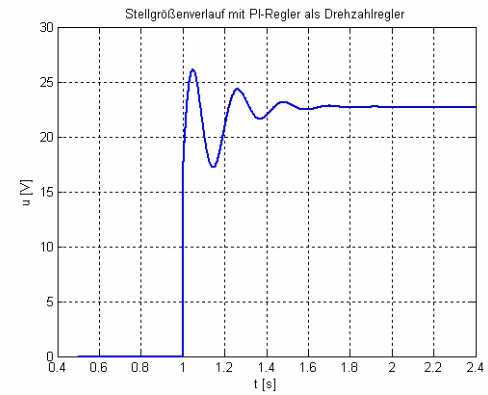
$$G_{S1}(s)=\frac{0.4406}{1+0.0427s+0.0017s^2}=\frac{K_{S1}}{1+2D_{S1}T_{0S1}s+T_{0S1}{}^2s^2}$$ Schwingungsglied; $$G_{RH}(s)=K_{RH}\frac{1+T_0 s}{s}$$ PI-Regler

$T_{0S1}=0{,}0413$ $1/T_{0S1}=24{,}2$ $D_{S1}=0{,}5169$ $T_N=0.004s$ $1/T_N=250$ $K_{RH}=40$







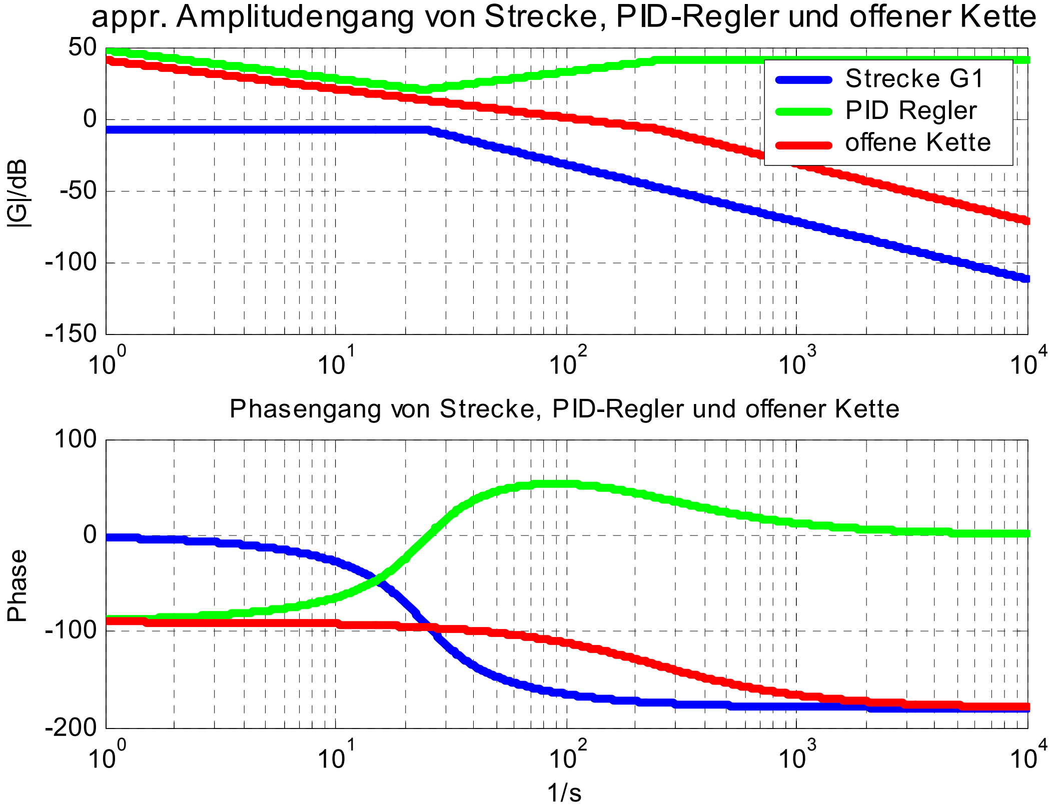


Phasenreserve=45,4^0

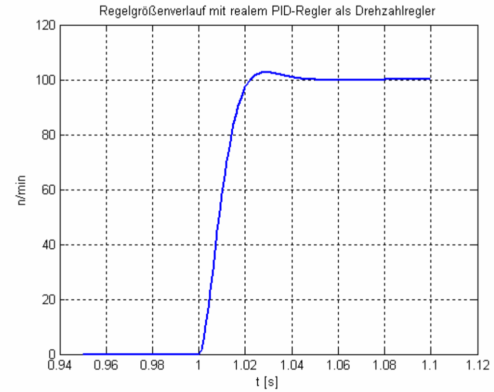
PID-Drehzahlregelung

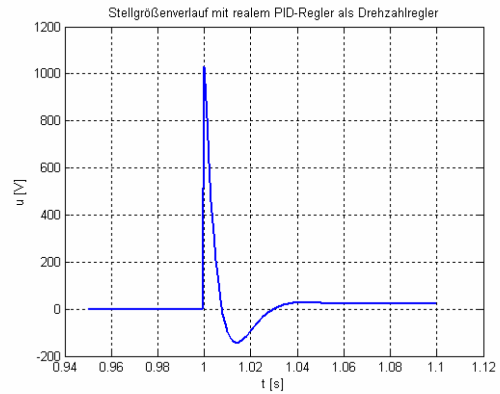
$$G_{S1}(s)=\frac{0.4406}{1+0.0427s+0.0017s^2}=\frac{K_{S1}}{1+2D_{S1}T_{0S1}s+T_{0S1}^{\,2}s^2}$$ Schwingungsglied; $$G_{RH}(s)=K_{RH}\frac{1+2DT_0s+T_0^{\,2}s^2}{s(1+T_Ns)}$$ realer PID-Regler

$T_{0S1}=0{,}0413$ $\quad 1/T_{0S1}=24{,}2$ $\quad D_{S1}=0{,}5169$ $\quad T_N=0.004s$ $\quad 1/T_N=250$ $\quad K_{RH}=250$



Phasenreserve=$67{,}83^0$

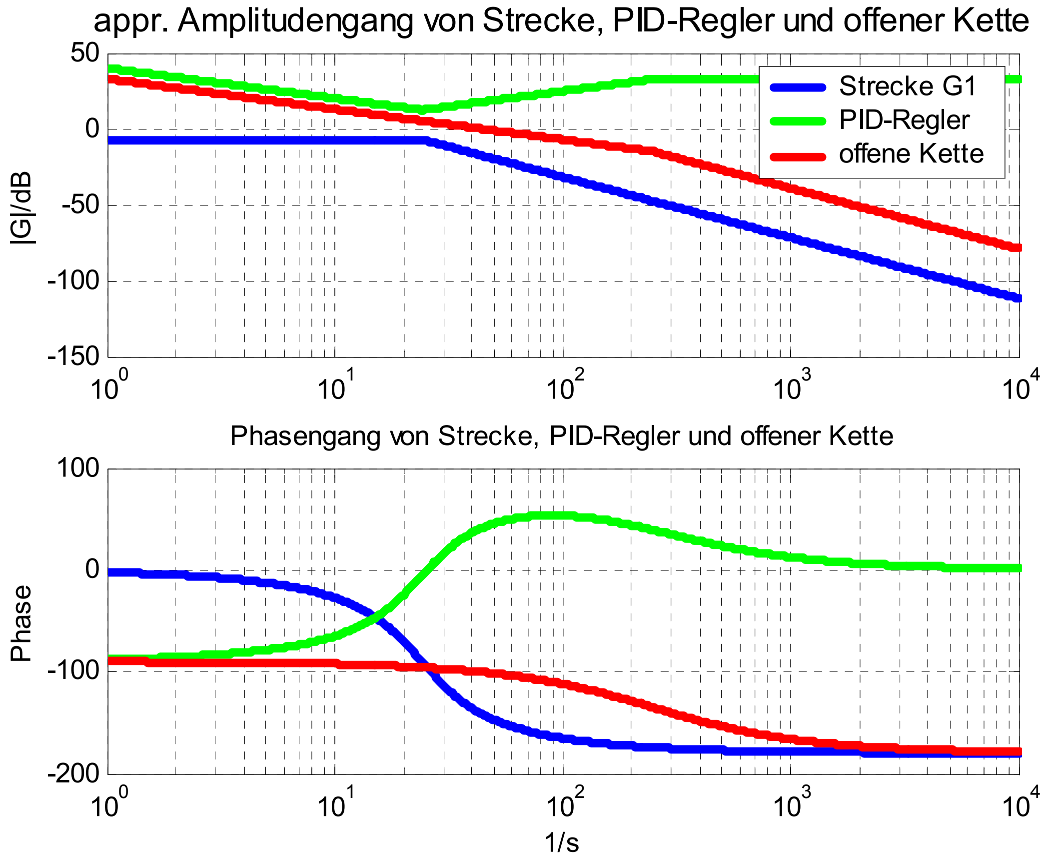




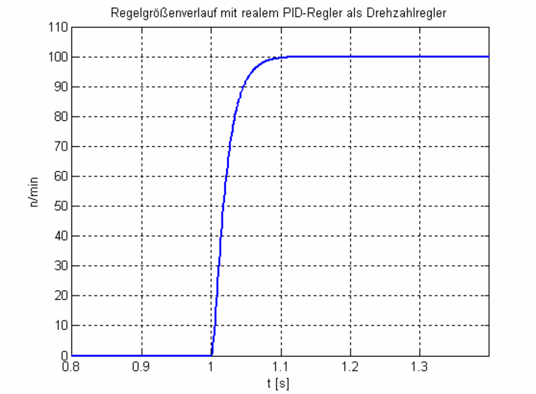
PID-Drehzahlregelung

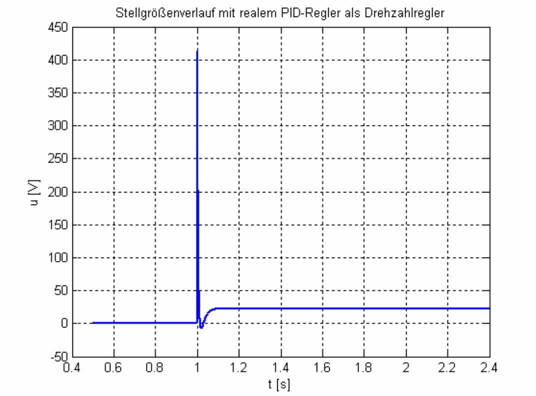
$$G_{S1}(s) = \frac{0.4406}{1+0.0427s+0.0017s^2} = \frac{K_{S1}}{1+2D_{S1}T_{0S1}s+T_{0S1}^2 s^2}$$ Schwingungsglied; $$G_{RH}(s)=K_{RH}\frac{1+2DT_0 s+T_0^2 s^2}{s(1+T_N s)}$$ realer PID-Regler

$T_{0S1} = 0{,}0413$ $\quad 1/T_{0S1} = 24{,}2$ $\quad D_{S1} = 0{,}5169$ $\quad T_N = 0.004s$ $\quad 1/T_N = 250$ $\quad K_{RH} = 100$

