

Markus Neher

Anschauliche Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2

Mehrdimensionale Analysis,
Differenzialgleichungen:
Ein graphisch orientierter Zugang



Springer Vieweg

Anschauliche Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2

Markus Neher

Anschauliche Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2

Mehrdimensionale Analysis,
Differenzialgleichungen:
Ein graphisch orientierter Zugang



Springer Vieweg

Markus Neher
Karlsruher Institut für Technologie
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-658-19421-5

ISBN 978-3-658-19422-2 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-19422-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Nachdem im ersten Band dieser Abhandlung der Höheren Mathematik das Fundament gelegt wurde, setzt der zweite Band den ersten thematisch fort. Er enthält die Differenzial- und Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher, die Vektoranalysis sowie einen Teil über gewöhnliche Differenzialgleichungen, in dem ein Ausblick auf partielle Differenzialgleichungen enthalten ist. Zu allen Themengebieten werden auch numerische Methoden besprochen.

Wiederum stützt sich unsere Präsentation auf Definitionen, Sätze, Beweise und Beispiele, um stets anzuzeigen, welche Annahmen getroffen werden (Definition), welche Folgerungen sich daraus ergeben (Satz) und wie man durch logisches Schließen zu diesen Folgerungen gelangt (Beweis). Zuletzt wird das aktive Anwenden der Sätze in Beispielrechnungen verdeutlicht.

Großer Wert wird auf die Motivation der Konzepte und die Verständlichkeit der Darstellung gelegt. Der Anteil dessen, was streng bewiesen wird, ist kleiner als im ersten Band. Häufig würden die Beweise entweder über den behandelten Stoff hinausgehen oder sie wären zu aufwändig, um für Studierende in ingenieur- und naturwissenschaftlichen Studiengängen noch interessant zu sein. Wo immer dies praktikabel ist, werden die wesentlichen Beweisideen jedoch skizziert. Die Zahlenbeispiele sind vollständig durchgerechnet und in Einzelschritten ausgeführt. Jedes Beispiel eignet sich als Übungsaufgabe, wenn man nach der Aufgabenstellung selbst rechnet, bevor man die Lösung nachliest.

Wie im ersten Band sind Graphiken eines unserer Hauptwerkzeuge zur Wissensvermittlung. Funktionen mehrerer Veränderlicher sind begrifflich schwierig. Die Graphiken veranschaulichen die Verhältnisse im \mathbb{R}^3 . Wer diese verstanden hat, wird mit der Übertragung auf höhere Dimensionen keine Schwierigkeiten haben. Dank gebührt wiederum Till Tantau für die Entwicklung der Graphikpakete PGF und TikZ sowie Christian Feuerhäuser für das Graphikpaket pgfplots. Speziell pgfplots hat sich bei der Erstellung der 3D-Graphiken als unverzichtbar erwiesen.

Auch dieser Band ist mit vielfältiger Unterstützung durch Kollegen entstanden. Für wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge danke ich insbesondere Dr. Volker Grimm. Ebenso danke ich meinem ehemaligen akademischen Lehrer Prof. Dr. Götz Alefeld, dessen Sicht auf die Ingenieurmathematik für mich prägend war. Ein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Marlis Hochbruck, die mir in ihrer Arbeitsgruppe die Freiheit gab, dieses Buch zu konzipieren und zu verwirklichen. Dem Springer-Verlag danke ich, dass er das

Werk zur Veröffentlichung angenommen hat, und der Cheflektorin Ulrike Schmickler-Hirzebruch für die immer angenehme Zusammenarbeit.

Zum Schluss danke ich meiner Frau Helga für das Verständnis, das sie mir und meiner Beziehung zur Mathematik entgegenbringt. Ohne ihre Unterstützung wäre dieses Buch nicht zustande gekommen.

Den Leserinnen und Lesern wünsche ich, dass sie diese Darstellung der Höheren Mathematik als so klar und verständlich empfinden mögen, wie ich sie beabsichtigt habe. Über Hinweise auf noch vorhandene Druckfehler oder Unklarheiten würde ich mich freuen.

Karlsruhe, August 2017

Markus Neher

Inhaltsverzeichnis

I	Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher	1
1	Funktionen mehrerer Veränderlicher	3
1.1	Eindimensionale Schnittkurven	6
1.2	Höhenlinien	8
1.3	Punktmengen im \mathbb{R}^n	10
1.4	Kugeln und Intervalle	11
1.5	Stetige Kurven im \mathbb{R}^n	12
1.6	Topologische Grundbegriffe	12
2	Stetigkeit	17
2.1	Folgen im \mathbb{R}^n	17
2.2	Grenzwerte multivariater Funktionen	22
2.2.1	Grenzwerte abschnittsweise definierter Funktionen	26
2.2.2	Grenzwertberechnung mithilfe von Polarkoordinaten	28
2.3	Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher	31
2.3.1	Stetige Kompositionen	33
2.4	Eigenschaften stetiger Funktionen	38
3	Differenzialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher	41
3.1	Partielle Ableitungen	44
3.1.1	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	46
3.2	Verallgemeinerung auf mehr als zwei Veränderliche	48
3.3	Differenzierbare Funktionen	49
3.3.1	Der Gradient einer differenzierbaren Funktion	55

3.4	Die Kettenregel	56
3.5	Anwendbarkeit der Differenziationsregeln	61
4	Anwendungen der Differenzialrechnung	65
4.1	Die Richtungsableitung	65
4.1.1	Richtung des steilsten Anstiegs	69
4.2	Normalenvektoren an Kurven und Flächen	70
4.2.1	Normalenvektoren an Höhenlinien	71
4.2.2	Normalenvektoren an implizit definierte Flächen im \mathbb{R}^3	71
4.3	Implizite Funktionen	73
4.4	Das Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n	81
4.5	Die Taylor'sche Formel	87
4.5.1	Geometrische Interpretation zum Satz von Taylor	89
5	Extremwertaufgaben	91
5.1	Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen	91
5.2	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	100
5.2.1	Auflösen der Nebenbedingung	101
5.2.2	Vorliegen einer Parameterdarstellung der Nebenbedingung	101
5.2.3	Das Verfahren von Lagrange	102
II	Integralrechnung mehrerer Veränderlicher	109
6	Kurvenintegrale 1. Art	111
6.1	Parameterdarstellung ebener Kurven	111
6.2	Kurvenintegrale 1. Art für ebene J-Kurven	114
6.3	Kurvenintegrale 1. Art für räumliche J-Kurven	120
7	Bereichsintegrale	123
7.1	Integration über Rechteckbereiche	123
7.2	Der Satz von Fubini	129
7.3	Integration über mehrdimensionale Quader	133
7.4	Integration über ebene Normalbereiche	135
7.5	Integration über räumliche Normalbereiche	139

8 Die Substitutionsregel für Bereichsintegrale	143
8.1 Die Substitutionsregel für ebene Bereichsintegrale	144
8.2 Die Substitutionsregel für Volumenintegrale	152
9 Flächenintegrale 1. Art	157
9.1 Parameterdarstellung gewölbter Flächen	157
9.2 Flächenintegrale 1. Art	159
 III Vektoranalysis	 165
10 Vektorfelder	167
11 Kurven- und Flächenintegrale 2. Art	169
11.1 Kurvenintegrale 2. Art	169
11.1.1 Wegunabhängigkeit	172
11.2 Flächenintegrale 2. Art	180
11.3 Zusammenfassung	185
12 Integralsätze der Vektoranalysis	187
12.1 Der Integralsatz von Gauß	187
12.1.1 Der Integralsatz von Gauß in der Ebene	194
12.1.2 Die Green'sche Identität	199
12.2 Der Integralsatz von Stokes	200
 IV Differenzialgleichungen	 207
13 Gewöhnliche Differenzialgleichungen	209
13.1 Das Richtungsfeld	214
13.2 Anfangswertprobleme	215
13.3 Separierbare Differenzialgleichungen	216
13.4 Die lineare Differenzialgleichung erster Ordnung	217
13.4.1 Die homogene Differenzialgleichung $y' + a(x)y = 0$	217
13.4.2 Die inhomogene Differenzialgleichung $y' + a(x)y = b(x)$	218
13.5 Existenz- und Eindeutigkeitssätze	220
13.6 Systeme von Differenzialgleichungen	223

14 Die lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung	227
14.1 Allgemeine Lösung der homogenen linearen DGI	228
14.2 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert	233
14.3 Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung	234
14.4 Die lineare DGI mit konstanten Koeffizienten	237
14.4.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung	237
14.4.2 Lösungsansätze für die inhomogene Gleichung	240
15 Elementar lösbare Differenzialgleichungen	243
15.1 Die Euler'sche Differenzialgleichung	243
15.2 Differenzialgleichungen vom Typ $y' = g(y/x)$	245
15.3 Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung	248
15.4 Die Riccati'sche Differenzialgleichung	250
15.5 Potenzreihenlösungen	251
16 Numerische Behandlung gewöhnlicher Differenzialgleichungen	259
16.1 Das explizite Euler-Verfahren	260
16.2 Das Taylor-Verfahren	263
16.3 Einschrittverfahren	266
16.3.1 Konvergenz von Einschrittverfahren	266
16.3.2 Einfluss von Rundungsfehlern	268
16.4 Einschrittverfahren aus numerischer Quadratur	268
16.4.1 Das Verfahren von Runge	269
16.4.2 Die Trapezmethode	271
16.5 Implizite Einschrittverfahren	272
16.5.1 Das implizite Euler-Verfahren	273
16.6 Runge-Kutta-Verfahren	275
16.7 Mehrschrittverfahren	279
16.8 Stabilität	280
17 Rand- und Eigenwertprobleme	285
17.1 Randwertprobleme	285
17.2 Eigenwertprobleme	289

18 Partielle Differenzialgleichungen	293
18.1 Grundtypen zweiter Ordnung	294
18.2 Die Wärmeleitungsgleichung	296
18.2.1 Lösung des homogenen 1. ARWPs mit Produktansatz	297
18.3 Die Wellengleichung	302
18.4 Die Potenzialgleichung	309
18.4.1 Dirichlet-Problem	310
18.4.2 Das Differenzenverfahren	310
18.5 Die Methode der Finiten Elemente	315
Literaturverzeichnis	317
Index	319

Teil I

Differenzialrechnung mehrerer Veränderlicher

Kapitel 1

Funktionen mehrerer Veränderlicher

In Band 1 wurden reellwertige Funktionen einer Veränderlichen,

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x),$$

mit $D \subseteq \mathbb{R}$ diskutiert. Jeder reellen Zahl x im Definitionsbereich D der Funktion f wurde durch eine Rechenvorschrift genau eine reelle Zahl $z = f(x)$ im Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ von f zugeordnet.

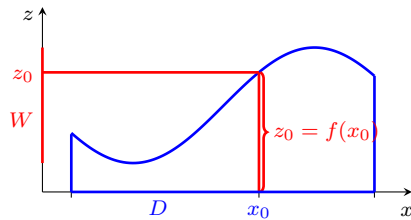


Abb. 1.1: Reelle Funktion einer Veränderlichen.

Im Folgenden studieren wir reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher. Synonym ist die Bezeichnung multivariate reelle Funktion gebräuchlich. Der Definitionsbereich einer multivariate Funktion ist eine Teilmenge des \mathbb{R}^n . Der Wertebereich bleibt hingegen eine Teilmenge von \mathbb{R} . Jeder Funktionswert ist eine reelle Zahl.

Im Fall $n = 2$ wird durch die Funktion

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

jedem Punkt $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ genau eine Zahl $z = f(x, y) \in W \subseteq \mathbb{R}$ zugeordnet.

Graphisch lässt sich die Funktion als gewölbte Fläche über dem ebenen Definitionsbereich veranschaulichen.

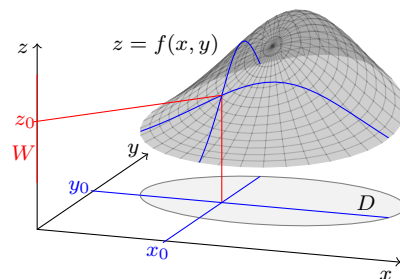


Abb. 1.2: Reelle Funktion zweier Veränderlicher.

Analog werden reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher durch eine Vorschrift

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbb{R}^n,$$

beschrieben. Kürzer kann man dies vektoriell durch

$$f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ausdrücken. Der *natürliche Definitionsbereich* einer solchen Funktion ist die Menge aller Punkte im \mathbb{R}^n , für die der Rechenausdruck f auswertbar ist. Der *Wertebereich* $W \subseteq \mathbb{R}$ von f wird von der Zahlenmenge

$$W = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in D\}$$

gebildet.

Beispiel 1.1

1. Die Signalstärke eines Mobilfunknetzes ist ortsabhängig. Ordnet man jedem Punkt (x, y) auf einem Stadtplan die jeweilige Signalstärke zu, wird dadurch eine Funktion zweier Veränderlicher definiert. Misst man innerhalb eines Gebäudes in Punkten $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ die jeweilige Signalstärke, wird diese als Funktion dreier Veränderlicher beschrieben.
2. Die Signalstärke eines Mobilfunknetzes kann auch zeitabhängig sein. Wird die Signalstärke an einem festen Punkt über ein gegebenes Zeitintervall gemessen, betrachtet man sie als Funktion einer Veränderlichen. Wird der Messpunkt im Raum bewegt, erhält man die Signalstärke als Funktion der vier Variablen x, y, z und t .
3. Jedem Punkt (x, y, z) in einer Maschinenhalle kann man seine Temperatur $T(x, y, z)$ zu einem festen Zeitpunkt zuordnen. Dadurch wird eine Funktion von drei Veränderlichen definiert.
4. Die Druckfestigkeit von Beton aus x Teilen Zement, y Teilen Zuschlag und z Teilen Wasser ist ebenfalls eine Funktion dreier Veränderlicher.
5. Der optimale Zündzeitpunkt eines Verbrennungsmotors hängt von der Drehzahl und der Menge des vorhandenen Kraftstoff-/Luftgemischs ab. Lässt man andere Einflussgrößen außer Betracht, wird der optimale Zündzeitpunkt durch eine Funktion zweier Veränderlicher modelliert. \triangle

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen interessiert man sich bei Funktionen mehrerer Veränderlicher für Extremwerte. Zu den Funktionen aus Beispiel 1.1 kann man unter anderem die folgenden praktischen Extremwertaufgaben stellen:

1. Bei schwachem Mobilfunknetz ist innerhalb eines Gebäudes ein günstiger Punkt mit möglichst hoher Signalstärke gesucht.

2. Bei der Planung einer Maschinenhalle soll vermieden werden, dass die Temperatur T im Betrieb über einen gewissen Schwellenwert T_{\max} steigt. In einer numerischen Simulation wird getestet, ob es Stellen (x, y, z) gibt, in denen T_{\max} in gewissen Szenarien erreicht oder überschritten wird.
3. Für einen vorgegebenen Zuschlag soll das Mischungsverhältnis mit Zement und Wasser so bestimmt werden, dass Beton möglichst hoher Druckfestigkeit entsteht.

Um derartige Aufgabenstellungen lösen zu können, benötigen wir für Funktionen mehrerer Veränderlicher dieselben mathematischen Werkzeuge, die wir in Band 1 für Funktionen einer Unabhängigen entwickelt hatten. Insbesondere müssen die Begriffe Grenzwert, Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen werden.

Im Verlauf dieses Prozesses wird sich zeigen, dass die konzeptionell bedeutsamsten Unterschiede beim Übergang von Funktionen einer Veränderlichen zu Funktionen zweier Veränderlicher auftreten. Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen lassen sich begrifflich wie Funktionen zweier Veränderlicher behandeln. Außerdem stellen Funktionen einer Veränderlichen einen Spezialfall von Funktionen mehrerer Veränderlicher dar. Eine allgemeine Aussage über Funktionen, die bei einer Veränderlichen falsch ist, kann auch nicht auf multivariate Funktionen zutreffen.

Für das Verständnis ist es durchgängig hilfreich, sich den Graphen einer Funktion zweier Veränderlicher wie im Abbildung 1.2 als gewölbte Fläche im \mathbb{R}^3 vorzustellen, die über einer ebenen Fläche (dem Definitionsbereich) aufgespannt wird. Man denke an eine in bestimmten Punkten im Raum aufgehängte Folie, die sich zwischen den Aufhängepunkten frei verformen kann. Für viele Fragestellungen liefert auch die Erdoberfläche, bei der die Höhe über dem Meeresspiegel als Funktion von zwei Ortskoordinaten x und y interpretiert wird, eine schöne Anschauung einer reellwertigen Funktion zweier Veränderlicher.

Rechnerisch kommen durch die Erweiterung auf mehrere Veränderliche keine neuen elementaren Funktionen hinzu. Jede im Folgenden betrachtete Funktion mehrerer Veränderlicher kann als Komposition der eingeführten elementaren Funktionen einer Veränderlichen geschrieben werden.

Beispiel 1.2

1. Die Gleichung $z = x + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, definiert eine Ebene im Raum, nämlich den Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x + y.$$

2. Die Gleichung $z = 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, definiert ebenfalls eine Ebene im Raum, und zwar eine zur (x, y) -Ebene parallele Ebene. Die Ebene ist der Graph der konstanten Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 1.$$

3. Die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = x + y \sin(z) + ze^{x+y}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ist eine Komposition der bekannten elementaren Funktionen in drei Variablen.

4. Die durch

$$z = f(x, y) = \underbrace{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}_{> 0 \text{ für } (x, y) \in D},$$

$$(x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\},$$

beschriebene Fläche ist ein Teil der oberen Halbkugel mit dem Radius 5.

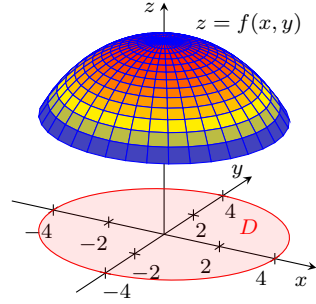


Abb. 1.3: Teilfläche der oberen Halbkugel.

Als Definitionsbereich ist hier willkürlich die Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius 4 vorgegeben. Der natürliche Definitionsbereich des Rechenausdrucks $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ist die Kreisscheibe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$ mit Radius 5.

5. Den natürlichen Definitionsbereich D_f des Ausdrucks

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 - y^2 + 1}$$

erhält man aus

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 9,$$

$$x^2 - y^2 + 1 \geq 0 \iff |y| \leq \sqrt{1 + x^2}.$$

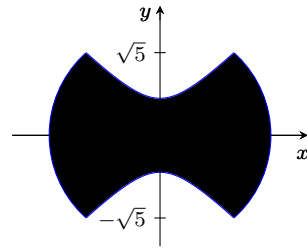


Abb. 1.4: D_f .

Die erste Bedingung definiert die Kreisscheibe mit Radius 3 um den Ursprung, die zweite Bedingung die unbeschränkte Fläche, welche durch die Hyperbeln $y = \pm \sqrt{1 + x^2}$ nach oben und unten begrenzt wird. Der Schnitt dieser Flächen ist in Abb. 1.4 dargestellt. \triangle

1.1 Eindimensionale Schnittkurven

Eine Fläche

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2,$$

kann man mithilfe ihrer Schnittkurven mit Ebenen im \mathbb{R}^3 veranschaulichen. Man ersetzt eine der beiden unabhängigen Variablen durch eine Konstante, z.B. $y = c$, und erhält so eine durch die Beziehung

$$g(x) := f(x, c), \quad x \in D_g,$$

definierte Funktion einer Veränderlichen. Variiert man den Parameter c , wird die Schnittebene entlang der gewählten Koordinate verschoben.

In Abbildung 1.5 sind die Schnittkurven der Fläche mit Ebenen $x = c$ bzw. $y = c$, d.h. mit den Ebenen

$$\{(c, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

bzw.

$$\{(x, c, z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\},$$

als Gitterlinien auf der Fläche dargestellt.

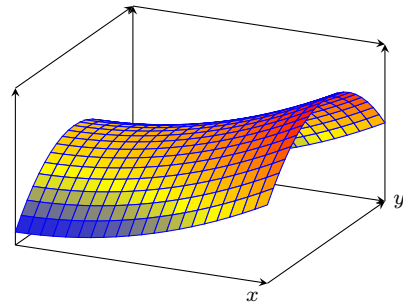


Abb. 1.5: Fläche mit Schnittkurven.

Beispiel 1.3

1. Es sei F die durch

$$z = f(x, y) = 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{16}xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

gegebene Fläche im \mathbb{R}^3 .

Jeder Schnitt mit einer Ebene $x = c$ oder einer Ebene $y = c$ liefert eine Gerade. Bei der Fläche F handelt es sich aber nicht um eine Ebene. Schneidet man F mit der Ebene $x = y$, erhält man als Schnittkurve die Parabel

$$z = 1 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

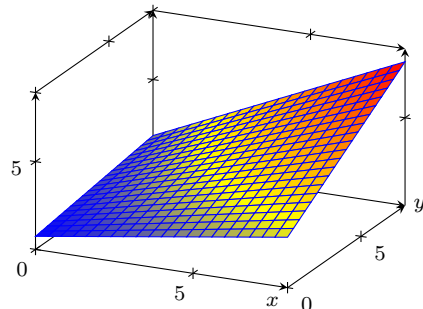


Abb. 1.6: Graph von $(x, y) \mapsto 1 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y + \frac{1}{16}xy$.

2. Es sei

$$z = f(x, y) = \cos(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Hält man die y -Koordinate fest, wird durch

$$g(x) := \cos(x - c), \quad x \in \mathbb{R},$$

eine um c nach rechts verschobene Kosinuskurve beschrieben. Die Fläche $z = f(x, y)$ hat die Gestalt von Wellblech, wobei die Linien der Maxima und Minima parallel zur ersten Winkelhalbierenden in der (x, y) -Ebene verlaufen.

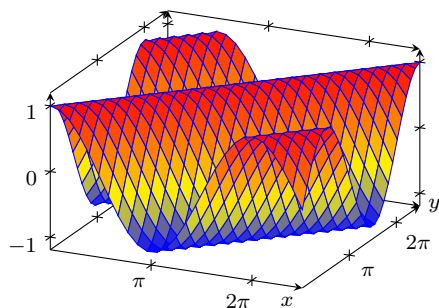


Abb. 1.7: Ebene Welle.

3. Setzt man $y = c$ in

$$z = f(x, y) = \cos x \cos y$$

ein, so erhält man den Graphen der mit $\cos c$ multiplizierten Kosinusfunktion

$$g: x \mapsto \cos c \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die gleiche Kosinuskurve ergibt sich in y -Richtung, wenn man die x -Koordinate festhält. Die Fläche ist wie ein Eierkarton für unendlich viele Eier geformt. \triangle

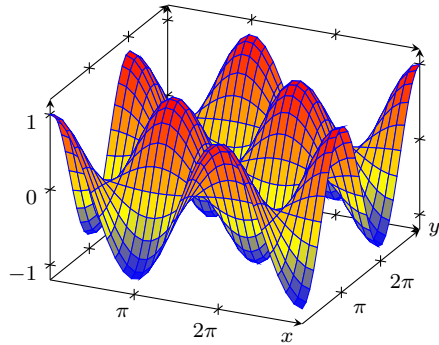


Abb. 1.8: Kosinuskurve in 2D.

1.2 Höhenlinien

Schneidet man eine Fläche $z = f(x, y)$ mit einer Ebene $z = c$, $c \in W_f$, entsteht auf der Fläche eine Schnittkurve. Die Höhenlinie zur Höhe c der zugehörigen Funktion f erhält man durch Projektion dieser Schnittkurve in die (x, y) -Ebene.

Definition 1.4 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $c \in \mathbb{R}$ ist die Höhenlinie von f zur Höhe c die Menge aller Punkte $(x, y) \in D$, in denen f den Funktionswert c annimmt. An Stelle von

$$\{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}$$

schreiben wir im Folgenden kurz $f(x, y) = c$.

Beispiel 1.5

1. Für

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 16,$$

folgt wegen $0 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, dass

$$\sqrt{25 - 16} = 3 \leq f(x, y) \leq 5 = \sqrt{25 - 0}$$

gilt. Die Höhenlinien $f(x, y) = c$ existieren für $3 \leq c \leq 5$:

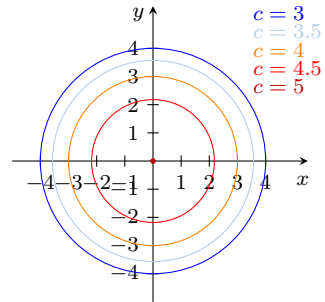


Abb. 1.9: Konzentrische Höhenlinien.

$$\sqrt{25 - x^2 - y^2} = c \iff x^2 + y^2 = \underbrace{25 - c^2}_{\geq 0 \text{ für } c \in [3, 5]}.$$

Für $c \in [3, 5)$ erhält man einen Kreis um den Ursprung $(0, 0)$ mit Radius $\sqrt{25 - c^2}$ und für $c = 5$ den Nullpunkt. Somit ist $W_f = [3, 5]$.

In Abbildung 1.9 besitzen zwei benachbarte Höhen jeweils die gleiche Höhendifferenz. Die Abstände der Höhenlinien verringern sich aber zum Rand hin. Dies spiegelt das Verhalten der Funktion wider, welche im Zentrum des Definitionsbereichs flach verläuft und zum Rand hin stark abfällt.

2. Die Höhenlinie zur Höhe c von

$$z = f(x, y) = \cos(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= c \\ \iff x - y + 2k\pi &= \arccos c \\ \iff y &= x - \arccos c + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

wobei $c \in W_f = [-1, 1]$ vorausgesetzt wird. Alle Höhenlinien verlaufen parallel zur ersten Winkelhalbierenden in der (x, y) -Ebene.

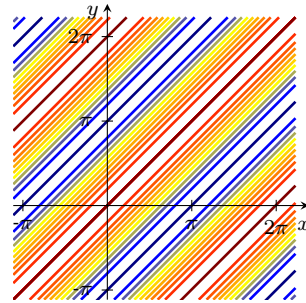


Abb. 1.10: Parallele Höhenlinien.

3. Für $c \in [-1, 1]$ kann man die Höhenlinie zur Höhe c von

$$z = f(x, y) = \cos x \cos y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

mithilfe von

$$y = \arccos\left(\frac{c}{\cos x}\right)$$

darstellen. Der Definitionsbereich für x hängt dabei von c ab. Die Höhenlinien sind 2π -periodisch in x und y . Für $c = 0$ erhält man die Geradenschar

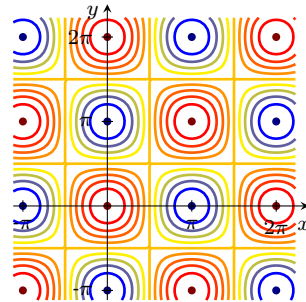


Abb. 1.11: Höhenlinien des 2D-Kosinus.



$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{oder} \quad y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 1.6

1. Falls c nicht im Wertebereich von f liegt, ist die Höhenlinie $f(x, y) = c$ die leere Menge.
2. Die Höhenlinien liegen im Definitionsbereich von f , also in der (x, y) -Ebene und nicht auf der Fläche $z = f(x, y)$. Anschaulich erfährt man dies beim Wandern: Höhenlinien der Erdoberfläche befinden sich nicht im Gelände, sondern auf der Landkarte. ◇

1.3 Punktmengen im \mathbb{R}^n

Punktmengen im \mathbb{R}^n hatten wir bereits in Band 1 eingeführt. Wir wiederholen die wichtigsten Begriffe.

Die Menge \mathbb{R}^n ist die Menge aller Punkte mit n reellwertigen Koordinaten. Koordinaten eines Punktes $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ im \mathbb{R}^n schreibt man üblicherweise hintereinander. Der Ortsvektor $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$ des Punktes P verbindet den Koordinatenursprung O mit P . Seine Länge wird durch die Norm $\|\overrightarrow{OP}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ beschrieben.

Die Norm wird nun zur Abstandsmessung von Punkten im \mathbb{R}^n verwendet. Ist \overrightarrow{OP} der Ortsvektor des Punktes P , entspricht $\|\overrightarrow{OP}\|$ dem Abstand von P vom Ursprung. Im Folgenden identifizieren wir P mit \vec{x} und sprechen deshalb vom Punkt \vec{x} .

Definition 1.7 Gegeben seien zwei Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Der *Abstand* von \vec{x} und \vec{y} ist definiert durch

$$d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{y} - \vec{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{(\vec{y} - \vec{x})^T (\vec{y} - \vec{x})}.$$

Der Abstand besitzt die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

1. Der Abstand ist nichtnegativ. Für beliebige Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0.$$

Gleichheit gilt dabei genau im Fall $\vec{x} = \vec{y}$.

2. Der Abstand ist symmetrisch. Für beliebige Punkte $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x}).$$

3. Für den Abstand beliebiger Punkte $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ gilt die Dreiecks-Ungleichung

$$d(\vec{x}, \vec{z}) \leq d(\vec{x}, \vec{y}) + d(\vec{y}, \vec{z}).$$

4. Der Abstand ist verschiebungsinvariant. Für beliebige Punkte $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$d(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y} + \vec{z}) = d(\vec{x}, \vec{y}).$$

Die ersten beiden Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition des Abstands. Die Dreiecks-Ungleichung folgt aus der Dreiecks-Ungleichung für die Norm.

1.4 Kugeln und Intervalle

Gegeben sei ein fester Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Mengen

$$\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\} \quad \text{bzw.} \quad \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\}$$

eine *offene* bzw. eine *abgeschlossene Kugel* um \vec{x}_0 mit Radius r .

Eine offene Kugel um \vec{x}_0 mit Radius ε heißt ε -*Umgebung* von \vec{x}_0 :

$$U_\varepsilon(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}.$$

Entfernt man den Punkt \vec{x}_0 aus der Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$, dann erhält man die *punktierte* ε -*Umgebung* von x_0 :

$$\dot{U}_\varepsilon(\vec{x}_0) := U_\varepsilon(\vec{x}_0) - \{\vec{x}_0\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\}.$$

Kommt es nicht auf den Wert von ε an, spricht man von einer *Umgebung* von \vec{x}_0 und notiert diese mit $U(\vec{x}_0)$.

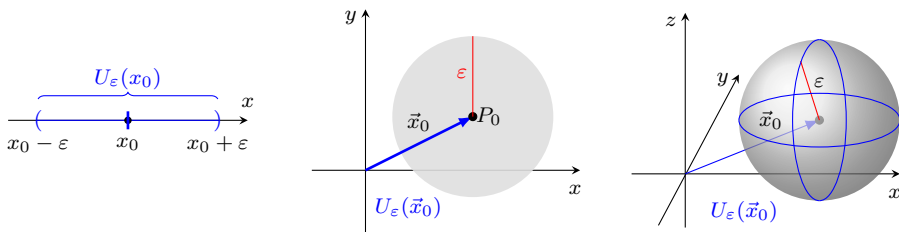


Abb. 1.12: ε -Umgebungen in \mathbb{R}^1 , \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 .

Aus reellen Intervallen kann man n -dimensionale Intervalle konstruieren. Sind n reelle Intervalle I_1, \dots, I_n gegeben, wird durch

$$I := I_1 \times \dots \times I_n := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_j \in I_j, j = 1, \dots, n\}$$

ein n -dimensionales Intervall I definiert.

Beispiel 1.8

1. $[1, 2] \times [0, 3]$ beschreibt ein Rechteck in der Ebene.
2. $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ stellt einen Würfel mit Kantenlänge 1 im \mathbb{R}^3 dar.

△

1.5 Stetige Kurven im \mathbb{R}^n

In Band 1 hatten wir stetige Kurven in der Ebene studiert, welche durch eine Parameterdarstellung gegeben waren. Stetige Kurven im \mathbb{R}^n definiert man genauso.

Definition 1.9 Gegeben seien n reellwertige stetige Funktionen

$$x_j(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad j = 1, \dots, n.$$

Die Menge der Punkte

$$\{\vec{x}(t) \mid t_1 \leq t \leq t_2\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

$\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, heißt *stetige Kurve* K . Der Punkt $\vec{x}_1 = \vec{x}(t_1)$ heißt *Anfangspunkt*, der Punkt $\vec{x}_2 = \vec{x}(t_2)$ *Endpunkt* von K .

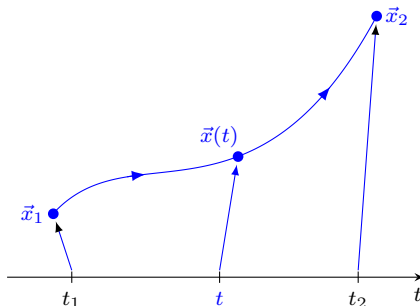


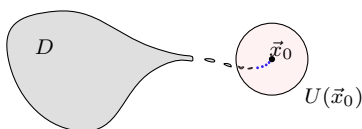
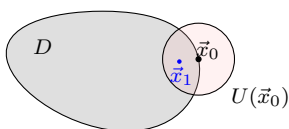
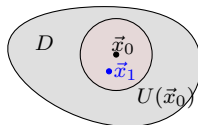
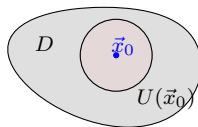
Abb. 1.13: Stetige Kurve.

1.6 Topologische Grundbegriffe

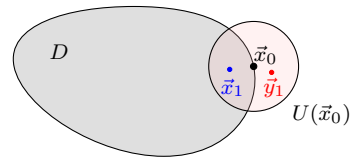
Wir erinnern an Begriffe wie innerer Punkt, Häufungspunkt, offene oder abgeschlossene Mengen, die wir in Band 1 eingeführt hatten. Für praktische Berechnungen sind sie nicht besonders wichtig. Sie werden aber in vielen Fällen benötigt, um mathematische Sachverhalte korrekt zu formulieren. In den folgenden Skizzen gehören blaue Punkte stets zu D . Rote Punkte gehören nicht zu D . Schwarze Punkte können, müssen aber nicht zu D gehören.

Definition 1.10 Es sei D eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n . Ein Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt

1. *innerer Punkt* von D , wenn es eine Umgebung $U(\vec{x}_0)$ gibt, die ganz in D liegt,
2. *Häufungspunkt* von D , wenn in jeder (noch so kleinen) Umgebung von \vec{x}_0 (mindestens) ein von \vec{x}_0 verschiedener Punkt aus D liegt,



3. *Randpunkt* von D , wenn in jeder Umgebung von \vec{x}_0 (mindestens) ein Punkt aus D und (mindestens) ein Punkt, der nicht zu D gehört, liegen.



Ein Randpunkt von D kann, muss aber nicht zu D gehören. Jeder innere Punkt von D ist ein Häufungspunkt von D .

Beispiel 1.11 Es sei

$$M := \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } x \leq 0\} \\ \cup \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ und } x > 0\} \\ \cup \{(2, 0)\}.$$

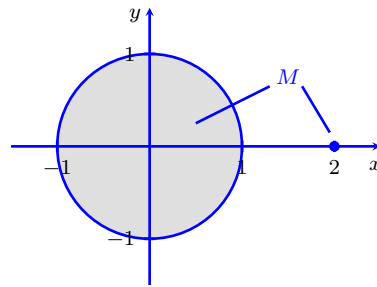


Abb. 1.14: Punktmenge M .

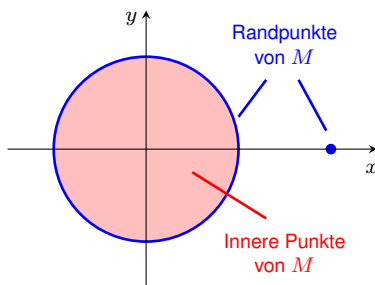


Abb. 1.15: Innere Punkte und Rand von M .

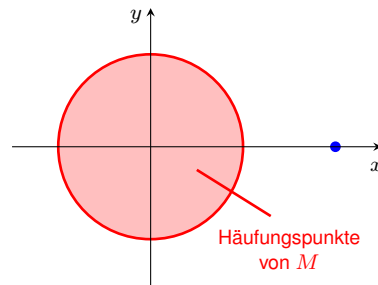


Abb. 1.16: Häufungspunkte von M .



Die nächsten Begriffe ordnen Mengen die Eigenschaften offen, abgeschlossen und zusammenhängend zu.

Definition 1.12 Es sei D eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n .

- D heißt *offen*, wenn es zu jedem $\vec{x}_0 \in D$ eine Umgebung $U(\vec{x}_0)$ gibt, die ganz in D liegt.
Äquivalente Formulierung: Eine Menge D ist offen, wenn sie nur innere Punkte enthält.
- D heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $\mathbb{R}^n \setminus D$ offen ist.
Äquivalente Formulierung: Eine Menge D ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.
- D heißt *zusammenhängend*, wenn es zu zwei beliebigen Punkten P und Q aus D eine stetige Kurve von P nach Q gibt, die ganz in D liegt.

Eine offene und zusammenhängende Menge heißt *Gebiet*.

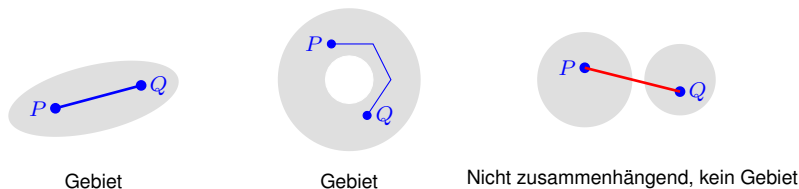


Abb. 1.17: Gebiete.

Beispiel 1.13

1. Eine offene Kugel $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist offen.
2. Eine abgeschlossene Kugel $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $r \geq 0$ ist abgeschlossen.
3. Die Menge \mathbb{R}^n ist sowohl offen (jeder Punkt $P \in \mathbb{R}^n$ ist innerer Punkt) als auch abgeschlossen (jeder Häufungspunkt von \mathbb{R}^n liegt in \mathbb{R}^n). \triangle

Punkte im \mathbb{R}^n kann man nicht ordnen. Damit ist gemeint, dass man keine Ordnungsrelation $<$ einführen kann, die alle in den Anordnungsaxiomen für die reellen Zahlen geforderten Eigenschaften besitzt. Die Begriffe Maximum, Minimum, Infimum und Supremum einer Teilmenge des \mathbb{R}^n sind daher im Fall $n > 1$ gegenstandslos. Beschränktheit einer Menge ist aber eine wichtige Eigenschaft, welche mithilfe des Abstands definiert wird.