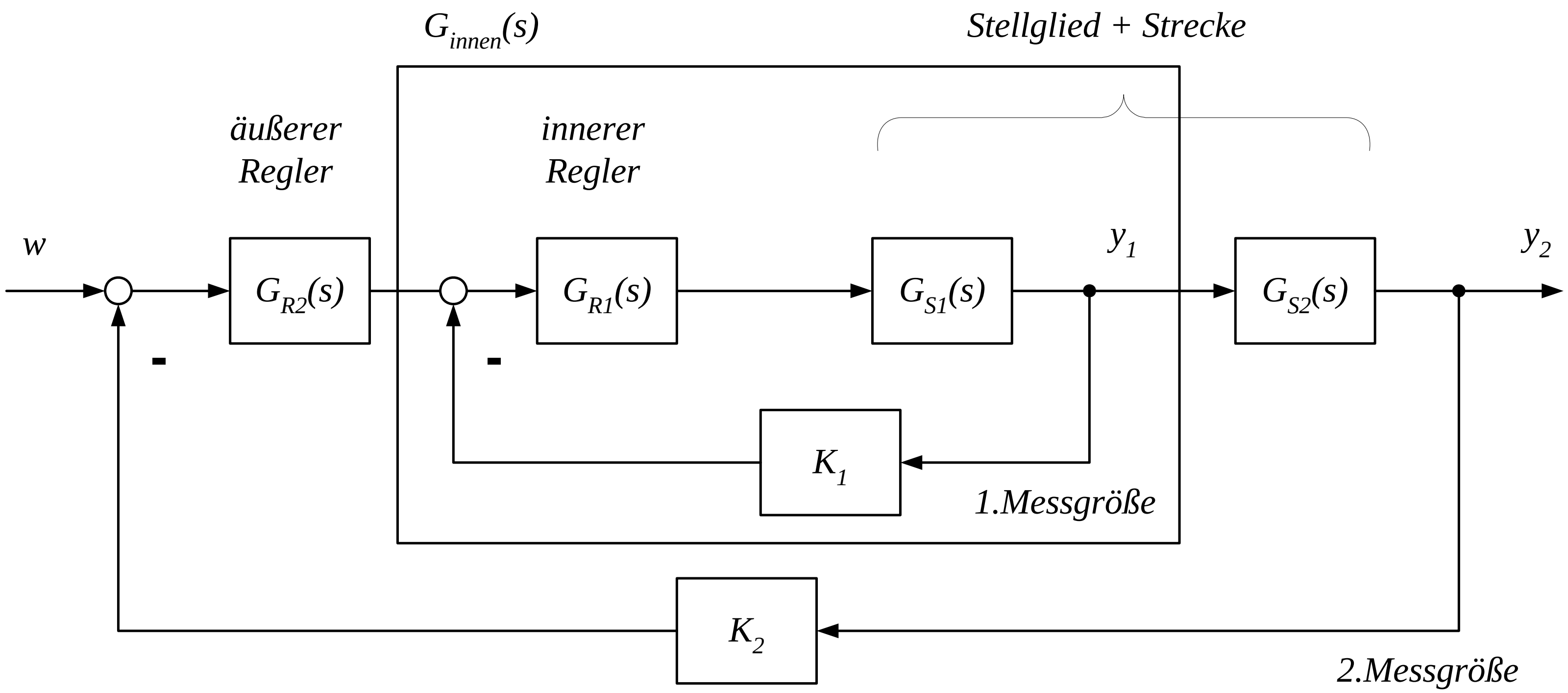


Phasenreserve=80,1^0





7.6 Struktur der Kaskadenregelung



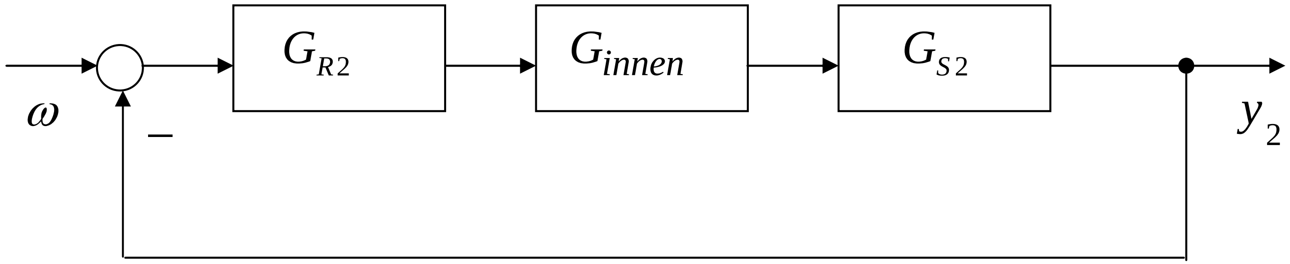
Strukturmaßnahme Kaskadenregelung

Einführung unterlagerter Regelkreise (innere Schleife)

Wirkung:
Man kann sukzessive Dynamik zunächst der inneren, dann der äußeren Schleife verbessern.
Vorteil:
Störgrößen, die in der inneren Schleife auftreten, können schon dort weitgehend ausgeregelt werden.

Vorgehen:
i) zuerst wie in Abschnitt 7.5 inneren Regelkreis dimensionieren
(Hinweis: stationäre Genauigkeit nicht unbedingt erforderlich, wenn im äußeren Kreis I-Glied)
ii) Zusammenfassung der geregelten inneren Schleife zu einem Übertragungsglied
$G_{innen}(s)$

neue Struktur:



iii) Dann: äußere Regelschleife, wie in 7.5 erläutert entwerfen

Zum Beispiel: Auslegung PID-Drehzahlregler

1.) Drehzahlreglerstrecke $y = n$ Drehzahl

$u = u_A$ Ankerspannung

hier. anderes *J* deshalb Werte der Übertragungsfunktion anders.

$$G_{s1}(s) = \frac{\overbrace{0{,}4406}^{K_1}}{1 + \underbrace{0{,}0427s}_{2d_1T_1} + \underbrace{0{,}0017s^2}_{T_1^2 \to T_{s1} = 0{,}0413}}$$

$$\to \qquad \frac{1}{T_1} \cong 24.21... \to d_1 = 0{,}517$$

Strecke hat kein I-Anteil: → PI, PID-Regler

2.) I-Anteil einfügen

3.) Kompensation der Streckenzeitkonstanten

hier: Kompensation eines komplexen Polpaars
Kompensation mit Zählerpolynom $1 + 0{,}0427s + 0{,}0017s^2$

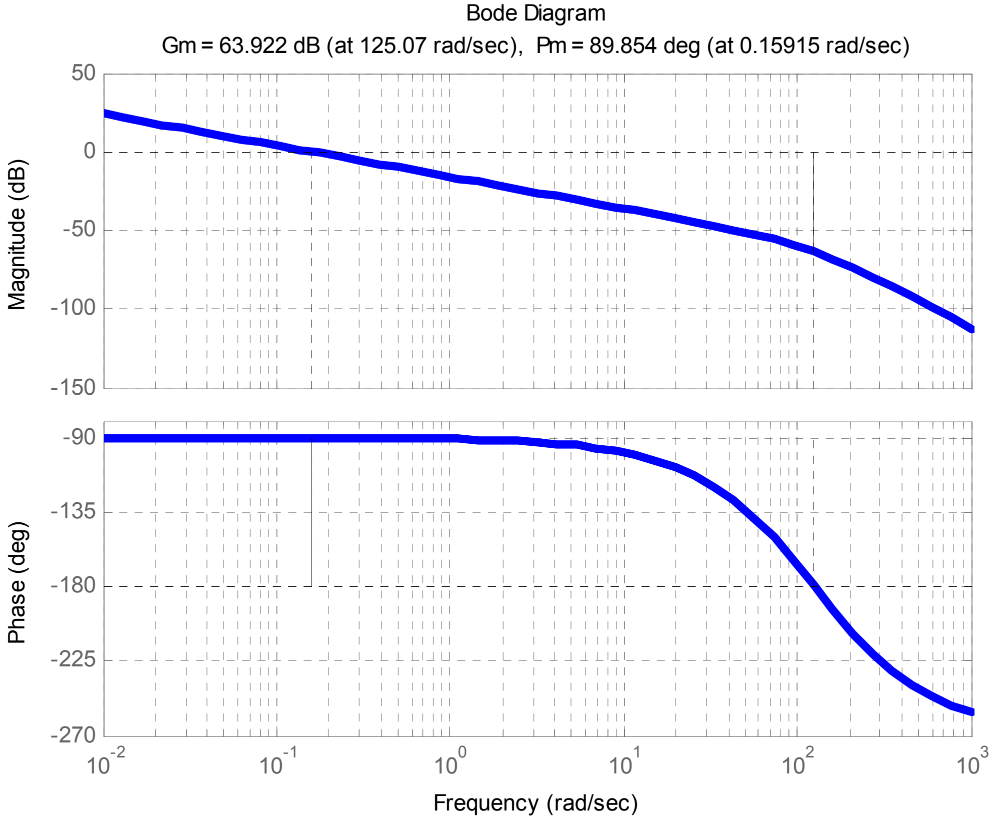
4.) $T_N : T_{s1} = 0{,}0413 \rightarrow T_N = 0{,}004$

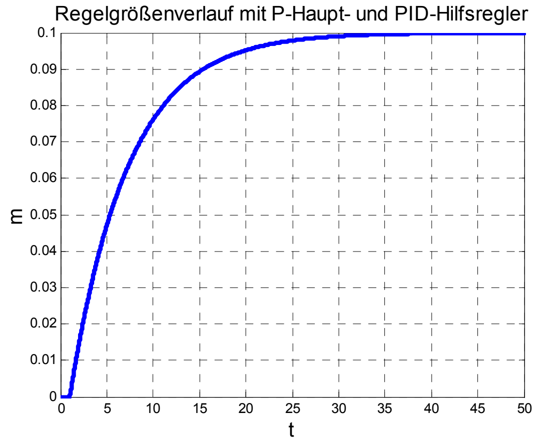
5.) Bodeplot

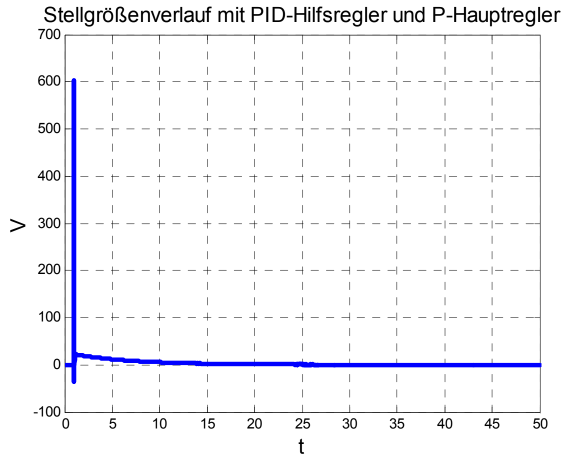
Kaskadenregelung-PID-Drehzahlregelung-P-Lageregelung

$$G_{S1}(s) = \frac{0.4406}{1+0.0427s+0.0017s^2} = \frac{K_{S1}}{1+2D_{S1}T_{0S1}s+T_{0S1}^{\ 2}s^2} \qquad G_{RH}(s) = K_{RH}\frac{1+2DT_0 s+T_0^{\ 2}s^2}{s(1+T_N s)}$$ realer PID-Regler $G_R(s) = K_R$ P-Regler

$T_{0S1} = 0{,}0413$ $1/T_{0S1} = 24{,}2$ $D_{S1} = 0{,}5169$ $T_N = 0.004s$ $1/T_N = 250$ $K_{RH} = 142$ $K_R = 100$





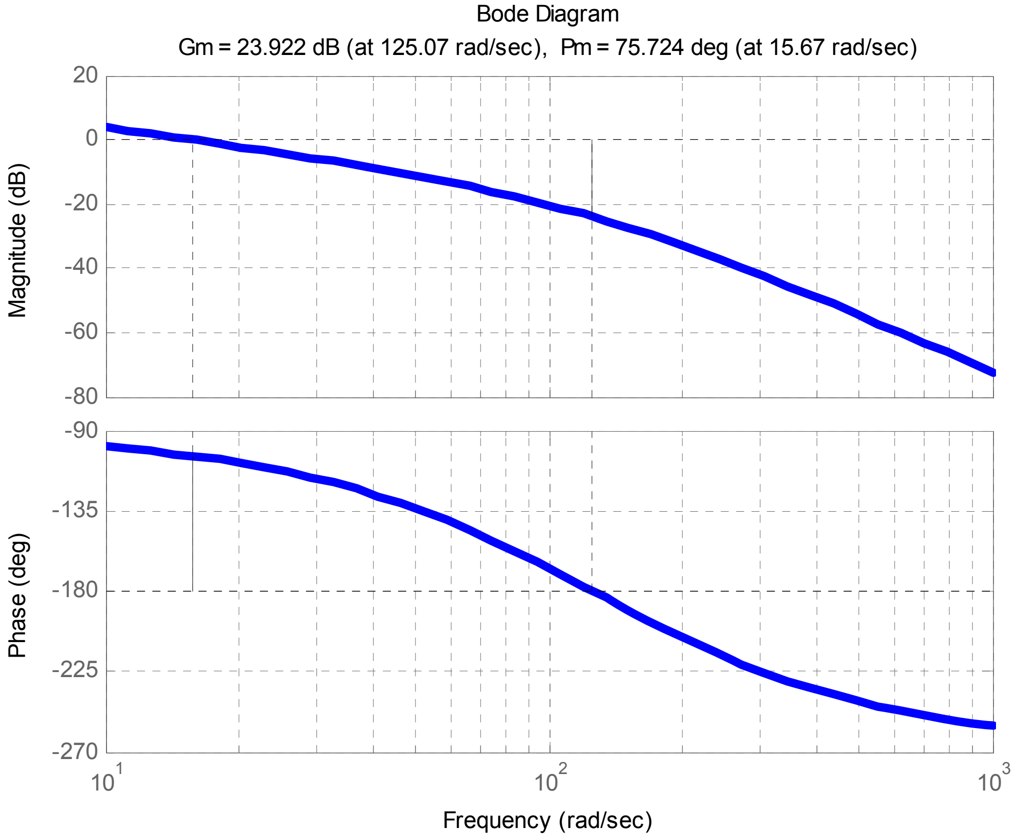


Phasenreserve = 89,8^0

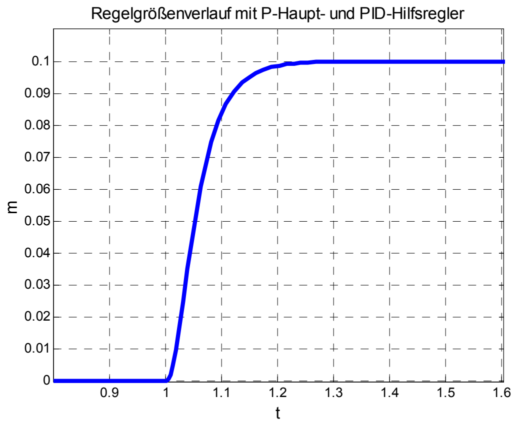
Kaskadenregelung-PID-Drehzahlregelung-P-Lageregelung