Definition 1.14 Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Kugel gibt, die D vollständig enthält. Eine beschränkte und abgeschlossene Menge heißt *kompakt*.

Man beachte, dass es keine Rolle spielt, ob die Kugel in Definition 1.14 offen oder abgeschlossen ist oder wo ihr Mittelpunkt liegt. Zu einer beschränkten Menge D gibt es immer eine abgeschlossene Kugel um den Ursprung, die D enthält.

Beispiel 1.15

1. Die offene Einheitskreisscheibe im \mathbb{R}^2 ist beschränkt, offen und zusammenhängend, also ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 .
2. Der Würfel $W := [0, 1] \times [2, 3] \times [4, 5]$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Ebenso ist W zusammenhängend.
3. Die Menge M aus Beispiel 1.11 ist beschränkt, denn M ist in der abgeschlossenen Kugel um den Ursprung mit Radius 2 enthalten.
4. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen und unbeschränkt.

5. Die Menge $N := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$ ist nicht abgeschlossen, da z.B. der Punkt $P = (\sqrt{2}, 0)$ ein Häufungspunkt von N ist, aber nicht zu N gehört. Weil zudem beispielsweise $Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{7}\right)$ kein innerer Punkt von N ist, ist N auch nicht offen. Jeder Punkt $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ ist Randpunkt von N , d.h. der Rand von N ist der ganze \mathbb{R}^2 . \triangle

Kapitel 2

Stetigkeit

Stetigkeit ist für reellwertige Funktion mehrerer Veränderlicher wie für Funktionen einer Veränderlichen definiert. Eine Funktion f ist stetig an einem Häufungspunkt $\vec{x}_0 \in D_f$, wenn der Grenzwert an dieser Stelle mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h. wenn

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

gilt. Damit diese Gleichung Sinn ergibt, müssen wir erklären, was wir unter dem Grenzwert einer Funktion mehrerer Veränderlicher verstehen wollen.

Für Funktionen einer Veränderlichen hatten wir Grenzwerte mithilfe von Folgen definiert. Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher machen wir dies genauso. Damit ergibt sich das folgende Programm:

Folgen im $\mathbb{R}^n \rightarrow$ Grenzwerte von Funktionen \rightarrow Stetigkeit.

Um die Notation einfach zu halten, identifizieren wir durchgängig Spaltenvektoren mit Koordinaten von Punkten, welche wir als Zeilenvektoren notieren.

2.1 Folgen im \mathbb{R}^n

Definition 2.1 Eine (Punkt-)Folge $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ bzw. $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty$ im \mathbb{R}^n ist eine nummerierte Menge von unendlich vielen Punkten $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.2 Für die Folge

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k^2} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

im \mathbb{R}^2 gilt

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix}, \dots$$

Die Punkte $P_k = (x_k, y_k)$ liegen auf der Parabel

$$y = 1 - x^2$$

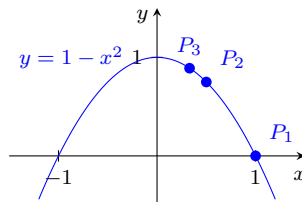


Abb. 2.1: Punktfolge auf Parabel.

und *nähern sich* für den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ dem Punkt $P^* = (0, 1)$:

$$\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{k^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{k^4}}_{\rightarrow 0}} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty. \quad \triangle$$

Beispiel 2.2 zeigt eine mögliche Veranschaulichung von Punktfolgen. Eine Punktfolge entsteht, wenn sich ein Fahrzeug entlang einer stetigen Kurve im \mathbb{R}^2 bewegt und die Position des Fahrzeugs zu den Zeitpunkten $t = k$, $k \in \mathbb{N}$ gemessen wird. Analog kann man sich eine Punktfolge im \mathbb{R}^n als Bewegung eines Punktes im \mathbb{R}^n vorstellen, bei welcher die Position des Punktes jeweils zur Zeit $t = k$, $k \in \mathbb{N}$ notiert wird.

Der in Beispiel 2.2 vorgenommene Grenzübergang führt auf den folgenden Konvergenzbegriff:

Definition 2.3 Eine Folge $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, heißt *konvergent gegen den Grenzwert* $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, wenn die reelle Zahlenfolge der Abstände $\{\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|\}_{k=1}^\infty$ gegen Null strebt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}^* : \Longleftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0.$$

Die Konvergenz von Punktfolgen $\{\vec{x}_k\}$ wird hierbei zurückgeführt auf die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen. Die in Band 1 entwickelten Methoden zur Konvergenzuntersuchung können damit unmittelbar angewendet werden. Für die praktische Berechnung von Grenzwerten ist Definition 2.3 allerdings nicht gut geeignet, da die Berechnung der Norm aufwändig ist. Der nächste Satz erleichtert die Konvergenzuntersuchung.

Satz 2.4 Die Folge $\{\vec{x}_k\}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, konvergiert genau dann gegen einen Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$, wenn die Zahlenfolgen aller Komponenten konvergieren.

Der Satz besagt, dass Konvergenz in der Norm und komponentenweise Konvergenz im \mathbb{R}^n äquivalent sind. Beispielsweise gilt im \mathbb{R}^2

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*.$$

Beweis (im \mathbb{R}^2):

„ \Rightarrow “: Nach Voraussetzung ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0$. Zu zeigen ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^* \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k - x^*)^2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k - x^*)^2 + (y_k - y^*)^2} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| \stackrel{\text{Vor.}}{=} 0, \end{aligned}$$

also $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$. Ebenso lässt sich $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*$ nachweisen.

„ \Leftarrow “: Nach Voraussetzung gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y^*$. Dann folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{\underbrace{(x_k - x^*)^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{(y_k - y^*)^2}_{\rightarrow 0}} = 0.$$

Im Fall $n > 2$ führt man die gleichen Schlüsse für alle Komponenten durch. \square

Beispiel 2.5

$$1. \quad \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} \\ 2 \cdot \sqrt[k]{17} \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 2 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{17} = 2$$

$$\text{folgt } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$2. \quad \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-k} \\ (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-k} = 0, \quad \text{aber: } \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \text{ existiert nicht.}$$

Daher existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k$ ebenfalls nicht. \triangle

Falls eine gegebene Folge nicht konvergiert oder falls die Konvergenz nicht nachgewiesen werden kann, interessiert man sich dafür, ob die Folge zumindest beschränkt ist. Wir werden sehen, dass die speziellen Eigenschaften beschränkter Zahlenfolgen auch auf beschränkte Punktfolgen zutreffen. Insbesondere gilt der Satz von Bolzano-Weierstraß für beschränkte Punktfolgen.

Definition 2.6 Eine Folge $\{\vec{x}_k\}$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Kugel gibt, in der *alle* Punkte \vec{x}_k liegen.

Z.B. ist $\{\vec{x}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 1 - \frac{1}{k} \end{pmatrix} \right\}$ beschränkt, aber $\{\vec{y}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ nicht.

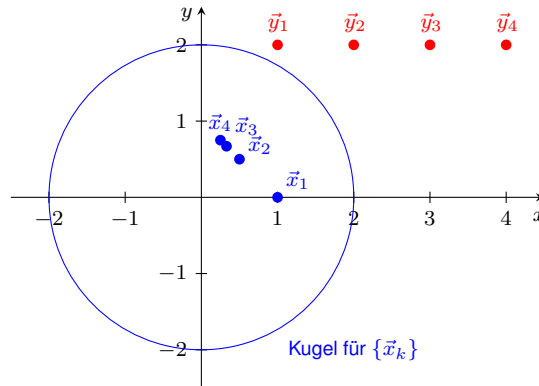


Abb. 2.2: Beschränkte Folge.

Mit ähnlicher Argumentation wie im Beweis von Satz 2.4 zeigt man, dass eine Punktfolge genau dann beschränkt ist, wenn jede ihrer Komponentenfolgen beschränkt ist. Wie für Zahlenfolgen gilt weiter

Satz 2.7 Jede konvergente Folge $\{\vec{x}_k\}$ ist beschränkt.

Beweis (wie für Zahlenfolgen): $\{\vec{x}_k\}$ sei konvergent mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}^*$. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_k\| &= \|\vec{x}_k - \vec{x}^* + \vec{x}^*\| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|}_{\leq c_1} + \underbrace{\|\vec{x}^*\|}_{\leq c_2} \leq c_1 + c_2 =: c, \\ &\leq c_1, \text{ da } \lim_{k \rightarrow \infty} \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\| = 0 \end{aligned}$$

d.h. alle \vec{x}_k liegen in einer Kugel um den Ursprung mit Radius c . □

Ebenfalls wie für Zahlenfolgen gilt der wichtige

Satz 2.8 (Bolzano-Weierstraß) Jede beschränkte Folge $\{\vec{x}_k\}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis (für $n = 2$): Es sei $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$. Wegen $|x_k| \leq \|\vec{x}_k\|$ ist $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ eine beschränkte Zahlenfolge, zu der nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß aus Band 1 eine konvergente Teilfolge $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots = \{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ existiert.

Setze nun $\xi_n := x_{k_n}$ und $\eta_n := y_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $|\eta_n| \leq \|\vec{x}_{k_n}\|$ ist $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ eine beschränkte Zahlenfolge, welche eine konvergente Teilfolge $\eta_{n_1}, \eta_{n_2}, \dots = \{\eta_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ besitzt. Da Teilfolgen aus konvergenten Zahlenfolgen ebenfalls konvergieren, ist die Teilfolge $\{\xi_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ konvergent und somit konvergiert auch die Teilfolge $\begin{pmatrix} \xi_{n_1} \\ \eta_{n_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_{n_2} \\ \eta_{n_2} \end{pmatrix}, \dots$ nach Satz 2.4.

Im Fall $n > 2$ schließt man analog mit vollständiger Induktion über alle Komponenten. \square

Beispiel 2.9 Gegeben sei die Folge

$$\begin{aligned} \vec{x}_k &= \left\{ \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) \\ (-1)^k \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man $k_n = 3n$, d.h. $k_1 = 3$, $k_2 = 6$, $k_3 = 9$, usw., dann ist die Folge $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ mit

$$\xi_n := x_{k_n} = x_{3n} = \sin\left(\frac{3n\pi}{3}\right) = \sin(n\pi) = 0 \quad \text{für alle } n$$

als konstante Folge trivialerweise konvergent. Mit der zugehörigen Teilfolge

$$\eta_n := y_{k_n} = y_{3n} = (-1)^{3n} = (-1)^n$$

erhält man die Teilfolge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \right\},$$

aus welcher man durch erneute Teilfolgenauswahl die konvergente Teilfolge

$$\left\{ \begin{pmatrix} \xi_{2n} \\ \eta_{2n} \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

ausliest. \triangle

Als weitere Eigenschaft übertragen sich die für Zahlenfolgen bekannten Regeln für Grenzwerte von Summen und von Produkten mit reellen Zahlen auf Punktfolgen.

Satz 2.10 (Rechenregeln für Folgengrenzwerte) Gegeben seien konvergente Folgen $\{\vec{x}_k\}$, $\{\vec{y}_k\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}^*$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{y}^*$. Dann gelten

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{x}_k \pm \vec{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k \pm \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \vec{x}^* \pm \vec{y}^*.$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} (c \cdot \vec{x}_k) = c \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = c \cdot \vec{x}^* \text{ für } c \in \mathbb{R}.$

Beweis: 1. und 2. gelten komponentenweise. □

2.2 Grenzwerte multivariater Funktionen

Grenzwerte für Funktionen einer Veränderlichen hatten wir in Band 1 zunächst für Punkte x_0 definiert, in denen eine punktierte Umgebung im Definitionsbereich existierte. Danach hatten wir Grenzwerte für Funktionen einer Veränderlichen auch für den Fall erklärt, dass an der Stelle x_0 nur eine einseitige punktierte Umgebung im Definitionsbereich enthalten war. Im \mathbb{R}^n ist jedoch nicht ersichtlich, wie man im Allgemeinen eine einseitige Umgebung definieren sollte. Daher diskutieren wir Grenzwerte im Folgenden nur noch in Häufungspunkten von D_f . Dies schließt alle bisherigen Fälle ein.

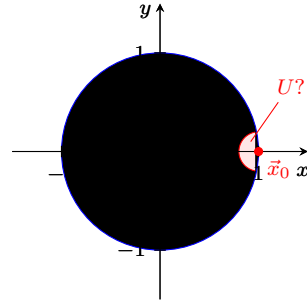


Abb. 2.3: Häufungspunkt am Rand.

Als erstes Resultat charakterisieren wir Häufungspunkte mithilfe von Folgen.

Satz 2.11 *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt. Dann ist \vec{x}_0 genau dann ein Häufungspunkt von D , wenn es eine Folge $\{\vec{x}_k\}$ von Punkten aus D gibt mit*

$$\vec{x}_k \in D, \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0.$$

Beweis: Wir zeigen nur eine Richtung des Beweises. Die Rückrichtung beweist man analog.

\vec{x}_0 sei Häufungspunkt von D , d.h. in jeder ε -Umgebung von \vec{x}_0 liege ein von \vec{x}_0 verschiedener Punkt aus D . Für $k = 1, 2, \dots$ sei nun

$$\varepsilon_k := \frac{1}{k} \text{ und } \vec{x}_k \in D \cap U_{\varepsilon_k}(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}.$$

Dann folgt

$$\|\vec{x}_0 - \vec{x}_k\| \leq \frac{1}{k} \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow \infty,$$

$$\text{d.h. } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0. \quad \square$$

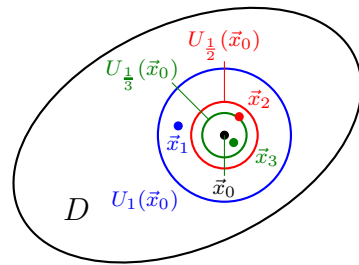


Abb. 2.4: Häufungspunkt mit konvergenter Punktfolge.

Nach dieser Vorbereitung können wir Grenzwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher erklären.

Definition 2.12 Gegeben seien eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sowie ein Häufungspunkt \vec{x}_0 von D . Wenn eine Zahl c existiert, sodass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = c \text{ für jede Folge } \{\vec{x}_k\} \text{ mit } \vec{x}_k \in D, \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0$$

gilt, dann heißt c Grenzwert von f für $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$:

$$c = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \quad \text{bzw. im } \mathbb{R}^2 \quad c = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$$

Beispiel 2.13

1. Gegeben sei $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 + \frac{1}{y}, \quad D_f = \{(x,y) \mid y \neq 0\}.$$

Der natürliche Definitionsbereich D_f von f ist \mathbb{R}^2 ohne die x -Achse. Im Folgenden soll untersucht werden, ob für $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{1}{y} \right) \text{ existiert.}$$

Da \vec{x}_0 Häufungspunkt von D_f ist, existiert eine Folge $\{\vec{x}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right\}$ mit

$$\begin{cases} \vec{x}_k \in D_f \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ \vec{x}_k \neq \vec{x}_0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

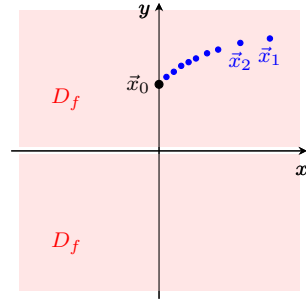


Abb. 2.5: Punktfolge gegen \vec{x}_0 .

Nach Satz 2.4 gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 \iff \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = 1. \end{cases}$$

Mit dem Satz über die Grenzwerte von Zahlenfolgen aus Band 1 folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_k^2 + \frac{1}{y_k} \right) = 0^2 + \frac{1}{1} = 1 = c.$$

Dies gilt für jede Folge $\{\vec{x}_k\}$ mit der Eigenschaft (2.1). Somit ergibt sich

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{1}{y} \right) = 1.$$

2. Existiert für die Funktion $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2)}{x^2 + y^2}, \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

Der Punkt $(0, 0)$ gehört nicht zu D_f , er ist aber Häufungspunkt von D_f . Wir vermuten, dass der Grenzwert nicht existiert und suchen zum Nachweis entweder eine gegen $(0, 0)$ strebende Folge $\{\vec{y}_k\}$, für die der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k)$ nicht existiert, oder zwei gegen den Ursprung konvergierende Folgen $\{\vec{y}_k\}$ und $\{\vec{z}_k\}$, für die die zugehörigen Folgen der Funktionswerte gegen unterschiedliche Grenzwerte streben. Dazu eignen sich hier die auf den Koordinatenachsen gegen den Ursprung verlaufenden Punktfolgen

$$\vec{y}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{y}_k, \vec{z}_k \in D_f, \quad \vec{y}_k \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_k \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{y}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

für welche

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{k^2}\right)}{\frac{1}{k^2} + 0^2} \stackrel{t = \frac{1}{k^2}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} 1,$$

aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{z}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(0)}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = 0$$

gelten. Der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k)$ hängt demnach von der Folge $\{\vec{x}_k\}$ ab. Also existiert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nicht.

Das Beispiel zeigt auch, dass aus der Existenz von $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_k)$ für eine (oder mehrere) spezielle gegen \vec{x}_0 konvergente Folge(n) $\{\vec{x}_k\}$ *nicht* folgt, dass $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ existiert. Dies gilt bereits für Zahlenfolgen, siehe Band 1. \triangle

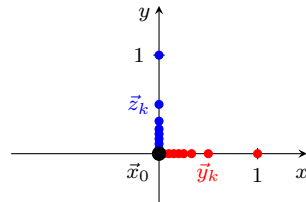


Abb. 2.6: Unterschiedliche gegen $(0, 0)$ konvergierende Punktfolgen.

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen ist es manchmal geschickt, Grenzwerte unabhängig von Zahlenfolgen durch Anwendung des folgenden Satzes zu bestimmen:

Satz 2.14 Es ist $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|f(\vec{x}) - c| < \varepsilon \quad \text{für alle } \vec{x} \in \dot{U}_\delta(\vec{x}_0) \cap D_f$$

gilt.

Grenzwerte von Summen und Produkten behandelt man wie bei Zahlenfolgen:

Satz 2.15 (Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen) Die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_1(\vec{x}) = c_1 \quad \text{und} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_2(\vec{x}) = c_2$$

mögen existieren. Dann gelten für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\alpha \cdot f_1(\vec{x}) \pm \beta \cdot f_2(\vec{x})) = \alpha \cdot c_1 \pm \beta \cdot c_2.$
2. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f_1(\vec{x}) \cdot f_2(\vec{x})) = c_1 \cdot c_2.$
3. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \text{falls } c_2 \neq 0.$

Beweis: Ist $\{\vec{x}_k\}$ eine beliebige gegen \vec{x}_0 konvergente Folge, dann sind $\{f_1(\vec{x}_k)\}$ und $\{f_2(\vec{x}_k)\}$ Zahlenfolgen, für welche die Eigenschaften gelten (siehe Band 1). \square

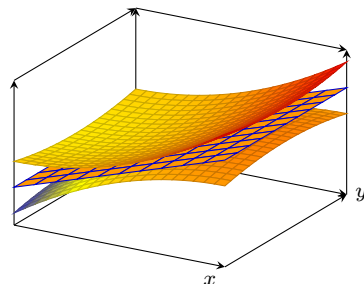
Beispiel 2.16

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 + \frac{1}{y}}{\cos x + e^y} \stackrel{3.}{=} \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{3}{y}\right)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (\cos x + e^y)} \stackrel{1.}{=} \frac{0^2 + \frac{3}{1}}{\cos 0 + e^1} = \frac{3}{1 + e}. \quad \triangle$$

Auch das Sandwich-Theorem gilt für Grenzwerte multivariater Funktionen:

Satz 2.17 (Sandwich-Theorem) Gegeben seien die auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ definierten reellwertigen Funktionen f, g und h sowie ein Häufungspunkt \vec{x}_0 von D . Weiter gelte

1. $g(\vec{x}) \leq f(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in D.$
2. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} h(\vec{x}) = c.$



Dann existiert $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ und es gilt $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c.$

Abb. 2.7: Sandwich-Theorem.

Beweis: Wie für Funktionen von einer Veränderlichen (vergleiche Band 1). \square

Selbstverständlich sind die Funktionen g und h in der Regel nicht gegeben. Man wendet das Sandwich-Theorem so an, dass man eine gegebene, kompliziert gebaute Funktion f , deren Grenzwert gesucht ist, nach oben und nach unten abschätzt durch Funktionen g und h , deren Grenzwerte einfacher zu berechnen sind.

Beispiel 2.18 Es sei

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{y}\right) & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

Da der Kosinus durch ± 1 abgeschätzt werden kann, gilt

$$\begin{cases} -x \leq f(x, y) \leq x & \text{für } x \geq 0, \\ x \leq f(x, y) \leq -x & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

also insgesamt

$$-|x| \leq f(x, y) \leq |x| \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Setzt man $g(x, y) := -|x|$, $h(x, y) := |x|$, dann folgt aus

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$$

auch

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0. \quad \triangle$$

2.2.1 Grenzwerte abschnittsweise definierter Funktionen

In Band 1 hatten wir einseitige Grenzwerte von Funktionen betrachtet und festgestellt, dass der Grenzwert einer Funktion f an einem inneren Punkt ihres Definitionsbereichs existiert, wenn der links- und der rechtsseitige Grenzwert an dieser Stelle existieren und übereinstimmen. Bei Funktionen zweier Veränderlicher sind die Verhältnisse komplizierter, da es unendlich viele Richtungen gibt, aus denen man sich einem Punkt im \mathbb{R}^2 annähern kann. Glücklicherweise darf man Grenzwerte von abschnittsweise definierten Funktionen aber trotzdem auf die sinngemäß gleiche Art berechnen. Die mathematisch korrekte Formulierung des Sachverhalts ist zwar etwas umständlich, aber die Handhabung ist einfach.

Satz 2.19 Es sei $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und (x_0, y_0) sei ein Häufungspunkt von D . Außerdem gebe es zwei disjunkte Mengen D_1 und D_2 mit $D = D_1 \cup D_2$, für die (x_0, y_0) jeweils ein Häufungspunkt ist, sowie zwei Funktionen $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} f_1(x, y) & \text{für } (x, y) \in D_1, \\ f_2(x, y) & \text{für } (x, y) \in D_2. \end{cases}$$

Dann existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ genau dann, wenn die zugehörigen Grenzwerte für f_1 und f_2 existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = c \iff \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in D_1}} f_1(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in D_2}} f_2(x,y) = c.$$

Die Aussagen gelten sinngemäß auch für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen und wenn f durch mehr als zwei alternative Funktionsausdrücke definiert ist.

Beweis: Die Beweisführung von links nach rechts erübrigt sich, da die Grenzwerte für f_1 und f_2 Spezialfälle des Grenzwerts von f sind.

Die Existenz der Grenzwerte für f_1 und f_2 sei nun vorausgesetzt. Nach Satz 2.14 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |f_1(x,y) - c| &< \varepsilon \\ \text{für alle } (x,y) &\in \dot{U}_{\delta_1}(x_0,y_0) \cap D_1, \\ |f_2(x,y) - c| &< \varepsilon \\ \text{für alle } (x,y) &\in \dot{U}_{\delta_2}(x_0,y_0) \cap D_2 \end{aligned}$$

gelten. Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ folgt

$$\begin{aligned} |f(x,y) - c| &< \varepsilon \\ \text{für alle } (x,y) &\in \dot{U}_{\delta}(x_0,y_0) \cap D. \end{aligned}$$

Wiederum nach Satz 2.14 ist dann $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = c$. □

Beispiel 2.20 Es sei

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } y \geq 0, \\ \cos y & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Gesucht ist $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$.

Setzt man $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$, $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x,y) = x^2 + 1$, $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x,y) = \cos y$, dann ist $(0,0)$ ein Häufungspunkt von D_1 und D_2 und es gilt

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_1}} f_1(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1, \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_2}} f_2(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \cos y = 1.$$

Also folgt nach Satz 2.19

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1. \quad \triangle$$

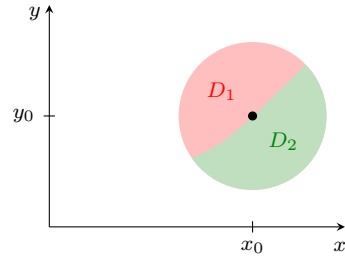


Abb. 2.8: Definitionsbereich einer abschnittsweise definierten Funktion.

2.2.2 Grenzwertberechnung mithilfe von Polarkoordinaten

Der Nachweis eines Grenzwerts mit Punktfolgen kann schwierig sein. Für Funktionen zweier Veränderlicher ist es aber möglich, in der (x, y) -Ebene durch

$$x - x_0 = r \cos \varphi,$$

$$y - y_0 = r \sin \varphi$$

lokale Polarkoordinaten mit Zentrum \vec{x}_0 einzuführen. Für *jede* gegen \vec{x}_0 konvergente Folge $\{\vec{x}_k\}$ gilt dann zwingend $\|\vec{x}_k - \vec{x}_0\| = r_k \rightarrow 0$. Setzt man

$$g(r, \varphi) := f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi),$$

dann gilt

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} g(r, \varphi).$$

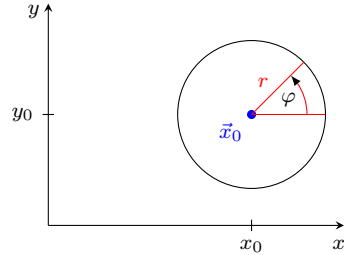


Abb. 2.9: Lokale Polarkoordinaten.

Falls g nicht von φ abhängt oder falls man die winkelabhängigen Terme in g abschätzen kann, ist der rechte Grenzwert einfacher zu berechnen als der linke. Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen kann man analog Verallgemeinerungen von Polarkoordinaten in höheren Dimensionen verwenden.

Beispiel 2.21

1. Gegeben sei

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Wir berechnen den Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ mithilfe der Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$, d.h. $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\sin(r^2)}{r^2} \stackrel{t = r^2}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

In diesem Beispiel ist $g(r, \varphi) = \frac{\sin(r^2)}{r^2}$ unabhängig von φ , wodurch der Grenzwert in zwei Variablen auf einen eindimensionalen Grenzwert reduziert wird.

2. Gesucht sei

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-y)^2(x+y-2)}{x^2 + y^2 - 2(x+y-1)}.$$

Mit lokalen Polarkoordinaten

$$x = 1 + r \cos \varphi, \quad y = 1 + r \sin \varphi$$

folgt

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-y)^2(x+y-2)}{x^2+y^2-2(x+y-1)} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{(1+r \cos \varphi - 1 - r \sin \varphi)^2(1+r \cos \varphi + 1+r \sin \varphi - 2)}{(1+r \cos \varphi)^2 + (1+r \sin \varphi)^2 - 2(1+r \cos \varphi + 1+r \sin \varphi - 1)} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r^3(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)}{1+r^2 \cos^2 \varphi + 1+r^2 \sin^2 \varphi - 2} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r^3(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)}{r^2(\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi)} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} r(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi).
 \end{aligned}$$

Der Term $r(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)$ hängt zwar von φ ab, aber wegen

$$\lim_{r \rightarrow 0+} r = 0 \quad \text{und} \quad -8 \leq (\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi) \leq 8$$

folgt nach dem Sandwich-Theorem

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \underbrace{r}_{\rightarrow 0} \underbrace{(\cos \varphi - \sin \varphi)^2(\cos \varphi + \sin \varphi)}_{\text{beschränkt}} = 0.$$

3. Für

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

ist

$$g(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{r^2} = \cos^2 \varphi.$$

Interpretiert man φ als festen Parameter, dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \cos^2 \varphi = \cos^2 \varphi.$$

Anschaulich ist dies der Funktionsgrenzwert für eine Punktfolge, die sich dem Ursprung auf einer Halbgerade nähert. Der Grenzwert hängt aber vom Polarwinkel φ der Halbgerade ab, sodass

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \cos^2 \varphi$$

nicht existiert.

Zur Verdeutlichung betrachten wir zwei Punktfolgen, die sich dem Ursprung auf zwei verschiedenen Halbgeraden nähern. Für

$$\vec{y}_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{in Polarkoordinaten: } r_k = \frac{1}{k}, \varphi_k = 0),$$

$$\vec{z}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix} \quad (\text{in Polarkoordinaten: } r_k = \frac{1}{k}, \varphi_k = \frac{\pi}{2})$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{y}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + 0^2} = 1 = \cos^2 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{z}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0^2}{0^2 + \frac{1}{k^2}} = 0 = \cos^2 \frac{\pi}{2}.$$

4. Es sei

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x - y}, \quad x \neq y.$$

In Polarkoordinaten erhält man für $\varphi \notin \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ die Funktionsvorschrift

$$g(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2}{r(\cos \varphi - \sin \varphi)} = \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi},$$

für welche

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} g(r, \varphi) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi} \quad (2.2)$$

als von φ unabhängiger Grenzwert gesucht ist.

Hält man den Winkel $\varphi \notin \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$ fest, ist der Nenner ungleich Null und konstant, sodass

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{r}{\cos \varphi - \sin \varphi} = 0$$

gilt. Daraus folgt aber nicht, dass der gesuchte Grenzwert existiert!

Mit einer speziellen Punktfolge zeigen wir nun, dass der Grenzwert (2.2) nicht unabhängig von φ existiert. Dazu nutzen wir aus, dass der Term $\frac{1}{\cos \varphi - \sin \varphi}$ in der Nähe der Winkelhalbierenden unbeschränkt ist. Wir wählen eine gegen den Ursprung strebende Punktfolge $\{\vec{x}_k\}$ auf einer Kurve, die sich so schnell an die erste Winkelhalbierende anschmiegt, dass die zugehörige Folge der Funktionswerte gegen $-\infty$ strebt, obwohl die Folge der Radien $\{r_k\}$ gegen Null konvergiert.

Für die auf der Kurve $y = x + x^3$ liegende Punktfolge

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} + \frac{1}{k^3} \end{pmatrix}$$

ist dies erfüllt:

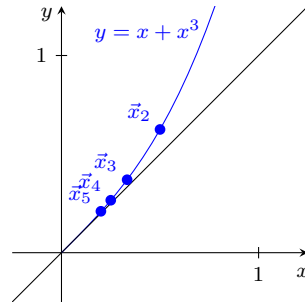


Abb. 2.10: Spezielle Punktfolge.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k^4} + \frac{1}{k^6}}{-\frac{1}{k^3}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-2k - \frac{2}{k} - \frac{1}{k^3} \right) = -\infty. \quad \triangle$$

Der Einsatz von Polarkoordinaten vereinfacht die Grenzwertberechnung nur, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)$$

vom Winkel φ unabhängig ist. Wie das vierte Beispiel zeigt, darf man φ dabei nicht wie einen festen Parameter behandeln.

2.3 Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Stetigkeit wird für Funktionen mehrerer Veränderlicher wie für Funktionen einer Veränderlichen definiert:

Definition 2.22 Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig an der Stelle* $\vec{x}_0 \in D$, wenn \vec{x}_0 ein Häufungspunkt von D ist und wenn $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ existiert und mit dem Funktionswert übereinstimmt, d.h. wenn gilt:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0).$$

Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, dann heißt f stetig in D , wenn f in jedem Punkt $\vec{x} \in D$ stetig ist. Die Menge aller in D stetigen Funktionen wird mit $C^0(D)$ bezeichnet.

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Eine Funktion f kann an einer einzigen Stelle \vec{x}_0 stetig und an allen anderen Stellen $\vec{x} \in D$ unstetig sein. Anschaulich ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wenn „der Graph keine Löcher hat“:

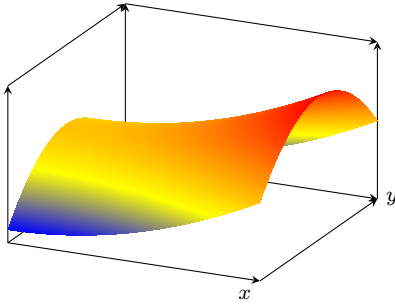


Abb. 2.11: Stetige Funktion.

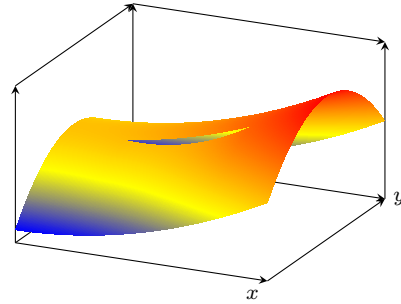


Abb. 2.12: Unstetige Funktion.

Beispiel 2.23 Die durch $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{y}$, $y \neq 0$, definierte Funktion ist stetig in $(x_0, y_0) = (0, 1)$:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(x^2 + \frac{1}{y} \right) = 1 = f(0, 1). \quad \triangle$$

Nach Definition 2.22 ist eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$, wenn \vec{x}_0 ein Häufungspunkt von D ist und wenn für jede in D gegen \vec{x}_0 konvergierende Folge $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty$ die Folge der Funktionswerte $\{f(\vec{x}_n)\}_{n=1}^\infty$ gegen $f(\vec{x}_0)$ konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n = \vec{x}_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = f(\vec{x}_0) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n\right).$$

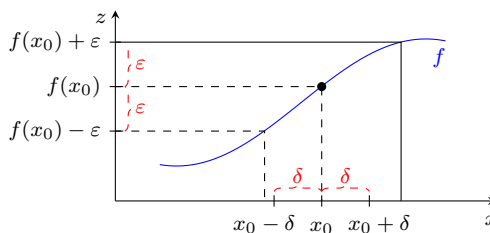
In anderen Worten: Eine Funktion ist stetig, wenn man das Funktionssymbol f und das Grenzwertsymbol vertauschen darf.

Wie bei Funktionen einer Veränderlichen kann man den Grenzwertbegriff und die Stetigkeit einer Funktion unabhängig von Folgen erklären.

Satz 2.24 (ε - δ -Definition der Stetigkeit) Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann an der Stelle $\vec{x}_0 \in D$ stetig, wenn \vec{x}_0 ein Häufungspunkt von D ist und wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \text{ für alle } \vec{x} \in D \text{ mit } \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$$

gilt, d.h. wenn aus $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ folgt, dass $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$ ist.

Abb. 2.13: ε - δ -Definition der Stetigkeit für eine Funktion einer Veränderlichen.

Für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist das ε - δ -Kriterium eher von theoretischem Interesse, da sich für ein gegebenes ε ein geeignetes δ nur bei sehr einfachen Funktionsvorschriften bestimmen lässt.

Beispiel 2.25 Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2 + x^2 y^2}$$

ist stetig im Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann ist ein $\delta > 0$ gesucht, sodass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| = \left| \underbrace{\frac{x^2 + y^2}{2 + x^2 y^2}}_{\geq 0} - 0 \right| = \frac{x^2 + y^2}{\underbrace{2 + x^2 y^2}_{\geq 0}} \leq \frac{1}{2} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{= \|\vec{x}\|^2} = \frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 \stackrel{!}{<} \varepsilon$$

für $\|\underbrace{\vec{x} - \vec{x}_0}_{= \vec{0}}\| < \delta$ gilt. Mit der Beziehung

$$\frac{1}{2} \|\vec{x}\|^2 < \varepsilon \iff \|\vec{x}\| < \sqrt{2\varepsilon} =: \delta(\varepsilon)$$

folgt, dass $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$ für alle \vec{x} mit $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$ erfüllt ist. \triangle

2.3.1 Stetige Kompositionen

Glücklicherweise benötigt man die angegebenen Kriterien nur selten zum Nachweis der Stetigkeit einer Funktion f . Wie bei Funktionen einer Veränderlichen zeigt man:

Satz 2.26 Gegeben seien zwei Mengen $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie zwei Funktionen $f_1: D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_2: D_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Die beiden Funktionen f_1 und f_2 seien stetig im Punkt $\vec{x}_0 \in D_1 \cap D_2$. Dann sind auch die Kompositionen

1. $c_1 \cdot f_1 \pm c_2 \cdot f_2$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ fest),
2. $f_1 \cdot f_2$,
3. $\frac{f_1}{f_2}$ (falls $f_2(\vec{x}_0) \neq 0$)

in \vec{x}_0 stetig.

Beispiel 2.27 Die beiden Funktionen $f: (x, y) \mapsto x$ und $g: (x, y) \mapsto y$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}^2$ sind in *jedem* Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ wegen

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0 \quad \text{und} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y = y_0$$

stetig. Nach Satz 2.26 folgt beispielsweise, dass auch die Kompositionen

$$(x, y) \mapsto f^2(x, y) = x^2, \quad (x, y) \mapsto g^2(x, y) = y^2, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) \cdot g(x, y) = xy$$

in jedem Punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ stetig sind. Ebenso ist z.B. die rationale Funktion h mit

$$h(x, y) := \frac{f(x, y) \cdot g(x, y)}{f^2(x, y) + g^2(x, y)} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ stetig. △

Da in Polynomen und rationalen Funktionen nur die arithmetischen Grundoperationen auftreten, folgt aus Satz 2.26 allgemein:

1. Polynome in mehreren Variablen sind stetig.
2. Rationale Funktionen in mehreren Variablen sind auf ihrem natürlichen Definitionsbereich stetig.

Stetigkeit bleibt auch in Verkettungen stetiger Funktionen erhalten. Allerdings sind Verkettungen bei mehreren Veränderlichen komplexer gebaut als bei Funktionen einer Veränderlichen. Wir beschreiben den Sachverhalt zunächst für den Fall zweier Veränderlicher.

Gegeben seien eine Funktion $f(u, v)$, $(u, v) \in D_f$ sowie zwei Funktionen

$$\begin{aligned} u &= g(x, y), & (x, y) &\in D_g, \\ v &= h(x, y), & (x, y) &\in D_h. \end{aligned}$$

Einsetzen von g und h in f liefert die *verkettete (geschachtelte) Funktion*

$$F(x, y) = f(\underbrace{g(x, y)}_u, \underbrace{h(x, y)}_v), \quad (x, y) \in D_F.$$

Dabei dürfen die Definitionsbereiche D_g und D_h keinen leeren Schnitt haben und $D_F \subseteq D_g \cap D_h$ muss so gewählt werden, dass

$$(u, v) = (g(x, y), h(x, y)) \in D_f$$

für alle $(x, y) \in D_F$ gilt.

Beispiel 2.28 Für

$$f(u, v) = \frac{u^2 v^2}{u + v}, \quad D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) \mid v = -u\}$$

erhält man mit

$$u = g(x, y) = x \cdot \cos y \quad \text{ sowie } \quad v = h(x, y) = x \cdot \sin y, \quad D_g = D_h = \mathbb{R}^2$$

die verkettete Funktion

$$F(x, y) = f(x \cos y, x \sin y) = \frac{(x \cos y)^2 (x \sin y)^2}{x \cos y + x \sin y}$$

$$\stackrel{x \neq 0}{=} \frac{x^3 \cos^2 y \sin^2 y}{\cos y + \sin y} = \frac{x^3 \cos^2 y \sin^2 y}{\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - y)}, \quad (x, y) \in D_F$$

mit $D_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ und } y \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

△

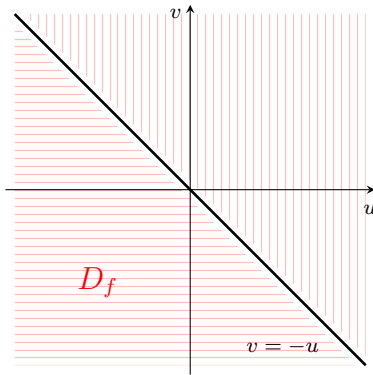


Abb. 2.14.a: D_f .

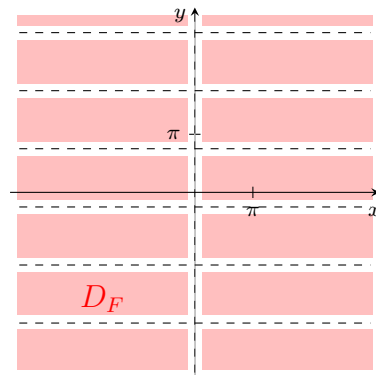


Abb. 2.14.b: D_F .

Satz 2.29 Die Funktionen $g(x, y)$ und $h(x, y)$ seien im Punkt (x_0, y_0) stetig. Die Funktion $f(u, v)$ sei in $(u_0, v_0) = (g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$ stetig. Dann ist die verkettete Funktion

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$$

im Punkt (x_0, y_0) stetig.

Beweis: Sei $\{\vec{x}_k\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} \right\}$ eine beliebige Folge mit $\vec{x}_k \neq \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{x}_0$.

Da g und h nach Voraussetzung stetig sind, gilt für $u_k := g(x_k, y_k)$ und $v_k := h(x_k, y_k)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k, y_k) = g(x_0, y_0) = u_0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \lim_{k \rightarrow \infty} h(x_k, y_k) = h(x_0, y_0) = v_0.$$

Weil f in (u_0, v_0) nach Voraussetzung stetig ist, folgt

$$\begin{array}{ccc}
& \lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k, v_k) = f(u_0, v_0) & \\
\parallel & & \parallel \\
\lim_{k \rightarrow \infty} f(g(x_k, y_k), h(x_k, y_k)) & & f(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0)) \\
\parallel & & \parallel \\
\lim_{k \rightarrow \infty} F(x_k, y_k) & \stackrel{(*)}{=} & F(x_0, y_0)
\end{array}$$

Da die Folge $\{\vec{x}_k\}$ beliebig gewählt war, gilt die Beziehung $(*)$ für *jede* gegen \vec{x}_0 konvergente Folge. Also gilt nach der Definition des Grenzwerts

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} F(x, y) = F(x_0, y_0),$$

d.h. $F(x, y)$ ist stetig in (x_0, y_0) . □

Beispiel 2.30 Es seien

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= \frac{u}{v}, \quad v \neq 0, \\
g(x, y) &= x^2 y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\
h(x, y) &= x + e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Dann ist die Verkettung

$$F(x, y) := f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{x^2 y^2}{x + e^y}$$

in jedem Punkt (x_0, y_0) , der $x_0 + e^{y_0} \neq 0$ erfüllt, stetig. △

Im allgemeinen Fall betrachtet man Verkettungen, bei denen die äußere reellwertige Funktion f von den m Variablen u_1, \dots, u_m abhängt und jede Variable u_j eine reellwertige Funktion der n Unabhängigen x_1, \dots, x_n darstellt. Dabei schreibt man abkürzend

$$\vec{g}(\vec{x}) := \begin{pmatrix} g_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ g_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Satz 2.31 (Stetigkeit von verketteten Funktionen) Die m reellwertigen Funktionen

$$g_j(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

seien im Punkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ stetig. Die reellwertige Funktion $f(\vec{u})$, $\vec{u} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^m$ sei in $\vec{u}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0)$ stetig. Dann ist die verkettete reellwertige Funktion

$$F(\vec{x}) := f(\vec{g}(\vec{x}))$$

im Punkt \vec{x}_0 stetig.

Beweis: Wie im Fall $m = n = 2$ (Satz 2.29). □

Beispiel 2.32

1. $m = 1, n > 1$: Es sei $f(u)$, $u \in D_f \subseteq \mathbb{R}$ eine elementare Funktion oder eine beliebige Verkettung elementarer Funktionen. Die Funktion $g(\vec{x})$, $\vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig in \vec{x}_0 und f sei stetig in $u_0 = g(\vec{x}_0)$. Dann ist $F(\vec{x}) := f(g(\vec{x}))$ in \vec{x}_0 stetig.

a) $f(u) = \sqrt{u}$, $g(x, y) = x - y$, $(x_0, y_0) = (3, -1)$.

Die verkettete Funktion

$$F(x, y) := f(g(x, y)) = \sqrt{x - y}$$

ist stetig in (x_0, y_0) .

b) $f(u) = e^u$, $g(x, y, z) = x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Die Verkettung

$$F(x, y, z) := f(g(x, y, z)) = e^{x+yz}$$

ist in ganz \mathbb{R}^3 stetig.

c) $\ln(1 + \cos(x + y))$ ist stetig in allen Punkten (x_0, y_0) mit $x_0 + y_0 \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

An diesen Ausnahmestellen ist die Funktion nicht definiert, da $\cos((2k + 1)\pi) = -1$ gilt und der Logarithmus von Null nicht existiert.

2. $m = 2, n = 3$: Es sei

$$f(u, v) = uv + \frac{1 + u}{1 + v}, \quad v \neq -1,$$

sowie

$$g_1(x, y, z) = x + y, \quad g_2(x, y, z) = xyz, \quad D_g = \mathbb{R}^3$$

und

$$F(x, y, z) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x + y)xyz + \frac{1 + x + y}{1 + xyz},$$

$$D_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + xyz \neq 0\}.$$

Dann ist F in $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ stetig, weil g_1 und g_2 in \vec{x}_0 stetig sind und f in

$$\vec{u}_0 = \vec{g}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 + 1 \\ 1 \cdot 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

stetig ist.

3. $m = 3, n = 1$: Es sei

$$f(u, v, w) = u + vw + \ln(2uw + v), \quad D_f = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 2uw + v > 0\}$$

sowie

$$g_1(x) = x^2, \quad g_2(x) = e^x, \quad g_3(x) = x + 2, \quad x \in D_g = \mathbb{R}.$$

Die verkettete Funktion

$$F(x) = f(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = x^2 + (x + 2)e^x + \ln(2x^2(x + 2) + e^x)$$

ist definiert für

$$2x^2(x + 2) + e^x > 0 \iff x > -2.031 \dots$$

und speziell in $x_0 = 0$ stetig, da g_1, g_2, g_3 in $x_0 = 0$ stetig sind und f in

$$\vec{g}(0) = \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \\ g_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

stetig ist.

4. Ist die Funktion $f(x, y)$ auf ganz \mathbb{R}^2 stetig in x und y , dann ist die in Polarkoordinaten transformierte Funktion

$$g(r, \varphi) := f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

stetig in r und φ .

△

2.4 Eigenschaften stetiger Funktionen

Die wichtigsten aus Band 1 bekannten Eigenschaften stetiger Funktionen gelten auch im Fall mehrerer Veränderlicher.

Satz 2.33 (Satz von der Beschränktheit und Satz vom Minimum und Maximum)

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sei kompakt, d.h. beschränkt und abgeschlossen. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig in D . Dann gelten

1. f ist beschränkt in D , d.h. es gibt eine positive reelle Zahl K , sodass $|f(\vec{x})| \leq K$ für alle $\vec{x} \in D$ gilt.
2. Es gibt zwei Punkte $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in D$ mit

$$f(\vec{x}_1) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_2) \quad \text{für alle } \vec{x} \in D.$$

\vec{x}_1 ist Stelle des absoluten Minimums von f , \vec{x}_2 Stelle des absoluten Maximums.

Beweis: Wie in Band 1 mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß und der Definition der Stetigkeit. \square

Den Zwischenwertsatz führen wir auf den in Band 1 behandelten Fall zurück.

Satz 2.34 (Zwischenwertsatz) Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig. \vec{x}_1 und \vec{x}_2 seien zwei Punkte aus D , die durch eine ganz in D verlaufende stetige Kurve

$$K: \vec{x} = \vec{g}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

mit Anfangspunkt \vec{x}_1 und Endpunkt \vec{x}_2 verbunden sind und für die

$$f(\vec{x}_1) = m < M = f(\vec{x}_2)$$

gilt. Dann nimmt f in D jeden Wert zwischen m und M an, d.h. es gilt $[m, M] \subseteq W_f$.

Beweis: Es sei

$$h(t) := f(\vec{g}(t)), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Dann ist h nach Satz 2.31 stetig als Verkettung stetiger Funktionen. Wegen $h(t_1) = f(\vec{x}_1) = m$ und $h(t_2) = f(\vec{x}_2) = M$ folgt $[m, M] \subseteq W_h$ nach dem Zwischenwertsatz für Funktionen einer Veränderlichen. Aus $W_h \subseteq W_f$ folgt somit die Behauptung. \square

Im einfachsten Fall liegt die Verbindungsstrecke beliebiger Punkte \vec{x}_1 und \vec{x}_2 aus D ebenfalls in D . Insbesondere im Fall $D = \mathbb{R}^n$ ist dies erfüllt. Dann kann man den Zwischenwertsatz auf beliebige Paare von Funktionswerten von f anwenden.

Beispiel 2.35

1. Für den Wertebereich von

$$f(x, y) = \frac{\cos x}{1 + (x - y)^2(x + \pi)^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

erhalten wir mit der Abschätzung

$$|f(x, y)| = \frac{\overbrace{|\cos x|}^{\leq 1}}{\underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} \underbrace{(x + \pi)^2}_{\geq 0}} \leq 1$$

die Inklusion $W_f \subseteq [-1, 1]$. Wegen $f(0, 0) = 1$ und $f(-\pi, 0) = -1$ gilt andererseits nach dem Zwischenwertsatz $[-1, 1] \subseteq W_f$, d.h. insgesamt ist $W_f = [-1, 1]$.

2. Der natürliche Definitionsbereich D_f von

$$f(x, y) = \frac{(1 - \arctan x) \cdot y \cdot |y|}{(x + |x|)^2 + y^2}$$

ergibt sich aus

$$(x + |x|)^2 + y^2 = 0 \iff x + |x| = 0 \text{ und } y = 0 \iff x \leq 0 \text{ und } y = 0$$

zu $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$. Man spricht in diesem Fall von der „geschlitzten Ebene“.

Speziell für $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir

$$f(-1, -1) = \frac{(1 + \frac{\pi}{4}) \cdot (-1) \cdot 1}{(-1 + 1)^2 + (-1)^2} = -1 - \frac{\pi}{4},$$

$$f(-1, 1) = \frac{(1 + \frac{\pi}{4}) \cdot 1 \cdot 1}{(-1 + 1)^2 + 1^2} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

Für $\vec{x} \in D$ ist $f(\vec{x})$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Die Verbindungsstrecke von \vec{x}_1 und \vec{x}_2 liegt nicht in D , aber es existiert eine stetige Kurve in Form eines Polygonzugs von \vec{x}_1 nach \vec{x}_2 , die ganz in D liegt.

Hieraus folgt die Teilmengeneigenschaft

$$\left[-1 - \frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\pi}{4}\right] \subseteq W_f.$$

Mit zusätzlichen Überlegungen zeigt man

$$W_f = \left(-1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right). \quad \triangle$$

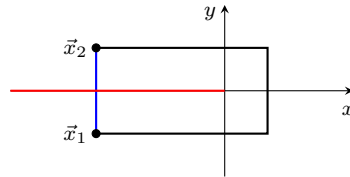


Abb. 2.15: Geschlitzte Ebene.

Kapitel 3

Differenzialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Differenzialrechnung wird verwendet, um das lokale Wachstumsverhalten von Funktionen zu beschreiben. Ist die reellwertige Funktion einer Veränderlichen, $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, an einem inneren Punkt x_0 ihres Definitionsbereichs D differenzierbar, existiert die Ableitung $f'(x_0)$ als Grenzwert des zugehörigen Differenzenquotienten. Es ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bzw. äquivalent

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{x - x_0} = 0. \quad (3.1)$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente T der Gestalt

$$T(x) = f(x_0) + \alpha_1(x - x_0), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $\alpha_1 = f'(x_0)$ besitzt. Es gibt also eine Gerade, an die sich der Graph von f an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ anschmiegt.

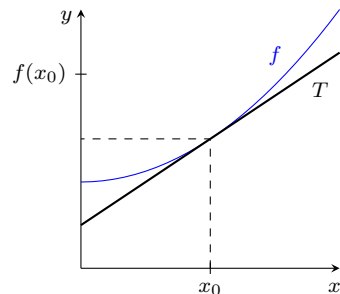


Abb. 3.1: Graph mit Tangente.

Im Hinblick auf das Folgende fügen wir im Nenner von (3.1) noch einen Betrag ein, wel-

cher den Grenzwert nicht ändert. Es ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{|x - x_0|} = 0. \quad (3.2)$$

Diese geometrische Sichtweise kann man auf Funktionen mehrerer Veränderlicher übertragen. Für eine reellwertige Funktion zweier Veränderlicher wird die Tangente zu einer *Tangentialebene* im \mathbb{R}^3 , an die sich die gewölbte Fläche $z = f(x, y)$ schmiegt. Der Betrag in (3.2) wird durch den Abstand im \mathbb{R}^2 ersetzt.

Definition 3.1 Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ heißt im inneren Punkt $(x_0, y_0) \in D$ (*vollständig* oder *total*) *differenzierbar*, wenn an dieser Stelle eine Tangentialebene E an den Graphen von f existiert, d.h. wenn es zwei Zahlen α_1 und α_2 gibt, sodass in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$

$$f(x, y) \approx E(x, y) := f(x_0, y_0) + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(y - y_0) \quad (3.3)$$

im Sinne von

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - E(x, y)}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|} = 0 \quad (3.4)$$

gilt.

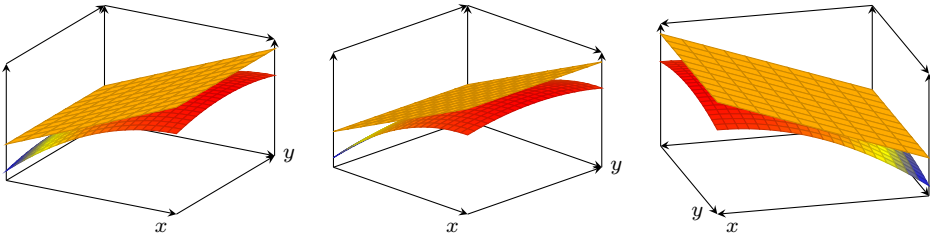


Abb. 3.2: Graph mit Tangentialebene.

In Gleichung (3.3) verbirgt sich die aus Band 1 bekannte Gleichung einer Ebene im \mathbb{R}^3 ,

$$E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0,$$

mit $z = E(x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0) = E(x_0, y_0)$ und Normalenvektor $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Wir erläutern nun, wie man zu einer differenzierbaren Funktion f und einer gegebenen Stelle (x_0, y_0) die Zahlen α_1, α_2 aus (3.3) bestimmt. Dazu betrachten wir den Grenzwert (3.4), dessen Existenz bei einer differenzierbaren Funktion gewährleistet ist, sodass wir zur Berechnung spezielle Kurven im \mathbb{R}^2 verwenden dürfen, auf denen sich (x, y) dem

Punkt (x_0, y_0) nähert. Dazu setzen wir zunächst die y -Komponente zu $y = y_0$ fest und erhalten

$$E(x, y_0) = f(x_0, y_0) + \alpha_1(x - x_0),$$

$$\|(x, y_0) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + 0^2} = |x - x_0|.$$

Gleichung (3.4) vereinfacht sich zu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0) - \alpha_1(x - x_0)}{|x - x_0|} = 0,$$

woraus

$$\alpha_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (3.5)$$

folgt. In (3.5) ist y_0 ein fest gewählter Parameterwert, nur die Variable x variiert. Setzt man

$$g(x) := f(x, y_0),$$

dann ist g eine reellwertige Funktion der reellen Unabhängigen x und der Bruch auf der rechten Seite von (3.5) wird zum Differenzenquotienten

$$\alpha_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Da dieser Grenzwert nach Voraussetzung existiert, ist g an der Stelle x_0 differenzierbar und es ist $\alpha_1 = g'(x_0)$. Analog berechnet man α_2 , indem man in (3.4) $x = x_0$ festhält und nur y variieren lässt.

Beispiel 3.2 Es sei $n = 2$, $f(x, y) = 1 + x^2 + xy + 4y$, $D = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Um zu zeigen, dass f an der Stelle (x_0, y_0) differenzierbar ist, bestimmen wir zunächst α_1 und α_2 in

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{f(x, y) - f(1, 2) - \alpha_1(x - 1) - \alpha_2(y - 2)}{\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 2)^2}} = 0 \quad (3.6)$$

nach der beschriebenen Methode. Wir setzen

$$g(x) := f(x, y_0) = f(x, 2) = 1 + x^2 + 2x + 8 = x^2 + 2x + 9$$

und erhalten so

$$\alpha_1 = g'(x_0) = g'(1) = 2x + 2 \Big|_{x=1} = 4.$$

Analog gilt $\alpha_2 = h'(y_0)$ für

$$h(y) := f(x_0, y) = f(1, y) = 1 + 1^2 + y + 4y = 5y + 2.$$

Aus $h'(y) \equiv 5$ folgt $\alpha_2 = h'(2) = 5$.

Wir überprüfen nun, dass mit den so berechneten Werten (3.6) gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
 & \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{f(x,y) - f(1,2) - 4(x-1) - 5(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1 + x^2 + xy + 4y - 12 - 4(x-1) - 5(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 - 2x + 1 + xy - 2x - y + 2}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \\
 &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(x-1)^2 + (x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}} \\
 & \quad \begin{array}{l} x-1 = r \cos \varphi \\ y-2 = r \sin \varphi \end{array} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r} \\
 &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \text{ bel.}}} \underbrace{r}_{\rightarrow 0} \underbrace{(\cos^2 \varphi + \cos \varphi \sin \varphi)}_{\text{beschränkt}} = 0.
 \end{aligned}$$

Damit ist die Differenzierbarkeit von f an der Stelle $(1, 2)$ nachgewiesen. \triangle

3.1 Partielle Ableitungen

Hält man bei einer Funktion $f(x, y)$, $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, eine Veränderliche fest und differenziert man die entstehende Funktion der einen Veränderlichen nach dieser, nennt man dies eine *partielle Ableitung* von f . Genauer gilt:

Definition 3.3 Gegeben sei eine Funktion $f(x, y)$ mit $(x, y) \in D$. (x_0, y_0) sei ein innerer Punkt von D , d.h. es gebe eine Umgebung $U(x_0, y_0) \subseteq D$. Ist dann für festes $y_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$g: x \mapsto f(x, y_0)$$

an der Stelle x_0 differenzierbar, existiert also der Grenzwert

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

so heißt dieser *partielle Ableitung* von $f(x, y)$ nach x im Punkt (x_0, y_0) und f heißt in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar. Man schreibt dafür

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Analog definiert man

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Die partielle Ableitung f_x ist in Abbildung 3.3 veranschaulicht. Der Graph der Funktion

$$g: x \mapsto f(x, y_0)$$

ist die Schnittkurve K des Graphen von f mit der Ebene $y = y_0$. Der Wert $f_x(x_0, y_0)$ gibt die Steigung der Tangente T an den Graphen von g im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ an.

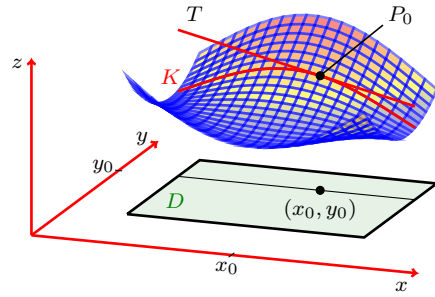


Abb. 3.3: Partielle Ableitung.

Die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen einer differenzierbaren Funktion f im Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ kann ebenfalls mit partiellen Ableitungen geschrieben werden. Es ist

$$E: \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.7)$$

mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ und Normalenvektor $\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 3.4 Für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2,$$

gilt

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 + y_0^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 = \frac{d}{dx} f(x, y_0) \Big|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Beim partiellen Differenzieren von $f(x, y)$ nach x verhält sich y wie eine Konstante.

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(5, 3) = \frac{d}{dy} f(5, y) \Big|_{y=3} = \frac{d}{dy} (25 + y^2) \Big|_{y=3} = 2y \Big|_{y=3} = 6. \quad \triangle$$

Für partielle Ableitungen gelten die gleichen Rechenregeln wie für gewöhnliche Ableitungen von Funktionen einer Veränderlichen. Beim partiellen Differenzieren werden alle Variablen, nach denen nicht differenziert wird, wie Konstanten behandelt.

Satz 3.5 Die im Folgenden aufgeführten partiellen Ableitungen mögen existieren. Dann gelten für zwei Funktionen $f, g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $\frac{\partial}{\partial x}(\alpha \cdot f \pm \beta \cdot g)(x, y) = \alpha \cdot f_x(x, y) \pm \beta \cdot g_x(x, y)$ für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
2. $\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g)(x, y) = f_x(x, y) \cdot g(x, y) + f(x, y) \cdot g_x(x, y)$,
3. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{g} \right)(x, y) = \frac{f_x(x, y)g(x, y) - f(x, y)g_x(x, y)}{g^2(x, y)}$, falls $g(x, y) \neq 0$.

Ist f eine reellwertige Funktion einer Veränderlichen, g eine reellwertige Funktion zweier Veränderlicher mit Wertebereich $W_g \subseteq D$, dann gilt die Kettenregel für partielle Ableitungen:

$$4. \quad \frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y)) = f'(g(x, y)) \cdot g_x(x, y).$$

Beweis: Wie für Verkettungen von Funktionen einer Veränderlichen, siehe Band 1. □

Beispiel 3.6 Die Funktion

$$f(x, y) = e^{xy}, \quad D = \mathbb{R}^2,$$

besitzt die partiellen Ableitungen

$$f_x(x, y) = ye^{xy}, \quad f_y(x, y) = xe^{xy}.$$

Im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 0)$ ergibt sich damit

$$f_x(1, 0) = 0 \cdot e^{1 \cdot 0} = 0 \quad \text{und} \quad f_y(1, 0) = 1 \cdot e^{1 \cdot 0} = 1. \quad \triangle$$

3.1.1 Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Ist die Funktion $f(x, y)$ für alle Punkte (x, y) einer Menge D partiell nach x differenzierbar, wird durch $f_x : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion zweier Veränderlicher definiert, welche man wiederum auf partielle Differenzierbarkeit untersuchen kann. Beispielsweise entsteht durch partielle Ableitung von f_x nach y die partielle Ableitung zweiter Ordnung

$$f_{xy} := (f_x)_y.$$

Die Reihenfolge der Differenziation bei f_{xy} ist durch die Reihenfolge der Variablen im Index festgelegt: Die Funktion f wird zuerst nach der Variablen x und anschließend nach y differenziert. Höhere partielle Ableitungen sind analog definiert.

Beispiel 3.7

1. Die partiellen Ableitungen von

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = e^{xy},$$

sind gegeben durch

$$f_x(x, y) = ye^{xy}, \quad f_y(x, y) = xe^{xy}.$$

Für die partiellen Ableitungen zweiter bzw. dritter Ordnung folgt

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (f_x)_x(x, y) = y^2 e^{xy}, \\ f_{yy}(x, y) &= (f_y)_y(x, y) = x^2 e^{xy}, \\ f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} = (f_y)_x(x, y) = f_{yx}(x, y), \\ f_{xyx}(x, y) &= (f_{xy})_x(x, y) = ye^{xy} + ye^{xy} + xy^2 e^{xy}, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

2. Für die Funktion

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = x^2 \sin y + |y|$$

ist

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= 2x \sin y, & g_x(2, 0) &= 0, \\ g_{xy}(x, y) &= 2x \cos y, & g_{xy}(2, 0) &= 4. \end{aligned}$$

$g_{yx}(2, 0)$ ist aber nicht definiert, da bereits $g_y(x, y)$ für $y = 0$ nicht definiert ist. \triangle

Im Allgemeinen kommt es bei der Berechnung partieller Ableitungen höherer Ordnung auf die Reihenfolge der Variablen an. Unter zusätzlichen Stetigkeitsvoraussetzungen gilt jedoch:

Satz 3.8 (Satz von Schwarz) Gegeben seien eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie ein innerer Punkt (x_0, y_0) von D . Die zweiten partiellen Ableitungen f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} und f_{yy} seien in einer Umgebung um (x_0, y_0) stetig. Dann gilt

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Der Beweis dieses Satzes erfolgt durch wiederholte Anwendung des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung auf geeignete Hilfsfunktionen. Auf die Details gehen wir nicht ein.

Der Satz von Schwarz gilt sinngemäß auch für partielle Ableitungen höherer Ordnung. Man wendet ihn an, um sich bei Funktionen, von denen man weiß, dass ihre partiellen Ableitungen höherer Ordnung stetig sind, die mehrfache Berechnung identischer partieller Ableitungen zu ersparen.

Beispiel 3.9 Gegeben sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xye^x + y \sin(xy).$$

f ist stetig als Komposition stetiger Funktionen. Jede partielle Ableitung beliebiger Ordnung ist ebenfalls eine Komposition aus Polynomen, Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen und daher wiederum stetig. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (x+1)ye^x + y^2 \cos(xy), \\ f_y(x, y) &= xe^x + \sin(xy) + xy \cos(xy), \\ f_{xx}(x, y) &= (x+2)ye^x - y^3 \sin(xy), \\ f_{xy}(x, y) &= (x+1)e^x + 2y \cos(xy) - xy^2 \sin(xy) = f_{yx}(x, y), \\ f_{yy}(x, y) &= 2x \cos(xy) - x^2 y \sin(xy), \\ f_{xxy}(x, y) &= (x+2)e^x - 3y^2 \sin(xy) - xy^3 \cos(xy) = f_{xyx}(x, y) = f_{yxx}(x, y). \quad \triangle \end{aligned}$$

3.2 Verallgemeinerung auf mehr als zwei Veränderliche

Die Verallgemeinerung der bisherigen Inhalte auf Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist so offensichtlich, dass wir nur die wichtigsten Aussagen kurz zusammenfassen. Um Doppelindizes beim Zugriff auf Komponenten zu vermeiden, bezeichnen wir einen fest gewählten Punkt im \mathbb{R}^n vorübergehend mit \vec{x}^* statt mit \vec{x}_0 .

Definition 3.10 Es sei \vec{x}^* ein innerer Punkt von $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an der Stelle \vec{x}^** , wenn es eine Tangentialhyperebene

$$H(\vec{x}) = f(\vec{x}^*) + \sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j - x_j^*), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.8)$$

gibt, sodass

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{f(\vec{x}) - H(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|} = 0 \quad (3.9)$$

gilt. Die lineare Funktion

$$\ell(\vec{x}) := \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.10)$$

nennt man (vollständiges oder totales) *Differenzial von f im Punkt \vec{x}^** .

Wenn eine Tangentialhyperebene gemäß Definition 3.10 existiert, dann ist die Zahl α_j in (3.8) die partielle Ableitung von f nach der Variablen x_j . Analog zu (3.7) kann die

Tangentialhyperebene an den Graphen einer Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Flächenpunkt $(\vec{x}^*, z^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, f(\vec{x}^*))$ kompakt in der Form

$$H: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \\ z^* \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}^*) \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden.

Die partielle Ableitung der Funktion $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ nach der Variablen x_j berechnet man dadurch, dass alle Veränderlichen bis auf die j -te festgehalten werden und die entstehende Funktion der einen Veränderlichen x_j nach dieser differenziert wird. Alle übrigen Variablen werden dabei also wie Konstanten behandelt. Die Rechenregeln (Satz 3.5) und der Satz von Schwarz (Satz 3.8) gelten sinngemäß.

Beispiel 3.11 Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion

$$g(u, v, w) = u + vw + u \sin v, \quad D_g = \mathbb{R}^3$$

lauten

$$g_u(u, v, w) = 1 + \sin v, \quad g_v(u, v, w) = w + u \cos v, \quad g_w(u, v, w) = v.$$

Die partiellen Ableitungen g_{uv} und g_{vu} erfüllen

$$g_{uv}(u, v, w) = g_{vu}(u, v, w) = \cos v.$$

△

3.3 Differenzierbare Funktionen

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Beziehungen zwischen Stetigkeit, partieller Differenzierbarkeit und (vollständiger oder totaler) Differenzierbarkeit. Aus den Definitionen 3.1 und 3.3 folgt, dass totale Differenzierbarkeit die partielle Differenzierbarkeit einschließt:

Satz 3.12 Eine im Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ (total) differenzierbare Funktion ist in \vec{x}^* bezüglich jeder Variablen x_k , $k = 1, \dots, n$, partiell differenzierbar.

Als Nächstes weisen wir nach, dass wie bei Funktionen einer Veränderlichen aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt. Differenzierbarkeit ist also auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit.

Satz 3.13 Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei im inneren Punkt $\vec{x}^* \in D$ differenzierbar, d.h. es gebe Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sodass (3.9) gilt. Dann ist f in \vec{x}^* stetig.

Beweis: Zu zeigen ist $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} f(\vec{x}) = f(\vec{x}^*)$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} (f(\vec{x}) - f(\vec{x}^*)) &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} (f(\vec{x}) - H(\vec{x}) - \underbrace{\sum_{j=1}^n \alpha_j (x_j - x_j^*)}_{\rightarrow 0}) \\ &= \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \underbrace{\frac{f(\vec{x}) - H(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|}}_{\rightarrow 0 \text{ nach (3.9)}} \cdot \underbrace{\|\vec{x} - \vec{x}^*\|}_{\rightarrow 0} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Für das Verhältnis von partieller und totaler Differenzierbarkeit hatten wir in Satz 3.12 festgestellt, dass eine im Punkt \vec{x}^* differenzierbare Funktion in \vec{x}^* bezüglich jeder Variablen partiell differenzierbar ist. Nun zeigen wir, dass die bloße Existenz partieller Ableitungen an einer Stelle \vec{x}^* eine sehr schwache Eigenschaft ist. Eine in \vec{x}^* partiell differenzierbare Funktion muss an dieser Stelle noch nicht einmal stetig sein.

- Satz 3.14**
1. Aus der Stetigkeit einer Funktion f folgt nicht die Existenz partieller Ableitungen von f . In anderen Worten: Eine Funktion, die an der Stelle \vec{x}^* stetig ist, muss an dieser Stelle nicht partiell differenzierbar sein.
 2. Aus der Existenz partieller Ableitungen von f folgt nicht die Stetigkeit von f . In anderen Worten: Eine Funktion, die an der Stelle \vec{x}^* partielle Ableitungen besitzt, muss an dieser Stelle nicht stetig sein.

Beweis:

Die behaupteten Eigenschaften lassen sich durch konkrete Beispiele belegen.

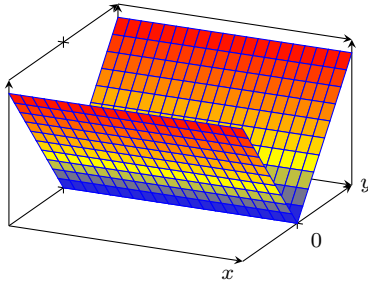


Abb. 3.4.a: Stetige, nicht partiell differenzierbare Funktion.

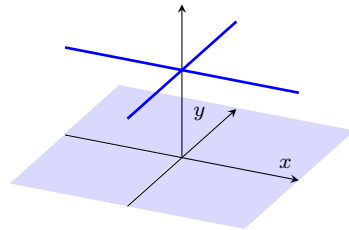


Abb. 3.4.b: Partiiell differenzierbare, unstetige Funktion.

zu 1.: Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = |y|,$$

ist stetig auf \mathbb{R}^2 , aber auf der x -Achse nicht partiell nach y differenzierbar.

zu 2.: Für das „herausgehobene Achsenkreuz“

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \text{ oder } y = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{h} = 0$$

sowie analog $f_y(0, 0) = 0$. Die partiellen Ableitungen f_x und f_y existieren im Nullpunkt, f ist im Nullpunkt aber unstetig. \square

Falls alle partiellen Ableitungen einer Funktion f nicht nur existieren, sondern zudem stetig sind, ist dies eine sehr starke Eigenschaft. Dann ist f differenzierbar. Wir formulieren den Sachverhalt für Funktionen zweier Veränderlicher. Die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Veränderliche ist offensichtlich.

Satz 3.15 Die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ der Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mögen in einer Umgebung $U = U(x_0, y_0)$ existieren und sie seien in (x_0, y_0) stetig. Dann ist f in (x_0, y_0) differenzierbar.

Beweis: Es ist zu zeigen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

gilt.

Da f_x und f_y nach Voraussetzung überall in U existieren, sind die Funktionen

$$g: x \mapsto f(x, y_0) \quad \text{und} \quad h: y \mapsto f(x_0, y)$$

jeweils in eindimensionalen Umgebungen um x_0 bzw. y_0 differenzierbar. Sofern alle im Folgenden auftretenden Punkte in U liegen, existieren nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung zwei Stellen ξ zwischen x und x_0 und η zwischen y und y_0 mit

$$g(x) - g(x_0) = g'(\xi)(x - x_0), \quad h(y) - h(y_0) = h'(\eta)(y - y_0).$$

Für f bedeutet dies, dass die Beziehungen

$$f(x, y) - f(x_0, y) = f_x(\xi, y)(x - x_0), \quad f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, \eta)(y - y_0)$$

gelten. Damit folgt

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(\xi, y)(x - x_0) + f_y(x_0, \eta)(y - y_0) \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0))(x - x_0) + (f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0))(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0)) \underbrace{\frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}}_{|\cdot| \leq 1} \\
&+ \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0)) \underbrace{\frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}}_{|\cdot| \leq 1}.
\end{aligned}$$

Mit $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ gilt auch $\xi \rightarrow x_0, \eta \rightarrow y_0$, und wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_x und f_y folgt schließlich

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \underbrace{(f_x(\xi, y) - f_x(x_0, y_0))}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}}_{\text{beschränkt}} = 0, \\
&\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \underbrace{(f_y(x_0, \eta) - f_y(x_0, y_0))}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}}_{\text{beschränkt}} = 0. \quad \square
\end{aligned}$$

Wichtige Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften sind im folgenden Diagramm zusammengefasst. Die Implikationen gelten jeweils nur in der dargestellten Richtung. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch. So kann eine Funktion auch dann total differenzierbar sein, wenn die partiellen Ableitungen unstetig sind.

Schematische Übersicht

$f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ existieren in $U(x_0, y_0)$ und sind in (x_0, y_0) stetig.

\Downarrow Satz 8.15

$f(x, y)$ ist in (x_0, y_0) (total) differenzierbar
(Tangentialebenen-Eigenschaft (8.4)).

Satz 8.13 \swarrow

$f(x, y)$ ist in (x_0, y_0) stetig.

\searrow Satz 8.12

$f(x, y)$ ist in (x_0, y_0) partiell
nach x und y differenzierbar.

Beispiel 3.16 Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{für } y \neq 0, \\ 0 & \text{für } y = 0. \end{cases}$$

1. *Stetigkeit:* Die Menge $D_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ ist offen. In D_1 ist f stetig als Komposition stetiger Funktionen. Um die Stetigkeit von f auch an einer beliebigen Stelle $(x_0, 0)$ zu zeigen, verwenden wir Satz 2.19 und die Menge $D_2 := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} \underbrace{y^2}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0$$

sowie

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_2}} 0 = 0.$$

Also existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y)$ und es ist

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f(x,y) = 0 = f(x_0, 0),$$

sodass f auch auf der x -Achse und somit in ganz \mathbb{R}^2 stetig ist.

2. *Partielle Differenzierbarkeit:* In der offenen Menge D_1 darf man die partiellen Ableitungen nach den in Band 1 vorgestellten Differenzierungsregeln berechnen. Für $y \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= y^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = y \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right), \\ f_y(x, y) &= 2y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \\ &= 2y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

Beide partiellen Ableitungen sind für $y \neq 0$ stetig als Komposition stetiger Funktionen.

Wir zeigen nun, dass f_x auf ganz \mathbb{R}^2 stetig ist. Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$f_x(x_0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, 0) - f(x_0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und damit trivialerweise auch

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_2}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_2}} 0 = 0 = f_x(x_0, 0).$$

Mit gleicher Argumentation wie bei der Stetigkeit von f folgt die Stetigkeit von f_x auf der x -Achse nun aus

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} f_x(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} \underbrace{y}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0 = f_x(x_0, 0).$$

Genauso zeigt man, dass $f_y(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existiert. Es ist

$$\begin{aligned} f_y(x_0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, 0+h) - f(x_0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{x_0}{h}\right) - 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{h}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x_0}{h}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0 \end{aligned}$$

für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. Aus der bloßen Existenz von $f_y(x_0, 0)$ folgt aber keineswegs, dass f_y auf der x -Achse auch stetig ist. Dazu müsste zusätzlich

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} f_y(x, y) = 0$$

gelten. Nähert man sich der Stelle $(x_0, 0)$ aber nicht auf der x -Achse, dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} f_y(x, y) &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} \left(2y \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right) \\ &= \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} \underbrace{2y}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{beschränkt}} - \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} x \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= - \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,0) \\ (x,y) \in D_1}} x \cdot \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \begin{cases} = 0 = f_y(x_0, 0) & \text{für } x_0 = 0, \\ \text{existiert nicht} & \text{für } x_0 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die partielle Ableitung $f_y(x, y)$ ist für $y \neq 0$ und im Ursprung stetig, aber in allen Punkten $(x_0, 0)$ mit $x_0 \neq 0$ unstetig.