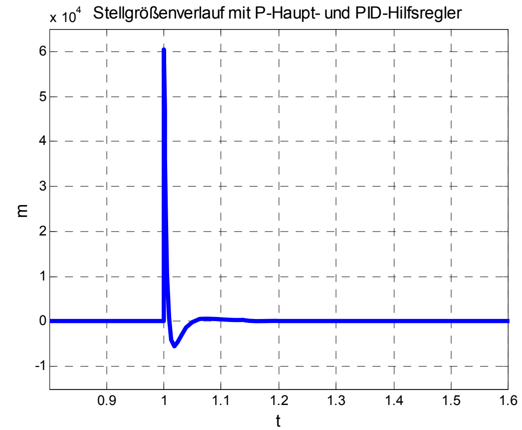
$$G_{S1}(s) = \frac{0.4406}{1+0.0427s+0.0017s^2} = \frac{K_{S1}}{1+2D_{S1}T_{0S1}s+T_{0S1}^{\;2}s^2} \qquad G_{RH}(s) = K_{RH}\frac{1+2DT_0s+T_0^{\;2}s^2}{s(1+T_Ns)}$$ realer PID-Regler $\quad G_R(s)=K_R\quad$ P-Regler

$$T_{0S1} = 0{,}0413 \qquad 1/T_{0S1} = 24{,}2 \qquad D_{S1} = 0{,}5169 \qquad T_N = 0.004s \qquad 1/T_N = 250$$



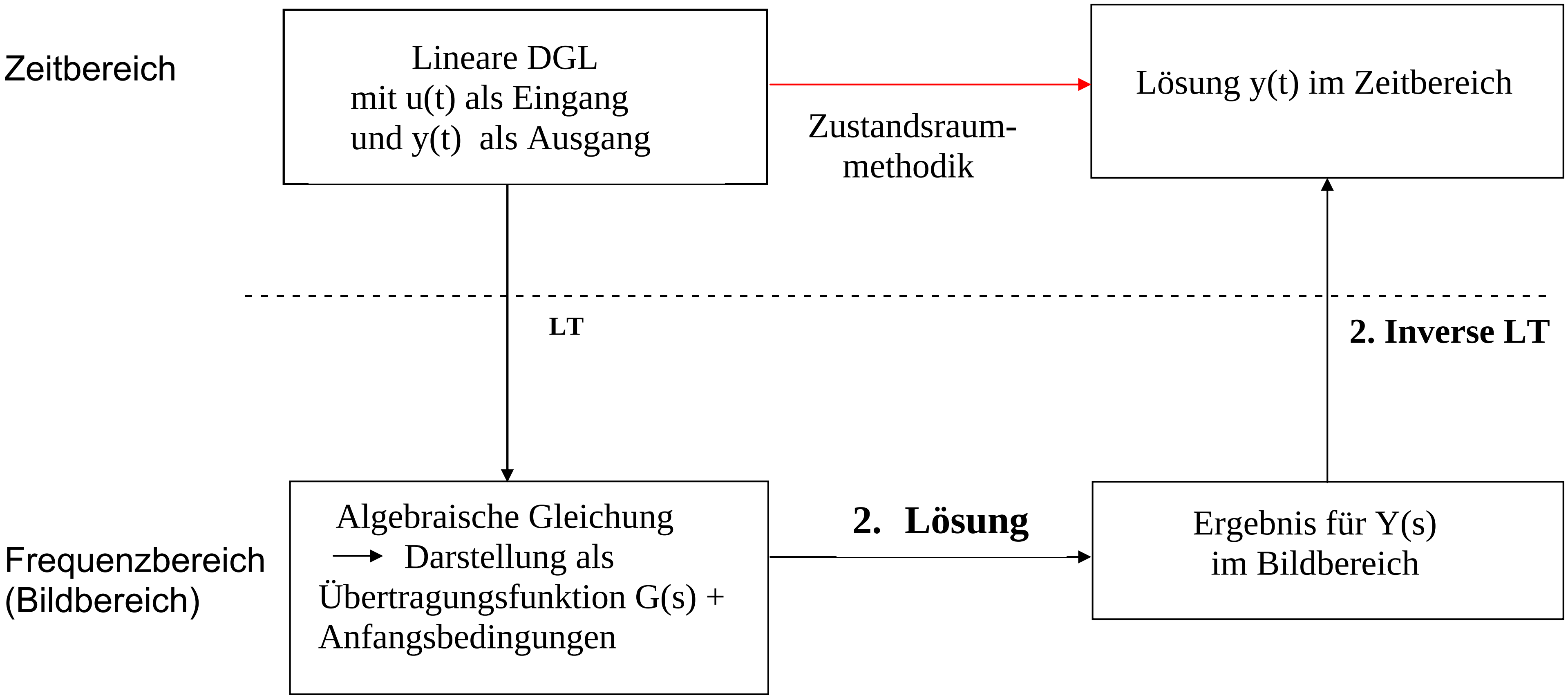
Phasenreserve = $75{,}7^0$





8. Zustandsraummethodik

Einordnung der Zustandsraummethodik



Zustandsraummethodik

Bisher: Problemstellung

- Rückführung der DGL n-ter Ordnung auf n DGLn 1.Ordnung
- Zusammenfassung zu DGL-System in Matrix-Vektor-Notation
- Entwicklung von standardisierten Lösungsverfahren

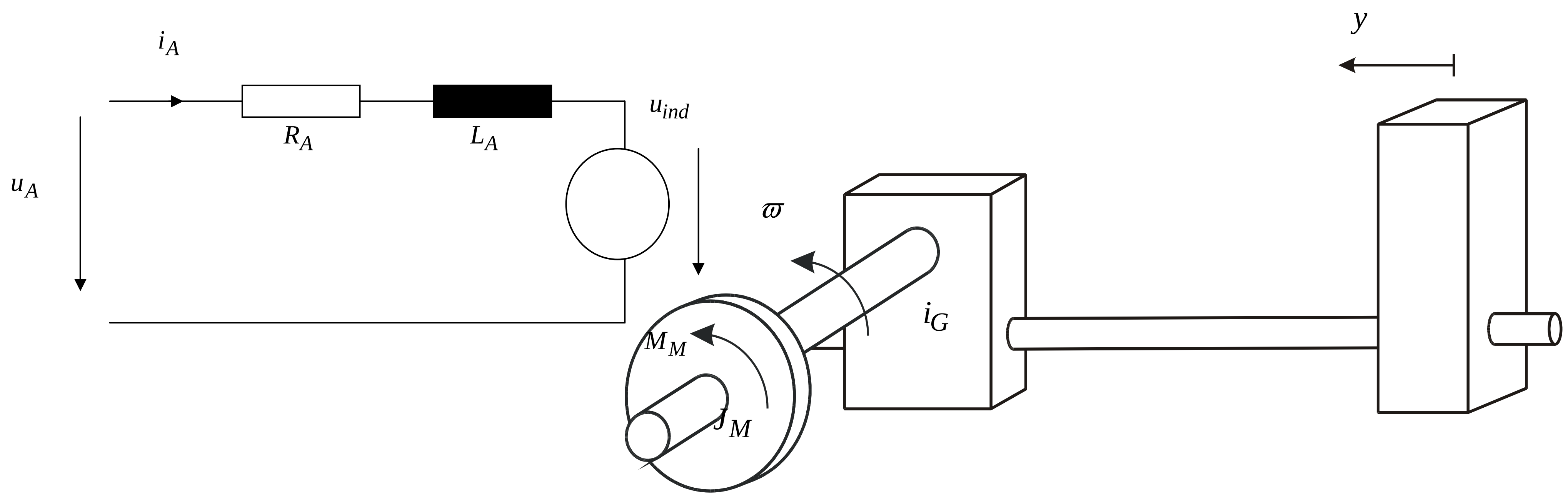
Vorteile:

- Anfangsbedingungen leichter zu berücksichtigen
- Rechnersimulation einfacher (wegen Zeitbereich)
- Systematische Systemanalyse
- Erweiterung auf zeitvariante und nichtlineare Systeme

Nachteile:

- Totzeitsysteme umständlich
- Zählerdynamik

8.1 Einführung des Zustandsbegriffs
Beispiel Positionierantrieb



$$R_A = 0.2\ \Omega \qquad L_A = 8\ mH$$
$$c \cdot \phi = 2.27\ Vs \qquad J_M = 1.1\ Ws^3$$
$$i_G = \frac{0.01m}{2 \cdot \pi} \qquad n_N = 1500\ \ 1/\min$$
$$P_N = 30\ kW \qquad u_{AN} = 400\ V$$
$$i_{AN} = 75\ A$$

$$u_A - u_{ind} = i_A R_A + L_A \dot{i}_A \qquad u_{ind} = c\phi w$$

$$M_M = i_A c\phi \qquad J\dot{w} = M_M - M_L$$

$$\dot{y} = i_G \cdot w$$

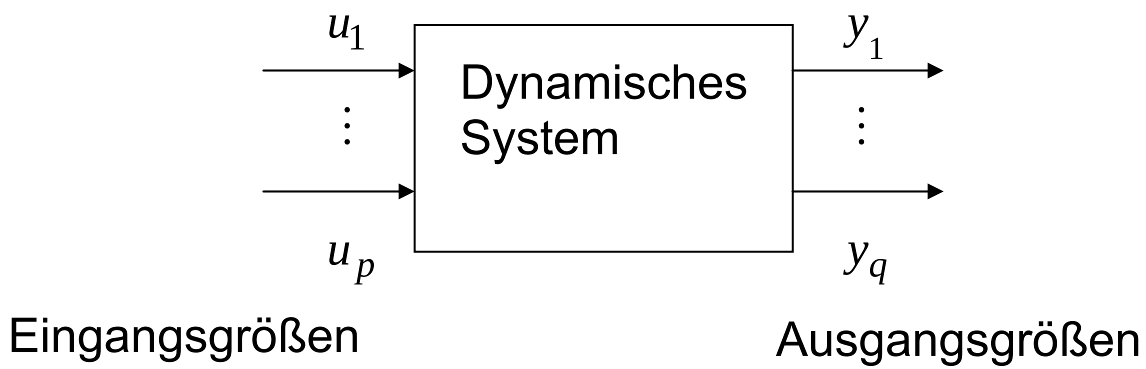
$$\dot{i}_A = -\frac{c\phi}{L_A} w - \frac{R_A}{L_A} i_A + \frac{1}{L_A} u_A \qquad \dot{w} = \frac{c\phi}{J} i_A - \frac{1}{J} M_L \qquad \dot{y} = i_G w$$

Eingangsgröße: u_A, M_L
Zwischengröße: i_A, w, y
Ausgangsgröße: y

Sind die Eingangsgrößen für $t > 0$ gegeben, so sind die Zwischengrößen i_A, ω, y eindeutig bestimmt für alle $t > 0$, sofern die Anfangswerte $i_A(0), \omega(0), y(0)$ bekannt sind.

Die Zwischengrößen i_A, ω, y heißen **Zustandsgrößen** des Systems.

Allgemeine Definition der Zustandsgrößen



Der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgangsgrößen des Systems wird durch die Zustandsgrößen $x_1 \ldots x_n(t)$ in der folgenden Weise beschrieben:

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_p, t\right) \qquad i = 1 \ldots n \qquad x_i(0) = x_{i,0}$$
$$y_k = g_k\left(x_1 \ldots x_n, u_1 \ldots u_p\right) \qquad \mathrm{k} = 1 \ldots q$$

Es gilt: Sind die Eingangsgrößen $u_1 \ldots u_p$ für $t > 0$ gegeben, so sind die Zustandsgrößen $x_1 \ldots x_n$ eindeutig bestimmt, sofern deren Anfangswerte $x_1(0) \ldots x_n(0)$ bekannt sind. Die Zustandsgrößen beschreiben die Gesamtheit des Systemzustands.

Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \underline{x} \qquad \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{pmatrix} = \underline{u} \qquad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{pmatrix} = \underline{y}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(\underline{x},\underline{u},t) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x},\underline{u},t) \end{pmatrix} = \underline{f} \qquad \begin{pmatrix} g_1(\underline{x},\underline{u}) \\ \vdots \\ g_q(\underline{x},\underline{u}) \end{pmatrix} = \underline{g}$$

Ableitung durch elementweise Differentiation:

Bsp.: $\dot{\underline{x}}(t) = \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$

Allgemein nichtlineare Zustandsraum-Darstellung

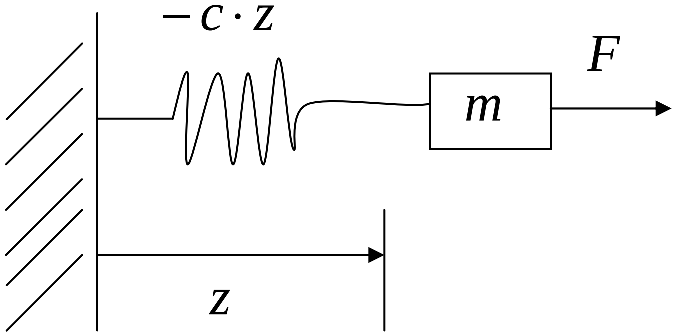
$$\left.\begin{array}{c} \dot{x}_1 = f_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n \end{array}\right\} \qquad \underline{\dot{x}} = \underline{f}\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right)$$

Zustandsgleichung

$$\left.\begin{array}{c} y_1 = g_1 \\ \vdots \\ y_q = g_q \end{array}\right\} \qquad \underline{y} = \underline{g}\left(\underline{x}, \underline{u}, t\right)$$

Ausgangsgleichung

Bsp. Feder-Masse-System:



$$m\ddot{z} = -cz + F$$

$$\ddot{z} = -\frac{c}{m} z + \frac{1}{m} F$$

Eingangsgröße *u=F*
Ausgangsgröße *y=z*

Definition der Zustandsgrößen: $x_1 = z; x_2 = \dot{z}$

Zustandsgleichung:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{1}{m} u$$

Ausgangsgleichung: $y = x_1$

AB: $x_1(0) = x_{10} \quad x_2(0) = x_{20} \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$

Vektorschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ -\frac{c}{m} x_1 + 0 \cdot x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \cdot u \\ \frac{1}{m} u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{c}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

System-matrix, Zustands-vektor, Eingangs-matrix, Eingangs-vektor

$$\underset{(n,1)}{\underline{\dot{x}}} = \underset{(n,n)}{\underline{A}} \; \underset{(n,1)}{\underline{x}} + \underset{(n,p)}{\underline{B}} \; \underset{(p,1)}{\underline{u}}$$

$$y = x_1 \rightarrow y = [1 \quad 0]\underline{x}$$

Ausgangsmatrix, Durchgangsmatrix (häufig gilt: $\underline{D} = \underline{0}$)

$$\underset{(q,1)}{\underline{y}} = \underset{(q,n)}{\underline{C}} \; \underset{(n,1)}{\underline{x}} + \underset{(q,p)}{\underline{D}} \; \underset{(p,1)}{\underline{u}}$$

Lineare zeitinvariante Zustandsraumdarstellung

Sonderfall: $q = p = 1$

dann u skalar $\underline{B}$ Vektor $(n,1)$

y „ $\underline{C}$ „ $(1,n)$

8.2 Aufstellen der Zustandsgleichung

i.) direkt aus physikalischen Gleichungen

Hinweis: mechanisches System 1FHG → 2 Zustände

Vorteil: Zustandsgrößen haben physikalische Bedeutung

ii.) aus komplexer Übertragungsfunktion

iii.) aus Strukturbild

zu i.) bereits kennengelernt

siehe Beispiel mit mechanischem Schwinger oder Elektromotor

Aufstellen der Zustandsgleichung aus komplexer Übertragungsfunktion

Geg.: $Y(s) = G(s)U(s)$ $\quad G(s)$ rational $\quad m \leq n$

Zählergrad $\leq$ Nennergrad

Fall I: Pole $\alpha_1 ... \alpha_n$ von $G(s)$ einfach

$$Y(s) = \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s-\alpha_i} + r_0\right] U(s) \rightarrow Y(s) = \sum_{i=1}^{m} r_i \underbrace{\frac{1}{s-\alpha_i} U(s)}_{\substack{\text{Definitiom de} \\ \text{Zustandsgrößen} \\ x_i(s)}} + r_0$$

Hinweis: für *m*=*n* ist $r_0 \neq 0$

Also: $X_i(s) = \dfrac{1}{s-\alpha_i} U(s)$

$$sX_i(s) - \alpha X_i(s) = U(s)$$

$$\Downarrow L^{-1}$$

$$\dot{x}_i = \alpha x_i + u \qquad i = 1...n$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \alpha_n x_n + u \end{aligned}\right\} \text{Zustandsgleichung}$$

außerdem: $Y(s) = \sum_{i=1}^{n} r_i X_i(s) + r_0 U(s)$

inverse L.T.

$$y(t) = \sum r_i x_i + r_0 u$$

Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \alpha_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Hinweis:
DGL
entkoppelt

$$\begin{aligned} \underline{\dot{x}} &= \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{u} \\ y &= [r_1 \ldots r_n]\,\underline{x} + r_0\,u \\ y &= \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,\underline{u} \end{aligned}$$

Fall II: mehrfach Pole
1 mehrfacher Pol mit Vielfachheit p_i, PBZ bei mehrfachen Polen

$$Y(s)=\left[\frac{r_{pi}}{s-\alpha_1}+\frac{r_{pi-1}}{(s-\alpha_1)^2}+\ldots+\frac{r_1}{(s-\alpha_1)^{p_i}}+\sum_{i=p_i+1}^{n}\frac{r_i}{s-\alpha_i}\right]u$$

Definition der Zustandsvariablen wie bisher: d.h. $\dot{x}_i = \alpha x_i + u$

$$X_i(s)=\frac{1}{s-\alpha_i}U(s) \qquad i = p_{i+1} \ldots n$$

Für mehrfachen Eigenwert:

$$X_1(s)=\frac{1}{(s-\alpha_1)^{p_i}}U = X_1 = \frac{1}{(s-\alpha_1)}\underbrace{\frac{1}{(s-\alpha_1)^{p_i-1}}U(s)}_{X_2}$$

$$X_2 = \frac{1}{(s-\alpha_1)^{p_i-1}}U$$

$$\ldots\ldots \; X_{p_i} = \frac{1}{s-\alpha_1}U$$

d.h. nach inverse Laplace-Transformation

$$\dot{x} = \alpha_1 x_1 + x_2$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_{pi-1} = \alpha_1 x_{pi-1} + x_{pi}$$
$$\dot{x}_{pi} = \alpha_1 x_{pi} + u$$

Vektordarstellung:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{p_{i-1}} \\ x_{p_i} \\ x_{p_{i+1}} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & & \underline{0} & & & \underline{0} \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \alpha_1 & & & \\ 0 & & & & \alpha_{p_i+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & \underline{0} & & & & & \alpha_n \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}$$

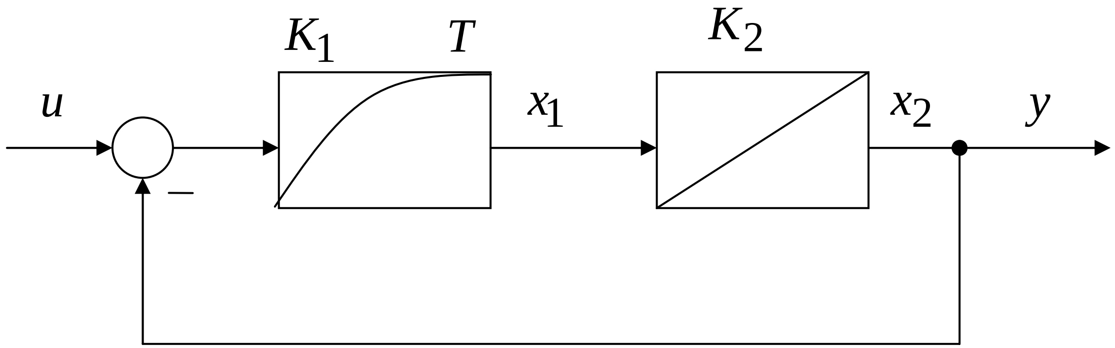
$$y = \lfloor r_1 \ldots r_{pi} \quad r_{pi+1} \ldots r_n \rfloor \underline{x}$$

Jordansche Normalform (DGLn sind entkoppelt)

Aufstellen der Zustandsgleichung am Strukturbild

Grundregel: Man führt die Ausgangsgrößen des I-Gliedes und der $\mathrm{PT_1-Glieder}$ als Zustandsgrößen ein, beim $\mathrm{PT_2-Glied}$ tritt zu der Zustandsgröße am Ausgang des $\mathrm{PT_2-Gliedes}$ noch eine weitere interne Zustandsgröße hinzu.

Bsp.:



$$X_1(s) = \frac{K_1}{1+Ts}\left(U(s) - X_2(s)\right)$$

AB für X_{20}, X_{10}

$$sX_2(s) = K_2 X_1(s)$$

$$\rightarrow \dot{x}_2(t) = K_2 x_1(t)$$

$(1+Ts)X_1 = K_1 u - K_1 X_2$ $\qquad T\dot{x}_1 = -x_1 - K_1 x_2 + K_1 u$ $\qquad \dot{y} = x_2$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{T}x_1 - \frac{K_1}{T}X_2 + \frac{K_1}{T}u$$

Zustandsdarstellung:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} & -\frac{K_1}{T} \\ K_2 & 0 \end{bmatrix}\underline{x} + \begin{bmatrix} \frac{K_1}{T} \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{x}$$

Hinweis: $\mathrm{PT}_2 - \mathrm{Glied}$:

$$Y(s) = \frac{1}{(T^2 s^2 + 2dTs + 1)} \cdot U(s)$$

2 Zustandsgrößen erforderlich $y = x_1 \qquad \dot{y} = x_2$

$$T^2\dot{x}_2 + 2dTx_2 + x_1 = u$$

$$T^2\dot{x}_2 = -2dTx_2 - x_1 + u$$

Daraus folgt:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{T^2} x_1 - \frac{2d}{T} x_2 + \frac{1}{T^2} u \qquad \text{für} \quad T \neq 0$$

Ergänzung: Enthält ein Strukturbild kompliziertere Blöcke als P, I, PT_2 , PT_1 so muss man diese zerlegen.

8.3 Lösung der Zustandsgleichung $\underline{\dot{\boldsymbol{x}}} = \underline{\boldsymbol{A}}\,\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{B}}\,\underline{\boldsymbol{u}}$

Ziel: Lösung der DGL für $\underline{x}(t)$ in Abhängigkeit von $\underline{u}(t)$ zu berechnen.

Ausgangspunkt:

$$e^{-\underline{A}t} \Big| \quad \underline{\dot{x}} = \underline{A}\cdot\underline{x} + \underline{B}\cdot\underline{u}$$

$$e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{\dot{x}} = e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{A}\cdot\underline{x} + e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}$$

$$e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{\dot{x}} - \underline{A}\cdot e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{x} = e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{x}\right) = e^{-\underline{A}t}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}$$

Kettenregel

Integration:

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\tau}\left(e^{-\underline{A}\tau}\cdot\underline{x}(\tau)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$e^{\underline{A}t} \Big| \quad e^{-\underline{A}t}\,\underline{x}(t) - e^{-\underline{A}t_0}\,\underline{x}(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\underline{A}\tau}\cdot\underline{B}\cdot\underline{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}\,(t-t_0)}\,\underline{x}(t_0)}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\int\limits_{t_0}^{t} e^{\underline{A}\,(t-\tau)} \cdot \underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\; d\tau}_{\text{durch } \underline{u}(t) \text{ determinierter Teil der Lösung}}$$

Allgemeine Lösung der Zustandsgleichung

Für $\underline{u} = \underline{0} : \underline{x}(t) = \underbrace{e^{\underline{A}\,(t)}}_{\text{Transitionsmatrix}} \underline{x}(0)$

Berechnung der Ausgangsgrößen $\underline{y}(t)$

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \cdot e^{\underline{A}\,(t)}\,\underline{x}(0) + \int\limits_{t_0}^{t} \underline{C} \cdot e^{\underline{A}(t-\tau)}\,\underline{B} \cdot \underline{u}(\tau)\; d\tau\,; \qquad \underline{D} = \underline{0}$$

Berechnung der Transitionsmatrix $e^{\underline{A}t}$ durch Ähnlichkeitstransformation

Ziel: Transformation der Systemmatrix $\underline{A}$, so dass neue Systemmatrix $\underline{\tilde{A}}$ Diagonalgestalt hat:

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \underline{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \underline{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Von $\underline{\tilde{A}}$ kann die Transitionsmatrix leicht berechnet werden.

i) Schritt: Transformation auf Diagonalform

Voraussetzungen: Eigenwerte λ_i einfach; homogenes System: $\underline{u} = 0$;
gesucht:

Transformation $\underline{x} = \underline{V}\,\underline{\tilde{x}}$, so dass $\underline{\dot{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}} \cdot \underline{u}$ mit $\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$;