3. *Totale Differenzierbarkeit im Ursprung:* Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ gilt

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)(x-0) - f_y(0, 0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} \\ = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{y}_{\rightarrow 0} \underbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}}_{|\cdot| \leq 1} \underbrace{\sin\left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{beschränkt}} = 0. \end{aligned}$$

Also ist f im Punkt $(0, 0)$ total differenzierbar. Alternativ folgt dies auch aus 2. und Satz 3.15. \triangle

Definition 3.17 Eine Funktion f , bei der alle partiellen Ableitungen erster Ordnung in einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig sind, heißt in D *stetig differenzierbar*. Die Menge aller in D stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^1(D)$ bezeichnet.

Analog bezeichnet $C^n(D)$ die Menge aller in D n -mal stetig differenzierbaren Funktionen, d.h. aller Funktionen, deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung n in D stetig sind.

3.3.1 Der Gradient einer differenzierbaren Funktion

Ist eine Funktion f als Komposition von elementaren Funktionen darstellbar, prüft man die Differenzierbarkeit von f in der Regel nicht mithilfe der Definition 3.10, da die Stetigkeit der partiellen Ableitungen häufig sofort ersichtlich ist. Das früher eingeführte vollständige Differenzial benötigt man aber unabhängig vom Nachweis der Differenzierbarkeit zur lokalen Approximation von f .

Definition 3.18 Fasst man bei einer im Punkt $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ partiell differenzierbaren Funktion f alle partiellen Ableitungen erster Ordnung zu einem Zeilenvektor zusammen, wird dieser Vektor *Gradient* von f an der Stelle \vec{x}^* genannt. Man schreibt dafür

$$\text{grad } f(\vec{x}^*) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(\vec{x}^*) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(\vec{x}^*) \quad \dots \quad \frac{\partial}{\partial x_n} f(\vec{x}^*) \right).$$

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher entspricht der Ableitung einer Funktion von einer Veränderlichen. Verwendet man in (3.10) die Schreibweise $df(\vec{x}^*) \cdot \vec{x}$ anstelle von $\ell(\vec{x})$, dann können das vollständige Differenzial der Funktion f im Punkt \vec{x}^* und die Tangentialhyperebene an den Graphen von f im Punkt $(\vec{x}^*, f(\vec{x}^*)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mithilfe des Gradienten kompakt geschrieben werden. Das vollständige Differenzial ist

$$df(\vec{x}^*) \cdot \vec{x} = \text{grad } f(\vec{x}^*) \cdot \vec{x},$$

die Gleichung der Hyperebene lautet

$$H(\vec{x}) = f(\vec{x}^*) + \text{grad } f(\vec{x}^*) \cdot (\vec{x} - \vec{x}^*).$$

Die Multiplikation bezeichnet dabei jeweils das Matrizenprodukt des Zeilenvektors $\text{grad } f(\vec{x}^*)$ mit dem Spaltenvektor \vec{x} bzw. $\vec{x} - \vec{x}^*$.

Beispiel 3.19 Es sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + xy + e^y$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Dann ist

$$f_x(x, y) = 1 + y, \quad f_x(1, 0) = 1, \quad f_y(x, y) = x + e^y, \quad f_y(1, 0) = 2.$$

Damit gilt

$$\text{grad } f(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$df(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{grad } f(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + 2y.$$

Die Gleichung der Tangentialebene E an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$z = f(x_0, y_0) + \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} = 2 + (x - 1) + 2y,$$

d.h.

$$x + 2y - z + 1 = 0. \quad \triangle$$

3.4 Die Kettenregel

Die für Funktionen einer Veränderlichen bekannte Kettenregel besitzt ein Pendant für Verkettungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Zur einfacheren Verständlichkeit formulieren wir die Kettenregel zuerst für den Spezialfall einer Verkettung, bei der eine äußere Funktion $f(u, v)$, $(u, v) \in D_f$ sowie zwei innere Funktionen

$$\begin{aligned} u &= g(x, y), & (x, y) &\in D_g, \\ v &= h(x, y), & (x, y) &\in D_h, \end{aligned}$$

gegeben sind. Wir setzen voraus, dass die Definitionsbereiche D_g und D_h keinen leeren Schnitt besitzen und dass $D_F \subseteq D_g \cap D_h$ so gewählt ist, dass

$$(u, v) = (g(x, y), h(x, y)) \in D_f \text{ für alle } (x, y) \in D_F$$

gilt. Einsetzen von g und h in f liefert die verkettete Funktion

$$F(x, y) = f(\underbrace{g(x, y)}_u, \underbrace{h(x, y)}_v), \quad (x, y) \in D_F,$$

für die die partiellen Ableitungen F_x und F_y bestimmt werden sollen, ohne dass $F(x, y)$ explizit berechnet wird.

Satz 3.20 (Spezialfall der Kettenregel) *Die Funktionen $u = g(x, y)$ und $v = h(x, y)$ seien in einer Umgebung des Punkts (x_0, y_0) definiert und in (x_0, y_0) differenzierbar. Die Funktion $f(u, v)$ sei in einer Umgebung des Punkts $(u_0, v_0) = (g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))$ definiert und in (u_0, v_0) differenzierbar. Dann ist die verkettete Funktion*

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$$

im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$F_x(x_0, y_0) = \text{grad } f(u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ h_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\begin{pmatrix} f_u(u_0, v_0) & f_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Zeilenvektor mit allen} \\ \text{partiellen Ableitungen} \\ \text{der äußeren Funktion}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ h_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Spaltenvektor mit der} \\ \text{gesuchten partiellen Ableitung} \\ \text{aller inneren Funktionen}}} \\
&= f_u(u_0, v_0) \cdot g_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0) \cdot h_x(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

sowie (in anderer Schreibweise) analog für die partielle Ableitung nach y

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Beweis(-idee): Wir setzen $u = g(x, y_0)$ und $v = h(x, y_0)$. Mit

$$u_0 = g(x_0, y_0), \quad v_0 = h(x_0, y_0)$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
F_x(x_0, y_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x, y_0), h(x, y_0)) - f(g(x_0, y_0), h(x_0, y_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(u, v) - f(u_0, v_0)}{x - x_0} \stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_u(u_0, v_0)(u - u_0) + f_v(u_0, v_0)(v - v_0)}{x - x_0} \\
&= f_u(u_0, v_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u - u_0}{x - x_0} + f_v(u_0, v_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{v - v_0}{x - x_0} \\
&= f_u(u_0, v_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{g(x, y_0) - g(x_0, y_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow g_x(x_0, y_0)} + f_v(u_0, v_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\frac{h(x, y_0) - h(x_0, y_0)}{x - x_0}}_{\rightarrow h_x(x_0, y_0)} \\
&= f_u(u_0, v_0) \cdot g_x(x_0, y_0) + f_v(u_0, v_0) \cdot h_x(x_0, y_0),
\end{aligned}$$

wobei die mit $(*)$ gekennzeichnete Umformung die Differenzierbarkeit von f an der Stelle (u_0, v_0) benutzt. Für $F_y(x_0, y_0)$ folgt die Behauptung analog. \square

Beispiel 3.21 Gegeben seien

$$\begin{aligned}
f(u, v) &= u + uv^2, \\
u &= g(x, y) = x \cos y, \quad v = h(x, y) = x \sin y, \\
F(x, y) &= f(g(x, y), h(x, y)), \quad (x_0, y_0) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Gesucht ist die partielle Ableitung $F_x(x_0, y_0)$. Zuerst berechnen wir die in der Kettenregel benötigten Hilfsgrößen.

1. $u_0 = g(x_0, y_0) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad v_0 = h(x_0, y_0) = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$
2. $\text{grad } f(u, v) = \begin{pmatrix} f_u(u, v) & f_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & 2uv \end{pmatrix},$
 $\text{grad } f(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1 + (\sqrt{3})^2 & 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$
3. $g_x(x, y) = \cos y \Rightarrow g_x(x_0, y_0) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$
 $h_x(x, y) = \sin y \Rightarrow h_x(x_0, y_0) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Die Kettenregel liefert nun

$$\begin{aligned} F_x \left(2, \frac{\pi}{3} \right) &= \text{grad } f(u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ h_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5. \end{aligned}$$

Die Probe bestätigt:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x \cos y, x \sin y) \\ &= x \cos y + x \cos y (x \sin y)^2 = x \cos y + x^3 \cos y \sin^2 y \\ &\Rightarrow F_x(x, y) = \cos y + 3x^2 \cos y \sin^2 y \\ &\Rightarrow F_x(x_0, y_0) = F_x \left(2, \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} + 3 \cdot 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 5. \end{aligned} \quad \triangle$$

In Beispiel 3.21 erscheint es einfacher, $F_x(x, y)$ nicht mit der Kettenregel, sondern durch Einsetzen von g und h in f und anschließende Differenziation des entstehenden Funktionsausdrucks nach x zu berechnen. Dies ist häufig der Fall, wenn man einen Rechenausdruck für F bestimmen kann. Die Bedeutung der Kettenregel liegt darin, dass sie auch gilt, wenn kein Rechenausdruck für F bekannt ist. Derartige Anwendungen begegnen uns in späteren Kapiteln.

In vektorieller Schreibweise lautet die Kettenregel im allgemeinen Fall:

Satz 3.22 (Kettenregel) Die m reellwertigen Funktionen

$$u_j = g_j(\vec{x}), \quad \vec{x} \in D_g \subseteq \mathbb{R}^n, \quad j = 1, \dots, m,$$

seien im inneren Punkt $\vec{x}^* \in D_g$ differenzierbar und es sei $\vec{g}(\vec{x}) := (g_1(\vec{x}), \dots, g_m(\vec{x}))^T$. Der Punkt $\vec{u}^* = \vec{g}(\vec{x}^*)$ sei ein innerer Punkt des Definitionsbereichs D_f der reellwertigen

Funktion $f(\vec{u})$, $\vec{u} \in D_f \subseteq \mathbb{R}^m$, und f sei in \vec{u}^* differenzierbar. Dann ist die verkettete reellwertige Funktion

$$F(\vec{x}) := f(\vec{g}(\vec{x}))$$

im Punkt \vec{x}^* differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} F(\vec{x}^*) &= \text{grad } f(\vec{u}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{g}(\vec{x}^*) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f(\vec{u}^*) \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial u_m} f(\vec{u}^*) \right)}_{\substack{\text{Zeilenvektor mit allen} \\ \text{partiellen Ableitungen} \\ \text{der äußeren Funktion}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_k} g_1(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_k} g_m(\vec{x}^*) \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Spaltenvektor mit der} \\ \text{gesuchten partiellen Ableitung} \\ \text{aller inneren Funktionen}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1} f(\vec{u}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} g_1(\vec{x}^*) \cdots + \frac{\partial}{\partial u_m} f(\vec{u}^*) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} g_m(\vec{x}^*), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Beweis: Wie im Fall $m = n = 2$ (Satz 3.20). □

Die Kettenregel ist nicht nur eine Berechnungsformel für die partiellen Ableitungen von F . Sie beinhaltet darüber hinaus die Feststellung, dass Kompositionen differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind. Ist F eine Verkettung elementarer Funktionen, dann erspart die Kettenregel in inneren Punkten des Definitionsbereichs von F den mühsamen Nachweis der Differenzierbarkeit mithilfe der Definition 3.10 oder den Nachweis der Stetigkeit partieller Ableitungen von F .

Beispiel 3.23 Die folgenden Beispiele geben einen Eindruck von der Reichhaltigkeit möglicher Verkettungen differenzierbarer Funktionen und der jeweiligen Form der Kettenregel.

1. $m = 1, n > 1$: Ist f eine reellwertige Funktion einer Veränderlichen, g eine reellwertige Funktion mehrerer Veränderlicher mit $W_g \subseteq D_f$, dann gilt die Kettenregel für partielle Ableitungen (vgl. Satz 3.5.4):

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(g(\vec{x}^*)) = f'(g(\vec{x}^*)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} g(\vec{x}^*).$$

Beispiele:

a) $f(u) = \sqrt{u}, \quad g(x, y) = x - y, \quad (x_0, y_0) = (3, -1).$

Die verkettete Funktion

$$F(x, y) := f(g(x, y)) = \sqrt{x - y}$$

ist differenzierbar in $(x_0, y_0) = (3, -1)$ und es ist

$$F_x(3, -1) = \frac{1}{2\sqrt{x - y}} \cdot 1 \Big|_{(x, y) = (3, -1)} = \frac{1}{4}.$$

- b) $f(u) = e^u$, $g(x, y, z) = x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Die Verkettung

$$F(x, y, z) := f(g(x, y, z)) = e^{x+yz}$$

ist differenzierbar in \mathbb{R}^3 und es ist

$$F_z(x, y, z) = e^{x+yz} \cdot y.$$

- c) $\ln(1 + \cos(x + y))$ ist in allen Punkten (x_0, y_0) mit $x_0 + y_0 \neq (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, differenzierbar und es ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \ln(1 + \cos(x + y)) &= \frac{1}{1 + \cos(x + y)} \cdot (-\sin(x + y)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \ln(1 + \cos(x + y)). \end{aligned}$$

2. $m = 2, n = 3$: Es sei

$$f(u, v) = uv + \frac{1 + u}{1 + v}, \quad v \neq -1,$$

sowie

$$g_1(x, y, z) = x + y, \quad g_2(x, y, z) = xyz, \quad D_g = \mathbb{R}^3$$

und

$$F(x, y, z) = f(g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (x + y)xyz + \frac{1 + x + y}{1 + xyz},$$

$$D_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 + xyz \neq 0\}.$$

Gesucht ist $F_z(x_0, y_0, z_0)$.

Mit der Kettenregel folgt:

a) $u_0 = g_1(x_0, y_0, z_0) = 1 + 1 = 2, \quad v_0 = g_2(x_0, y_0, z_0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

b) $\text{grad } f(u, v) = \left(v + \frac{1}{1+v} \quad u - \frac{1+u}{(1+v)^2} \right),$

$$\text{grad } f(u_0, v_0) = \left(1 + \frac{1}{2} \quad 2 - \frac{3}{4} \right) = \left(\frac{3}{2} \quad \frac{5}{4} \right).$$

c) $\frac{\partial}{\partial z} g_1(x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} g_1(x_0, y_0, z_0) = 0,$

$$\frac{\partial}{\partial z} g_2(x, y, z) = xy \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} g_2(x_0, y_0, z_0) = 1 \cdot 1 = 1.$$

d) $F_z(1, 1, 1) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \text{grad } f(u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} g_1(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial}{\partial z} g_2(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{4}.$$

Die Probe beweist:

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= f(x + y, xyz) = (x + y)xyz + \frac{1 + x + y}{1 + xyz} \\
 &= x^2yz + xy^2z + \frac{1 + x + y}{1 + xyz} \\
 \Rightarrow F_z(x, y, z) &= x^2y + xy^2 - \frac{1 + x + y}{(1 + xyz)^2} \cdot xy \\
 \Rightarrow F_z(1, 1, 1) &= 1 + 1 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.
 \end{aligned}$$

3. $m = 3, n = 1$: Gegeben seien

$$\begin{aligned}
 f(u, v, w) &= u + vw + \ln(2uw + v), \quad D_f = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 2uw + v > 0\}, \\
 u &= g_1(t) = t^2, \quad v = g_2(t) = e^t, \quad w = g_3(t) = 2 + t, \quad D_g = \mathbb{R}, \\
 F(t) &= f(g_1(t), g_2(t), g_3(t)), \quad t_0 = 0.
 \end{aligned}$$

Gesucht ist $F'(0)$. Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$a) u_0 = g_1(t_0) = 0^2 = 0, \quad v_0 = g_2(t_0) = e^0 = 1, \quad w_0 = g_3(t_0) = 2 + 0 = 2.$$

$$b) f_u(u, v, w) = 1 + \frac{1}{2uw + v} \cdot 2w, \quad f_u(u_0, v_0, w_0) = 1 + \frac{4}{2 \cdot 0 \cdot 2 + 1} = 5,$$

$$f_v(u, v, w) = w + \frac{1}{2uw + v}, \quad f_v(u_0, v_0, w_0) = 2 + \frac{1}{1} = 3,$$

$$f_w(u, v, w) = v + \frac{1}{2uw + v} \cdot 2u, \quad f_w(u_0, v_0, w_0) = 1 + \frac{0}{1} = 1.$$

$$c) g'_1(0) = 0, \quad g'_2(0) = e^0 = 1, \quad g'_3(0) = 1.$$

$$d) F'(0) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \text{grad } f(0, 1, 2) \cdot \begin{pmatrix} g'_1(0) \\ g'_2(0) \\ g'_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4.$$

Die Probe zeigt:

$$\begin{aligned}
 F(g_1(t), g_2(t), g_3(t)) &= t^2 + e^t(2 + t) + \ln(2t^2(2 + t) + e^t) \\
 \Rightarrow F'(t) &= 2t + e^t(2 + t) + e^t + \frac{1}{2t^2(2 + t) + e^t} \cdot (8t + 6t^2 + e^t) \\
 \Rightarrow F'(0) &= 0 + 2 + 1 + \frac{1}{1} \cdot 1 = 4.
 \end{aligned}$$

△

3.5 Anwendbarkeit der Differenziationsregeln

Die in den Sätzen 3.5, 3.20 und 3.22 formulierten Ableitungsregeln setzen alle die Differenzierbarkeit der beteiligten Funktionen voraus. Für eine Komposition elementarer Funktionen ist dies in inneren Punkten des Definitionsbereichs gewährleistet. Bei abschnittsweise definierten Funktionen ist die Differenzierbarkeit an den Nahtstellen gesondert zu

untersuchen. Dazu sind die partiellen Ableitungen entweder durch die Diskussion von Hilfsfunktionen einer Veränderlichen oder unter Verwendung von Differenzenquotienten zu berechnen.

Wir illustrieren dies anhand eines rechnerisch einfachen Beispiels, welches die schwierige Problematik beleuchten soll.

Beispiel 3.24

$$1. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{für } x < 0, \\ x - y & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Die Mengen

$$M_1 := \{(x, y) \mid x < 0\}, \quad M_2 := \{(x, y) \mid x > 0\}$$

sind offen und enthalten keine Punkte der Nahtstellenmenge

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

In diesen Mengen ist f jeweils als Polynom differenzierbar und es ist

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ -1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Die partielle Ableitung f_y an einer Stelle $(0, y_0)$ ist definiert als Ableitung der Funktion

$$g: y \mapsto f(0, y) = -y$$

an der Stelle y_0 , sofern $g'(y_0)$ existiert. Wegen $g'(y) = -1$ für alle y ist f überall partiell nach y differenzierbar und es ist

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ -1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Analog ist die partielle Ableitung f_x an einer Stelle $(0, y_0)$ die Ableitung der Funktion

$$h: x \mapsto f(x, y_0) = \begin{cases} x + y_0 & \text{für } x < 0, \\ x - y_0 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$. Für $y_0 \neq 0$ besitzt diese Funktion an der Stelle $x = 0$ eine Sprungstelle, sodass $h'(0)$ und somit auch $f_x(0, y_0)$ nicht existiert. Nur im Fall $y_0 = 0$ ist $h(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar mit $f_x(0, 0) = h'(0) = 1$.

$$2. f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{für } x < 0, \\ y - x & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Mit gleicher Begründung wie im ersten Beispiel gilt

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ -1 & \text{für } x > 0, \end{cases} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Die partielle Ableitung f_y an einer Stelle $(0, y_0)$ stimmt überein mit der Ableitung der Funktion

$$g: y \mapsto f(0, y) = y$$

an der Stelle y_0 . Also ist

$$f_y(x, y) = 1 \quad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Falls die partielle Ableitung f_x an einer Stelle $(0, y_0)$ existiert, ist sie die Ableitung der Funktion

$$h: x \mapsto f(x, y_0) = \begin{cases} x + y_0 & \text{für } x < 0, \\ y_0 - x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$. Die Funktion h ist stetig, besitzt aber einen Knick bei $x = 0$. Daher existiert $f_x(0, y_0)$ für kein $y_0 \in \mathbb{R}$.

Dies lässt sich auch mit Differenzenquotienten nachrechnen. Die linksseitige Ableitung ist

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(0 + h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{h + y_0 - y_0}{h} = 1,$$

aber die rechtsseitige Ableitung lautet

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0 + h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{y_0 - h - y_0}{h} = -1.$$

Daher ist f auf der y -Achse nicht partiell nach x differenzierbar.

$$3. \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} x^2 - y^2 & \text{für } |x| = |y|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unverstandenes Differenzieren nach den „üblichen“ Regeln liefert

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{für } |x| = |y|, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad f_y(x, y) = \begin{cases} -2y & \text{für } |x| = |y|, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Korrektur dieser Rechnung wird als Übungsaufgabe empfohlen.

△

Kapitel 4

Anwendungen der Differenzialrechnung

Differenzialrechnung besitzt vielfältige Anwendungen. Sie dient unter anderem zur Berechnung von Steigungen auf gewölbten Flächen, von Normalenvektoren an Kurven und Flächen sowie von Näherungswerten nichtlinearer Gleichungssysteme. Weiter ermöglicht Differenzialrechnung die Approximation von Funktionen mehrerer Veränderlicher durch Polynome sowie die Berechnung von Extremwerten. Dieser Aufgabenstellung ist anschließend ein eigenes Kapitel gewidnet.

4.1 Die Richtungsableitung

Auf der Erdoberfläche kann man einem Punkt P und einer Himmelsrichtung \vec{h} die Steigung eines durch P in die Richtung \vec{h} verlaufenden Weges zuordnen. Diese Eigenschaft übertragen wir nun auf eine gewölbte Fläche

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D_f.$$

Gegeben seien eine Funktion $f(x, y)$, $(x, y) \in D$, ein innerer Punkt $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D$ sowie ein Einheitsvektor

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \quad h_1^2 + h_2^2 = 1,$$

in der (x, y) -Ebene. Durch

$$\vec{x}(t) := \vec{x}_0 + t \cdot \vec{h}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ist dann eine Gerade g in der (x, y) -Ebene durch \vec{x}_0 mit Richtungsvektor \vec{h} definiert. Der Schnitt der Fläche $z = f(x, y)$ mit der Ebene E , die senkrecht auf der (x, y) -Ebene steht

und die Gerade g enthält, besteht aus einer Schnittkurve K auf der Fläche. Existiert eine in E liegende Tangente an K im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dann bezeichnet man ihre Steigung als Richtungsableitung von f an der Stelle \vec{x}_0 in Richtung von \vec{h} .

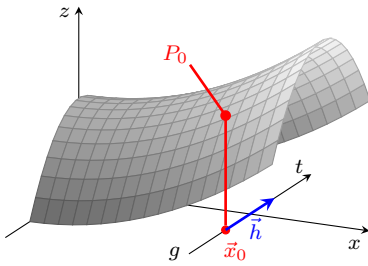
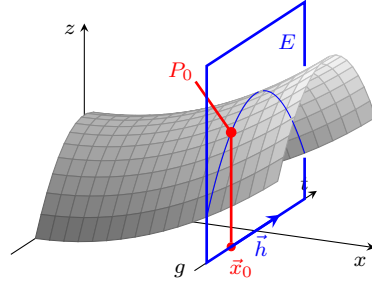
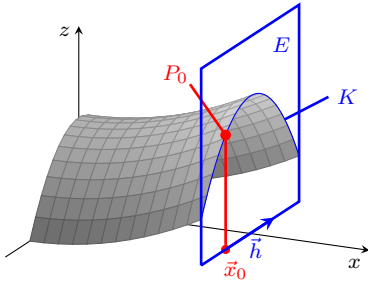
Abb. 4.1.a: Fläche $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.Abb. 4.1.b: Schnitt der Fläche mit Ebene E .

Abb. 4.1.c: Schnittkurve in der Schnittebene.

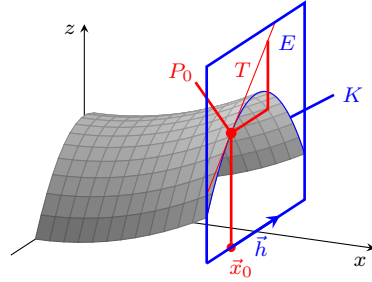


Abb. 4.1.d: Schnittkurve mit Tangente.

Definition 4.1 Gegeben seien eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ein innerer Punkt \vec{x}_0 von D sowie ein Einheitsvektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$. Falls dann der Grenzwert

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(\vec{x}_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t \cdot \vec{h}) - f(\vec{x}_0)}{t}. \quad (4.1)$$

existiert, nennt man ihn *Richtungsableitung von f im Punkt \vec{x}_0 in Richtung von \vec{h}* .

Zwei spezielle Richtungsableitungen von Funktionen zweier Veränderlicher kennen wir bereits. Für $\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ erhält man als Richtungsableitung die partielle Ableitung f_x , für $\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhält man f_y .

Falls die Funktion f im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar ist, kann man sich die Berechnung des Differenzenquotienten (4.1) ersparen. Mit der Kettenregel gilt dann für $\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0, y_0) = \frac{d}{dt} f(\underbrace{x_0 + t \cdot h_1}_{=: \varphi(t)}, \underbrace{y_0 + t \cdot h_2}_{=: \psi(t)}) \Big|_{t=0} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \varphi'(0) \\ \psi'(0) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\varphi'(t) \equiv h_1, \quad \psi'(t) \equiv h_2$$

folgt weiter

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0, y_0) = \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{h}.$$

Diese Formel gilt mit gleicher Herleitung auch für Richtungsableitungen von differenzierbaren Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen, wenn \vec{h} ein normierter Richtungsvektor im \mathbb{R}^n ist.

Satz 4.2 Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar im inneren Punkt \vec{x}_0 von D und $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ sei ein beliebiger Einheitsvektor. Dann existiert die Richtungsableitung von f im Punkt \vec{x}_0 in Richtung von \vec{h} und es ist

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}. \quad (4.2)$$

Ist f nicht differenzierbar, muss die Richtungsableitung nicht existieren. Falls sie für eine gegebene Richtung \vec{h} existiert, wird sie über den Grenzwert (4.1) berechnet.

Beispiel 4.3

1. Gegeben seien die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \cdot y,$$

sowie

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Da f differenzierbar ist, folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(1, 2) = \text{grad } f(1, 2) \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

2. Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \cdot y > 0 \text{ oder } (x, y) = (0, 0), \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion ist im Ursprung unstetig, also nicht differenzierbar. Die partiellen Ableitungen $f_x(0, 0)$ und $f_y(x, y)$ existieren nicht. Die Richtungsableitung in Richtung der ersten Winkelhalbierenden existiert jedoch.

Für $\vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ gilt nämlich

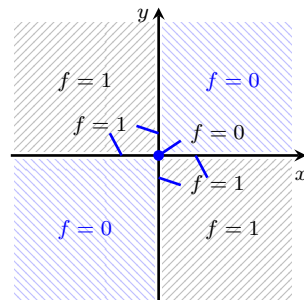


Abb. 4.2: Unstetige Funktion.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(0 + t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 + t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) - f(0, 0)}^{x \cdot y = \frac{1}{2}t^2 > 0 \Rightarrow f = 0}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0 = \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(0, 0).$$

3. Für

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}, \quad \vec{x}_0 = (0, 0)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h \cdot 0|} - \sqrt{|0 \cdot 0|}}{h} = 0, \\ f_y(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot h|} - 0}{h} = 0, \\ \Rightarrow \operatorname{grad} f(0, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wäre f im Ursprung differenzierbar, müsste jede Richtungsableitung existieren und wegen (4.2) den Wert Null besitzen. Mit $\vec{h} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ gilt jedoch nach (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 + t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{1}{2}t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |t|}{t}. \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, denn es ist

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |t|}{t} = +\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot |t|}{t} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Daraus folgt zunächst, dass diese Richtungsableitung von f im Ursprung nicht existiert, und weiter schließt man, dass f an dieser Stelle nicht differenzierbar ist.

4. Es sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = x^2, \ x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf der Normalparabel

$$K: y = x^2, \quad x > 0$$

ist im ersten Quadranten der Funktionswert 1 festgelegt, überall sonst wird der Funktionswert 0 angenommen.

Ist \vec{h} ein beliebiger normierter Richtungsvektor, dann existiert eine Zahl $\varepsilon > 0$, sodass das Geradenstück

$$G: \left\{ \begin{pmatrix} t \cdot h_1 \\ t \cdot h_2 \end{pmatrix} \mid t \in [0, \varepsilon] \right\}$$

die Kurve K nicht schneidet. Also gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + t \cdot h_1, 0 + t \cdot h_2) - f(0,0)}{t} \stackrel{t \leq \varepsilon}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0.$$

Alle Richtungsableitungen im Ursprung existieren und sind Null. Für den Gradienten folgt $\text{grad } f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ und weiter gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(0,0) = \text{grad } f(0,0) \cdot \vec{h}$$

für jede Richtung \vec{h} . Die Funktion f ist im Nullpunkt aber nicht stetig und kann daher an dieser Stelle auch nicht differenzierbar sein. \triangle

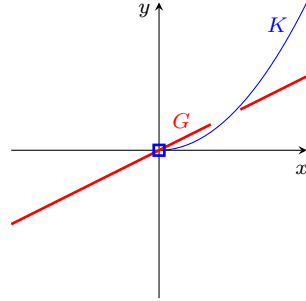


Abb. 4.3: Richtungsableitung in $(0,0)$.

4.1.1 Richtung des steilsten Anstiegs

Ist $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar mit $\text{grad } f(x_0, y_0) \neq (0 \ 0)^T$ und ist \vec{h} ein Einheitsvektor in der (x, y) -Ebene, der mit dem Gradienten von f an der Stelle (x_0, y_0) den Winkel φ einschließt, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0, y_0) &= \text{grad } f(x_0, y_0) \cdot \vec{h} \\ &= \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| \cdot \underbrace{\|\vec{h}\|}_{=1} \cdot \cos \varphi \\ &= \|\text{grad } f(x_0, y_0)\| \underbrace{\cos \varphi}_{-1 \leq \cdot \leq 1} \end{aligned}$$

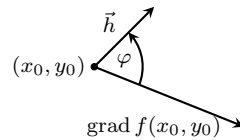


Abb. 4.4: Skalarprodukt.

Die Richtungsableitung wird für $\cos \varphi = 1$ maximal, was für $\varphi = 0$, d.h. in Richtung des Gradienten erfüllt ist. Der Gradient zeigt also in der (x, y) -Ebene in die Richtung des steilsten Anstiegs der Fläche $z = f(x, y)$. Im \mathbb{R}^n gilt allgemein:

Satz 4.4 Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar im inneren Punkt \vec{x}_0 von D und es sei $\text{grad } f(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Dann wird der maximale Wert der Richtungsableitung von f im Punkt \vec{x}_0 in Richtung des Einheitsvektors in Richtung des Gradienten angenommen.

Der Betrag des steilsten Anstiegs entspricht der Länge des Gradienten. Für $\vec{h} = \frac{\text{grad } f(\vec{x}_0)}{\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|}$ gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}} = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \frac{\text{grad } f(\vec{x}_0)}{\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|} = \frac{\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|^2}{\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|} = \|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|.$$

Analog nimmt die Richtungsableitung für $\vec{h} = -\frac{\text{grad } f(\vec{x}_0)}{\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|}$, also in der dem Gradienten entgegengesetzten Richtung, den kleinsten Wert $-\|\text{grad } f(\vec{x}_0)\|$ an.

Bemerkung 4.5 Die Formulierung in Satz 4.4 widerspricht unserer Vereinbarung, dass der Gradient ein Zeilenvektor ist, Richtungsvektoren aber Spaltenvektoren sind. Gemeint ist natürlich „in Richtung des Einheitsvektors in Richtung des als Spaltenvektors geschriebenen Gradienten“. Streng genommen muss man bereits in der Herleitung der Formel an einigen Stellen transponierte Vektoren verwenden. Wir haben darauf verzichtet, um den Sachverhalt nicht durch Formalismen unnötig zu komplizieren. \diamond

4.2 Normalenvektoren an Kurven und Flächen

Für eine glatte ebene Kurve K , die durch die Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

definiert ist, hatten wir in Band 1 festgestellt, dass der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{t}_0 = \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$$

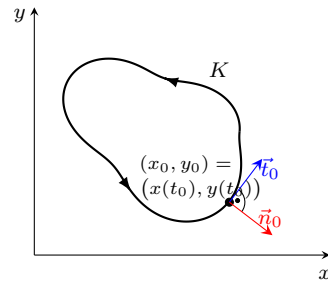


Abb. 4.5: Normalenvektor an ebene Kurve.

ein Tangentialvektor an K im Kurvenpunkt $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ ist. Durch Vertauschen der Komponenten und Änderung eines Vorzeichens erhält man einen Normalenvektor an K in diesem Kurvenpunkt:

$$\vec{n}_0 = \pm \begin{pmatrix} -\dot{y}(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}.$$

Im Fall der durch den Graphen einer differenzierbaren Funktion beschriebenen Fläche im \mathbb{R}^3 ,

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (4.3)$$

definiert man den Normalenvektor an die durch (4.3) dargestellte Fläche im Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ als Normalenvektor an Tangentialebene in diesem Punkt. Gemäß Gleichung (3.7) der Tangentialebene ist

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

ein Normalenvektor.

Unter Verwendung der Kettenregel leiten wir in diesem Abschnitt Formeln zur Berechnung von Normalenvektoren an implizit definierte Kurven und Flächen her.

4.2.1 Normalenvektoren an Höhenlinien

Die ebene Kurve K sei Teil einer Höhenlinie zur Höhe c der differenzierbaren Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Wir nehmen an, dass K durch eine unbekannte Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

beschrieben wird, und setzen

$$g(t) := f(x(t), y(t)).$$

Da K eine Höhenlinie von f ist, ist g eine konstante Funktion, $g(t) \equiv c$, deren Ableitung überall verschwindet. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$0 = g'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \text{grad } f(x, y) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Der Gradient von f steht also in jedem Kurvenpunkt senkrecht zum Tangentialvektor an K . Folglich ist $\text{grad } f(x_0, y_0)$ ein Normalenvektor von K im Kurvenpunkt (x_0, y_0) .

Kennt man von einer Höhenlinie der differenzierbaren Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ einen Punkt $P = (x_0, y_0)$, dann liefert der Gradient einen Normalenvektor an die Höhenlinie in P . Jeder dazu orthogonale Vektor ist ein Tangentialvektor an diese Höhenlinie, mit dem man den ungefähren Verlauf der Höhenlinie in der Nähe von P verfolgen kann.

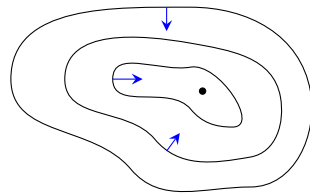


Abb. 4.6: Richtung des steilsten Anstiegs.

Beispiel 4.6 Auf jeder Wanderkarte verläuft die Richtung des steilsten Anstiegs, welche der Richtung des Gradienten entspricht, senkrecht zu den Höhenlinien (Abbildung 4.6). \triangle

4.2.2 Normalenvektoren an implizit definierte Flächen im \mathbb{R}^3

Durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

mit einer differenzierbaren Funktion $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ werde eine Fläche im \mathbb{R}^3 in impliziter Gestalt definiert. Der Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sei ein Flächenpunkt, d.h. es gelte $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Dann steht der Vektor

$$\text{grad } F(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) & F_y(x_0, y_0, z_0) & F_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

in P_0 senkrecht auf der Fläche.

Zum Beweis betrachten wir eine in der Fläche verlaufende differenzierbare Kurve

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

welche P_0 als inneren Punkt enthält. Für ein $t_0 \in (t_1, t_2)$ gelte also

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0.$$

Da die Kurve Teil der Fläche ist, gilt

$$F(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0,$$

woraus speziell für $t = t_0$

$$0 = \frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t)) \Big|_{t=t_0} = \text{grad } F(x_0, y_0, z_0) \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \\ \dot{z}(t_0) \end{pmatrix}$$

folgt. Der Gradient von F steht somit senkrecht zum Tangentialvektor jeder innerhalb der Fläche durch P_0 verlaufenden Kurve und daher auch zur Fläche selbst.

Beispiel 4.7

1. Die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 wird durch die Gleichung

$$\underbrace{x^2 + y^2 + z^2 - 1}_{=: F(x, y, z)} = 0$$

beschrieben. Ein Normalenvektor an diese Fläche im Punkt (x_0, y_0, z_0) ist gegeben durch

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0, z_0) \\ F_y(x_0, y_0, z_0) \\ F_z(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Diese Aussage kann man anschaulich verifizieren. Bei einer Kugel im \mathbb{R}^3 mit Mittelpunkt im Ursprung ist der Ortsvektor des Punkts P_0 auf der Kugeloberfläche auch Normalenvektor an die Kugeloberfläche in diesem Punkt.

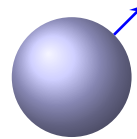


Abb. 4.7: Normalenvektor an Kugel.

2. Für explizit durch

$$z = f(x, y)$$

gegebene Flächen im \mathbb{R}^3 kann man Normalenvektoren ebenfalls nach der obigen Formel berechnen. Eine implizite Darstellung erhält man durch

$$f(x, y) - z = 0.$$

Setzt man $F(x, y, z) := f(x, y) - z$ und $z_0 := f(x_0, y_0)$, dann folgt

$$\text{grad } F(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) & -1 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor an die Fläche $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, in Übereinstimmung mit (4.4). \triangle

4.3 Implizite Funktionen

Die erste Motivation für diesen Abschnitt liefert das Vorgehen bei der klassischen Goldsuche. In einen Berg, in dem eine Goldader vermutet wurde, deren genaue Lage aber unbekannt war, wurden an verschiedenen Stellen Stollen gegraben. Wurde bis zu einer gewissen Tiefe kein Gold gefunden, gab man den Stollen auf und legte an einer anderen Stelle einen neuen an. Stieß man jedoch auf Gold, war es ökonomischer, keine weiteren Stollen anzulegen, sondern der Goldader mit der Grabung zu folgen. Dazu musste lediglich die Richtung der Goldader an der Fundstelle bestimmt werden.

Die mathematische Goldader, die wir nun freilegen wollen, ist durch eine stetige ebene Kurve K gegeben, welche durch die Gleichung

$$K: F(x, y) = 0 \tag{4.5}$$

als Höhenlinie der Funktion $F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert wird. Der Höhenwert Null ist eine reine Normierungsbedingung, die durch Addition einer geeigneten Konstanten zu F immer erfüllt werden kann.

Wir setzen voraus, dass ein Kurvenpunkt (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ bekannt ist, und suchen nun weitere Kurvenpunkte auf K . Dieses Problem wäre gelöst, wenn sich K oder Teilstücke von K in der Form

$$y = f(x), \quad x \in D_f,$$

als Graph einer Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben ließen, sodass

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{für alle } x \in D_f$$

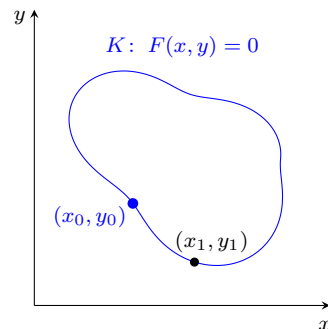


Abb. 4.8: Höhenlinie.

gilt. Mithilfe von f könnte man für beliebiges $x_1 \in D_f$ den zugehörigen Wert $y_1 = f(x_1)$ berechnen. Eine solche Funktion f heißt dann *implizit definierte Funktion* oder *implizite Funktion*.

Diese Problemstellung tritt beispielsweise in der folgenden Anwendung auf: Gegeben sei ein Verbundstoff mit einem Anteil x eines teuren Werkstoffs und einem Anteil y eines zweiten, günstigen Werkstoffs. Die Funktion F beschreibe eine Materialeigenschaft des Verbundstoffs. Eine Zusammensetzung (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ sei bekannt. Gesucht ist eine preisgünstigere Zusammensetzung (x_1, y_1) mit der gleichen Materialeigenschaft, also

$$x_1 < x_0 \text{ und } F(x_1, y_1) = F(x_0, y_0).$$

Wir diskutieren nun, unter welchen Bedingungen durch (4.5) eine Funktion f implizit definiert wird. Gesucht sind dabei sowohl der Rechenausdruck $f(x)$ als auch ein geeigneter Definitionsbereich D_f .

Beispiel 4.8 Die Gleichung des Einheitskreises in der (x, y) -Ebene lautet

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (4.6)$$

Ist D_F eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^2 , die den Einheitskreis enthält, dann ist der Einheitskreis Höhenlinie zur Höhe Null der Funktion

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1, \quad (x, y) \in D_F.$$

Auflösen von (4.6) nach y ergibt

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}. \quad (4.7)$$

Der komplette Einheitskreis kann nicht als Graph einer reellwertigen Funktion einer Veränderlichen beschrieben werden. Für eine implizit definierte Funktion f ist zur Relation $y = f(x)$ ein geeigneter Definitionsbereich $D_f \subseteq [-1, 1]$ festzulegen sowie eine für jedes $x \in D_f$ eindeutige Regel, welches Vorzeichen in (4.7) zu wählen ist.

In Anwendungen ist dabei nur der Fall einer *stetigen* Funktion f interessant. Abwegige Definitionen wie

$$f(x) := \begin{cases} +\sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{für } x \in [-1, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

erfüllen zwar die Beziehung

$$F(x, f(x)) = 0, \quad x \in [-1, 1],$$

sind aber in der Praxis bedeutungslos.

Auch wenn man Stetigkeit fordert, ist nicht sofort ersichtlich, unter welchen Umständen sich eine Höhenlinie $F(x, y) = 0$ lokal als Funktion einer Veränderlichen schreiben lässt.

Wir illustrieren dies anhand von Abbildung 4.9. Die blaue und die schwarze Teilkurve des Einheitskreises sind die Graphen der Funktionen

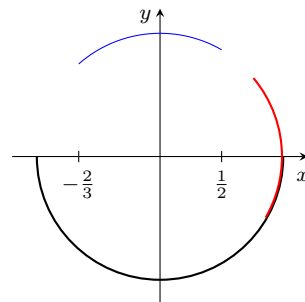


Abb. 4.9: Implizit definierte Funktionen.

$$x \mapsto f_1(x) = +\sqrt{1-x^2}, \quad x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right], \quad x \mapsto f_2(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Die rote Teilkurve kann dagegen *nicht* als Graph einer Funktion

$$x \mapsto f_3(x), \quad x \in D_{f_3},$$

dargestellt werden. △

Im Allgemeinen wird die praktische Bestimmung impliziter Funktionen noch dadurch erschwert, dass sich in vielen Fällen, in denen eine Teilkurve der Höhenlinie $F(x, y) = 0$ als Graph einer implizit definierten Funktion f gedeutet werden kann, kein Funktionsausdruck für f angeben lässt.

Beispiel 4.9 Es sei

$$F(x, y) = x - y \cdot e^y \stackrel{!}{=} 0 \iff x = y \cdot e^y.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht nach y auflösen, obwohl Abbildung 4.10 zeigt, dass die rote und die blaue Teilkurve Graphen von Funktionen der Form

$$x \mapsto f(x), \quad x \in D_f$$

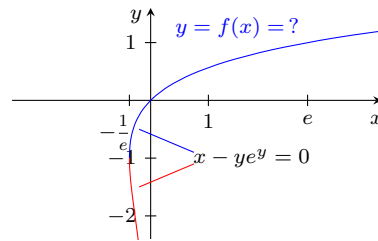


Abb. 4.10: Implizit definierte Funktionen.

darstellen. △

Kann man die Gleichung $F(x, y) = 0$ nicht durch Umformungen zu $y = f(x)$ auflösen, versucht man, den ungefähren Verlauf der Höhenlinie von F dadurch zu verfolgen, dass man die implizit definierte Funktion f durch das Taylor-Polynom T_n von f ,

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

approximiert und dessen Werte als Näherungen für Funktionswerte von f verwendet. Dazu benötigt man einen Punkt (x_0, y_0) auf der Höhenlinie von F und die Werte von Ableitungen von f an der Stelle x_0 .

Der folgende Satz gibt hinreichende Bedingungen an, unter denen durch die Gleichung $F(x, f(x)) = 0$ lokal genau eine stetige und sogar differenzierbare Funktion f implizit definiert wird, und erklärt, wie die Ableitung von f an der Stelle x_0 berechnet wird.

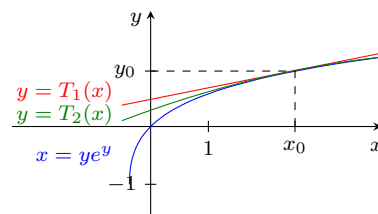


Abb. 4.11: Taylor-Approximation.

Satz 4.10 (Satz über implizite Funktionen) *Gegeben seien eine Funktion*

$$F: D_F \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

und ein Punkt $\vec{x}_0 = (x_0, y_0) \in D_F$. Außerdem seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

1. $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ sei ein Punkt auf der Höhenlinie $F(x, y) = 0$, d.h. es gelte $F(x_0, y_0) = 0$.
2. F sei in einer Umgebung $U = U(x_0, y_0)$ stetig differenzierbar.
3. Es gelte $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann gibt es ein Intervall (a, b) mit $a < x_0 < b$ und genau eine differenzierbare Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, sodass gilt:

1. $y_0 = f(x_0)$.
2. $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in (a, b)$.
3. $f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$.

Diese Funktion f heißt durch die Gleichung $F(x, y) = 0$ implizit definiert.

Beweis: Die erste Behauptung ist durch die erste Voraussetzung erfüllt. Die Hauptlast des Beweises liegt im Nachweis der zweiten Behauptung. Dazu gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$F_y(x_0, y_0) > 0$$

(sonst betrachtet man $G(x, y) = -F(x, y)$). Da F_y nach der zweiten Voraussetzung stetig ist, gibt es eine Umgebung $U_\varepsilon = U_\varepsilon(\vec{x}_0) \subseteq U$ von \vec{x}_0 , in der überall $F_y > 0$ gilt (Abbildung 4.12.a).

Wir betrachten nun die Gerade $x = x_0$ in der (x, y) -Ebene. Für $y = y_0$ gilt nach Voraussetzung $F(x_0, y_0) = 0$. Wegen $F_y > 0$ ist $F(x_0, y)$ streng monoton wachsend in y . Insbesondere gilt (Abbildung 4.12.b)

$$F\left(x_0, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0, \quad F\left(x_0, y_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 0.$$

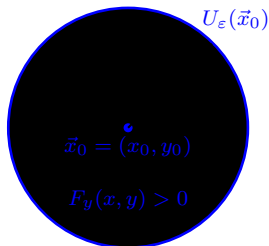


Abb. 4.12.a: $F_y > 0$ in Umgebung.

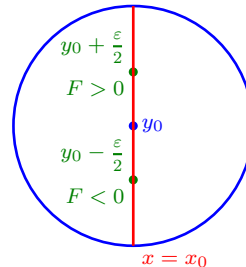


Abb. 4.12.b: Stellen mit $F > 0$ bzw. $F < 0$.

Da $F(x, y)$ in U_ε stetig ist, gibt es innerhalb von U_ε Umgebungen um die beiden Punkte

$$\left(x_0, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \left(x_0, y_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

in denen $F(x, y)$ ebenfalls > 0 bzw. < 0 ist (Abbildung 4.12.c).

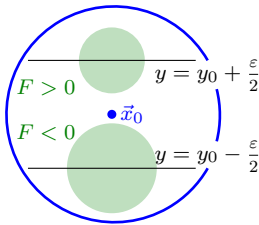


Abb. 4.12.c: Umgebungen mit $F > 0$ bzw. $F < 0$.

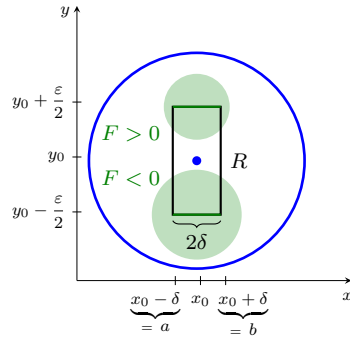


Abb. 4.12.d: Rechteck mit $F > 0$ bzw. $F < 0$.

In die Umgebung U_ε kann also ein Rechteck

$$R = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times \left[y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

mit unbekanntem, aber positiven δ gelegt werden, sodass an der „Unterseite“, d.h. für $y = y_0 - \frac{\varepsilon}{2}$, stets $F(x, y) < 0$ und an der „Oberseite“, also für $y = y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$, stets $F(x, y) > 0$ gilt (Abbildung 4.12.d)

Sei nun $x \in (a, b) := (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ beliebig, aber fest gewählt. Dann gilt also

$$F\left(x, y_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) < 0, \quad F\left(x, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0.$$

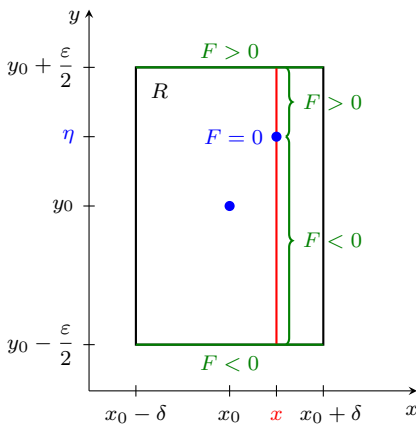


Abb. 4.12.e: Nullstelle von F .

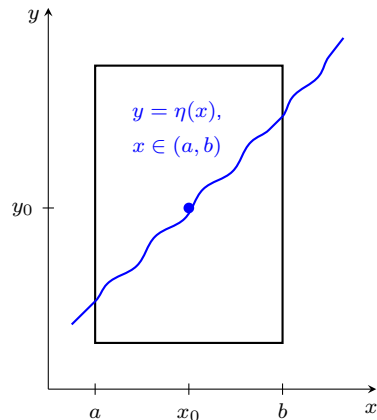


Abb. 4.12.f: Implizit definierte Funktion.

$F(x, y)$ ist stetig und wegen $F_y > 0$ streng monoton wachsend in y , d.h. längs der roten Strecke in Abbildung 4.12.e. Also gibt es *genau ein*

$$\eta \in \left(y_0 - \frac{\varepsilon}{2}, y_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

sodass $F(x, \eta) = 0$ gilt.

Ordnet man nun jedem $x \in (a, b)$ die so bestimmte Zahl η zu, erhält man die Funktion

$$f: x \mapsto \eta(x), \quad x \in (a, b),$$

für die wie gefordert

$$F(x, f(x)) = 0$$

in (a, b) gilt (4.12.f).

Aus ähnlichen Überlegungen folgen die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit von f .

Im letzten Schritt wird die dritte Behauptung bewiesen. Aus $F(x, f(x)) \equiv 0$ folgt mit der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + F_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

Für $x = x_0, y = f(x_0) = y_0$ gilt also

$$F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0) \cdot f'(x_0) = 0 \iff f'(x_0) = - \underbrace{\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}}_{\neq 0 \text{ nach Vor. 3}}. \quad \square$$

Falls F mehrfach stetig differenzierbar ist, erbt die implizit definierte Funktion f diese Eigenschaft. Höhere Ableitungen von f werden dann durch fortgesetztes Differenzieren von $F(x, f(x)) \equiv 0$ berechnet. Die zweite Ableitung von f erhält man durch Differenziation der Gleichung

$$\frac{d}{dx} F(x, f(x)) = F_x(x, f(x)) + \underbrace{F_y(x, f(x))}_{= g(x)} \cdot \underbrace{f'(x)}_{= h(x)} = 0$$

unter Verwendung der Produktregel $(gh)' = g'h + gh'$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dx^2}(x, f(x)) &= F_{xx}(x, f(x)) + F_{xy}(x, y) \cdot f'(x) \\ &+ \underbrace{\{F_{yx}(x, f(x)) + F_{yy}(x, f(x)) \cdot f'(x)\}}_{= g'(x)} \cdot \underbrace{f'(x)}_{= h(x)} + \underbrace{F_y(x, f(x))}_{= g(x)} \cdot \underbrace{f''(x)}_{= h'(x)} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Aus (4.8) folgt

$$f''(x_0) = - \frac{F_{xx}(x_0, y_0) + 2F_{xy}(x_0, y_0) \cdot f'(x_0) + F_{yy}(x_0, y_0) \cdot (f'(x_0))^2}{F_y(x_0, y_0)}.$$

Der Rechenaufwand steigt mit wachsender Ordnung der Ableitung stark an.

Beispiel 4.11 Gegeben seien

$$F(x, y) = x - ye^y \stackrel{!}{=} 0, \quad (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Es gelten

1. $F(x_0, y_0) = F(0, 0) = 0$.
2. Es ist $F_x(x, y) = 1$ und $F_y(x, y) = -e^y - ye^y = -(y+1)e^y$. Die partiellen Ableitungen F_x und F_y sind stetig für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
3. $F_y(0, 0) = -1 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 4.10 erfüllt und es gibt in einer Umgebung $U_\varepsilon(0, 0)$ genau eine differenzierbare Funktion f mit $f(0) = 0$ und $F(x, f(x)) = 0$ in $U_\varepsilon(0, 0)$.

Weiter gilt

$$f'(x_0) = f'(0) = -\frac{F_x(0, 0)}{F_y(0, 0)} = 1$$

und mit $F_{xx} = F_{xy} = 0$, $F_{yy} = -(y+2)e^y$ folgt

$$f''(0) = -\frac{0 + 0 + (-2) \cdot (+1)^2}{-1} = -2.$$

Die Taylor-Polynome von f um $x_0 = 0$ lauten damit:

$$T_1(x) = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) = x,$$

$$T_2(x) = T_1(x) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 = x - x^2.$$

Aus Abbildung 4.13 ist ersichtlich, dass die Graphen dieser Polynome nur in einer kleinen Umgebung des Ursprungs nahe bei der Kurve $F(x, y) = 0$ liegen. Man kann zeigen, dass diese Taylor-Polynome lediglich auf dem Intervall $[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ gegen die implizit definierte Funktion f konvergieren.

Einen größeren Konvergenzbereich erhält man bei Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = e$. Mit $y_0 = 1$ sind die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen erfüllt. Die Taylor-Polynome von f zur Entwicklungsstelle $x_0 = e$ lauten

$$T_1(x; e) = 1 + \frac{1}{2e}(x - e) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e}x,$$

$$T_2(x; e) = T_1(x; e) - \frac{3}{8e^2}(x - e)^2 = \frac{1}{8} + \frac{5}{4e}x - \frac{3}{8e^2}x^2.$$

Diese Polynome eignen sich in einem längeren Intervall zur Approximation der Höhenlinie $F(x, y) = 0$.

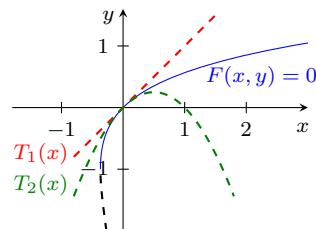


Abb. 4.13: Taylor-Approximation.

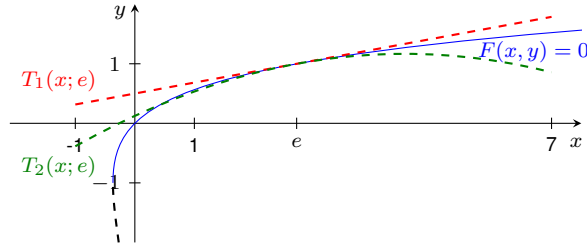


Abb. 4.14: Alternative Taylor-Approximation.



Praktisch approximiert man eine implizit definierte Funktion f durch eine Kombination aus Taylor-Entwicklung und Newton-Verfahren. Hat man einen Kurvenpunkt (x_0, y_0) gefunden und will man den Verlauf der Höhenlinie $F(x, y) = 0$ verfolgen, wählt man eine geeignete Schrittweite h und setzt $x_1 := x_0 + h$. Gesucht ist ein Wert y_1 , sodass (x_1, y_1) wieder auf der Kurve liegt, dass also $F(x_1, y_1) = 0$ gilt.

Im ersten Teilschritt approximiert man f durch ein Taylor-Polynom T mit Entwicklungsstelle x_0 . Der Wert $\tilde{y}_1 := T(x_1)$ wird dann als Prognosewert für $y_1 = f(x_1)$ verwendet. Im Allgemeinen gilt $F(x_1, \tilde{y}_1) \neq 0$, aber sofern das Taylor-Polynom die Funktion f hinreichend genau approximiert, kann man die gesuchte Nullstelle $y = y_1$ der Gleichung

$$F(x_1, y) = 0$$

in einem zweiten Teilschritt mit dem Newton-Verfahren mit Startwert \tilde{y}_1 bestimmen. Anschließend setzt man das Verfahren mit dem Punkt (x_1, y_1) fort.

Beispiel 4.12 Ausgehend von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ verfolgen wir den Verlauf der Höhenlinie

$$F(x, y) = x - ye^y = 0$$

für $x > 0$. Als erste Schrittweite wählen wir $h = 0.5$. An der Stelle $x_1 = 0.5$ liefert das Taylor-Polynom $T_2(x; 0)$ aus Beispiel 4.11 die Näherung

$$\tilde{y}_1 = T_2(0.5) = 0.5 - 0.5^2 = 0.25.$$

Es ist $F(0.5, 0.25) \approx 0.189 \neq 0$. Der Punkt $(0.5, 0.25)$ liegt also nicht auf der Höhenlinie.

Gesucht ist nun y_1 mit

$$F(0.5, y_1) = 0.5 - ye^y = 0,$$

d.h. eine Nullstelle der Funktion

$$g: y \mapsto ye^y - 0.5.$$

Um Verwechslungen zwischen der bereits definierten Stelle y_1 und den Iterierten des Newton-Verfahrens zu vermeiden, verwenden wir im Newton-Verfahren den Buchstaben

u zur Bezeichnung der Unbekannten. Das Newton-Verfahren zur Berechnung von y_1 lautet dann

$$\begin{cases} u_0 = \tilde{y}_1 = 0.25, \\ u_{k+1} = u_k - \frac{g(u_k)}{g'(u_k)} = u_k - \frac{u_k e^{u_k}}{(u_k + 1)e^{u_k}}, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Es liefert die Iterierten

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.3615203132, & u_2 &= 0.3518163887, \\ u_3 &= 0.3517337173, & u_4 &= 0.3517337113. \end{aligned}$$

Mit $y_1 := u_4$ gilt dann

$$F(x_1, y_1) \approx -9.762 \cdot 10^{-11}.$$

Der Punkt (x_1, y_1) liegt näherungsweise auf der Höhenlinie $F = 0$. In diesem Punkt kann man nun mithilfe des Satzes über implizite Funktionen das Taylor-Polynom $T_2(x; x_1)$ berechnen und damit das Verfahren fortsetzen.

Das Verfahren lässt sich noch dadurch verbessern, dass man die Schrittweite h erst nach der Berechnung des Taylor-Polynoms T festlegt. Dies ist möglich, da die Koeffizienten von T nicht von der Schrittweite abhängen. Zu T wird dann möglichst große Zahl x_1 bestimmt, sodass

$$F(x_1, T(x_1)) \approx 0$$

im Sinne einer praktikablen Güte gilt. Falls das anschließende Newton-Verfahren in wenigen Schritten gegen eine Zahl y_1 in der Nähe von $\tilde{y}_1 = T(x_1)$ konvergiert, akzeptiert man die Stelle (x_1, y_1) als nächsten Punkt auf der Höhenlinie. Wenn das Newton-Verfahren divergiert oder wenn $|y_1 - \tilde{y}_1|$ groß ist, verwirft man x_1 und wählt stattdessen eine näher bei x_0 liegende Stelle x_1 als Startwert des Newton-Verfahrens. \triangle

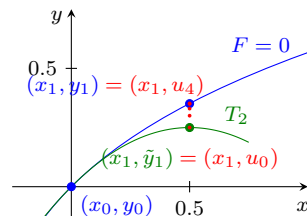


Abb. 4.15: Taylor-Approximation und Newton-Verfahren.

4.4 Das Newton-Verfahren im \mathbb{R}^n

In Band 1 hatten wir Nullstellen von reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen näherungsweise durch das Newton-Verfahren berechnet. Dazu wurde die jeweilige Funktion f durch die Tangente an den Graphen an einer Stelle x_0 , der Startnäherung zur gesuchten Nullstelle x^* von f , approximiert und die Nullstelle x_1 dieser Tangente als verbesserte Näherung für x^* verwendet. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führte auf die Iteration

$$(NV) \quad \begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.9)$$

Das Newton-Verfahren wird nun auf Funktionen von n Veränderlichen übertragen, bei denen der Funktionswert wieder ein Vektor im \mathbb{R}^n ist. Solche Funktionen nennt man Vektorfelder. Sie werden in Teil III ausführlich behandelt.

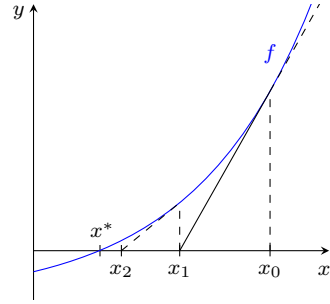


Abb. 4.16: Newton-Verfahren im \mathbb{R}^1 .

Definition 4.13 Eine Funktion $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld*.

Ein Vektorfeld ist eine vektorwertige Funktion, bei der die Vektoren im Definitions- und im Wertebereich die gleiche Dimension besitzen. In der Physik und in technischen Anwendungen werden Vektorfelder unter anderem zur Beschreibung von Kräften und von Geschwindigkeitsvektoren bewegter Teilchen in strömenden Flüssigkeiten oder Gasen benutzt.

Wir diskutieren das Newton-Verfahren zunächst für Vektorfelder im \mathbb{R}^2 . Gesucht sei eine Nullstelle (x^*, y^*) der Funktion $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. eine gemeinsame Nullstelle der beiden Komponenten f_1 und f_2 von \vec{f} :

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Diese Aufgabenstellung lässt sich auf zweierlei Weise geometrisch interpretieren. Gesucht ist einerseits ein Schnittpunkt $(x^*, y^*, 0)$ der beiden Graphen von f_1 und f_2 mit der (x, y) -Ebene im \mathbb{R}^3 (Abbildung 4.17.a), andererseits ein Schnittpunkt (x^*, y^*) der Höhenlinien von f_1 und f_2 zur Höhe Null im \mathbb{R}^2 (Abbildung 4.17.b).

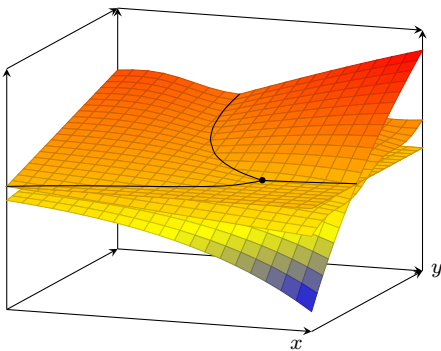


Abb. 4.17.a: Schnitt der Graphen von f_1 und f_2 mit der (x, y) -Ebene.

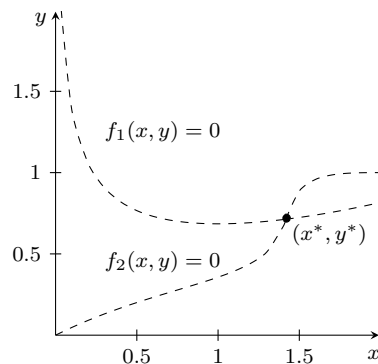


Abb. 4.17.b: Höhenlinien in der (x, y) -Ebene. Gestrichelte Teilkurven sind links nicht sichtbar.

Ausgehend von einer Startnäherung (x_0, y_0) der gesuchten Nullstelle wird der Graph jeder Komponente von \vec{f} im ersten Schritt des Newton-Verfahrens durch die Tangentialebene an den Graphen im Punkt $(x_0, y_0, f_{1/2}(x_0, y_0))$ approximiert. Die beiden Tangentialebenen und die (x, y) -Ebene besitzen genau dann einen einzigen Schnittpunkt, wenn ihre Normalenvektoren

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, was wieder um genau dann der Fall ist, wenn die Gradientenvektoren von f_1 und f_2 an der Stelle (x_0, y_0) linear unabhängig sind.

Wir verlassen diese geometrische Sichtweise und formulieren denselben Sachverhalt mit den Begriffen der linearen Algebra. Sind E_1, E_2 die Tangentialebenen von f_1 und f_2 zur Entwicklungsstelle (x_0, y_0) , führt die Schnittbedingung auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} E_1(x, y) &= f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \stackrel{!}{=} 0 \\ E_2(x, y) &= f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} - \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Es ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientenmatrix

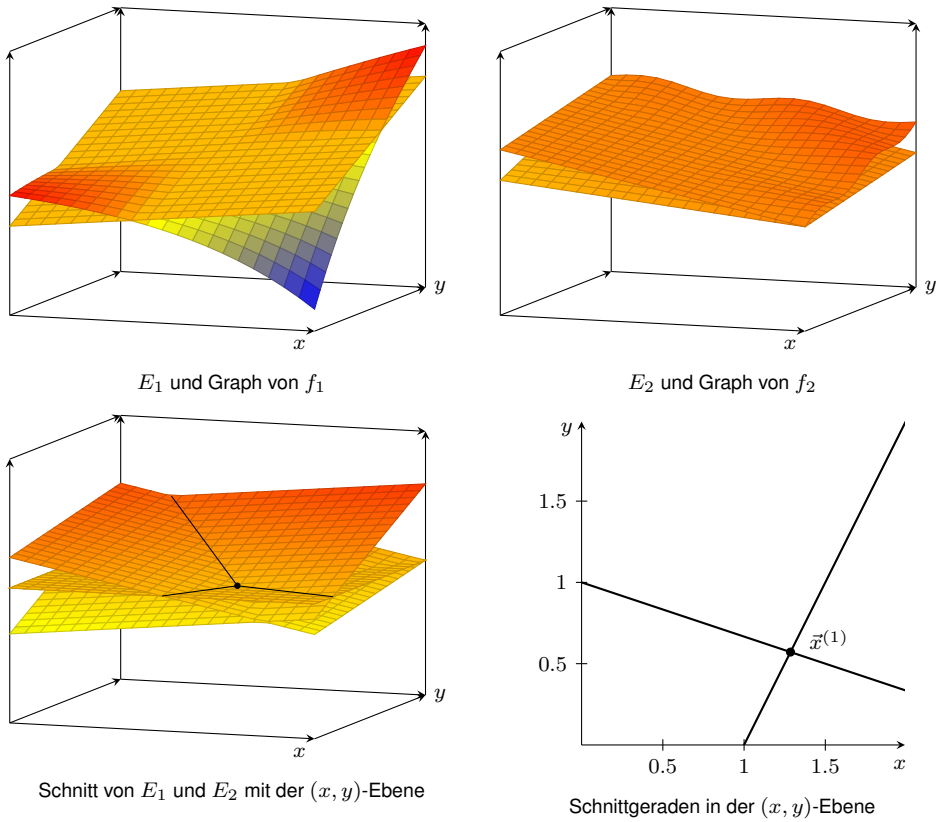
$$J_f(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist, d.h. wenn ihre Determinante ungleich Null ist. Die Matrix J_f heißt *Funktionalmatrix* oder *Jacobi-Matrix* von $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, ihre Determinante *Funktionaldeterminante*. In der ersten Zeile von J_f steht der Gradient von f_1 , in der zweiten Zeile der Gradient von f_2 .

Beispiel 4.14 Veranschaulichung des ersten Schritts des Newton-Verfahrens im \mathbb{R}^2 .

Es sei

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - e^{x-y} \\ \frac{1}{\pi} \sin(\pi xy) - x + 2y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abb. 4.18: Newton-Verfahren im \mathbb{R}^2 .

Die Tangentialebenen an die Graphen von f_1 und f_2 im Punkt $(x_0, y_0, f_{1/2}(x_0, y_0))$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} E_1: z = t_1(x, y) &= f_1(1, 1) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(1, 1) \cdot (x - 1) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(1, 1) \cdot (y - 1) \\ &= 1 + (x - 1) + 3(y - 1) = x + 3y - 3, \end{aligned}$$

$$E_2: z = t_2(x, y) = 1 - 2(x - 1) + (y - 1) = -2x + y + 2.$$

Den Schnittpunkt (x_1, y_1) von E_1 und E_2 mit der (x, y) -Ebene erhält man aus

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 3 \\ 2x - y = 2 \end{array} \right\} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

Alternativ berechnet man (x_1, y_1) als Schnittpunkt der Schnittgeraden von E_1 und E_2 mit der (x, y) -Ebene. Es ist

$$t_1(x, y) \stackrel{!}{=} 0 \iff y = -\frac{1}{3}x + 1,$$

$$t_2(x, y) \stackrel{!}{=} 0 \iff y = 2x - 2.$$

Der eindeutig bestimmte Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist der Punkt $(x_1, y_1) = \left(\frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right)$. \triangle

Wir leiten nun die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens her. In Kurzschreibweise lautet (4.10):

$$J_f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} - \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Falls $J_f(x_0, y_0)$ invertierbar ist, kann man diese Gleichung nach der gesuchten Nullstelle (x_1, y_1) auflösen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (J_f(x_0, y_0))^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - (J_f(\vec{x}^{(0)}))^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(0)}). \quad (4.11)$$

Die Division durch f' in (4.9) wird in (4.11) durch die Multiplikation mit der Inversen der Jacobi-Matrix ersetzt. Nach der Berechnung von $\vec{x}^{(1)}$ wird die Iteration mit $\vec{x}^{(1)}$ anstelle von $\vec{x}^{(0)}$ fortgesetzt.

Das Newton-Verfahren lässt sich ohne weitere Überlegungen auf den Fall mehrerer Veränderlicher übertragen. Die Ableitung eines Vektorfelds $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die Jacobi-Matrix

$$J_f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

In der i -ten Zeile der Jacobi-Matrix steht der Gradient der i -ten Komponente $f_i(\vec{x})$ von f . Es gilt die folgende Konvergenzaussage:

Satz 4.15 Die Funktion $\vec{f}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitze eine Nullstelle $\vec{x}^* \in D$ und sei in einer Umgebung von \vec{x}^* zweimal stetig differenzierbar. Die Jacobi-Matrix $J_f(\vec{x})$ sei an der Stelle \vec{x}^* invertierbar.

Dann konvergiert das Newton-Verfahren

$$\begin{cases} \vec{x}^{(0)} \in D, \\ \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - (J_f(\vec{x}^{(k)}))^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

lokal gegen \vec{x}^* .

Beispiel 4.16

1. Die Fortsetzung des Newton-Verfahrens in Beispiel 4.14 liefert die Näherungen

$$(x_0, y_0) = (1, 1),$$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{9}{7}, \frac{4}{7}\right) \approx (1.2857, 0.5714),$$

$$(x_2, y_2) \approx (1.4869, 0.7349),$$

$$(x_3, y_3) \approx (1.4159, 0.7132),$$

$$(x_4, y_4) \approx (1.4163, 0.7132).$$

Danach ändern sich die ersten vier Nachkommastellen der Iterierten nicht mehr.

2. Gesucht sei der Schnittpunkt der Kurven

$$K_1 : x - \frac{1}{5}y^2 = 0,$$

$$K_2 : x^2 + (y - 3)^2 = 8,$$

d.h. eine Nullstelle der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

mit

$$f_1(x, y) = x - \frac{1}{5}y^2, \quad f_2(x, y) = x^2 + (y - 3)^2 - 8.$$

Gemäß Abbildung 4.20 besitzen die beiden Kurven in der Nähe des Ursprungs einen Schnittpunkt, den wir mit dem Newton-Verfahren mit Startwert

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen wollen.

Die Jacobi-Matrix von \vec{f} ist

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5}y \\ 2x & 2y - 6 \end{pmatrix}.$$

An der Stelle (x_0, y_0) gilt

$$\begin{pmatrix} f_1(0, 0) \\ f_2(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

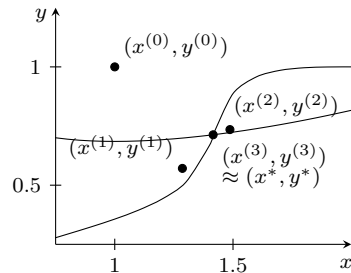


Abb. 4.19: Iterierte des Newton-Verfahrens.

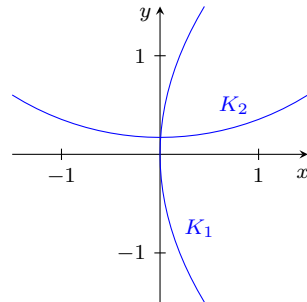


Abb. 4.20: Schnittpunkt zweier Kurven.

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad (J_f(0,0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Damit lautet der erste Schritt des Newton-Verfahrens:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - (J_f(0,0))^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im zweiten Iterationsschritt ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1(0, \frac{1}{6}) \\ f_2(0, \frac{1}{6}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{180} \\ \frac{1}{36} \end{pmatrix}, \\ J_f(0, \frac{1}{6}) &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{15} \\ 0 & -\frac{17}{3} \end{pmatrix}, \quad (J_f(0, \frac{1}{6}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{85} \\ 0 & -\frac{3}{17} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{85} \\ 0 & -\frac{3}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{180} \\ \frac{1}{36} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.005882 \\ 0.171568 \end{pmatrix},$$

womit man bereits nach zwei Iterationsschritten eine gute Näherung für

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.005888 \\ 0.171579 \end{pmatrix}$$

gefunden hat.

Bemerkung 4.17 Für Funktionen mit vielen Veränderlichen, wie sie in der Praxis auftreten, ist die Invertierung der Jacobi-Matrix zu aufwändig. In diesen Fällen wird die Inverse der Jacobi-Matrix bei der praktischen Durchführung des Newton-Verfahrens nicht berechnet. Stattdessen löst man in jedem Iterationsschritt das lineare Gleichungssystem

$$J_f(\vec{x}^{(k)}) \cdot (\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = -\vec{f}(\vec{x}^{(k)}). \quad \diamond$$

4.5 Die Taylor'sche Formel

In Band 1 hatten wir die Taylor'sche Formel für Funktionen einer Veränderlichen behandelt. Ist die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung $U(t_0)$ des Punktes $t_0 \in D$

mindestens $(p + 1)$ -mal differenzierbar, so gilt

$$f(t) = \underbrace{f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \dots + \frac{f^{(p)}(t_0)}{p!}(t - t_0)^p}_{T_p(t)} + \underbrace{\frac{f^{(p+1)}(\tau)}{(p+1)!}(t - t_0)^{p+1}}_{R_p(t)}$$

mit τ zwischen t und t_0 . Diese Darstellung übertragen wir nun auf Funktionen von zwei Veränderlichen. Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen gilt der Satz von Taylor analog, aber die Berechnung der Ableitungen höherer Ordnung wird sehr aufwändig.

Für die $(p + 1)$ -mal stetig differenzierbare Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in D$ setzen wir

$$g(t) := f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)).$$

Wendet man den Satz von Taylor für Funktionen einer Veränderlichen auf g an, dann folgt für $t_0 = 0$ und $t = 1$ mit der Kettenregel

Satz 4.18 (Satz von Taylor im \mathbb{R}^2) Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $U = U(x_0, y_0)$ des Entwicklungspunkts $(p + 1)$ -mal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle Punkte $(x, y) \in U$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \} \text{ Tangentialebene} \\ &+ \frac{1}{2!} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &\quad + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{p!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{(p+1)!} \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{p+1} f(\xi, \eta) \quad \} \text{ Restglied } R_p \end{aligned}$$

mit ξ zwischen x und x_0 , η zwischen y und y_0 . Dabei bedeutet

$$\left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^p f(x_0, y_0) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (x - x_0)^{p-k} (y - y_0)^k \frac{\partial^p f(x_0, y_0)}{\partial x^{p-k} \partial y^k}.$$

Beispiel 4.19 Taylor-Polynome T_0 , T_1 und T_2 von

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x - y + \cos(x + y^2).$$

Die partiellen Ableitungen erster bzw. zweiter Ordnung von f sind gegeben durch

$$f_x(x, y) = 1 - \sin(x + y^2), \quad f_y(x, y) = -1 - \sin(x + y^2) \cdot 2y,$$

$$\begin{aligned}
 f_{xx}(x, y) &= -\cos(x + y^2), \\
 f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = -\cos(x + y^2) \cdot 2y, \\
 f_{yy}(x, y) &= -\cos(x + y^2) \cdot 4y^2 - 2\sin(x + y^2).
 \end{aligned}$$

Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ lautet das Taylor-Polynom nullten Grades

$$T_0(x, y) = f(x_0, y_0) = \cos 0 = 1.$$

Ebenso erhält man

$$\begin{aligned}
 T_1(x, y) &= T_0(x, y) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
 &= 1 + 1 \cdot x - 1 \cdot y = 1 + x - y, \\
 T_2(x, y) &= T_1(x, y) + \frac{1}{2!} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\
 &\quad + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) \\
 &= 1 + x - y - \frac{1}{2}x^2 + 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2 = 1 + x - y - \frac{1}{2}x^2. \quad \triangle
 \end{aligned}$$

4.5.1 Geometrische Interpretation zum Satz von Taylor

Für eine Funktion einer Veränderlichen bedeutet die Taylor'sche Formel

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)} + R_1(x)$$

dass die ebene Kurve $z = f(x)$ des Graphen von f in einer Umgebung $U(x_0)$ gut durch die Tangente T an die Kurve im Kurvenpunkt (x_0, z_0) approximiert wird, wenn das Restglied $R_1(x)$ für $x \rightarrow x_0$ schnell gegen Null strebt.