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{V}^{-1}\,\underline{A}\,\underline{V}$$

$$\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \underline{A}\,\underline{V}$$

$\left[\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\right] = \underline{V}$ $\quad \underline{v}_i$: Spaltenvektoren der Dimension $(n,1)$

$$\underset{(n,n)}{\underline{A}}\;\underset{(n,n)}{\left[\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\right]} = \underset{(n,n)}{\left[\underline{A}\,\underline{v}_1,\underline{A}\,\underline{v}_2,\ldots,\underline{A}\,\underline{v}_n\right]}$$

$$\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \left[\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\right]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \underline{0}\\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n\end{bmatrix} = \left[\lambda_1\underline{v}_1,\ldots,\lambda_n\underline{v}_n\right]$$

aus $\underline{V}\,\underline{\tilde{A}} = \underline{A}\,\underline{V}$:

$$\left[\lambda_1\underline{v}_1,\ldots,\lambda_n\underline{v}_n\right] = \left[\underline{A}\,\underline{v}_1,\ldots,\underline{A}\,\underline{v}_n\right]$$

spaltenweise geschrieben:

$\underline{A}\,\underline{v}_i = \lambda_i\,\underline{v}_i;\quad i = 1\ldots n;$ oder: $(\lambda_i\,\underline{I} - \underline{A})\,\underline{v}_i = \underline{0}\,;\quad i = 1\ldots n;$
$\underline{v}_i$ nennt man Eigenvektoren (EV) von $\underline{A}$.
Damit hat man auch die Lösung für die gesuchte Transformationsmatrix $\underline{V}$.

ii) Berechnung der Transitionsmatrix $e^{\underline{A}t}$ durch Ähnlichkeitstransformation

Das System $\underline{\dot{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{u}; \quad \underline{y} = \underline{C} \cdot \underline{x} + \underline{D} \cdot \underline{u}$ kann dargestellt werden als

$$\underline{\dot{\tilde{x}}} = \underline{\tilde{A}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{\tilde{B}} \cdot \underline{u}; \quad \underline{y} = \underline{\tilde{C}} \cdot \underline{\tilde{x}} + \underline{D} \cdot \underline{u}$$

mit

$$\underline{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}; \qquad \underline{\tilde{B}} = \underline{V}^{-1} \underline{B}; \qquad \underline{\tilde{C}} = \underline{C}\, \underline{V};$$

wobei $\underline{V}$ Matrix der Eigenvektoren $\underline{v}_i$ und λ_i einfach.

IV) Schritt: Berechnung der Transitionsmatrix

$$\underline{A} = \underline{V}\, \underline{\tilde{A}}\, \underline{V}^{-1}$$

$$e^{\underline{A}t} = \sum_{l=0}^{\infty} \underline{A}^l \cdot \frac{t^l}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} (\underline{V}\, \underline{\tilde{A}}\, \underline{V}^{-1})^l \cdot \frac{t^l}{l!}$$

dabei: $$(\underline{V}\, \underline{\tilde{A}}\, \underline{V}^{-1})^l = \underbrace{\underline{V}\, \underline{\tilde{A}}\, \overbrace{\underline{V}^{-1} \cdot \underline{V}}^{=\mathrm{I}}\, \underline{\tilde{A}}\, \underline{V}^{-1} \cdots \underline{V}\, \underline{\tilde{A}}\, \underline{V}^{-1}}_{\text{l-mal}} = \underline{V}\, \underline{\tilde{A}}^l\, \underline{V}^{-1}$$

$$\rightarrow \quad e^{\underline{A}t} = \underline{V} \cdot \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{\infty} \underline{\tilde{A}}^{l} \cdot \frac{t^{l}}{l!} \right)}_{e^{\underline{\tilde{A}}t}} \cdot \underline{V}^{-1}$$

$e^{\underline{\tilde{A}}t}$ einfach zu berechnen, weil:

$$e^{\underline{\tilde{A}}t} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}^{l} \cdot \frac{t^{l}}{l!} = \sum_{l=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \lambda_1^{l} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \lambda_n^{l} \end{bmatrix} \cdot \frac{t^{l}}{l!} = \begin{bmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_1^{l} \cdot \frac{t^{l}}{l!} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_n^{l} \cdot \frac{t^{l}}{l!} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\underline{\tilde{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad e^{\underline{A}t} = \underline{V} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \cdot \underline{V}^{-1}$$

mit λ_i Eigenwerte von $\underline{A}$, $\underline{v}_i$ Eigenvektoren von $\underline{A}$; $\quad \underline{V} = [\underline{v}_1 \ldots \underline{v}_n]$.
Eigenwerte λ_i einfach;

8.4 Stabilitäts- und Zeitverhalten im Zustandsraum

Definition: **a) asymptotische Stabilität**

System $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}; \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{D}\underline{u}$ (mit konstanten Matrizen $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$) heißt *asymptotisch stabil*, wenn für $\underline{u}(t) = 0$ (homogene Zustandsgleichung) und nach Anfangsauslenkung für beliebigen Anfangszustand $\underline{x}_0$

$\lim\limits_{t \to \infty} \underline{x}(t) = 0$ ist.

b) Instabilität

System heißt *instabil*, wenn $\left|\underline{x}(t)\right|$, für eine beliebig kleine Anfangsauslenkung für wachsendes *t*, über alle Grenzen wächst.

$$\left\|\underline{x}(t)\right\| \to \infty \quad \text{für} \quad t \to \infty$$

c) Grenzstabilität (Stabilität)

System heißt *grenzstabil* (stabil), wenn $\left|\underline{x}(t)\right|$ nach einer endlichen Anfangsauslenkung $\underline{x}_0$ mit wachsendem *t* stets beschränkt bleibt.

$$\left\|\underline{x}(t)\right\| \le \left\|\underline{x}_{grenz}\right\| < \infty \quad \text{für} \quad \forall t > 0$$

Wie können Stabilität und Zeitverhalten geprüft werden?

Lösung der homogenen Gleichung:

$$\underline{x}(t) = e^{\underline{A}(t)}\,\underline{x}(0)$$

Ähnlichkeitstransformation:

$$\underline{x}(t) = \underline{V} \cdot e^{\underline{\tilde{A}}(t)} \cdot \underline{V}^{-1}$$

Interpretation der Stabilität anhand der Fundamentalmatrix

$$e^{\underline{\tilde{A}}(t)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t)} & & \underline{0} \\ & \ddots & \\ \underline{0} & & e^{\lambda_n(t)} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|e^{\lambda_i(t)}\right| = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \operatorname{Re}\lambda_i < 0 \\ 1 & \text{für} \quad \operatorname{Re}\lambda_i \le 0 \\ \infty & \text{für} \quad \operatorname{Re}\lambda_i > 0 \end{cases}$$

$\underline{x}(t)$ strebt dann gegen $\underline{0}$, wenn alle $\lambda_i < 0$

Was ist bei Vielfachheit von Polstellen?
Jordan Gestalt von $\underline{A}$

Mehrfach Eigenwert

Untermatrix: $e^{\underline{C}_i \cdot t} = e^{\lambda_i \cdot t} \cdot e^{\underline{J} \cdot t}$

$$e^{\underline{J}t} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)} t^{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ \underline{0} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left|t^k e^{\lambda_i t}\right| = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \\ 1 & \text{für} \quad \mathrm{Re}(\lambda_i) = 0, k = 0 \\ \infty & \text{für} \quad \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \\ \infty & \text{für} \quad \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \end{cases}$$

(t_n steigt stets schwächer als $e^{\lambda t}$)
→ obige Bedingung auch bei mehrfachem Eigenwert gültig.

Wichtige Eigenschaft: Eigenwerte λ entsprechen den Polen s_k, sofern in der komplexen Übertragungsfunktion nicht gekürzt wurde (wird im folgenden angenommen)

Folgerung Pole und Stabilitätsverhalten

- **asymptotische Stabilität** liegt vor, wenn alle Eigenwert von $\underline{A}$

  $\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$ haben.

- **Grenzstabilität** liegt vor, wenn mindestens ein Eigenwert von $\underline{A}$ einen

  $\mathrm{Re}\{s_k\} = 0$ hat, wobei dieser Eigenwert nicht mehrfach auftreten darf (d.h. die Imaginärteile unterschiedlich sind) und alle anderen $\mathrm{Re}\{s_k\} < 0$ haben.

- **Instabilität** liegt vor, wenn mindestens ein Eigenwert von $\underline{A}$

  $\mathrm{Re}\{s_k\} > 0$ oder ein mehrfacher EW mit $\mathrm{Re}\{s_k\} = 0$ vorliegt.

Querverbindung zur komplexen Übertragungsfunktion:

Zustandsdarstellung (hier *p=q=1*):

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \qquad y = Cx$$

↓ Laplace-Transformation

$$s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \underline{A} \cdot \underline{X}(s) + \underline{B} \cdot U(s) \qquad Y(s) = \underline{C} \cdot \underline{X}(s)$$

$$\left(s\underline{I} - \underline{A}\right)\underline{X}(s) = \underline{x}(0) + \underline{B}\underline{U}(s)$$

$$\underline{X}(s) = \left(s\underline{I} - \underline{A}\right)^{-1} \underbrace{\underline{x}(0)}_{\substack{\text{L.T. } \underline{x}(0)=\underline{0} \\ \text{o. B. d. A.}}} + \left(s\underline{I} - \underline{A}\right)^{-1} \underline{B} \cdot U(s)$$

$$\underline{X}(s) = \left(s\underline{I} - \underline{A}\right)^{-1} \cdot \underline{B} \cdot U(s)$$

Durch Multiplikation mit C ergibt sich:

$$Y(s) = \underbrace{\underline{C} \cdot \left(s\underline{I} - \underline{A}\right)^{-1} \underline{B}}_{G(s)} U(s)$$

Was steht im Nenner?

$$\left(s\underline{I}-\underline{A}\right)^{-1}=\frac{1}{det\left(s\underline{I}-\underline{A}\right)}\cdot adj\left(s\underline{I}-\underline{A}\right)$$

charakteristische Gleichung der DGL

$\Longrightarrow$ d.h.: Nenner der komplexen Übertragungsfunktion entspricht Eigenwert-Gleichung der Zustandsdarstellung (d.h. charakteristisches Polynom)

Anmerkungen zur Eigenwertlage und Zeitverhalten

$\underline{x}(t)$ bestimmt durch $\underline{V}e^{\tilde{A}_i t}\underline{V}^{-1}$; monotone (a-periodische, überdämpfte) Anteile

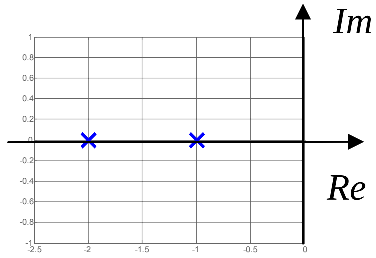
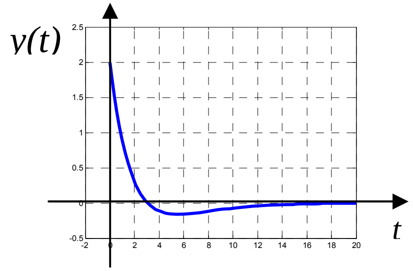
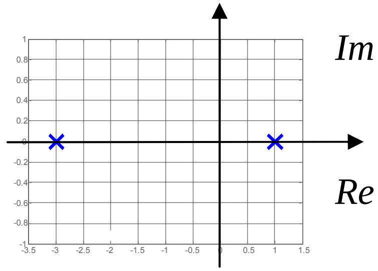
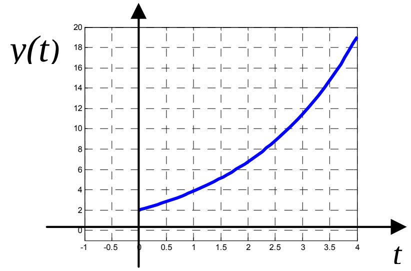
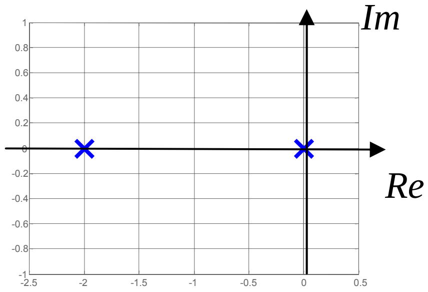
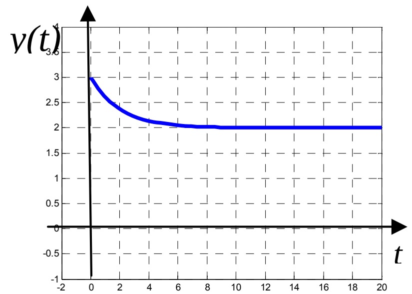
λ_i komplex (konjugiert komplexe Zahl auch Eigenwert!)