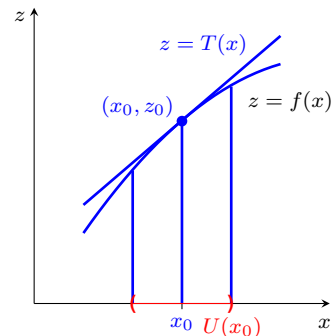


Abb. 4.21: Graph mit Tangente.

Analog gilt für $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Entwicklung

$$f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{E(x, y)} + R_1(x, y).$$

Die Fläche $z = f(x, y)$ wird in einer Umgebung $U(x_0, y_0)$ gut durch die Tangentialebene E an die Fläche im Flächenpunkt (x_0, y_0, z_0) approximiert, wenn das Restglied $R_1(x, y)$ für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ schnell gegen Null strebt.

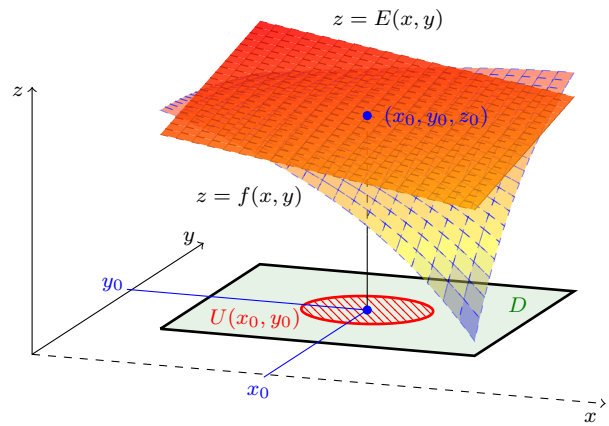


Abb. 4.22: Graph mit Tangentialebene.

Kapitel 5

Extremwertaufgaben

In ingenieurtechnischen Anwendungen beschreiben Funktionen physikalische Größen wie Druck oder Temperatur. In vielen Fällen möchte man die Extremwerte der jeweiligen Funktion bestimmen. Zum Beispiel kann die Betriebssicherheit einer Maschinenanlage oder die Stabilität eines Gebäudes davon abhängen, dass gewisse Werte nicht unter- oder überschritten werden. In wirtschaftswissenschaftlichen Fragestellungen werden Kosten oder Nutzen einer Investition durch Funktionen modelliert. Das Ziel der Kostenminimierung oder Nutzenmaximierung führt dann ebenfalls auf Extremwertaufgaben.

Wir behandeln zwei Arten von Extremwertaufgaben. Extremwerte ohne Nebenbedingungen sind gesucht, wenn die unabhängigen Variablen innerhalb einer n -dimensionalen Menge frei variieren dürfen. Stehen die Variablen zusätzlich in gewissen Beziehungen zueinander, spricht man von Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen.

5.1 Extremwertaufgaben ohne Nebenbedingungen

Bei reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher ist das prinzipielle Vorgehen zur Bestimmung von Extremwerten und Extremstellen unabhängig von der Anzahl der beteiligten Variablen. Im Folgenden betrachten wir allgemein reellwertige Funktionen der Bauart $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und speziell Funktionen zweier Veränderlicher.

Definition 5.1

1. Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein *globales* bzw. *absolutes* $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$, wenn $\begin{cases} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \end{cases}$ für alle $\vec{x} \in D$ gilt.
2. Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $\vec{x}_0 \in D$ ein *lokales* bzw. *relatives* $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$, wenn eine Umgebung $U(\vec{x}_0)$ von \vec{x}_0 existiert, sodass

$\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \end{array} \right\}$ für alle $\vec{x} \in U(\vec{x}_0) \cap D$ gilt. Falls sogar $\left\{ \begin{array}{l} f(\vec{x}_0) > f(\vec{x}) \\ f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}) \end{array} \right\}$ für alle $x \in \dot{U}(\vec{x}_0) \cap D$ gilt, heißt $f(\vec{x}_0)$ lokales $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ im engeren Sinne.

3. Der Punkt \vec{x}_0 heißt dann gegebenenfalls globale bzw. lokale Maximalstelle oder Minimalstelle (im engeren Sinne). Allgemein nennt man solche Stellen Extremstellen oder Extremstellen.

Die Existenz von Extremwerten ist nach dem Satz vom Minimum und Maximum (Satz 2.33) für eine stetige Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Definitionsbereich D gesichert. Falls f nicht nur stetig, sondern sogar hinreichend oft differenzierbar ist, kann man Extremwerte in inneren Punkten des Definitionsbereichs mit ähnlichen Methoden wie bei Funktionen einer Veränderlichen berechnen.

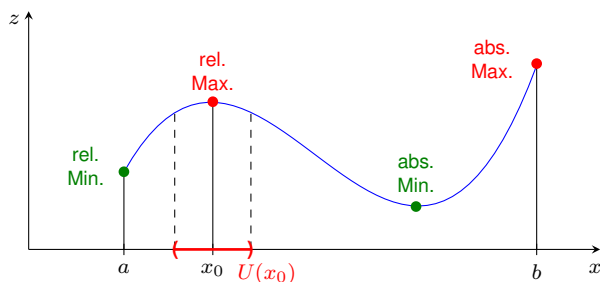


Abb. 5.1: Extremwerte einer Funktion einer Veränderlichen.

Liegt bei einer differenzierbaren Funktion f einer Veränderlichen ein lokales Extremum in einem inneren Punkt x_0 des Definitionsbereichs vor, verschwindet die Ableitung von f an der Stelle x_0 . Der Graph besitzt an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ eine horizontale Tangente

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad f'(x_0) = 0.$$

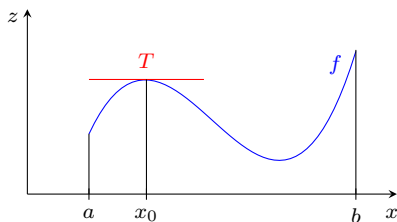


Abb. 5.2: Horizontale Tangente im \mathbb{R}^1 .

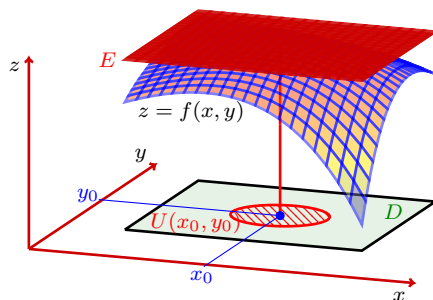


Abb. 5.3: Horizontale Tangentialebene im \mathbb{R}^2 .

Analog besitzt eine differenzierbare Funktion zweier Veränderlicher an einer lokalen Extremstelle (x_0, y_0) im Innern ihres Definitionsbereichs eine horizontale Tangentialebene.

Es ist

$$E(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \vec{0} : f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Satz 5.2 Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung $U(\vec{x}_0)$ von \vec{x}_0 differenzierbar und besitze in \vec{x}_0 ein lokales Extremum. Dann verschwinden alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f im Punkt \vec{x}_0 :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x}_0) = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Beweis (für $n = 2$, im Fall eines lokalen Maximums): Es ist

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Falls f im Punkt (x_0, y_0) ein lokales Maximum besitzt, gilt in einer Umgebung von (x_0, y_0)

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Für $h > 0$ folgt also

$$f_x(x_0, y_0) \leq 0.$$

Für $h < 0$ gilt aber

$$f_x(x_0, y_0) \geq 0.$$

Also ist $f_x(x_0, y_0) = 0$. Ebenso zeigt man, dass $f_y(x_0, y_0) = 0$ gilt. \square

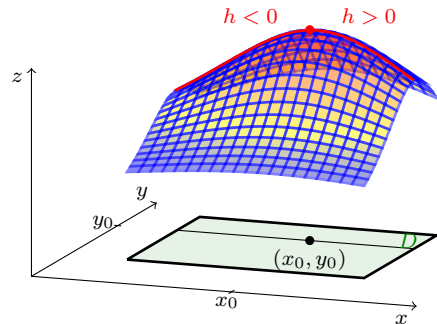


Abb. 5.4: Graph mit Schnittkurve.

Beispiel 5.3 Die Oberfläche der oberen Halbkugel ist Graph der Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Bekanntlich liegt im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Maximum von f vor. Mit

$$f_x(x, y) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y(x, y) = \frac{-2y}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

bestätigt man

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

\triangle

Satz 5.2 lässt sich nicht umkehren. Bei einer differenzierbaren Funktion ist das Verschwinden des Gradienten nur notwendig, aber nicht hinreichend für das Vorliegen einer Extremstelle an einem inneren Punkt von D . Dies hatten wir bereits in Band 1 für Funktionen einer Veränderlichen erkannt: Aus $f'(x_0) = 0$ folgt nicht zwingend, dass die Funktion in x_0 ein lokales Extremum besitzt.

Definition 5.4 Eine Stelle \vec{x}_0 , an der alle partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verschwinden, heißt *stationäre Stelle* oder *stationärer Punkt* von f .

Beispiel 5.5

Für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \cdot y,$$

gilt $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Im Nullpunkt liegt ein stationärer Punkt mit Funktionswert $f(0, 0) = 0$ vor. Es handelt sich aber um keine Extremstelle, denn im ersten und dritten Quadranten ist die Funktion größer als 0 und im zweiten und vierten Quadranten kleiner als 0. In jeder noch so kleinen Umgebung des Ursprungs treten sowohl positive als auch negative Funktionswerte auf.

Die Stelle $(0, 0)$ ist ein sogenannter *Sattelpunkt*. Es liegt ein stationärer Punkt vor, aber man kann zwei Schnittkurven der Fläche $z = f(x, y)$ mit zur (x, y) -Ebene orthogonalen Ebenen durch $(0, 0)$ legen, so dass $f(0, 0)$ bezüglich einer der beiden Kurven ein lokales Minimum, bezüglich der anderen Kurve ein lokales Maximum ist.

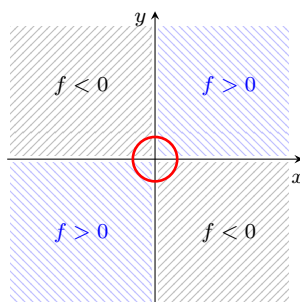


Abb. 5.5: Vorzeichen von f um $(0, 0)$.

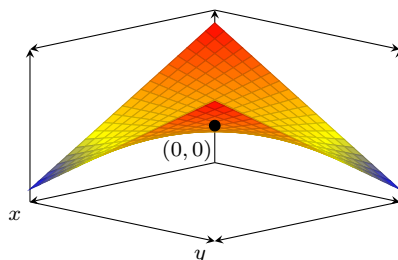
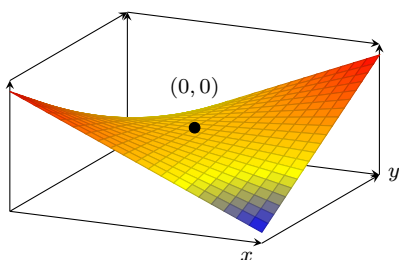


Abb. 5.6: Graph von f .



Hinreichende Bedingungen für lokale Extremwerte von Funktionen zweier Veränderlicher formulieren wir unter der Voraussetzung, dass die Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind.

Satz 5.6 Gegeben sei eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Der Punkt (x_0, y_0) sei ein stationärer Punkt von f , d.h. es gelte $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Außerdem seien die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ stetig. Dann gilt:

1. Ist

$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0,$$

dann liegt in (x_0, y_0) ein lokales Extremum im engeren Sinne vor, und zwar ein

$$\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}, \text{ falls } \begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases} \text{ gilt.}$$

2. Ist

$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0,$$

dann liegt in (x_0, y_0) kein lokales Extremum vor.

3. Ist

$$f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) = 0,$$

dann ist eine genauere Untersuchung notwendig.

Beweis: Wir beweisen nur die erste Behauptung für den Fall $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$. In $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ sind die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} nach Voraussetzung stetig. Also gibt es eine (eventuell kleinere) Umgebung $U_{\tilde{\varepsilon}}(x_0, y_0)$, sodass $f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ und $f_{xx} > 0$ für alle Punkte in $U_{\tilde{\varepsilon}}(x_0, y_0)$ gilt. Mit dem Satz von Taylor folgt dann für beliebige $(x, y) \in U_{\tilde{\varepsilon}}(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{=0} \cdot (x - x_0) + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{=0} \cdot (y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(\xi, \eta)(x - x_0)^2 + f_{xy}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(\xi, \eta)(y - y_0)^2. \end{aligned}$$

Das Restglied wird nun trickreich abgeschätzt. Ist (x, y) ein beliebiger Punkt aus $U_{\tilde{\varepsilon}}(x_0, y_0)$ mit $y \neq y_0$, dann folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} f_{xx}(\xi, \eta)(x - x_0)^2 + f_{xy}(\xi, \eta)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} f_{yy}(\xi, \eta)(y - y_0)^2 \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{f_{xx}(\xi, \eta)}_{> 0 \text{ in } U_{\tilde{\varepsilon}}} \underbrace{\left((x - x_0 + \frac{f_{xy}(\xi, \eta)}{f_{xx}(\xi, \eta)}(y - y_0))^2 \right)}_{\geq 0 \text{ in } U_{\tilde{\varepsilon}}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{f_{xx}(\xi, \eta)f_{yy}(\xi, \eta) - f_{xy}^2(\xi, \eta)}{f_{xx}^2(\xi, \eta)}}_{> 0 \text{ in } U_{\tilde{\varepsilon}}} \underbrace{(y - y_0)^2}_{> 0} > 0. \end{aligned}$$

Ebenso zeigt man, dass das Restglied für einen Punkt $(x, y) \in U_{\varepsilon}(x_0, y_0)$ mit $x \neq x_0$ positiv ist. Damit ist jeder Funktionswert in der punktierten Umgebung $\dot{U}_{\varepsilon}(x_0, y_0)$ echt größer als $f(x_0, y_0)$, sodass in (x_0, y_0) ein lokales Minimum im engeren Sinne vorliegt.

Die übrigen Aussagen des Satzes beweist man ähnlich. \square

Beispiel 5.7

1. Gesucht seien die Extremwerte der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = 2(x - y)^2 + (y^2 - 1)^2.$$

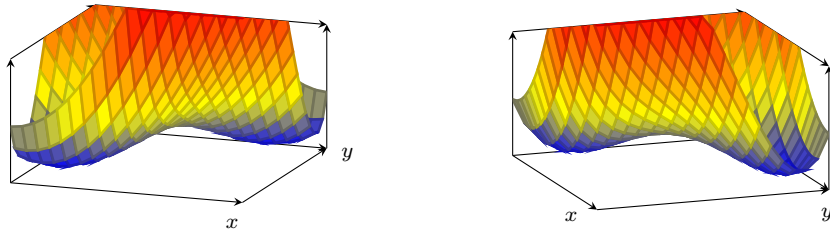


Abb. 5.7: Graph von f .

Die partiellen Ableitungen von f lauten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 4(x - y), & f_y(x, y) &= -4(x - y) + 2(y^2 - 1) \cdot 2y = 4y^3 - 4x, \\ f_{xx}(x, y) &= 4, & f_{xy}(x, y) &= -4, & f_{yy}(x, y) &= 12y^2. \end{aligned}$$

Stationäre Punkte von f : $f_x(x, y) = 0$ und $f_y(x, y) = 0$.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{!}{=} 0 \iff 4(x - y) = 0 \iff x = y, \\ f_y(x, y) &\stackrel{!}{=} 0 \iff 4y^3 - 4x = 0 \stackrel{x=y}{\iff} 4(y^3 - y) = 0 \\ &\iff y(y^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Aus den Nullstellen $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = -1$ und der Bedingung $x = y$ erhalten wir die stationären Punkte $P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 1), P_3 = (-1, -1)$. Als hinreichende Bedingung für Extremwerte prüfen wir den Wert von

$$D(x, y) := f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) = 48y^2 - 16$$

in den stationären Punkten. Wegen

$$D(0, 0) = -16 < 0, \quad D(1, 1) = D(-1, -1) = 32 > 0$$

sowie $f_{xx}(1, 1) = f_{xx}(-1, -1) = 4 > 0$ folgt:

- (i) An der Stelle $(0, 0)$ liegt kein lokales Extremum von f vor.

- (ii) An den Stellen $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ liegt jeweils ein lokales Minimum von f vor.

Wegen

$$f(x, y) = 2 \underbrace{(x - y)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(y^2 - 1)^2}_{\geq 0} \geq 0 \quad \text{und} \quad f(1, 1) = f(-1, -1) = 0$$

sind $(1, 1)$ und $(-1, -1)$ globale Minimalstellen. Lokale oder globale Maxima von f existieren nicht.

2. Gesucht seien die Extremwerte der Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 \cdot y^3, \quad g(x, y) = x^2 \cdot y^2.$$

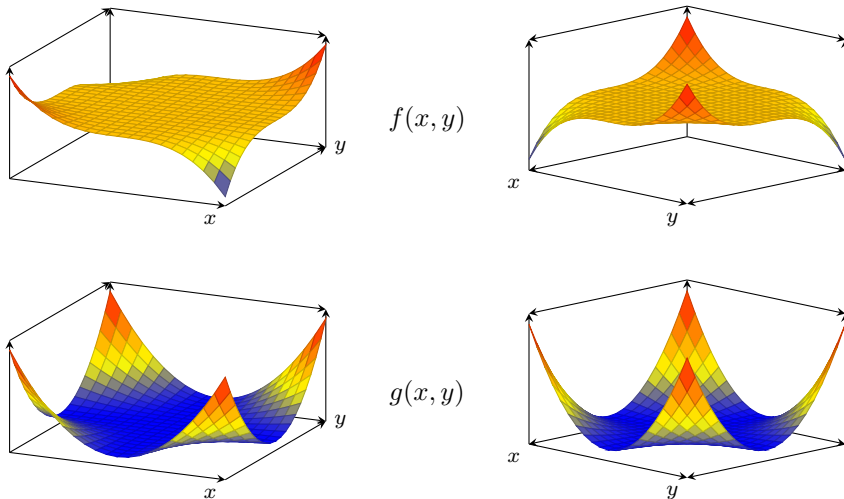


Abb. 5.8: Graphen von f und g .

Die partiellen Ableitungen von f und g sind gegeben durch

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2y^3, & f_y(x, y) &= 3x^3y^2, \\ f_{xx}(x, y) &= 6xy^3, & f_{xy}(x, y) &= 9x^2y^2, & f_{yy}(x, y) &= 6x^3y, \\ g_x(x, y) &= 2xy^2, & g_y(x, y) &= 2x^2y, \\ g_{xx}(x, y) &= 2y^2, & g_{xy}(x, y) &= 4xy, & g_{yy}(x, y) &= 2x^2. \end{aligned}$$

Stationäre Punkte von f und g :

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &\stackrel{!}{=} 0 \iff x = 0 \text{ oder } y = 0 \iff f_y(x, y) = 0, \\ g_x(x, y) &\stackrel{!}{=} 0 \iff x = 0 \text{ oder } y = 0 \iff g_y(x, y) = 0. \end{aligned}$$

Jeweils alle Punkte auf der x - oder der y -Achse sind stationäre Punkte von f und g . Für $x = 0$ oder $y = 0$ gilt

$$\begin{aligned} f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 &= 36x^4y^4 - 81x^4y^4 = 0, \\ g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = 0, \end{aligned}$$

sodass in beiden Fällen weitere Überlegungen notwendig sind

Bei der Funktion f zeigt eine Vorzeichenbetrachtung, dass in einer beliebigen Umgebung jedes stationären Punktes positive und negative Funktionswerte liegen. Daher ist kein stationärer Punkt von f Stelle eines lokalen Extremums.

Für g ist die Argumentation einfach. Wegen

$$\begin{aligned} g(x, y) &\geq 0, \\ g(x, y) &= 0 \text{ für } x = 0 \text{ oder } y = 0 \end{aligned}$$

ist jeder stationäre Punkt lokale und globale Minimalstelle.

3. Für die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^2,$$

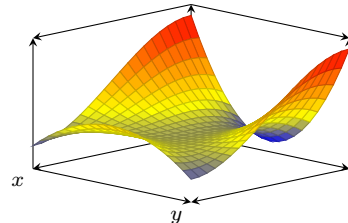
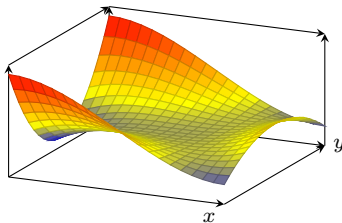


Abb. 5.10: Graph von f .

ist

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= x^2 - y^2, & f_y(x, y) &= -2xy + 2y, \\ f_{xx}(x, y) &= 2x, & f_{xy}(x, y) &= -2y, & f_{yy}(x, y) &= -2x + 2. \end{aligned}$$

Stationäre Punkte:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) = 0 &\iff (x - y)(x + y) = 0 \iff x = y \text{ oder } x = -y, \\ f_y(x, y) = 0 &\iff 2y(-x + 1) = 0 \iff y = 0 \text{ oder } x = 1. \end{aligned}$$

Die Fallunterscheidung

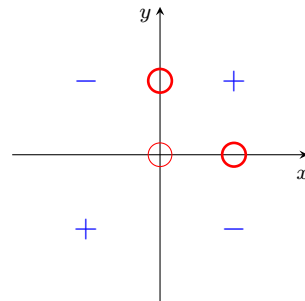


Abb. 5.9: Vorzeichen von f .

- (i) $x = 1$ und $x = y \Rightarrow P_1 = (1, 1)$,
- (ii) $x = 1$ und $x = -y \Rightarrow P_2 = (1, -1)$,
- (iii) $y = 0$ und $x = y \Rightarrow P_3 = (0, 0)$,
- (iv) $y = 0$ und $x = -y \Rightarrow (0, 0) = P_3$

zeigt, dass es drei stationäre Punkte gibt. Mit

$$\begin{aligned} D(x, y) &:= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y) \\ &= 2x(2 - 2x) - 4y^2 = 4(x - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

und

$$D(1, 1) = D(1, -1) = -4 < 0, \quad D(0, 0) = 0$$

folgt:

- (ii) An den Stellen $(1, 1)$ und $(1, -1)$ liegt jeweils kein lokales Extremum vor.
- (i) An der Stelle $(0, 0)$ sind weitere Überlegungen nötig.

Nun gilt

$$f(x, 0) = \frac{1}{3}x^3 \begin{cases} > 0 & \text{für } x > 0, \\ < 0 & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Folglich liegen in jeder Umgebung von P_3 positive und negative Funktionswerte, d.h. die Funktion f besitzt kein lokales Extremum in P_3 . \triangle

Wie bei reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen können Extremwerte einer Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ am Rand des Definitionsbereichs D auftreten, ohne dass die zugehörigen Extremalstellen stationäre Punkte von f sind. Daraus ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten.

Bei einer auf einem reellen Intervall $[a, b]$ definierten Funktion ist die Bestimmung globaler Extremwerte verhältnismäßig einfach. Außer den Funktionswerten in stationären Punkten müssen nur noch die beiden Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ betrachtet werden. Bei Funktionen mehrerer Veränderlicher ist die Situation ungleich komplizierter, da der Definitionsbereich D unendlich viele Randpunkte besitzen kann, in denen möglicherweise lokale oder globale Extrema auftreten.

Im Fall zweier Veränderlicher kann man die Randextrema einer Funktion f unter der Voraussetzung, dass der Rand K des Definitionsbereichs D_f eine glatte Jordan-Kurve ist, welche mit einer stetig differenzierbaren Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

beschrieben wird, auf eine eindimensionale Extremwertaufgabe zurückführen, indem man die Extremwerte der Funktion

$$g: t \mapsto f(x(t), y(t)), \quad t \in [t_1, t_2],$$

berechnet. Im nächsten Abschnitt diskutieren wir den etwas allgemeineren Fall, dass die Randkurve von D_f Höhenlinie einer zweiten Funktion $g(x, y)$ ist. Dies führt auf eine Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung.

5.2 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Manchmal unterliegen Extremwertaufgaben gewissen Restriktionen, unter denen globale oder lokale Extremwerte gesucht sind. Solche Nebenbedingungen können in sehr allgemeiner Form gestellt werden. Wir stellen hier nur einen Spezialfall vor.

Gegeben seien eine stetig differenzierbare Funktion $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine ebene Kurve K , die als Höhenlinie einer stetig differenzierbaren Funktion $g: D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in impliziter Form definiert wird:

$$K: g(x, y) = 0.$$

Dabei soll $K \subseteq D_f$ gelten.

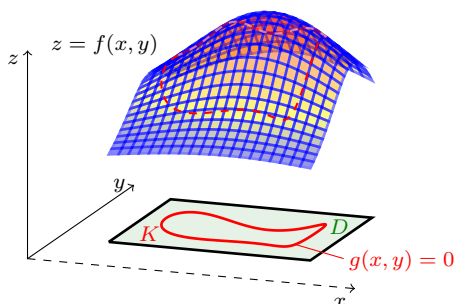


Abb. 5.11: Extrema unter Nebenbedingung.

Gesucht sind Maximum und Minimum der Einschränkung von f auf K , also Maximum und Minimum der Menge

$$M := \{f(x, y) \mid (x, y) \in K\}.$$

Diese Art von Extremwerten nennt man *Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$* .

Ein anschauliches Beispiel für das Auftreten von Extremwerten mit einer Nebenbedingung ist die Planung einer Bergwanderung. Der Schwierigkeitsgrad der Wanderung hängt nicht von den Höhen der umliegenden Gipfel ab, sondern von der addierten Höhendifferenz, die sich aus den lokalen Extremstellen der Wegstrecke ergibt. Die Funktion f gibt hier die Höhe eines Punktes über dem Meeresspiegel an, der Wanderweg entspricht der Nebenbedingung.

Beispiel 5.8 Gegeben seien $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x + y^2, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0.$$

Gesucht sind die Extremwerte von f auf dem Einheitskreis. △

Für Beispiel 5.8 stellen wir nun drei verschiedene Lösungsverfahren für Extremwertaufgaben unter Nebenbedingungen vor. Da f stetig ist und die Nebenbedingung eine kompakte Menge definiert, folgt nach dem Satz vom Minimum und Maximum, dass die Funktion ihre Extremwerte auf der Kurve K annimmt.

5.2.1 Auflösen der Nebenbedingung

Falls die Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ nach x oder y aufgelöst werden kann, liefert Einsetzen in $f(x, y)$ eine eindimensionale Extremwertaufgabe, welche mit den in Band 1 besprochenen Methoden gelöst wird. Wenn das Auflösen der Nebenbedingung möglich ist, ist dies häufig der einfachste Lösungsweg.

Im obigen Beispiel gilt

$$g(x, y) = 0 \iff y_{1/2} = \pm\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

Einsetzen in f liefert die zwei Funktionen

$$h_1(x) := f(x, +\sqrt{1-x^2}) = x + \left(+\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x + 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1],$$

$$h_2(x) := f(x, -\sqrt{1-x^2}) = x + \left(-\sqrt{1-x^2}\right)^2 = x + 1 - x^2, \quad x \in [-1, 1].$$

Zufällig gilt hier $h_1(x) = h_2(x)$. Die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ sind die Extremwerte von h_1 (und von h_2 , falls $h_1 \neq h_2$ gelten würde). Diese können nur an kritischen Stellen im Innern oder an Randpunkten des Definitionsbereichs von h_1 angenommen werden.

Die kritischen Stellen im Innern des Definitionsbereichs von h_1 erhält man aus

$$h'_1(x) = 1 - 2x \stackrel{!}{=} 0 \iff x = \frac{1}{2}.$$

Es ist

$$h_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Zusammen mit den Randwerten

$$h_1(-1) = -1, \quad h_1(1) = 1$$

folgt, dass h_1 bei $x_1 = \frac{1}{2}$ das globale Maximum $\frac{5}{4}$ und bei $x_2 = -1$ das globale Minimum -1 besitzt. Mit $y_{1/2} = \pm\sqrt{1-x^2}$ berechnet man die globalen Maximalstellen $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und die globale Minimalstelle $(-1, 0)$ von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$.

5.2.2 Vorliegen einer Parameterdarstellung der Nebenbedingung

Ist für die Kurve $g(x, y) = 0$ eine Parameterdarstellung bekannt, führt Einsetzen der Parameterdarstellung in f wieder zu einer eindimensionalen Extremwertaufgabe. Für Beispiel 5.8 ist

$$K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

eine Parameterdarstellung der Nebenbedingung. Damit definiert man die nur von einer Veränderlichen abhängige Funktion

$$h(t) := f(\cos t, \sin t) = \cos t + \sin^2 t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

deren Extremwerte mit den Extremwerten von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ übereinstimmen.

Für die kritischen Stellen von h gilt:

$$\begin{aligned} h'(t) &= -\sin t + 2 \sin t \cos t = \sin t \cdot (2 \cos t - 1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \iff \sin t &= 0 \quad \text{oder} \quad \cos t = \frac{1}{2} \\ t \in [0, 2\pi] \quad \iff \quad &(t = 0 \quad \text{oder} \quad t = \pi \quad \text{oder} \quad t = 2\pi) \quad \text{oder} \quad (t = \frac{\pi}{3} \quad \text{oder} \quad t = \frac{5\pi}{3}). \end{aligned}$$

Die Randpunkte $t = 0$ oder $t = 2\pi$ sind in diesen Stellen bereits enthalten. Mit

$$h(0) = h(2\pi) = 1, \quad h(\pi) = -1, \quad h\left(\frac{\pi}{3}\right) = h\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5}{4}$$

ergeben sich zur Nebenbedingung $g = 0$ dieselben Extremwerte für f wie im letzten Abschnitt.

5.2.3 Das Verfahren von Lagrange

Mit dem Verfahren von Lagrange löst man die gestellte Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung, wenn die beiden obigen Methoden nicht anwendbar sind. Die Grundidee der Methode von Lagrange besteht darin, die Nebenbedingung in der Umgebung einer gesuchten Extremstelle mithilfe des Satz über implizite Funktionen lokal durch eine Relation zwischen x und y zu ersetzen.

Die durch $g(x, y) = 0$ definierte Kurve K sei in der Nähe eines Kurvenpunkts (x_0, y_0) , in welchem ein Extremwert von f auf K angenommen wird, durch eine implizit definierte Funktion $y = \varphi(x)$ darstellbar. Durch Einsetzen von φ in $f(x, y)$ erhält man wie in Abschnitt 5.2.1 eine eindimensionale Extremwertaufgabe. Wesentlich für den Erfolg der Methode von Lagrange ist die Erkenntnis, dass die unbekannte Funktion φ nur zur Herleitung des Verfahrens benötigt wird und für die eigentliche Rechnung wieder durch g ersetzt werden kann.

Für die in einer Umgebung der Stelle x_0 durch

$$h(x) := f(x, \varphi(x))$$

definierte Funktion h gilt $h'(x_0) = 0$, da x_0 als Extremstelle vorausgesetzt wurde. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist weiter

$$\varphi'(x_0) = -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)},$$

sofern $g_y(x_0, y_0) \neq 0$ ist. Mit der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \left. \frac{d}{dx} f(x, \varphi(x)) \right|_{x=x_0} = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot \varphi'(x_0) \\ &= f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot \left(-\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\iff f_x(x_0, y_0) \cdot (-g_y(x_0, y_0)) + f_y(x_0, y_0) \cdot g_x(x_0, y_0) = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -g_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ ist also orthogonal zum Vektor $\begin{pmatrix} -g_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) \end{pmatrix}$, welcher wiederum orthogonal zum Vektor $\begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ ist. Die beiden Vektoren $\text{grad } f(x_0, y_0)$ und $\text{grad } g(x_0, y_0)$ sind demnach parallel. In diesem Fall existiert eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass

$$\text{grad } f(x_0, y_0) + \lambda \cdot \text{grad } g(x_0, y_0) = 0$$

gilt. Zusammen mit der Nebenbedingung erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_x(x, y) + \lambda \cdot g_x(x, y) &= 0 \\ f_y(x, y) + \lambda \cdot g_y(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

als *notwendige* Bedingung für das Vorliegen einer Extremstelle der Funktion $f(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$. Falls $g_x(x_0, y_0) \neq 0$ ist, kann man genauso schließen.

Satz 5.9 Die Funktionen $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar. Für alle Punkte (x, y) mit $g(x, y) = 0$ sei $\text{grad } g(x, y) \neq \vec{0}$. Dann gilt: Falls f im Punkt (x_0, y_0) ein Extremum unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ besitzt, dann ist (x_0, y_0) Lösung von (5.1).

Die Variable λ heißt *Lagrange-Multiplikator*. Im Allgemeinen ist (5.1) ein nichtlineares Gleichungssystem für die drei Unbekannten x, y und λ . Den Wert von λ benötigt man dabei nicht, um die ursprüngliche Extremwertaufgabe zu lösen.

Für das obige Beispiel 5.8 gilt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y^2 \Rightarrow f_x(x, y) = 1, \quad f_y(x, y) = 2y, \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow g_x(x, y) = 2x, \quad g_y(x, y) = 2y, \end{aligned}$$

und wir erhalten gemäß (5.1) das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} 1 + \lambda \cdot 2x = 0 & | \cdot y \leftarrow & - \\ 2y + \lambda \cdot 2y = 0 & | \cdot x \rightarrow & - \\ \hline x^2 + y^2 = 1. \end{array}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit y , der zweiten Zeile mit x und anschließende Subtraktion ergibt

$$y - 2xy = 0.$$

Die Beseitigung von λ auf diese Weise entspricht dem üblichen Vorgehen, das dadurch motiviert ist, dass der Wert von λ in der ursprünglichen Extremwertaufgabe nicht auftritt. Es folgt

$$y - 2xy = y(1 - 2x) \stackrel{!}{=} 0 \iff y = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{2}.$$

Setzt man nun $y = 0$ in die Nebenbedingung ein, so gilt

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P_1 = (1, 0), P_2 = (-1, 0).$$

Einsetzen von $x = \frac{1}{2}$ in die Nebenbedingung liefert

$$y^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Wie oben folgt, dass $f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{4}$ ein globales Maximum und $f(-1, 0) = -1$ ein globales Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ ist.

Das Verfahren von Lagrange liefert nur stationäre Punkte für die gestellte Extremwertaufgabe. Der Nachweis, dass in einem stationären Punkt tatsächlich ein Extremwert von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ vorliegt, erfordert zusätzliche Überlegungen, die von den Eigenschaften der durch die Nebenbedingung definierten Kurve abhängen.

Beispiel 5.10

1. Gesucht seien die Extrema und die zugehörigen Extremstellen von

$$f(x, y) = \frac{x+1}{y}, \quad y \neq 0$$

unter der Nebenbedingung

$$y^2 - x^2 = 1.$$

Die Nebenbedingung beschreibt eine Hyperbel, welche die x -Achse nicht schneidet und die somit im Definitionsbereich von f liegt. Für $y = 0$ müsste $x^2 = -1$ sein, was für keine reelle Zahl x möglich ist.

Mit

$$g(x, y) := y^2 - x^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

folgt mit der Methode von Lagrange

$$\begin{aligned} f_x + \lambda \cdot g_x &= \frac{1}{y} - \lambda \cdot 2x = 0 & | \cdot y \\ f_y + \lambda \cdot g_y &= -\frac{x+1}{y^2} + \lambda \cdot 2y = 0 & | \cdot x \\ g &= y^2 - x^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \cdot y \\ \cdot x \end{array} \right\} + \quad (5.2)$$

Multiplikation der ersten Zeile mit y , der zweiten Zeile mit x und anschließende Addition liefert

$$1 - \frac{x(x+1)}{y^2} = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 - x = 0. \quad (5.3)$$

Einsetzen der dritten Zeile von (5.2) in (5.3) ergibt

$$1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \stackrel{\text{NB}}{\Rightarrow} y = \pm\sqrt{2}.$$

Somit lauten die kritischen Punkte

$$P_1 = (1, \sqrt{2}) \quad \text{und} \quad P_2 = (1, -\sqrt{2}).$$

Für die Funktionswerte an diesen Stellen gilt

$$f(1, \sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad f(1, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}.$$

Da es genau zwei stationäre Punkte gibt, liegt die Vermutung nahe, dass es sich um die gesuchten globalen Extremstellen handelt. Allerdings tritt bei diesem Beispiel das Problem auf, dass die durch $g(x, y) = 0$ definierte Hyperbel unbeschränkt und somit nicht kompakt ist. Die Existenz von Extremwerten ist damit nicht garantiert.

Wir zeigen nun mit zusätzlichen Überlegungen, dass $\pm\sqrt{2}$ globale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sind. Es gilt

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \leq f \leq \sqrt{2} &\iff |f(x, y)| \leq \sqrt{2} \iff f^2(x, y) \leq 2 \\ &\iff \frac{(x+1)^2}{y^2} \leq 2 \stackrel{\text{NB}}{\iff} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \leq 2 \\ &\iff x^2 + 2x + 1 \leq 2x^2 + 2 \iff 0 \leq x^2 - 2x + 1 = \underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig. Also sind $\pm\sqrt{2}$ globale Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ mit den zugehörigen Extremstellen P_1 (Maximum) und P_2 (Minimum).

2. Eine zylindrische Konservendose mit gegebenem Volumen V soll so konstruiert werden, dass zu Ihrer Herstellung möglichst wenig Material verbraucht wird. Der Abfall, der beim Ausstanzen von Boden und Deckel entsteht, ist zu berücksichtigen. Wie nahezu immer bei Anwendungsproblemen besteht der schwierigste Teil des Lösungswegs aus der Modellierung, d.h. der Herleitung einer mathematischen Formel, die die Problemstellung beschreibt. Wir führen diese Herleitung dimensionslos, ohne Berücksichtigung von Einheiten wie m oder m^3 , durch.

Bezeichnet r den Radius des Dosenzylinders und h seine Höhe, dann beträgt das Volumen der Dose

$$V = \pi r^2 h. \quad (5.4)$$

Die Mantelfläche der Dose ist das Produkt aus Umfang des Bodens und der Höhe h ,

$$M = 2\pi r h.$$

Boden und Deckel werden aus quadratischen Blechstücken mit Kantenlänge $2r$ ausgestanzt. Der Materialverbrauch besteht aus der Oberfläche der Dose und dem Verschnitt. Zur Herstellung einer Dose wird also Blech von der Gesamtfläche

$$O = M + 2 \cdot (2r)^2 = 2\pi r h + 8r^2$$

benötigt. Gesucht sind r und h , sodass O bei gegebenem Volumen V minimal wird, also das Minimum von

$$f(r, h) = 2\pi r h + 8r^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g(r, h) = \pi r^2 h - V \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Methode von Lagrange liefert die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_r + \lambda \cdot g_r &= 2\pi h + 16r + 2\lambda\pi r h = 0 & \left| \cdot r \right. & \left. \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \right. \\ f_h + \lambda \cdot g_h &= 2\pi r + \lambda\pi r^2 = 0 & \left| \cdot 2h \right. & \\ g &= \pi r^2 h - V = 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Subtrahiert man vom r -fachen der ersten Gleichung das $2h$ -fache der zweiten Gleichung, wird λ eliminiert und man erhält

$$2\pi r h + 16r^2 - 4\pi r h = 0 \iff h = \frac{8}{\pi} r.$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung von (5.5) folgt

$$8r^3 - V = 0 \iff r = \frac{1}{2} \sqrt[3]{V}$$

und schließlich

$$h = \frac{8}{\pi} r = \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{V}.$$

Es gibt also nur einen stationären Punkt $(r_0, h_0) = \left(\frac{1}{2} \sqrt[3]{V}, \frac{4}{\pi} \sqrt[3]{V}\right)$. Aus der Anschauung ist ersichtlich, dass die Funktion O in diesem Punkt ein absolutes Minimum annimmt, denn der Materialverbrauch steigt an, wenn die Dose für $r \rightarrow 0+$ immer höher und schmaler oder für $r \rightarrow \infty$ immer flacher und breiter wird. Der rechnerische Nachweis erfolgt durch Auflösen von (5.4) nach h , Einsetzen in O und Berechnung der Grenzwerte

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{2V}{r} + 8r^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{2V}{r} + 8r^2 = \infty.$$

Das praktisch verwertbare Ergebnis dieser Aufgabe besteht darin, dass der Materialverbrauch zur Herstellung einer Konservendose mit Volumen V für das Verhältnis

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi}$$

minimal wird.

3. Zu bestimmen seien alle Extrema der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x \cdot y,$$

unter der Nebenbedingung

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Die zur Nebenbedingung gehörige Funktion

$$g(x, y) := (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

beschreibt einen Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1, 0)$, also eine kompakte Menge. Da f stetig ist, ist die Existenz globaler Extremwerte nach dem Satz vom Minimum und Maximum garantiert.

Wir lösen die Extremwertaufgabe mit der Methode von Lagrange, welche auf das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} f_x + \lambda \cdot g_x = y + \lambda \cdot 2(x - 1) = 0 & \left| \cdot y \leftarrow \right. & \\ f_y + \lambda \cdot g_y = x + \lambda \cdot 2y = 0 & \left| \cdot (x - 1) \right. & \\ g = (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0 & & \end{array} \quad (5.6)$$

führt. Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile nach Multiplikation der ersten Zeile mit y und der zweiten Zeile mit $(x - 1)$ ergibt

$$y^2 - x(x - 1) = 0 \iff y^2 = x^2 - x. \quad (5.7)$$

Durch Einsetzen von (5.7) in die dritte Zeile von (5.6) erhalten wir

$$(x - 1)^2 + x^2 - x - 1 = 0 \iff 2x^2 - 3x = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = \frac{3}{2}.$$

Mit (5.7) ergibt sich wiederum

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0, \\ x = \frac{3}{2} &\Rightarrow y^2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Kritische Punkte sind folglich $(0, 0)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ und $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Es gilt

$$f(0, 0) = 0, \quad f\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{3}, \quad f\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{4} \sqrt{3}.$$

Also besitzt f bei $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ein globales Maximum mit Wert $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ und bei $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ein globales Minimum mit Wert $-\frac{3}{4}\sqrt{3}$. \triangle

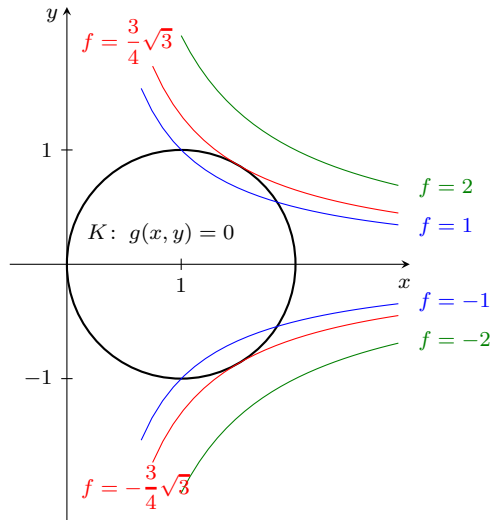


Abb. 5.12: Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ und Höhenlinien von f .

◇

Bemerkung 5.11 In Beispiel 4.6 hatten wir festgestellt, dass der Gradient von f orthogonal zu jeder Höhenlinie von f ist. Die gleiche Eigenschaft besitzt der Gradient von g , der zur Kurve $g(x, y) = 0$ orthogonal ist. Da Extremwerte von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ in Punkten angenommen werden, in denen die Gradienten von f und g parallel sind, wird die Kurve $g = 0$ in einer Extremstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ von einer Höhenlinie von f berührt (vgl. Abbildung 5.12).

Teil II

Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

Kapitel 6

Kurvenintegrale 1. Art

In diesem Kapitel erweitern wir das Riemann-Integral auf Integrationsbereiche, die durch ebene oder räumliche Kurven in Parameterdarstellung beschrieben werden. Mit sogenannten Kurvenintegralen können gewisse Eigenschaften einer Kurve berechnet werden, z.B.

- die Bogenlänge der Kurve,
- die Gesamtmasse eines dünnen gebogenen Drahts, dessen ortsabhängige Masendichte gegeben ist,
- die Schwerpunktkoordinaten dieser Masse.

Zur Vorbereitung erinnern wir an die in Band 1 eingeführte Definition einer stetigen ebenen Kurve mithilfe einer Parameterdarstellung.

6.1 Parameterdarstellung ebener Kurven

Durch die Bewegung eines Punktes, dessen Position in der Ebene zur Zeit t durch zwei stetige Funktionen x und y beschrieben wird, entsteht eine ebene Kuve:

Definition 6.1 Gegeben seien ein reelles Intervall I sowie zwei auf I definierte, stetige reellwertige Funktionen x und y . Dann heißt

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

Parameterdarstellung der stetigen Kurve

$$K: \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}.$$

Wachsendes t legt die *Orientierung* der Kurve fest. Ist $I = [t_1, t_2]$ ein endliches Intervall, dann heißt $(x(t_1), y(t_1))$ *Anfangspunkt* und $(x(t_2), y(t_2))$ *Endpunkt* von K . Falls x und y differenzierbar sind, ist $(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ der *Geschwindigkeitsvektor* der Bewegung zum Zeitpunkt t . Ein Punktsymbol über einer Variablen bezeichnet hier und im Folgenden die Ableitung nach dem Kurvenparameter t .

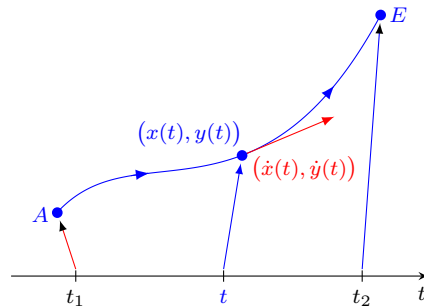


Abb. 6.1: Parameterdarstellung einer Kurve.

In Band 1 hatten wir das Tangentenproblem für Kurven behandelt. Nun interessieren wir uns für Integrale einer skalaren Funktion, deren Definitionsbereich aus einer Kurve besteht. Eine prinzipielle Schwierigkeiten entsteht daraus, dass dieselbe ebene Punktmenge als Kurve auf verschiedene Weise, d.h. mit unterschiedlichen Parameterdarstellungen durchlaufen werden kann. Das Kurvenintegral darf aber nur von der Punktmenge, nicht jedoch von der Parameterdarstellung abhängen. Dies führt zu Einschränkungen für zulässige Parameterdarstellungen.

Beispiel 6.2 K sei der Graph der Funktion

$$f: x \mapsto x, \quad x \in [-1, 1].$$

Wir betrachten im Folgenden unterschiedliche Parameterdarstellungen von K :

1. Für

$$K: \begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = t - 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 2],$$

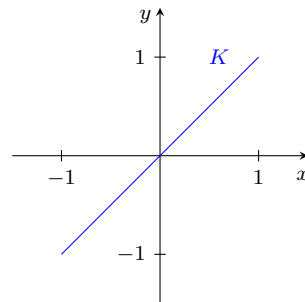


Abb. 6.2: Graph von $x \mapsto x, \quad x \in [-1, 1]$.

wird K gleichmäßig von links nach rechts durchlaufen. Der Geschwindigkeitsvektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (1, 1)$ ist konstant.

2. Für

$$K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi],$$

wird K ungleichmäßig schnell von rechts nach links durchlaufen. Am Anfang und am Ende der Bewegung ist der Geschwindigkeitsvektor $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) =$

$(-\sin t, -\sin t)$ der Nullvektor. Diese Parameterdarstellung entspricht dem Durchlaufen der Kurve mit Anfahren aus dem Stand und Abbremsen am Ende bis zum Stillstand.

3. In der Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right],$$

wird K vollständig von links nach rechts, danach vollständig von rechts nach links und schließlich wieder von links nach rechts bis zum Nullpunkt durchlaufen. \triangle

Die jeweils zurückgelegte Wegstrecke des Punktes P ist verschieden. In den ersten beiden Parameterdarstellungen besitzt sie die Länge $2\sqrt{2}$, in der dritten aber die Länge $5\sqrt{2}$, da die Kurve zweimal vollständig und ein drittes Mal zur Hälfte durchlaufen wird. Für eine zuverlässige Längenmessung der Kurve muss ein mehrfaches Durchlaufen von Teilstücken der Kurve vermieden werden. Dies erreicht man durch den in Band 1 eingeführten Begriff der J-Kurve.

Definition 6.3 Falls es zu jedem Punkt (x, y) einer stetigen Kurve K in der Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

genau ein $t \in [t_1, t_2]$ gibt, wobei als einzige Ausnahme

$$(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2)) \quad (6.1)$$

zugelassen ist, dann heißt K *Jordan-Kurve*. Falls (6.1) gilt, so nennt man K *geschlossene Jordan-Kurve*.

Eine Jordan-Kurve besitzt höchstens einen Doppelpunkt. Die Existenz eines Tangentialvektors ist allerdings in keinem einzigen Kurvenpunkt gesichert. Dazu werden Differenzierbarkeitseigenschaften der Parameterdarstellung benötigt.

Definition 6.4 Es sei I ein reelles Intervall. Eine Kurve K heißt *glatte Kurve auf I* , wenn es eine Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

mit auf I stetig differenzierbaren Funktionen x und y gibt, sodass für jedes $t \in I$ nicht gleichzeitig \dot{x} und \dot{y} verschwinden.

Glatte Kurven haben keine Knicke, aber sie können beliebig viele Doppelpunkte besitzen. Im Hinblick auf Anwendungen kann man weder Doppelpunkte noch Knicke gänzlich verbieten. Dies ist auch gar nicht nötig, da man endlich viele Doppelpunkte oder Knicke in einer Kurve zulassen darf. Diese werden dadurch behandelt, dass man die entsprechende Kurve in hinreichend viele Teilkurven unterteilt, die jeweils Jordan-Kurven und glatt sind.

Definition 6.5 Die Funktionen x und y in der Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad t \in I,$$

seien stückweise stetig differenzierbar. Mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Stellen gelte

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \text{ in } I.$$

Weiter besitze die Kurve K höchstens endlich viele Doppelpunkte. Dann heißt K *stückweise glatte jordanähnliche Kurve* oder kurz *J-Kurve*.

Unter den Voraussetzungen von Definition 6.5 lässt sich das Intervall I in endlich viele abgeschlossene Teilintervalle zerlegen, auf denen x und y jeweils stetig differenzierbar und die zugehörigen Teilkurven von K doppelpunktfrei sind. Bei J-Kurven ist ein Stillstand der Bewegung in einzelnen Punkten, nicht aber in einem Teilintervall von I zugelassen. Eine Bewegungsumkehr ist nicht möglich. Kein Teilstück einer J-Kurve wird mehrfach durchlaufen.

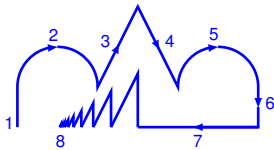


Abb. 6.3: Jordan-Kurve.

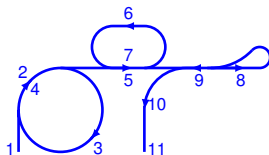


Abb. 6.4: Glatte Kurve.

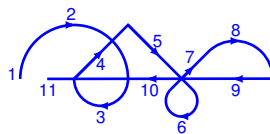


Abb. 6.5: J-Kurve.

6.2 Kurvenintegrale 1. Art für ebene J-Kurven

Für eine in Parameterdarstellung gegebene J-Kurve

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

erfolgt die Herleitung eines Kurvenintegrals 1. Art analog zur Bestimmung der Bogenlänge eines Funktionsgraphen in Band 1. Die Kurve sei mit einer beschränkten und stückweise stetigen skalaren Funktion

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

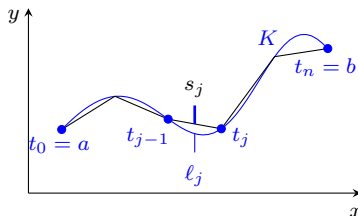


Abb. 6.6: Kurvenintegral 1. Art.

belegt. Sind die Funktionswerte von f positiv, dürfen wir uns f als Massendichte eines gebogenen Drahts der Form K vorstellen, für den die Gesamtmasse gesucht ist.

Zur Approximation dieser Masse wird zunächst das Parameterintervall $[a, b]$ in hinreichend kleine Teilintervalle $I_j := [t_{j-1}, t_j]$ unterteilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei diese Zerlegung so durchgeführt, dass die Komponentenfunktionen x und y der Kurve auf jedem Teilintervall stetig differenzierbar sind, sodass sich die Massendichte auf den zugehörigen Teilstücken der Kurve nicht wesentlich ändert. Ein kleines Drahtstück der Länge ℓ_j besitzt demnach ungefähr die Masse

$$m_j \approx f(x(t_j), y(t_j)) \cdot \ell_j.$$

Das Bogenstück ℓ_j wird nun durch die Sekante s_j mit Länge

$$s_j = \sqrt{(x(t_j) - x(t_{j-1}))^2 + (y(t_j) - y(t_{j-1}))^2}$$

approximiert. Gemäß Mittelwertsatz der Differenzialrechnung existieren zwei Stellen $\tau_{j1}, \tau_{j2} \in I_j$ mit

$$\frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \dot{x}(\tau_{j1}), \quad \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} = \dot{y}(\tau_{j2}),$$

sodass die Länge von s_j durch

$$s_j = \sqrt{(\dot{x}(\tau_{j1}))^2 + (\dot{y}(\tau_{j2}))^2} (t_j - t_{j-1})$$

dargestellt wird. Aufsummation der Massenelemente führt schließlich auf die Approximation der Gesamtmasse

$$\begin{aligned} M &= \sum_j m_j \approx \sum_j f(x(t_j), y(t_j)) \cdot \ell_j \approx \sum_j f(x(t_j), y(t_j)) \cdot s_j \\ &= \sum_j f(x(t_j), y(t_j)) \sqrt{(\dot{x}(\tau_{j1}))^2 + (\dot{y}(\tau_{j2}))^2} (t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Mit zusätzlichen Überlegungen, die wir hier nicht führen können, lässt sich zeigen, dass die letzte Summe gegen

$$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt,$$

konvergiert, wenn das Feinheitsmaß der Zerlegung gegen Null strebt. Für derartige Integrale ist die Schreibweise $\int_K f(x, y) ds$ üblich. Damit gilt:

Definition 6.6 Die Kurve

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

sei eine J-Kurve. Die Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und stückweise stetig auf K . Dann heißt

$$\int_K f(x, y) ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt$$

Kurvenintegral 1. Art von f über K .

Beispiel 6.7

1. Für die Vierteilellipse

$$K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

und die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto 3xy$$

ist

$$\begin{aligned} \int_K f(x, y) ds &= \int_K 3xy ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3x(t)y(t) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos t \sin t \sqrt{\sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 6 \cos t \sin t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt \Big|_{dz=6 \cos t(-\sin t) dt}^{z=1+3 \cos^2 t} \\ &= - \int_4^1 \sqrt{z} dz = - \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_4^1 = -\frac{2}{3}(1 - 8) = \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

2. Ist die J-Kurve K mit der beschränkten und stückweise stetigen Massendichte f belegt, dann lauten ihre Schwerpunktkoordinaten*

$$x_S = \frac{1}{M} \int_K x f(x, y) ds, \quad y_S = \frac{1}{M} \int_K y f(x, y) ds,$$

wobei

$$M = \int_K f(x, y) ds$$

die Gesamtmasse der Kurve bezeichnet.

* Diese Berechnungsformeln für den Schwerpunkt werden in Abschnitt 7.4 hergeleitet.

Für den Schwerpunkt der oberen Hälfte des Einheitskreises mit konstanter Massenbelegung 1 folgt aus der Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

somit

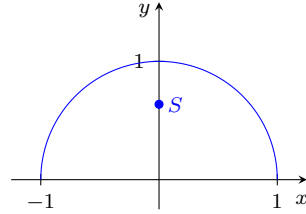


Abb. 6.7: Schwerpunkt des Halbkreises.

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\pi 1 \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi, \\ x_S &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x(t) \cdot 1 \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos t \cdot 1 dt = \frac{1}{\pi} [\sin t]_0^\pi = 0, \\ y_S &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y(t) \cdot 1 \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cdot 1 dt = -\frac{1}{\pi} [\cos t]_0^\pi = \frac{2}{\pi}. \end{aligned} \quad \triangle$$

Zur Rechtfertigung von Definition 6.6 ist noch zu zeigen, dass der Wert des Kurvenintegrals

$$\int_K f(x, y) ds$$

nicht von der gewählten Parameterdarstellung abhängt. Wir führen diesen Nachweis für den Spezialfall, dass zur glatten Kurve $K = K_1 = K_2$ die Parameterdarstellungen

$$K_1: \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \psi_1(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b, \quad K_2: \begin{cases} x = \varphi_2(\tau) \\ y = \psi_2(\tau) \end{cases}, \quad c \leq \tau \leq d,$$

vorliegen und es eine streng monoton wachsende und stetig differenzierbare Funktion

$$t = \varrho(\tau) \quad \text{mit} \quad \varrho(c) = a, \quad \varrho(d) = b$$

gibt, die das Parameterintervall $[c, d]$ auf das Parameterintervall $[a, b]$ abbildet. Es ist also

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(\varrho(\tau)) = \varphi_2(\tau), \quad \psi_1(t) = \psi_1(\varrho(\tau)) = \psi_2(\tau).$$

Unter Verwendung der Kettenregel

$$\dot{\varphi}_2(\tau) = \frac{d}{d\tau} \varphi_1(\varrho(\tau)) = \frac{d}{dt} \varphi_1(t) \Big|_{t=\varrho(\tau)} \frac{d}{d\tau} \varrho(\tau) = \dot{\varphi}_1(\varrho(\tau)) \dot{\varrho}(\tau)$$

liefert die Substitution

$$t = \varrho(\tau), \quad dt = \dot{\varrho}(\tau) d\tau$$

die Identität

$$\begin{aligned}
 \int_{K_1} f \, ds &= \int_{t=a}^b f(\varphi_1(t), \psi_1(t)) \sqrt{(\dot{\varphi}_1(t))^2 + (\dot{\psi}_1(t))^2} \, dt \\
 &= \int_{\tau=c}^d f(\varphi_1(\varrho(\tau)), \psi_1(\varrho(\tau))) \sqrt{(\dot{\varphi}_1(\varrho(\tau))\dot{\varrho}(\tau))^2 + (\dot{\psi}_1(\varrho(\tau))\dot{\varrho}(\tau))^2} \, d\tau \\
 &= \int_{\tau=c}^d f(\varphi_2(\tau), \psi_2(\tau)) \sqrt{(\dot{\varphi}_2(\tau))^2 + (\dot{\psi}_2(\tau))^2} \, d\tau = \int_{K_2} f \, ds.
 \end{aligned}$$

Die Linearität des Riemann-Integrals und seine Additivität bezüglich des Integrationsbereichs übertragen sich auf Kurvenintegrale 1. Art. Das nachstehende Lemma folgt als Korollar aus dem entsprechenden Satz zu Riemann-Integralen.

Lemma 6.8 Die J-Kurve K sei die Vereinigung zweier J-Kurven K_1 und K_2 . Die Funktionen f und g seien beschränkt und stückweise stetig auf K . Dann gilt:

1. *Linearität:* Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_K (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, ds = \alpha \int_K f(x, y) \, ds + \beta \int_K g(x, y) \, ds.$$

2. *Additivität:* Es ist

$$\int_K f(x, y) \, ds = \int_{K_1} f(x, y) \, ds + \int_{K_2} f(x, y) \, ds.$$

Neben der bereits erwähnten Deutung als Gesamtmasse bei gegebener Massendichte f besitzt das Kurvenintegral 1. Art eine zweite schöne Veranschaulichung. Falls die Funktion f nur positive Funktionswerte annimmt, entspricht der Wert des Kurvenintegrals $\int_K f(x, y) \, ds$ dem Flächeninhalt eines Zauns der Höhe f auf der Grundlinie K .

Im Spezialfall der konstanten Funktion $f \equiv 1$ liefert das Kurvenintegral den Flächeninhalt eines Zauns konstanter Höhe Eins und somit die Bogenlänge der Kurve K .

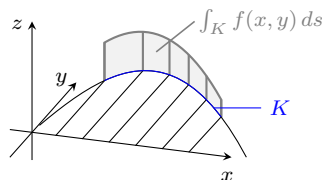


Abb. 6.8: Kurvenintegral 1. Art.

Definition 6.9 Für eine in Parameterdarstellung gegebene J-Kurve

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

ist die *Bogenlänge* $L(K)$ definiert durch das Integral

$$L(K) := \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \, dt.$$

Beispiel 6.10

1. Die Bogenlänge des Kreises

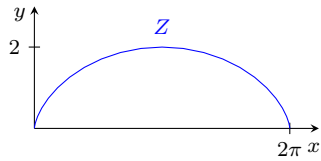
$$K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ist

$$L(K) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

2. Die Zyklode

$$Z: \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$



besitzt die Bogenlänge

Abb. 6.9: Zyklode.

$$\begin{aligned} L(Z) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos^2 \frac{t}{2}) + 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \stackrel{t \in [0, 2\pi]}{=} \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = \left[-4 \cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

3. Ist die Kurve

$$K: r = f(\varphi), \quad \varphi \in [a, b]$$

in Polarkoordinaten gegeben, führt die kanonische Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(\varphi) = f(\varphi) \cdot \cos \varphi \\ y(\varphi) = f(\varphi) \cdot \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [a, b],$$

über

$$\dot{x} = \dot{f} \cos \varphi - f \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{f} \sin \varphi + f \cos \varphi$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \dot{f}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \dot{f} f \cos \varphi \sin \varphi (-2 + 2) + f^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= \dot{f}^2 + f^2 \end{aligned}$$

auf die Bogenlänge

$$L(K) = \int_a^b \sqrt{\dot{f}^2(\varphi) + f^2(\varphi)} d\varphi.$$

△

6.3 Kurvenintegrale 1. Art für räumliche J-Kurven

Alle bisherigen Überlegungen gelten unverändert für räumliche Kurven. Analog zum zweidimensionalen Fall definiert eine Parameterdarstellung mit drei stückweise stetig differenzierbaren Funktionen x , y und z ,

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b, \quad (6.2)$$

eine J-Kurve im \mathbb{R}^3 , wenn mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Stellen

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) > 0 \quad \text{in } [a, b]$$

gilt und wenn K höchstens endlich viele Doppelpunkte besitzt. Die Bogenlänge einer solchen Kurve ist dann durch

$$L(K) := \int_a^b \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt$$

gegeben. Für eine beschränkte und stückweise stetige skalare Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Kurvenintegral 1. Art durch

$$\int_K f ds := \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt$$

definiert.

Zur Verkürzung der Schreibweise notiert man den Vektor $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ in (6.2) häufig mit $\vec{\gamma}(t)$.

Kurvenintegrale 1. Art lassen sich dann durch

$$\int_K f ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \|\dot{\vec{\gamma}}(t)\| dt$$

kompakt darstellen. Die gleiche vektorielle Schreibweise ist auch für ebene Kurven gebräuchlich.

Beispiel 6.11

1. Die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$K: \begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 3 \sin t \\ z(t) = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

ist

$$L(K) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-3 \sin t)^2 + 9 \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{10} dt = 4\sqrt{10}\pi.$$

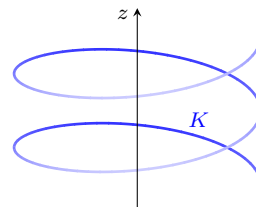


Abb. 6.10: Schraubenlinie.

2. Wird die Massendichte der Schraubenlinie durch

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto 1 + z$$

beschrieben, erhält man die Gesamtmasse

$$\begin{aligned} M &= \int_K (1 + z) ds = \int_0^{4\pi} (1 + t) \sqrt{(-3 \sin t)^2 + 9 \cos^2 t + 1} dt \\ &= \sqrt{10} \int_0^{4\pi} (1 + t) dt = \sqrt{10} \left[t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{4\pi} = \sqrt{10} (4\pi + 8\pi^2). \end{aligned}$$

Die z -Koordinate des Schwerpunkts ist

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{M} \int_K z(1 + z) ds = \frac{1}{M} \int_0^{4\pi} t(1 + t) \sqrt{(-3 \sin t)^2 + 9 \cos^2 t + 1} dt \\ &= \frac{\sqrt{10}}{M} \int_0^{4\pi} (t + t^2) dt = \frac{1}{4\pi + 8\pi^2} \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{3} t^3 \right]_0^{4\pi} \\ &= \frac{1}{4\pi + 8\pi^2} (8\pi^2 + \frac{64}{3} \pi^3) = \frac{6\pi + 16\pi^2}{3 + 6\pi} \approx 8.09. \end{aligned}$$

3. Die Wellenlinie

$$W: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = \frac{1}{4} \sin(4t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

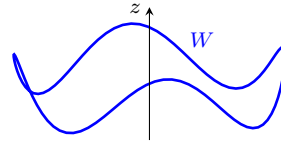


Abb. 6.11: Wellenlinie.

besitzt die Bogenlänge

$$L(W) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + \cos^2(4t)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(4t)} dt.$$

Dies ist ein sogenanntes elliptisches Integral, welches nur näherungsweise numerisch gelöst werden kann. Es ist

$$L(W) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2(4t)} dt \approx 7.640395578. \quad \triangle$$

Kapitel 7

Bereichsintegrale

In diesem und in den nächsten beiden Kapiteln werden Flächen und höherdimensionale Bereiche als Integrationsgebiete eingeführt. Überlegungen und Beweisschritte, die wie im Eindimensionalen erfolgen können, werden dabei nicht erneut ausformuliert. Prinzipielle Unterschiede und versteckte Schwierigkeiten der mehrdimensionalen Integration werden vorwiegend an Beispielen erläutert. Im Wesentlichen gehen die Unterschiede zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration nicht auf die Anzahl der Variablen im Integranden zurück, sondern sie resultieren aus der Vielfalt der möglichen Integrationsbereiche im \mathbb{R}^n .

7.1 Integration über Rechteckbereiche

Die einfachste mehrdimensionale Integrationsaufgabe entsteht aus dem Problem der Volumenberechnung über Rechtecken. Auf einem ebenen Rechteck $R = [a, b] \times [c, d]$ sei eine beschränkte Funktion $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.

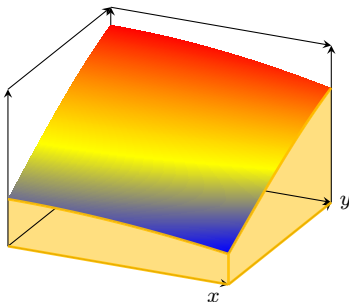


Abb. 7.1: Volumen unter Graph.

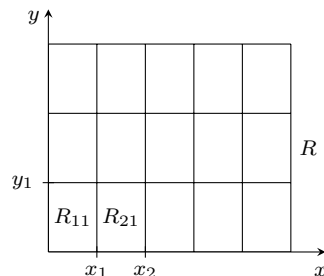


Abb. 7.2: Rechteckgitter.

Zwischen der gewölbten Fläche $z = f(x, y)$ und R wird ein Volumen V eingeschlossen, welches berechnet werden soll.

In Analogie zum eindimensionalen Fall führt man Riemann'sche Zwischensummen für das gesuchte Volumen ein. Dazu *definiert* man das Volumen eines dreidimensionalen Quaders mit Kantenlängen a, b, c durch

$$V := a \cdot b \cdot c \quad (\text{Grundfläche} \times \text{Höhe})$$

und unterteilt den Definitionsbereich, d.h. das Rechteck R , durch ein Gitter. Auf jedem der so entstehenden Teilrechtecke

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

wählt man eine Stelle (ξ_{ij}, η_{ij}) und berechnet $f_{ij} := f(\xi_{ij}, \eta_{ij})$. Dann schließt die stückweise konstante Funktion

$$\hat{f}: R \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x, y) = f_{ij} \text{ für } (x, y) \in R_{ij}$$

über R das aus Quadern zusammengesetzte Volumen

$$\hat{V} := \sum_i \sum_j f_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

ein.

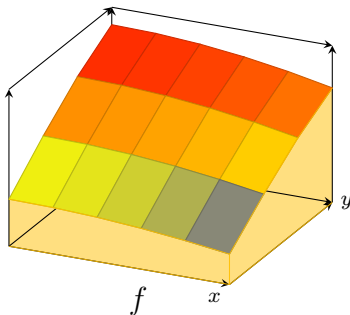


Abb. 7.3: Unterteilung eines Volumens.

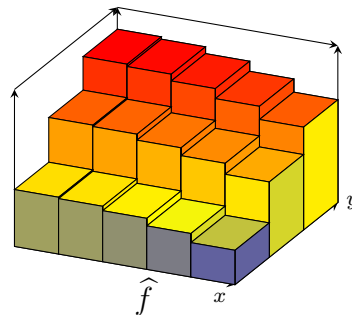


Abb. 7.4: Approximation durch Quader.

Definition 7.1

1. Es sei $R := [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck in der Ebene, $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \times \{y_0, \dots, y_m\}$ eine Zerlegung (ein Gitter) auf R . In jedem Teilrechteck $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ sei (ξ_{ij}, η_{ij}) ein beliebiger Punkt. Dann heißt

$$\sigma(Z) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \quad (7.1)$$

Zwischensumme von f bezüglich Z .

2. Eine Folge von Zerlegungen, für die

$$\max \left(\max_i (x_i - x_{i-1}), \max_j (y_j - y_{j-1}) \right)$$

gegen Null strebt, heißt *Zerlegungsnullfolge*.

3. Die reellwertige Funktion f heißt auf (oder über) R (Riemann-)integrierbar, wenn für jede Zerlegungsnullfolge jede Folge von Zwischensummen gegen dieselbe Zahl V strebt. V heißt dann *bestimmtes Integral* von f über R . Man schreibt dafür

$$V = \iint_R f(x, y) d(x, y). \quad (7.2)$$

Das Integral (7.2) wird *Bereichsintegral*, *Gebietssintegral*, (*ebenes*) *Flächenintegral* oder auch *Doppelintegral* genannt. Man findet auch alternative Schreibweisen wie \int_R statt \iint_R oder dA bzw. dF statt $d(x, y)$.

Analog zum eindimensionalen Fall kann man zu einer Zerlegung Z anstelle der Zwischensummen auch Untersummen

$$s(Z) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$$

und Obersummen

$$S(Z) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - x_{i-1}) (y_j - y_{j-1}) \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y)$$

betrachten. Die Funktion f heißt auf R (Darboux-)integrierbar, wenn für jede Zerlegungsnullfolge jede Folge von Unter- und Obersummen gegen dieselbe Zahl V strebt. Der so erhaltene Integralbegriff stimmt mit dem Riemann-Integral überein.

Wie im Eindimensionalen ist Beschränktheit notwendig und Stetigkeit hinreichend für Riemann-Integrierbarkeit. Der Beweis des nächsten Satzes kann wie im eindimensionalen Fall geführt werden.

Satz 7.2 *Die reellwertige Funktion f sei auf dem kompakten Rechteck R stetig. Dann ist f über R integrierbar.*

In Band 1 hatten wir beim Riemann-Integral bemerkt, dass sich der Flächeninhalt unter einem Funktionsgraphen nicht ändert, wenn man eine Funktion f an endlich vielen Stellen umdefiniert oder wenn man statt über das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ über das offene Intervall (a, b) oder über eines der halboffenen Intervalle $(a, b]$ und $[a, b)$ integriert. Ähnliches gilt auch für mehrdimensionale Integrale. Dazu führen wir den Begriff einer Nullmenge ein.

Definition 7.3 Eine Teilmenge D des \mathbb{R}^n heißt *Nullmenge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ n -dimensionale Quader gibt, von denen jeder ein positives Volumen besitzt, deren aufsummiertes Volumen höchstens ε beträgt und welche D vollständig überdecken.

Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n , welche in einem Raum niedriger Dimension enthalten ist, ist eine Nullmenge. Anschaulich besitzt eine Nullmenge im \mathbb{R}^2 keinen Flächeninhalt, eine Nullmenge im \mathbb{R}^3 kein Volumen. Teilmengen von Nullmengen sowie Schnitte und Vereinigungen von zwei Nullmengen sind ebenfalls Nullmengen.

Beispiel 7.4

1. Strecken und Geraden sind Nullmengen im \mathbb{R}^2 (und in allen Räumen höherer Dimension).
2. Ebene Flächen sind Nullmengen im \mathbb{R}^3 .
3. Die abgeschlossene Einheitskreisscheibe in der (x, y) -Ebene ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^3 . Sie ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ in dem Quader

$$[-1, 1] \times [-1, 1] \times \left[-\frac{\varepsilon}{8}, \frac{\varepsilon}{8}\right]$$

mit Rauminhalt $2 \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ enthalten. \triangle

Mithilfe von Nullmengen lassen sich integrierbare Funktionen einfach charakterisieren:

Satz 7.5 (Integrabilitätskriterium von Lebesgue) Die reellwertige Funktion f ist auf dem kompakten Rechteck R genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie beschränkt ist und die Menge ihrer Unstetigkeitspunkte eine Nullmenge ist.

Aus dem letzten Satz folgt, dass sich der Wert des Integrals nicht ändert, wenn man den Integranden auf einer Nullmenge undefiniert:

Korollar 7.6 Die reellwertigen Funktionen f und \tilde{f} seien auf dem kompakten Rechteck R definiert und beschränkt. \tilde{f} sei über R integrierbar und es gebe eine Nullmenge N , sodass

$$f(x, y) = \tilde{f}(x, y) \quad \text{für } (x, y) \in R \setminus N$$

gilt. Dann ist f über R integrierbar und es ist

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_R \tilde{f}(x, y) d(x, y).$$

Nun definieren wir Integrale über Mengen, die keine Rechtecke sind.

Definition 7.7 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge, deren Rand eine Nullmenge sei. Die reellwertige Funktion f sei – eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge – stetig und beschränkt auf D . R sei ein beliebiges, D enthaltendes Rechteck. Die Funktion $\tilde{f}: R \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \in D, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

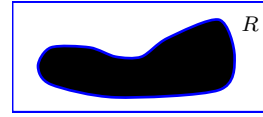


Abb. 7.5: Rechteck um Menge.

Dann vereinbart man:

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) := \iint_R \tilde{f}(x, y) d(x, y).$$

Bemerkung 7.8

1. Das rechte Integral in Definition 7.7 ist nach Satz 7.5 wohldefiniert, weil \tilde{f} auf R definiert und beschränkt sowie höchstens auf einer Nullmenge und auf dem Rand von D , einer weiteren Nullmenge nach Voraussetzung, unstetig ist.
2. Jede geschlossene ebene J-Kurve ist eine Nullmenge im \mathbb{R}^2 . Definition 7.7 erfasst alle Integrationsgebiete, deren Rand eine J-Kurve darstellt. Darunter fallen alle kreis- oder ellipsenförmigen Mengen, sowie beliebige endliche Vereinigungen solcher Mengen. Die üblichen in praktischen Anwendungen auftretenden Integrationsbereiche sind damit abgedeckt. Z.B. die folgenden Gebiete haben eine J-Kurve als Rand:

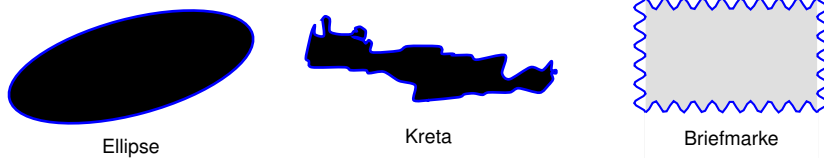


Abb. 7.6: Gebiete mit J-Kurve als Rand.