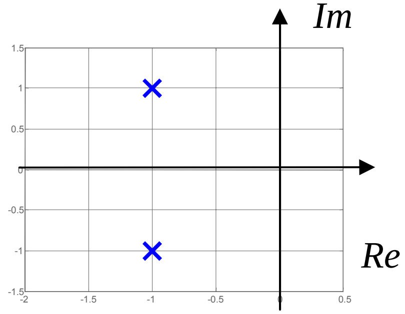
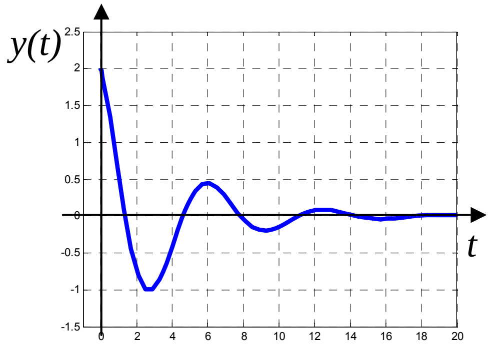
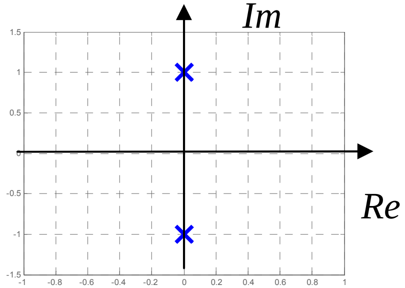
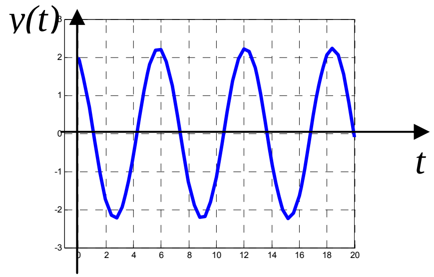
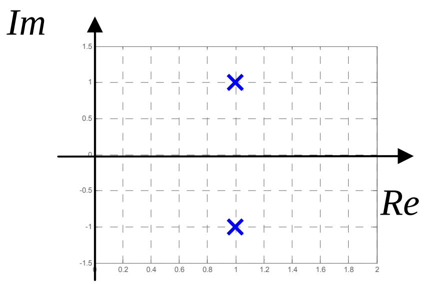
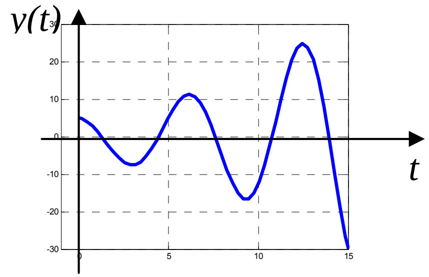
$\underline{x}(t)$ hat Anteile $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konst. (von } \underline{x}(t_0)\, abh.)}}{c_0} \cdot e^{\mathrm{Re}(\lambda)\cdot t}\cdot\sin\left(\mathrm{Im}(\lambda)\cdot t+\underset{\substack{\uparrow \\ v,\,\underline{x}(t_0)\, abh.}}{\varphi}\right)$

oszillatorischer Zeitvorgang

- Je weiter links von der j-Achse ein Eigenwert, umso schneller klingt der zugehörige Zeitvorgang ab.

EW-Konfiguration und Zeitverhalten (qualitativ)

PN-Bild		Zeitverhalten
	EW auf reeller Achse $Re\{s_k\}<0$	
	ein EW mit $Re\{s_k\}>0$	
	ein EW mit $Re\{s_k\}=0$	

	konj. komplexes EW-Paar ***asymptotisch stabil***	
	konj. komplexes EW-Paar ***grenzstabil***	
	konj. komplexes EW-Paar ***instabil***	

Beispiel zur Berechnung der Transitionsmatrix:

GM-Antrieb $R = 0,2\Omega$; L=0,008H; $c\phi = 2.27$ Vs; $J_M = 10$ Ws^3 $i = \frac{0,001}{2\pi}$ m

Ausgangspunkt:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_A \\ \dot{w} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_A}{L_A} & -\frac{c\phi}{L_A} & 0 \\ \frac{c\varphi}{J_M} & 0 & 0 \\ 0 & i_G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_A \\ w \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} L_A$$

$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}$ in Zahlenwerten $\begin{bmatrix} -25 & -283,75 & 0 \\ 0,227 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00159 & 0 \end{bmatrix} = \underline{A}$

1.) Eigenwertbestimmung:

$$\det\left(s\underline{I} - \underline{A}\right) = 0 \qquad \begin{bmatrix} 125 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{B}$$

$$\begin{vmatrix} s+\frac{R_A}{L_A} & \frac{c\phi}{L_A} & 0 \\ -\frac{c\phi}{J_M} & s & 0 \\ 0 & -i_G & s \end{vmatrix} = s\left(s\left(s+\frac{R_A}{L_A}\right)+\frac{c^2\phi^2}{L_A J_M}\right) = s\left(s^2+\frac{R_A}{L_A}s+\frac{c^2\phi^2}{L_A J_M}\right) \overset{!}{=} 0$$

vgl. Übertragungsfunktion

$$s_1 = 0 \qquad s_{2/3} = \frac{-\frac{R_A}{L_A} \pm \sqrt{\left(\frac{R_A}{L_A}\right)^2 - 4\frac{c^2\phi^2}{L_A J_M}}}{2\cdot 1}$$

Mit Zahlwerten:

$$\frac{R_A}{L_A} = 25 \qquad \frac{c^2\phi^2}{L_A I_M} = 64{,}41$$

$$s_{2/3} = \frac{25 \pm \overbrace{\sqrt{625 - 4 \cdot 64,41}}^{19,166}}{2} \qquad s_2 = -2,9167 \qquad s_3 = -22,0833$$

Jetzt Eigenwert berechnen:

$$\left(s_i \underline{I} - \underline{A}\right)\underline{v}_i = 0$$

System grenzstabil, aber nicht asymptotisch stabil

1.Eigenwert: *s=0*

$$\begin{bmatrix} 25 & 283,75 & 0 \\ -0,227 & 0 & 0 \\ 0 & -0,00159 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_{11} \\ \upsilon_{12} \\ \upsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$25\upsilon_{11} = -283,75\upsilon_{12}$$

wähle $\upsilon_{13} = 1$

$$-0,227 \cdot \upsilon_{11} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \upsilon_{11} = 0$$

$$-0,00159\upsilon_{12} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \upsilon_{12} = 0$$

$$\underline{\upsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Eigenwert $S_{21} = -2{,}9167$

$$|s_i I - A|\underline{\upsilon}_2 = \begin{vmatrix} 22{,}0833 & 283{,}75 & 0 \\ -0{,}227 & -2{,}9167 & 0 \\ 0 & -0{,}00159 & -2{,}9167 \end{vmatrix} \underline{\upsilon}_2 = \underline{0}$$

$22{,}08\upsilon_{21} = -283{,}75\upsilon_{22} \quad \rightarrow$ wähle $\upsilon_{21} = 1$

$\upsilon_{22} = -0{,}0778$

3. Eigenwert: $s_3 = -22{,}0833$

$$|s_3 \underline{I} - \underline{A}|\underline{\upsilon}_3 = \begin{vmatrix} 2{,}9167 & 283{,}78 & 0 \\ -0{,}227 & -22{,}0833 & 0 \\ 0 & -0{,}00159 & -22{,}0833 \end{vmatrix} \underline{\upsilon}_3 = 0$$

$\upsilon_{31} = \dfrac{283{,}75}{2{,}9167} \quad \upsilon_{32}$ wähle: $\upsilon_{32} = 1$ $\quad \upsilon_{31} = 97{,}2846$

$$\frac{-0{,}00159}{22{,}0833} = \upsilon_{33} \qquad \upsilon_{33} = -7{,}2 \cdot 10^{-5}$$

$$\underline{V} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 97{,}2846 \\ 0 & -0{,}0778 & 1 \\ 1 & 4{,}24 \cdot 10^{5} & -7{,}2 \cdot 10^{5} \end{vmatrix}$$

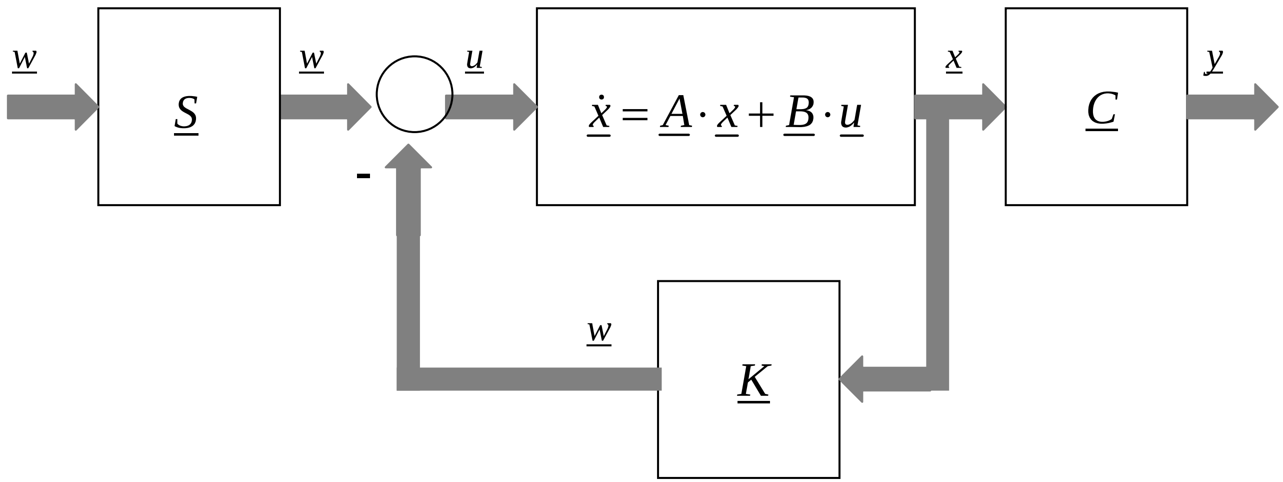
$$\underline{V}^{-1} = \begin{vmatrix} -4{,}29 \cdot 10^{-6} & 4{,}89 \cdot 10^{-4} & 1 \\ 0{,}1167 & -11{,}35 & 0 \\ 0{,}0091 & 0{,}1167 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e^{\underline{A}t} = \underline{V} \begin{vmatrix} e^{\overbrace{0 \cdot t}^{1}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2{,}91 \cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-22{,}08t} \end{vmatrix} \underline{V}^{-1} =$$

$$
= \begin{bmatrix} 0{,}1167e^{-2{,}91t} + 0{,}883e^{-22{,}08t} & -11{,}35e^{-2{,}9t} + 11{,}35e^{-22{,}08t} & 0 \\ -0{,}009e^{-2{,}91t} + 0{,}009e^{-22{,}08t} & 0{,}88e^{-2{,}91t} + 0{,}1167e^{\cdot -22{,}08t} & 0 \\ 0{,}49 \cdot 10^{-5} e^{-2{,}91t} + 0{,}65 \cdot 10^{-6} e^{-22{,}08t} & -0{,}00047 - 0{,}00048e^{-2{,}91t} + 0{,}84 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-22{,}08t} & 1 \end{bmatrix}
$$

8.5 Reglerentwurf im Zustandsraum
Struktur des Zustandsreglers

Struktur einer Zustandsregelung:



Einführung einer Rückführung:

$$\underline{u}_{rück} = -\underline{K}\cdot\underline{x}$$

$\uparrow$

Verstärkungsmatrix des Reglers

$\underline{u}$ hat *p* Komponenten $\rightarrow$ $\underline{u}_{rück}$ hat *p* Komponenten

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} u_{1rück} &= -k_{11}x_1 - k_{12}x_2 \ldots - k_{1n}x_n \\ &\vdots \\ u_{prück} &= -k_{p1}x_1 - k_{p2}x_2 \ldots - k_{pn}x_n \end{aligned}$$

Einführung einer Vorsteuerung:

Vektor der Führungsgrößen $\underline{w}$ (*q* Komponenten wie $\underline{y}$)

$$\underset{(p,1)}{\underline{u}_{vorst}} = \underset{(\mathrm{p,q})}{\underline{S}} \cdot \underset{(q,1)}{\underline{w}}$$

häufig *p*=*q*

Beschreibung der Zustandsregelung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} \qquad \underline{u} = \underbrace{-\underline{K}\,\underline{x}}_{\underline{u}_{rück}} + \underbrace{\underline{S}\,\underline{w}}_{\underline{u}_{vorst}}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\,\underline{x}$$

Einsetzen liefert: $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\left(-\underline{K}\,\underline{x} + \underline{S}\,\underline{w}\right)$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \left(A - BK\right)\underline{x} + \underline{B}\underline{S}\underline{w} \\ \underline{y} &= \underline{C}\,\underline{x} \end{aligned}}$$

Jetzt Forderungen erfüllen:

a) Stabilität
b) Stationäre Genauigkeit
c) Hohe Dynamik
d) Hinreichende Dämpfung

Kriterien zur Bestimmung von $\underline{S}$, $\underline{K}$

Reglerentwurf durch Polvorgabe

Grundgedanke:

Da die Eigenwerte das dynamische Verhalten eines Systems weitgehend bestimmen, schreibt man die Eigenwerte $s_{R1}...s_{Rn}$ des geschlossenen Kreises vor und bestimmt die Rückführmatrix $\underline{K}$ entsprechend.
Da die Eigenwerte auch Systempole genannt werden, spricht man von Polvorgabe

Wahl der Pole (EW) $s_{R1}...s_{Rn}$:

- wegen a) alle Pole in der linken Halbebene
- wegen c) und d):
  - Man verschiebt erst die dominanten Pole der Strecke, das heißt für die Dynamik ausschlaggebende Pole der Strecke.
  - Man verschiebt die Streckenpole nach links um die Dynamik zu verbessern, aber nicht zu weit, damit keine zu hohen Stellausschläge auftreten.

Nun seien die Eigenwerte $s_{R1}...s_{Rn}$ gewählt. Wie $\underline{K}$ berechnen ?

Die Eigenwerte (Pole) der Regelung entsprechen den Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

Zur Erinnerung:

Zustandsgleichung des geregelten Systems: $\underline{\dot{x}} = \left(A - BK\right)\underline{x} + \underline{B}\underline{S}\underline{w}$

Durch Zustandsrückführung „neue“ Systemmatrix für geregeltes System: $\left(A - BK\right)$

Daher ist neue charakteristische Gleichung mit Rückführung:

$$\det\left[s\underline{I} - \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{K}\right)\right] = 0$$

Nun soll charakteristische Gleichung des geregelten Systems die gewünschten Nullstellen $s_{R1} \ldots s_{Rn}$ haben.

Daher muss gelten: $\det\left[s\underline{I} - \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{K}\right)\right] \overset{!}{=} \left(s - s_{R1}\right)\left(s - s_{R2}\right)\ldots\left(s - s_{Rn}\right)$

Ausmultiplizieren:

$$s^n + a_{n-1}\left(\underline{K}\right)\lambda^{n-1} + \ldots + a_0\left(\underline{K}\right) \overset{!}{=} s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \underbrace{p}_{\substack{p_i \text{ bekannt} \\ \text{durch } s_{Ri}}}$$

$\Downarrow$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} a_0\left(\underline{K}\right) &= p_0 \\ a_1\left(\underline{K}\right) &= p_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1}\left(\underline{K}\right) &= p_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

n Gleichungen für die $p \cdot n$ gesuchten Elemente k_{ij} von $\underline{K}$: Synthesegleichung

Wann nach $\underline{K}$ auflösbar?

Dazu bildet man die Matrix $\underline{Q}_s = \left[\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \underline{A}^2\underline{B}, \ldots \underline{A}^{n-1}B\right]$ n Zeilen

(n, p) (n, p) (n, p)….(n,p)

$\rightarrow p \cdot n$ Spalten

Synthesegleichung genau dann lösbar, wenn $\underline{Q}_s$ den Höchstrang n hat.

Die Strecke heißt dann **steuerbar**.

Entwurf der Vorsteuerung

Entwurf von $\underline{S}$ so, dass $\underline{y}$ gegen $\underline{w}$ strebt für $t \to \infty$ (stationäre Genauigkeit)

Annahme: $\underline{K}$ bereits berechnet; Führungsgröße sei $\underline{w}(t) = \underline{w}_0 \sigma(t)$; *q=p*

Es gilt: $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$; $\underline{u} = -\underline{K}\underline{x} + \underline{S}\underline{w}$; $\underline{y} = \underline{C}\underline{x}$

$\underline{\dot{x}} = \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{K}\right)\underline{x} + \underline{B} \cdot \underline{S}\underline{w}$; Zustandsgleichung des geregelten Systems
$\underline{y} = \underline{C}\underline{x}$

Für $t \to \infty$ liegt ein stationärer Zustand vor wenn $\to \underline{\dot{x}} = 0$

Dann wird aus Zustandsgleichung des geregelten Systems für $\underline{w}(t) = \underline{w}_0 \sigma(t)$:
(Index s kennzeichnet den stationären Zustand)

$$\underline{0} = \left(\underline{A} - \underline{B}\underline{K}\right)\underline{x}_s + \underline{B} \cdot \underline{S}\underline{w}_0$$

$$\underline{y}_s = \underline{C}\underline{x}_s$$

$$\left(\underline{B}\underline{K} - \underline{A}\right)\underline{x}_s = \underline{B} \cdot \underline{S}\underline{w}_0$$

$$\underline{x}_s = \left(\underline{B}\underline{R} - \underline{A}\right)^{-1}\underline{B} \cdot \underline{S}\underline{w}_0$$

$$\underline{y}_s = \underline{C}\left(\underline{B}\underline{R} - \underline{A}\right)^{-1}\underline{B} \cdot \underline{S}\underline{w}_0 \overset{!}{=} \underbrace{\underline{I}}_{\substack{\textit{stationäre}\\ \textit{Genauigkeit}}} \underline{w}_0$$

d.h. :

$$\underline{C}\left(\underline{B}\underline{K} - \underline{A}\right)^{-1}\underline{B} \cdot \underline{S} = \underline{I}$$

$$\underbrace{(q,n) \qquad (\mathrm{n,n}) \qquad (\mathrm{n,p})}_{(q,p)}$$

wegen $q=p$ Bildung der Inversen möglich → $\underline{S} = \left[\underline{C}\left(\underline{B}\underline{R} - \underline{A}\right)^{-1}\underline{B}\right]^{-1}$

damit Forderung der stationären Genauigkeit erfüllt. (mit $\underline{S}$ strebt $\underline{y}(t) \to \underline{w}$)

Bsp.: Gleichstrommotor (J=1.1; andere Werte wie vorher)

$$\underline{B}\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{L_A} & \frac{k_2}{L_A} & \frac{k_3}{L_A} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{B}\underline{K}) = \begin{vmatrix} s + \frac{R_A}{L_A} + \frac{k_1}{L_A} & \frac{c\phi}{L_A} + \frac{k_2}{L_A} & \frac{k_3}{L_A} \\ -\frac{c\phi}{J_M} & s & 0 \\ 0 & -i_G & s \end{vmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$s^3 + \left(\frac{R_A}{L_A} + \frac{k_1}{L_A}\right)s^2 + \frac{c\phi}{J_M}\left(\frac{c\phi}{L_A} + \frac{k_2}{L_A}\right)s + \frac{k_3}{L_A}\frac{c\phi i_G}{J_M} = (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\frac{k_3}{L_A}\frac{c\phi i_G}{J_M} = -s_1 s_2 s_3 \qquad \frac{c\phi}{J_M}\left(\frac{c\phi}{L_A} + \frac{k_2}{L_A}\right) = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 \qquad \frac{R_A}{L_A} + \frac{k_1}{L_A} = -s_1 - s_2 - s_3$$

$$k_3 = -s_1 s_2 s_3 \frac{J_M L_A}{c\phi i_G} \qquad k_2 = \frac{J_M L_A}{c\phi}(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) - c\phi \qquad k_1 = L_A\left(-s_1 - s_2 - s_3 - \frac{R_A}{L_A}\right)$$

Jetzt Zahlenwerte:

Vorgabe von s_1, s_2, s_3

i) dominante Pole verschieben: $s_1 = 0 \text{ nach } s_1 = -2.5$

ii) Schwingungsneigung eliminieren: $s_{2/3} = -12.5 \pm j20.72 \text{ nach } s_2 = -20; s_3 = -30$

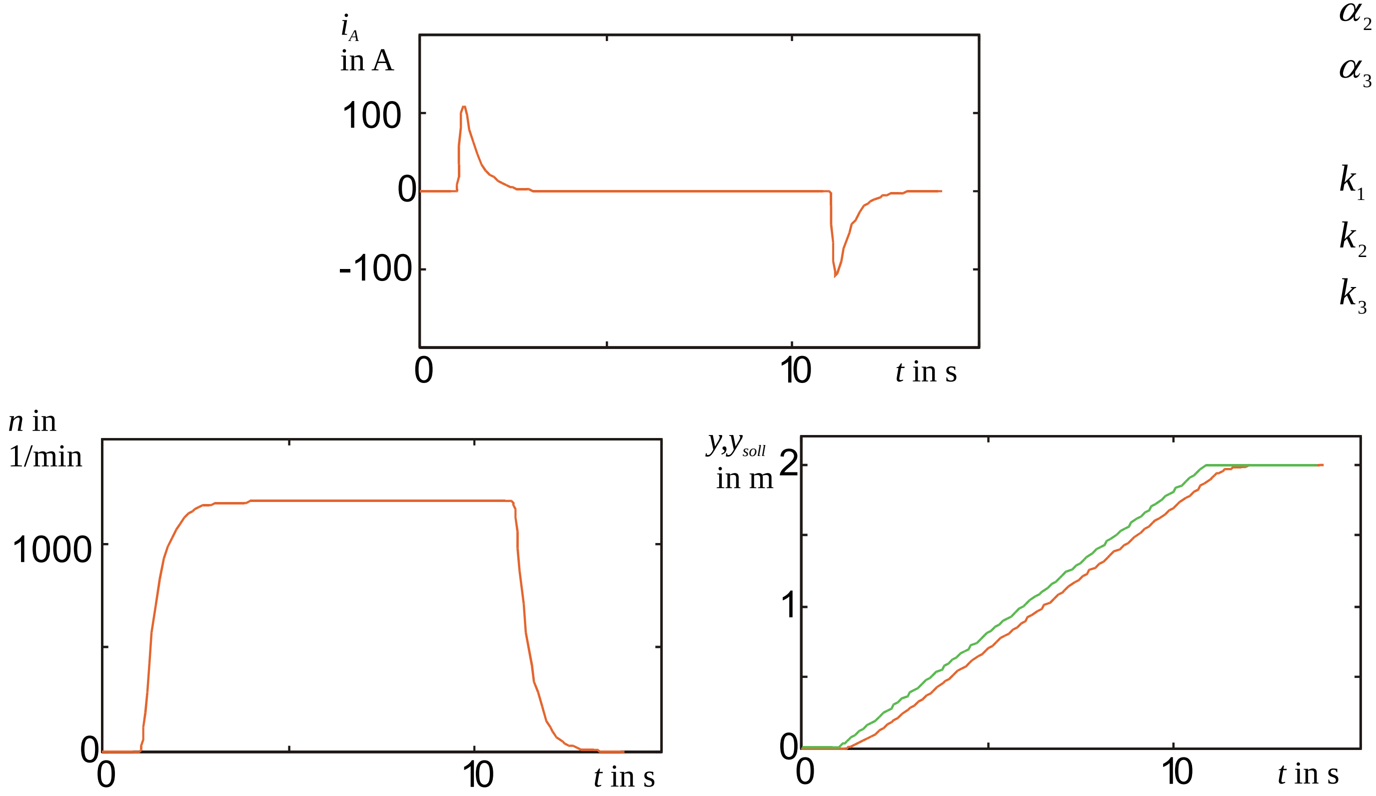
Damit Vorgabepolynom:

$s^3 + 52.5s^2 + 725s + 1500 = 0$ $\qquad$ $k_1 = 0.22; k_2 = 0.5406; k_3 = 3653;$

Vorsteuerung: $\underline{S} = (\underline{C}(\underline{B}\underline{K} - \underline{A})^{-1}\underline{B})^{-1} = 3653$

Beispiel Zustandsregelung

Simulation GM-Antrieb mit Zustandsregelung:



$\alpha_1 = -\ 2{,}5$

$\alpha_2 = -30$

$\alpha_3 = -20$

$k_1 = 0{,}22$

$k_2 = 0{,}5406$

$k_3 = 3653$

8.6 Zustandsbeobachter

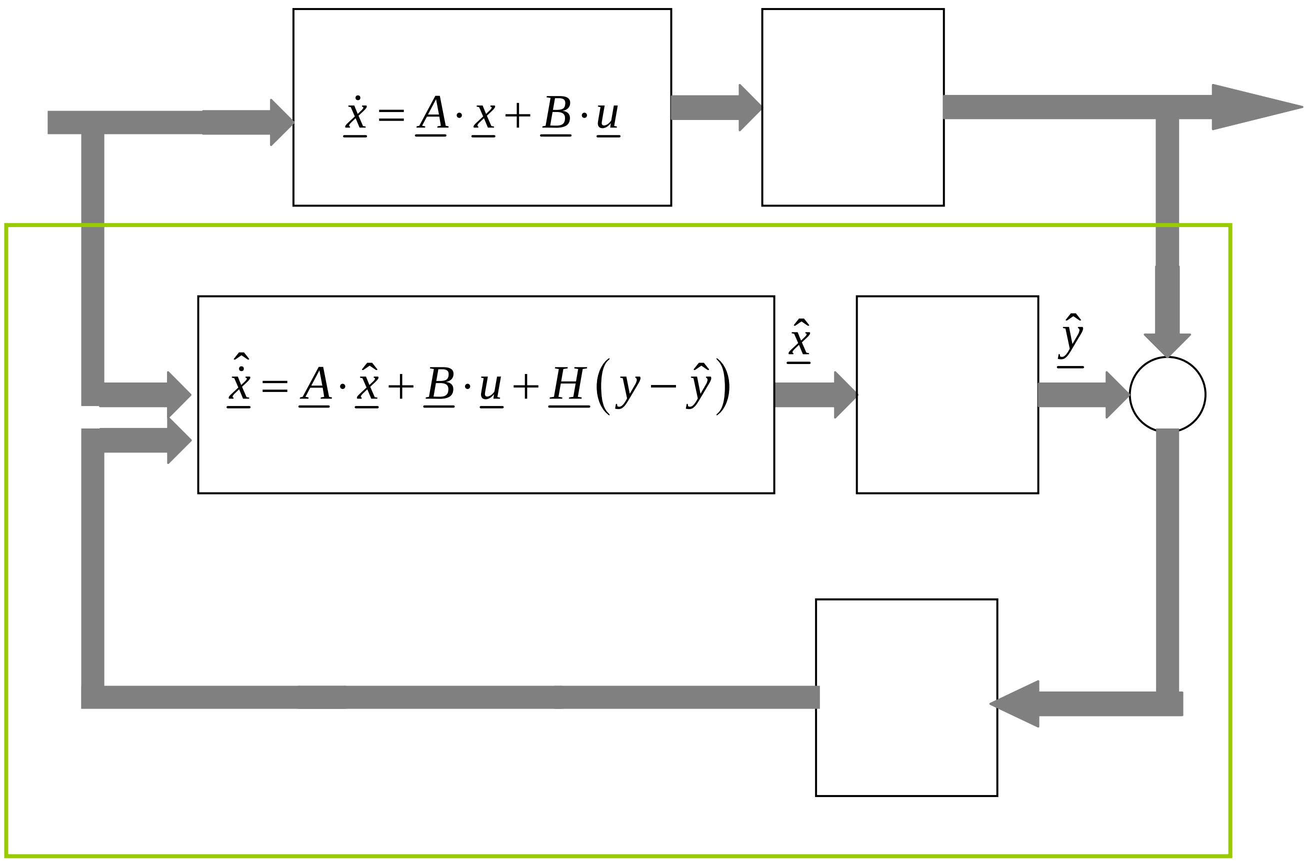
Problemstellung:
Zur Realisierung des Regelungsgesetzes $\underline{u}=-\underline{K}\,\underline{x}$ wird vollständige Zustandsinformation benötigt. Diese ist häufig nicht verfügbar.

Fragestellung:
Wie kann man aus dem Ausgangsvektor (der hier alle Messwerte umfasst) den Zustandsvektor rekonstruieren.

Lösung:
Man schaltet parallel zur realen Strecke ein Modell der Strecke (Schätzer) und vergleicht die gemessene Ausgangsgröße mit der geschätzten Ausgangsgröße. Die sich daraus ergebende Korrekturgröße wird zu Korrektur der geschätzten Zustandsverläufe verwendet.

Die Beobachterverstärkungsmatrix H ist dabei so zu wählen, dass der Schätzfehler $\underline{e}(t)=\underline{x}(t)-\hat{\underline{x}}(t)$ für $t\rightarrow\infty$ gegen $\underline{0}$ geht, also asymptotisch stabil ist.

Struktur des Zustandsbeobachters nach Luenberger:



Gleichung des Beobachters mit Schätzer und Korrektor (geschätzter Zustand):

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{A}\hat{\underline{x}} + \underline{B}\cdot\underline{u} + \underline{H}(\underline{y} - \hat{\underline{y}}); \quad \hat{\underline{y}} = \underline{C}\hat{\underline{x}}$$

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = (\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C})\hat{\underline{x}} + \underline{B}\cdot\underline{u} + \underline{H}\,\underline{y}$$

$\underline{H}$ so wählen, dass Schätzfehler asymptotisch stabil ist.

Hierzu bildet man die Schätzfehler-DGL:

$$\dot{\underline{e}}(t) = \dot{\underline{x}} - \dot{\hat{\underline{x}}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} - \left[(\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C})\hat{\underline{x}} + \underline{B}\cdot\underline{u} + \underline{H}\,\underline{y}\right]$$

mit

$$\hat{\underline{y}} = \underline{C}\hat{\underline{x}}$$

$$\underline{y} = \underline{C}\underline{x}$$

$$\dot{\underline{e}}(t) = \underline{A}(\underline{x} - \hat{\underline{x}}) + \underline{H}\,\underline{C}(\underline{x} - \hat{\underline{x}})$$

$$\dot{\underline{e}}(t) = (\underline{A} - \underline{H}\,\underline{C})\underline{e}(t)$$

Schätzfehler ist genau dann asymptotisch stabil, wenn Pole (Eigenwerte) von $(\underline{A}-\underline{H}\underline{C})$ in der linken Halbebene sind.

Vorgehen für Entwurf des Beobachters wie beim Polvorgaberegler:
Man gibt die Pole (Eigenwerte) $s_{B1}...s_{Bn}$ des Beobachters vor und bestimmt anhand der charakteristischen Gleichung des Beobachters die Matrix $\underline{H}$.

Charakteristische Gleichung des Zustandsbeobachters:

$$\det\left[s\underline{I}-\left(\underline{A}-\underline{H}\underline{C}\right)\right]=0$$

Nun soll charakteristische Gleichung des geregelten Systems die gewünschten Nullstellen $s_{B1}...s_{Bn}$ haben.

Daher muss gelten: $\det\left[s\underline{I}-\left(\underline{A}-\underline{H}\underline{C}\right)\right]\overset{!}{=}\left(s-s_{B1}\right)\left(s-s_{B2}\right)...\left(s-s_{Bn}\right)$ s_{Bi} gegeben.

Ausmultiplizieren ergibt:

$$s^n + a_{n-1}\left(\underline{H}\right)s^{n-1} + \ldots + a_0\left(\underline{H}\right) \overset{!}{=} s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \underbrace{p}_{\substack{p_i \text{ bekannt} \\ \text{durch } s_{Ri}}}$$

$$\Downarrow$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\left.\begin{aligned} a_0\left(\underline{H}\right) &= p_0 \\ a_1\left(\underline{H}\right) &= p_1 \\ &\vdots \\ a_{n-1}\left(\underline{H}\right) &= p_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

n Gleichungen für die $p \cdot n$ gesuchten Elemente h_{ij} von $\underline{H}$: Synthesegleichung

Wann nach $\underline{H}$ auflösbar?

Dazu bildet man die Matrix
$$\underline{Q}_B = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\,\underline{A} \\ \underline{C}\,\underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{C}\,\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \qquad qn \text{ Zeilen}$$

n Spalten

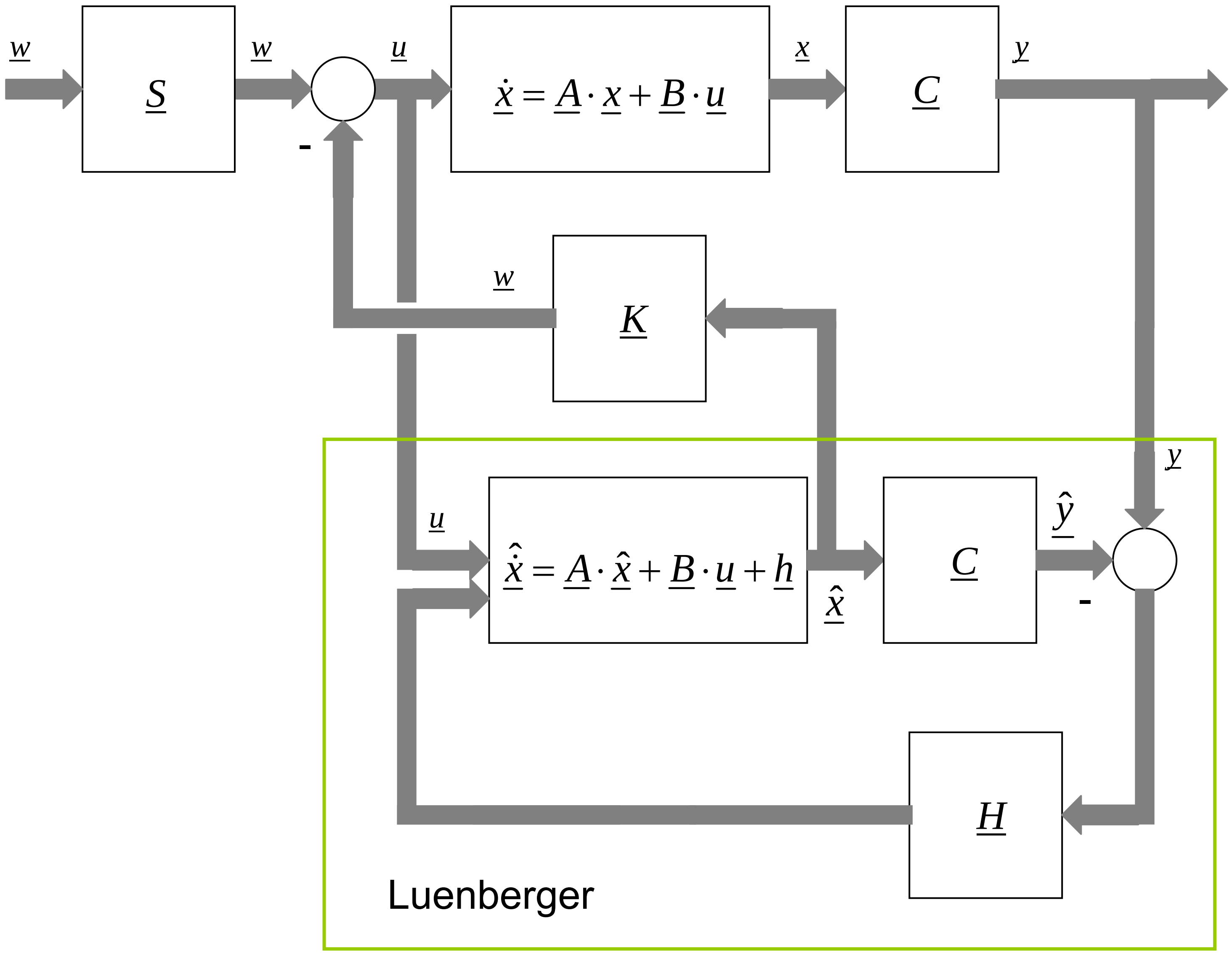
Synthesegleichung genau dann lösbar, wenn $\underline{Q}_B$ den Höchstrang *n* hat.
Die Strecke heißt dann **beobachtbar**.

Situation:

Man möchte eine Zustandsregelung entwerfen. Es stehen jedoch nicht alle Komponenten des Zustandsvektors als Meßgrößen zur Verfügung. Deshalb rekonstruiert man die fehlenden Komponenten des Zustandsvektors (oder alle) aus dem Meßvektor (Ausgangsvektor) über einen Luenberger-Beobachter.

Separationstheorem:

Durch die Einführung eines Luenberger-Beobachters in den Regelkreis werden die Pole (Eigenwerte) der Regelung nachträglich nicht verschoben. D.h. es kann der Beobachter und der Zustandsregler unabhängig voneinander entworfen werden. Es kommen lediglich die Eigenwerte des Beobachters zu denen der Regelung hinzu.



Resultierende Struktur aus Regelung und Beobachter

Bsp.: Gleichstrommotor (J=1.1; andere Werte wie vorher)

$$\underline{H}\,\underline{C} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \qquad \det(s\underline{I} - \underline{A} + \underline{H}\,\underline{C}) = \begin{vmatrix} s + \frac{R_A}{L_A} & \frac{c\phi}{L_A} & h_1 \\ -\frac{c\phi}{J_M} & s & h_2 \\ 0 & -i_G & s + h_3 \end{vmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$s^3 + (\frac{R_A}{L_A} + h_3)s^2 + (\frac{(c\phi)^2}{J_M L_A} + h_2 i_G + \frac{R_A h_3}{L_A})s + \frac{i_G h_2 R_A}{L_A} + \frac{c\phi i_G}{J_M} h_1 + \frac{(c\phi)^2}{J_M L_A} h_3 = (s - s_{B1})(s - s_{B2})(s - s_{B3})$$

Aus Koeffizientenvergleich ergeben sich die Verstärkungen für $\underline{H}$.