Eine weitere Verallgemeinerung von ebenen Bereichsintegralen wird benötigt, wenn der Integrand auf einer Nullmenge des Integrationsbereichs undefiniert ist. In diesem Fall möchte man umständliche Schreibweisen für den Integrationsbereich vermeiden und diesen größer als den Definitionsbereich wählen.

Definition 7.9 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beschränkte Menge, $N \subseteq D$ eine Nullmenge und f eine auf $D \setminus N$ erklärte reellwertige Funktion. Die Funktion $\tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \in D \setminus N, \\ 0 & \text{für } (x, y) \in N. \end{cases}$$

Falls \tilde{f} über D integrierbar ist, setzt man

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) := \iint_D \tilde{f}(x, y) d(x, y).$$

Damit darf man auch dann

$$\iint_R f(x, y) d(x, y)$$

schreiben, wenn f auf dem Rand von R oder einer beliebigen anderen Nullmenge nicht definiert ist.

Bevor wir ein Berechnungsverfahren für mehrdimensionale Integrale vorstellen, fassen wir die wichtigsten Eigenschaften des Riemann-Integrals zusammen. Die Aussagen werden für zweidimensionale Integrale formuliert. Sie gelten sinngemäß auch im mehrdimensionalen Fall. Der Beweis der Eigenschaften 2.-7. kann analog zum Beweis im eindimensionalen Fall in Band 1 geführt werden.

Satz 7.10 Die Funktionen f und g seien über dem kompakten Rechteck $R \subset \mathbb{R}^2$ integrierbar. Dann gilt:

1. f ist über jede Teilmenge D von R , deren Rand eine Nullmenge ist, integrierbar.
2. Sind D und G zwei disjunkte Teilmengen Mengen von R , über die f integrierbar ist, dann ist f auch über die Vereinigung $D \cup G$ integrierbar und es ist

$$\iint_{D \cup G} f(x, y) d(x, y) = \iint_D f(x, y) d(x, y) + \iint_G f(x, y) d(x, y).$$

3. Für $k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\iint_R k \cdot f(x, y) d(x, y) = k \iint_R f(x, y) d(x, y).$$

4. Summe und Differenz von f und g sind über R integrierbar und es ist

$$\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y)) d(x, y) = \iint_R f(x, y) d(x, y) \pm \iint_R g(x, y) d(x, y).$$

5. Das Produkt von f und g ist über R integrierbar.

6. Der Betrag von f ist über R integrierbar und es gilt die Dreiecksungleichung für mehrdimensionale Bereichsintegrale:

$$\left| \iint_R f(x, y) d(x, y) \right| \leq \iint_R |f(x, y)| d(x, y).$$

7. Das Integral ist monoton bezüglich des Integranden. Falls $f(x, y) \leq g(x, y)$ auf R gilt, folgt

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) \leq \iint_R g(x, y) d(x, y).$$

7.2 Der Satz von Fubini

In diesem Abschnitt erläutern wir, wie man Integrale über Rechteckbereichen berechnet. Wir liefern keinen mathematisch strengen Beweis, skizzieren aber die wichtigsten Schritte.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass der Integrand f über einem kompakten Rechteck R stetig und beschränkt und somit integrierbar ist. Folglich konvergiert jede Zwischensumme der Bauart (7.1) gegen den Wert des Integrals. Zur Berechnung dieses Werts wählen wir nun spezielle Zwischensummen aus und setzen

$$\xi_{ij} := x_i \text{ für alle } j, \eta_{ij} := y_j \text{ für alle } i.$$

Da jede Zwischensumme nur aus endlich vielen Summanden besteht, dürfen wir nach Belieben Klammern setzen. Beispielsweise ist

$$\sigma(Z) = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n f(x_i, y_j) (x_i - x_{i-1}) \right) (y_j - y_{j-1}) \quad (7.3)$$

eine Zwischensumme von $\iint_R f(x, y) d(x, y)$, die zur Berechnung des Integrals herangezogen werden kann. Für festes y_j ist die innere Summe eine Zwischensumme des Integrals

$$g(y_j) := \int_{x=a}^b f(x, y_j) dx, \quad (7.4)$$

welches den Parameter y_j enthält. Weil f auf R als stetig vorausgesetzt war, ist auch die für $x \in [a, b]$ definierte Funktion $x \mapsto f(x, y_j)$ für beliebiges y_j stetig in $[a, b]$ und somit über $[a, b]$ integrierbar. Im Grenzübergang immer feinerer Zerlegungen bezüglich x konvergiert die Folge der Zwischensummen

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_j) (x_i - x_{i-1})$$

gegen das Integral (7.4) und die Folge der Zwischensummen (7.3) konvergiert gegen

$$\hat{\sigma}(Z) := \sum_{j=1}^m g(y_j) (y_j - y_{j-1}).$$

Die Summe $\hat{\sigma}(Z)$ kann wiederum als Zwischensumme interpretiert werden, und zwar für das Integral

$$\int_{y=c}^d g(y) dy.$$

Auch die Funktion $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ist unter den gestellten Voraussetzungen stetig und somit integrierbar, womit wir das folgende Resultat erhalten:

Man darf das Integral (7.2) als iteriertes Integral berechnen, indem zuerst über x und dann über y integriert wird. Die Variable, bezüglich welcher nicht integriert wird, wird jeweils als Konstante angesehen.

Schließlich darf man die Summanden in (7.1) auch in der Form

$$\sigma(Z) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) (y_j - y_{j-1}) \right) (x_i - x_{i-1})$$

klammern und dadurch die Reihenfolge der Variablen bei der iterierten Integration tauschen. Insgesamt gilt:

Satz 7.11 (Satz von Fubini für Rechtecke) Es sei $R := [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck in der Ebene und $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Für beschränkte Funktionen gelten die Aussagen auch, wenn es eine Nullmenge gibt, auf der f nicht definiert oder nicht stetig ist.

Die Berechnung eines ebenen Bereichsintegrals mit dem Satz von Fubini führt zu einer Faserung des Integrationsgebiets. Die innere Integration wird längs der Fasern durchgeführt. Interpretiert man f als Massendichte, bestimmt man mit der inneren Integration die Massen der einzelnen Fasern. Die äußere Integration berechnet die Gesamtmasse durch Summation über alle Fasern.

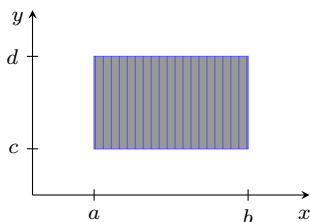


Abb. 7.7: Vertikale Faserung:

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx.$$

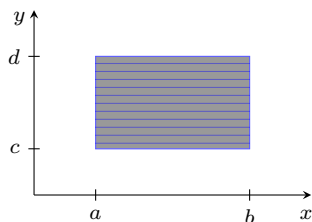


Abb. 7.8: Horizontale Faserung:

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Beispiel 7.12

1. Im Spezialfall $f(x, y) \equiv 1$ ist

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b 1 dx \right) dy = \int_{y=c}^d [x]_{x=a}^b dy$$

$$= \int_{y=c}^d (b-a) dy = \left[(b-a)y \right]_{y=c}^d = (b-a)(d-c).$$

Das berechnete Volumen ist das Volumen eines Quaders mit Grundfläche R und konstanter Höhe 1. Lässt man die unterschiedlichen Maßeinheiten für Volumen und Fläche unberücksichtigt, entspricht das Integral dem Flächeninhalt des Rechtecks R .

2. Für $R = [0, 1] \times [0, 1]$ und $f(x, y) = (2 - 4x)ye^{y^2}$ ist

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) d(x, y) &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (2 - 4x)ye^{y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^1 \left[(1 - 2x)e^{y^2} \right]_{y=0}^1 dx = \int_{x=0}^1 (1 - 2x)(e - 1) dx \\ &= \left[(e - 1)(x - x^2) \right]_{x=0}^1 = 0. \end{aligned}$$

Bei Vertauschung der Integrationsreihenfolge erhält man dasselbe Ergebnis:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) d(x, y) &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 (2 - 4x)ye^{y^2} dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left[(2x - 2x^2)ye^{y^2} \right]_{x=0}^1 dy = \int_{y=0}^1 0 dy = 0. \quad \triangle \end{aligned}$$

Kann der Integrand $f(x, y)$ als Produkt zweier Funktionen je einer Veränderlichen dargestellt werden, etwa

$$f(x, y) = g(x)h(y),$$

dann lässt sich das Integral von f über einem Rechteck als Produkt zweier eindimensionaler Integrale berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d g(x)h(y) dy \right) dx &= \int_{x=a}^b g(x) \left(\int_{y=c}^d h(y) dy \right) dx \\ &= \left(\int_{x=a}^b g(x) dx \right) \left(\int_{y=c}^d h(y) dy \right). \end{aligned}$$

Beispiel 7.13 Es sei $f(x, y) = xy + x = x(y + 1)$ und $R = [0, 1] \times [0, 2]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^2 (xy + x) dy \right) dx &= \int_0^1 x dx \int_0^2 (y + 1) dy \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 + y \right]_0^2 = \frac{1}{2}(2 + 2) = 2. \quad \triangle \end{aligned}$$

Im Allgemeinen kann man den Satz von Fubini nicht umkehren. Aus der Existenz des iterierten Integrals

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy$$

folgt nicht, dass das Integral $\iint_R f(x, y) d(x, y)$ existiert.

Beispiel 7.14 Es sei $R = [0, 1] \times [0, 1]$ und $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} x & \text{für } y \text{ rational,} \\ 1 - x & \text{für } y \text{ irrational.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{x=0}^1 f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{x=0}^1 x dx = \frac{1}{2} & \text{für } y \text{ rational,} \\ \int_{x=0}^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2} & \text{für } y \text{ irrational,} \end{cases}$$

woraus

$$\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_{y=0}^1 \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2}$$

folgt.

Anstelle der iterierten Integrale betrachten wir nun Unter- und Obersummen von f . Ist R_{ij} ein Teilrechteck einer beliebigen Zerlegung von R , dann enthält R_{ij} sowohl Punkte mit rationalen als auch Punkte mit irrationalen y -Werten. Jede Untersumme $s(Z; f)$ von f ist daher kleiner als das Volumen, das von der Funktion

$$g: R \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

eingeschlossen wird, d.h.

$$\begin{aligned} s(Z; f) &\leq \iint_R g(x, y) d(x, y) = \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} x dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^1 (1 - x) dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} + \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{x=\frac{1}{2}}^1 \right) dy = \int_{y=0}^1 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) dy = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Mit gleicher Argumentation ist jede Obersumme $S(Z; f)$ von f größer als das durch

$$h: R \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ x & \text{für } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

definierte Volumen

$$\begin{aligned} \iint_R h(x, y) d(x, y) &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^{\frac{1}{2}} (1-x) dx + \int_{x=\frac{1}{2}}^1 x dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^1 \left(\left[\left(x - \frac{1}{2}x^2 \right) \right]_{x=0}^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{x=\frac{1}{2}}^1 \right) dy = \int_{y=0}^1 \left(\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \right) dy = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Die Unter- und Obersummen von f können nicht gegen denselben Wert konvergieren, sodass f nicht Riemann-integrierbar über R ist.

Die Funktionen f , g und h sind in den folgenden Graphiken veranschaulicht:

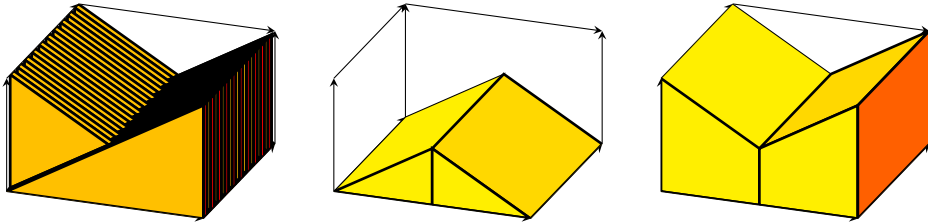


Abb. 7.9: Graphen von f , g und h .

△

7.3 Integration über mehrdimensionale Quader

Ohne zusätzliche Überlegungen lassen sich Bereichsintegrale über mehrdimensionale Quader wie im zweidimensionalen Fall einführen. Auch in höheren Dimensionen sichern Beschränktheit und Stetigkeit einer reellwertigen Funktion die Riemann-Integrierbarkeit.

Satz 7.15 *Es sei $R := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein n -dimensionaler Quader und die Funktion $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt und – eventuell mit Ausnahme einer Nullmenge – stetig. Dann ist f über R integrierbar.*

Wie in zwei Dimensionen ermöglicht der Satz von Fubini die iterierte Berechnung mehrdimensionaler Integrale.

Satz 7.16 (Satz von Fubini im \mathbb{R}^n) *Es sei $R := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ ein n -dimensionaler Quader und $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int \cdots \int_R f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) \\ = \int_{x_n=a_n}^{b_n} \left(\cdots \left(\int_{x_1=a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots \right) dx_n. \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der eindimensionalen Integrationen ist dabei beliebig.

Für beschränkte Funktionen gelten die Aussagen auch, wenn es eine Nullmenge gibt, auf der f nicht definiert oder nicht stetig ist.

Speziell im Fall $n = 3$ und $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ gilt

$$\iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_{z=a_3}^{b_3} \left(\int_{y=a_2}^{b_2} \left(\int_{x=a_1}^{b_1} f(x, y, z) dx \right) dy \right) dz.$$

Das Integral $\iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z)$ heißt *Volumenintegral*. Als alternative Schreibweisen sind auch $\int_R f(x, y, z) d(x, y, z)$ oder $\int_R f(x, y, z) dV$ gebräuchlich. Falls $f \geq 0$ gilt, kann man das Volumenintegral als Gesamtmasse eines Körpers der Gestalt V mit Masendichte $f(x, y, z)$ interpretieren. Besitzt f negative Funktionswerte, ist ebenfalls eine physikalische Interpretation möglich. Das Volumenintegral entspricht der Auftriebskraft, die der Körper in einer Flüssigkeit mit hinreichend hoher Dichte erfährt.

Beispiel 7.17

1. Es sei $R := [0, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$ ein Quader mit Kantenlängen 2, 1 und 1 sowie $f: R \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 1 + xy + z$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{z=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^2 (1 + xy + z) dx \right) dy \right) dz \\ &= \int_{z=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \left[x + \frac{1}{2}x^2y + xz \right]_{x=0}^2 dy \right) dz \\ &= \int_{z=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 (2 + 2y + 2z) dy \right) dz = \int_{z=0}^1 \left[2y + y^2 + 2yz \right]_{y=0}^1 dz \\ &= \int_{z=0}^1 (2 + 1 + 2z) dz = \left[3z + z^2 \right]_{z=0}^1 = 4. \end{aligned}$$

2. Wie bei ebenen Bereichsintegralen kann ein Volumenintegral als Produkt eindimensionaler Integrale berechnet werden, wenn der Integrand faktorisiert werden kann. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{x=a_1}^{b_1} \left(\int_{y=a_2}^{b_2} \left(\int_{z=a_3}^{b_3} f(x)g(y)h(z) dz \right) dy \right) dx \\ = \left(\int_{x=a_1}^{b_1} f(x) dx \right) \left(\int_{y=a_2}^{b_2} g(y) dy \right) \left(\int_{z=a_3}^{b_3} h(z) dz \right). \quad \triangle \end{aligned}$$

7.4 Integration über ebene Normalbereiche

Wir bestimmen nun Berechnungsformeln für Integrale über krummlinig berandeten ebenen Flächen, welche durch Graphen von reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen begrenzt werden.

Definition 7.18 Die Funktionen $g_1, g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf dem Intervall $I := [a, b]$ stetig und es gelte $g_1(x) \leq g_2(x)$ auf I . Dann heißt die Menge

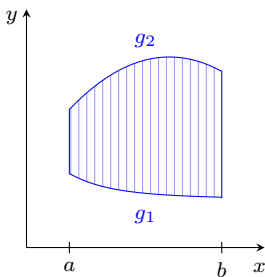
$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Normalbereich bezüglich x .

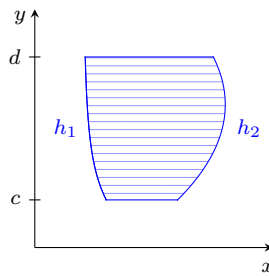
Analog ist ein Normalbereich B bezüglich y ,

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

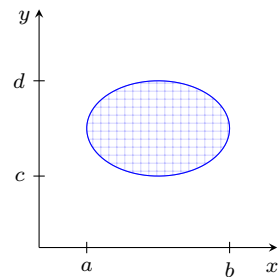
durch zwei stetige Funktionen $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h_1(y) \leq h_2(y)$ für alle $y \in [c, d]$ definiert.



Normalbereich bzgl. x



Normalbereich bzgl. y



Normalbereich bzgl. x und y

Abb. 7.10: Normalbereiche.

Im Folgenden sei A ein Normalbereich bezüglich x auf $[a, b]$ und $R = [a, b] \times [c, d]$ ein beliebiges Rechteck, das A enthält. Zu einer auf A integrierbaren Funktion f definieren wir die Hilfsfunktion

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \in A, \\ 0 & \text{für } (x, y) \in R \setminus A. \end{cases}$$

Da die Graphen von g_1 und g_2 Nullmengen sind, gilt

$$\iint_A f(x, y) = \iint_R \tilde{f}(x, y).$$

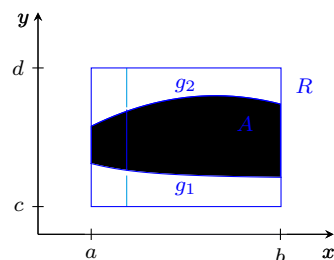


Abb. 7.11: Satz von Fubini für Normalbereiche.

Mit dem Satz von Fubini folgt:

$$\begin{aligned}
 \iint_R \tilde{f}(x, y) &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d \tilde{f}(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^{g_1(x)} 0 dy + \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy + \int_{y=g_2(x)}^d 0 dy \right) dx \\
 &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.
 \end{aligned}$$

Somit gilt:

Satz 7.19 (Satz von Fubini für Normalbereiche) 1. Es sei A ein Normalbereich bezüglich x gemäß Definition 7.18 und die Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist f über A integrierbar und es gilt

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2. Es sei B ein Normalbereich bezüglich y gemäß Definition 7.18 und die Funktion $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist f über B integrierbar und es gilt

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Für beschränkte Funktionen gelten die Aussagen auch, wenn es eine Nullmenge gibt, auf der f nicht definiert oder nicht stetig ist.

Beispiel 7.20

1. Es sei A der auf dem Intervall $[-1, 1]$ zwischen den Kurven $y = \sinh x$ und $y = \cosh x$ eingeschlossene Normalbereich. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \iint_A (x + y) d(x, y) &= \int_{x=-1}^1 \left(\int_{y=\sinh x}^{\cosh x} (x + y) dy \right) dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \left[xy + \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=\sinh x}^{\cosh x} dx \\
 &= \int_{x=-1}^1 \left(x \cosh x + \frac{1}{2} \cosh^2 x - x \sinh x - \frac{1}{2} \sinh^2 x \right) dx
 \end{aligned}$$

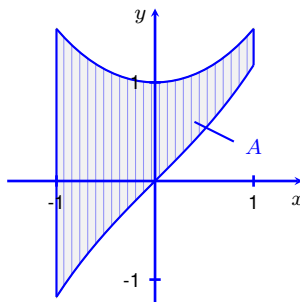


Abb. 7.12: Integrationsgebiet.

$$\begin{aligned}
&= \int_{x=-1}^1 \left(x \underbrace{(\cosh x - \sinh x)}_{=e^{-x}} + \frac{1}{2} \underbrace{(\cosh^2 x - \sinh^2 x)}_{=1} \right) dx \\
&= \int_{x=-1}^1 \left(x e^{-x} + \frac{1}{2} \right) dx = \left[(-1-x)e^{-x} + \frac{1}{2}x \right]_{x=-1}^1 \\
&= -2e^{-1} + \frac{1}{2} - 0 + \frac{1}{2} = 1 - \frac{2}{e}.
\end{aligned}$$

2. Es sei

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

ein Normalbereich bezüglich x . Dann ist

$$\begin{aligned}
\iint_A 1 \, d(x, y) &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=f(x)}^{g(x)} 1 \, dy \right) dx = \int_{x=a}^b \left[y \right]_{y=f(x)}^{g(x)} dx \\
&= \int_{x=a}^b (g(x) - f(x)) \, dx, \\
\iint_A x \, d(x, y) &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=f(x)}^{g(x)} x \, dy \right) dx = \int_{x=a}^b \left[xy \right]_{y=f(x)}^{g(x)} dx \\
&= \int_{x=a}^b x(g(x) - f(x)) \, dx, \\
\iint_A y \, d(x, y) &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=f(x)}^{g(x)} y \, dy \right) dx = \int_{x=a}^b \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=f(x)}^{g(x)} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{x=a}^b (g^2(x) - f^2(x)) \, dx.
\end{aligned}$$

Die drei letzten Integrale traten in Band 1 bei der Berechnung des Schwerpunkts der Fläche A auf. Bezeichnet

$$F_A := \iint_A 1 \, d(x, y)$$

den Flächeninhalt von A , gilt demnach für die Koordinaten (x_S, y_S) des Schwerpunkts von A

$$x_S = \frac{1}{F_A} \iint_A x \, d(x, y), \quad y_S = \frac{1}{F_A} \iint_A y \, d(x, y).$$

Nach diesen Formeln berechnet man allgemein die Schwerpunktkoordinaten einer ebenen Fläche. Konstante Massendichte vorausgesetzt, gelten die Formeln sogar für beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n , über denen die Riemann-Integrale definiert sind, unter anderem auch für J-Kurven.

3. Gesucht ist der Schwerpunkt der im ersten Quadranten von den Koordinatenachsen und den Kurven

$$y = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

und

$$y = 2 - x, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

eingeschlossenen Fläche B .

Der vermutlich einfachste Rechenweg besteht darin, B als Normalbereich bezüglich y mit den Randkurven $x = y^2$ und $x = 2 - y$ für $y \in [0, 1]$ aufzufassen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} F_B &= \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y^2}^{2-y} 1 \, dx \right) dy = \int_{y=0}^1 (2 - y - y^2) dy \\ &= \left[2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^1 = \frac{7}{6}, \\ x_S &= \frac{1}{F_B} \iint_B x \, d(x, y) = \frac{6}{7} \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y^2}^{2-y} x \, dx \right) dy \\ &= \frac{6}{7} \int_{y=0}^1 \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{x=y^2}^{2-y} dy = \frac{3}{7} \int_{y=0}^1 ((2-y)^2 - y^4) dy \\ &= \frac{3}{7} \left[-\frac{1}{3}(2-y)^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_{y=0}^1 = \frac{3}{7} \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{8}{3} + 0 \right) = \frac{32}{35}, \\ y_S &= \frac{1}{F_B} \iint_B y \, d(x, y) = \frac{6}{7} \int_{y=0}^1 \left(\int_{x=y^2}^{2-y} y \, dx \right) dy \\ &= \frac{6}{7} \int_{y=0}^1 [xy]_{x=y^2}^{2-y} dy = \frac{6}{7} \int_{y=0}^1 (y(2-y) - y^3) dy \\ &= \frac{6}{7} \left[y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 \right]_{y=0}^1 = \frac{6}{7} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{5}{14}. \end{aligned}$$

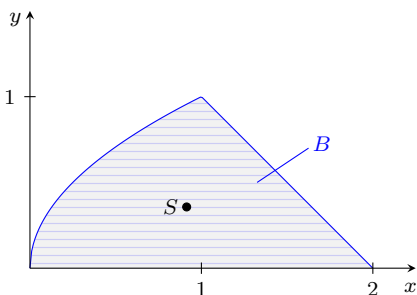


Abb. 7.13: Integrationsgebiet zu 3.

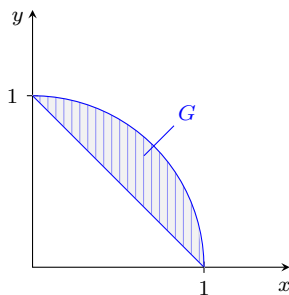


Abb. 7.14: Kreissegment mit vertikaler Faserung.

4. Entfernt man aus dem Viertel der Einheitskreisscheibe im ersten Quadranten das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$, so entsteht die Fläche G in Abbildung 7.14, welche ein Normalbereich bezüglich x ist:

$$G = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1-x \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \right\}.$$

Für $f(x, y) := y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ist

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) d(x, y) &= \iint_G y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) d(x, y) \\ &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dy \right) dx = \int_{x=0}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 (1-x^2 - (1-x)^2) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \int_{x=0}^1 (x-x^2) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &\stackrel{\text{p.l.}}{=} \underbrace{\frac{2}{\pi} (x-x^2) \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1}_{=0} - \frac{2}{\pi} \int_{x=0}^1 (1-2x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &\stackrel{\text{p.l.}}{=} \left[\frac{4}{\pi^2} (1-2x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1 + \frac{8}{\pi^2} \int_{x=0}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \\ &= 0 - \frac{4}{\pi^2} + \left(\left[\frac{16}{\pi^3} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^1 \right) = \frac{16}{\pi^3} - \frac{4}{\pi^2}. \end{aligned}$$

△

7.5 Integration über räumliche Normalbereiche

Wird ein Volumen im \mathbb{R}^3 über einer ebenen Menge D durch einen unteren und einen oberen Funktionsgraphen begrenzt, entsteht ein räumlicher Normalbereich.

Ein Normalbereich A bezüglich der (x, y) -Ebene beschreibt das Volumen zwischen einer unteren Begrenzungsfläche S_1 mit Parameterdarstellung

$$S_1 := \{(x, y, z) \mid z = g_1(x, y), (x, y) \in D\}$$

und einer oberen Begrenzungsfläche

$$S_2 := \{(x, y, z) \mid z = g_2(x, y), (x, y) \in D\}.$$

Der Parameterbereich D ist die Projektion von A auf die (x, y) -Ebene.

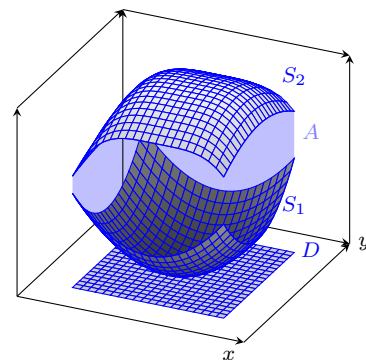


Abb. 7.15: Normalbereich bzgl. der (x, y) -Ebene.

Definition 7.21 Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei beschränkt und ihre Randkurve ∂D sei eine geschlossene J-Kurve, die ganz zu D gehöre. Die Funktionen $g_1, g_2: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien auf D stetig und es gelte $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ auf D . Dann heißt die Menge

$$A := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$$

Normalbereich bezüglich der (x, y) -Ebene.

Analog sind Normalbereiche bezüglich der (x, z) -Ebene oder der (y, z) -Ebene definiert.

In Definition 7.21 konnten wir darauf verzichten, von g_1 und g_2 Beschränktheit zu fordern. Wenn ∂D ganz zu D gehört, ist D abgeschlossen. Die Beschränktheit einer auf D definierten Funktion folgt dann aus der Stetigkeit. Das Gleiche gilt für die Beschränktheit von f im nächsten Satz.

Wie bei ebenen Bereichsintegralen gilt der Satz von Fubini auf mehrdimensionalen Normalbereichen. Die Integrationsgrenzen der inneren Integrale sind dann im Allgemeinen keine Konstanten, sondern von den äußeren Variablen abhängige Funktionen. Bei der praktischen Berechnung von Volumenintegralen ist die Bestimmung der Integrationsgrenzen oft eine Herausforderung für sich.

Satz 7.22 Es sei A ein Normalbereich im \mathbb{R}^3 bezüglich der (x, y) -Ebene gemäß Definition 7.21 und die Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist f über A integrierbar und es gilt

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_D \left(\int_{z=g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Für beschränkte Funktionen gilt die Aussage auch, wenn es eine Nullmenge gibt, auf der f nicht definiert oder nicht stetig ist.

Ebenso gilt die Aussage sinngemäß für die Integration über Normalbereichen bezüglich der (x, z) -Ebene oder der (y, z) -Ebene.

Beispiel 7.23

1. Es sei A das zwischen dem ebenen Rechteck $R = [0, 2] \times [0, 1]$ und der Fläche

$$z = g_2(x, y) = 5 - x^2 - y^2, \\ (x, y) \in R,$$

eingeschlossenen Volumen im \mathbb{R}^3 . Gesucht sei $\iiint_A x d(x, y, z)$.

A ist ein Normalbereich bezüglich der (x, y) -Ebene mit $g_1(x, y) = 0$. Da die Integrationsgrenzen bezüglich z von x und y abhängen, muss die Integration über z zuerst vorgenommen werden.

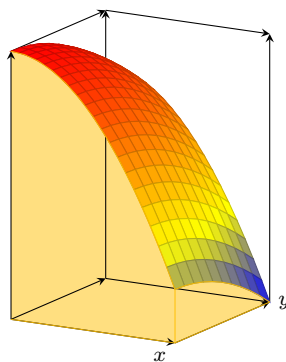


Abb. 7.16: Volumen eines Paraboloids.

Die Reihenfolge der äußeren Integrationsvariablen ist hier beliebig. Mit dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned}
 \iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^1 \left(\int_{z=0}^{5-x^2-y^2} x dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^1 [xz]_{z=0}^{5-x^2-y^2} dy \right) dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=0}^1 (5x - x^3 - xy^2) dy \right) dx \\
 &= \int_{x=0}^2 \left[5xy - x^3y - \frac{1}{3}xy^3 \right]_{y=0}^1 dx = \int_{x=0}^2 \left(5x - x^3 - \frac{1}{3}x \right) dx \\
 &= \left[\frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{x=0}^2 = \frac{28}{3} - 4 = \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

2. Es sei

$$A = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, z \leq 1 - x - y\}.$$

Gesucht ist $\iiint_A e^z d(x, y, z)$.

Die Fläche $z = g(x, y) := 1 - x - y$ ist eine Ebene im \mathbb{R}^3 , deren Schnitt mit der (x, y) -Ebene die Gerade $y = 1 - x$ ist. Die Menge A beschreibt Tetraeder mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ und der dreieckigen Grundfläche D mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$. Das Dreieck D in der (x, y) -Ebene ist ein Normalbereich bezüglich x mit oberem Rand $y = 1 - x$.

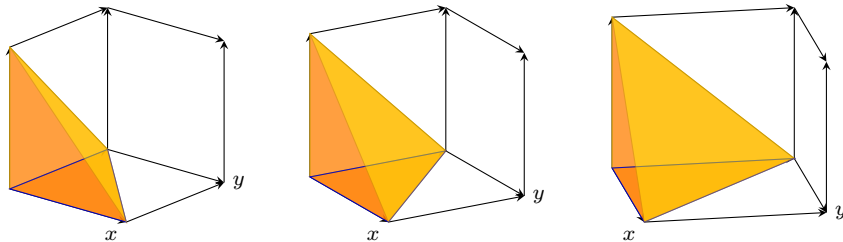


Abb. 7.17: Verschiedene Ansichten eines Tetraeders.

Die obere Integrationsgrenze bezüglich z hängt von x und y ab, die obere Integrationsgrenze bezüglich y hängt von x ab. Dadurch wird die Reihenfolge der Integrationsvariablen festgelegt. Es ist

$$\begin{aligned}
 \iiint_A e^z d(x, y, z) &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(\int_{z=0}^{1-x-y} e^z dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} [e^z]_{z=0}^{1-x-y} dy \right) dx = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^{1-x} (e^{1-x-y} - 1) dy \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{x=0}^1 \left[-e^{1-x-y} - y \right]_{y=0}^{1-x} dx = \int_{x=0}^1 (-e^0 - (1-x) + e^{1-x} + 0) dx \\ &= \int_{x=0}^1 (-2 + x + e^{1-x}) dx = \left[-2x + \frac{1}{2}x^2 - e^{1-x} \right]_{x=0}^1 \\ &= -2 + \frac{1}{2} - e^0 + 0 - 0 + e^1 = e - \frac{5}{2}. \quad \triangle \end{aligned}$$

Kapitel 8

Die Substitutionsregel für Bereichsintegrale

In Band 1 hatten wir die zweite Substitutionsregel für eindimensionale bestimmte Integrale reellwertiger Funktionen formuliert. Ist die Funktion f stetig auf einem Intervall $[a, b]$, die Funktion ψ stetig differenzierbar und umkehrbar auf einem Intervall I und ist das Intervall $[a, b]$ im Wertebereich W_ψ von ψ enthalten, dann ist

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{u=\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f(\psi(u)) \psi'(u) du.$$

Diese Formel modifizieren wir ein wenig. Da ψ als stetig differenzierbar und umkehrbar vorausgesetzt ist, muss entweder $\psi'(u) \geq 0$ oder $\psi'(u) \leq 0$ in I gelten. Im ersten Fall gilt $\psi^{-1}(a) < \psi^{-1}(b)$, im zweiten Fall ist $\psi^{-1}(a) > \psi^{-1}(b)$. Dann kann man die Integrationsgrenzen dadurch vertauschen, dass man im rechten Integral $-\psi'(u)$ anstelle von $\psi'(u)$ schreibt. Fasst man schließlich beide Fälle mithilfe des Betrags zusammen, gilt allgemein:

Korollar 8.1 Die Funktion $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und umkehrbar auf einem reellen Intervall I . Die reellwertige Funktion f sei stetig auf dem Intervall

$$[a, b] := \psi(I) = \{\psi(u) \mid u \in I\}.$$

Dann gilt

$$\int_{\psi(I)} f(x) dx = \int_I f(\psi(u)) |\psi'(u)| du. \quad (8.1)$$

In dieser Fassung übertragen wir die Substitutionsregel auf ebene und räumliche Bereichsintegrale. Anlass dazu ist die Beobachtung, dass sich Integrationsbereiche, die nicht aus Rechtecken oder Quadern zusammengesetzt sind, manchmal einfacher in

nichtkartesischen Koordinaten beschreiben lassen. Ein besonders wichtiger Anwendungsfall betrifft kreis- oder kugelförmige Gebiete, für die Polarkoordinaten bzw. Kugelkoordinaten besser geeignet sind als kartesische Koordinaten.

8.1 Die Substitutionsregel für ebene Bereichsintegrale

In zwei Dimensionen sucht man zur Integrationsaufgabe

$$\iint_M f(x, y) d(x, y),$$

bei der die krummlinig berandete Menge M in (x, y) -Koordinaten dargestellt ist, eine in (u, v) -Koordinaten beschriebene Menge N sowie eine Funktion $g: N \rightarrow \mathbb{R}$, sodass

$$\iint_M f(x, y) d(x, y) = \iint_N g(u, v) d(u, v)$$

gilt. Die Menge N ergibt sich durch die Einführung von (u, v) -Koordinaten in M . Eine Vereinfachung des Integrationsbereichs erhält man insbesondere, wenn N ein Rechteck in der (u, v) -Ebene ist.

Beispiel 8.2 Es sei K die Kreisscheibe mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R . Die Menge M sei das Viertel dieser Kreisscheibe im ersten Quadranten,

$$M = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [0, R]\}.$$

Der Flächeninhalt von M beträgt

$$\begin{aligned} \iint_M 1 d(x, y) &= \int_{x=0}^R \left(\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} 1 dy \right) dx = \int_{x=0}^R \left[y \right]_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx \\ &= \int_{x=0}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right]_{x=0}^R \\ &= \frac{R^2}{2} \lim_{c \rightarrow \infty} \arctan c = \frac{\pi}{4} R^2, \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit der bekannten Formel für den Flächeninhalt eines Kreises.

Die Fläche M soll nun durch Polarkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

dargestellt werden. Es ist

$$M = \{(x, y) \mid x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Der Parameterbereich $r \in [0, R]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ definiert ein Rechteck

$$N := [0, R] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

in der (r, φ) -Ebene.

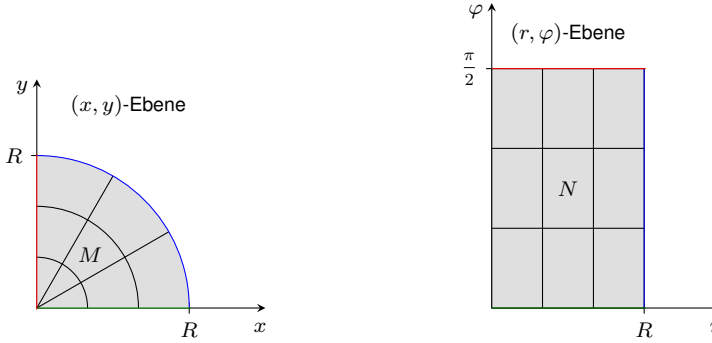


Abb. 8.1: Viertelkreis in kartesischen Koordinaten (links) und in Polarkoordinaten (rechts).

Damit wir statt über M über das einfachere Integrationsgebiet N integrieren können, benötigen wir eine Funktion $g(r, \varphi)$, für die

$$\iint_N g(r, \varphi) d(r, \varphi) = \iint_M 1 d(x, y)$$

gilt. Wir zeigen zunächst, dass man im Allgemeinen nicht $g(r, \varphi) \equiv 1$ wählen darf. Es ist

$$\begin{aligned} \iint_N 1 d(r, \varphi) &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^R 1 dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left([r]_{r=0}^R \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R d\varphi = [R\varphi]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} R. \end{aligned}$$

Für $R \neq 2$ ist

$$\frac{\pi}{4} R^2 \neq \frac{\pi}{2} R,$$

d.h. die Flächeninhalte von M und N sind verschieden. △

Das Beispiel lässt sich so interpretieren, dass Flächen beim Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes verzerrt werden, wodurch sich ihr Flächeninhalt ändern kann. Die Aufgabe der Substitutionsregel ist es, die Verzerrung durch einen Ausgleichsfaktor zu kompensieren. Analog zum eindimensionalen Fall wird der Ausgleichsfaktor in (u, v) -Koordinaten ausgedrückt und dem Integral in (u, v) -Koordinaten zugeschlagen, wenn die ursprüngliche Integrationsaufgabe in (x, y) -Koordinaten gegeben ist.

Zur Berechnung des Ausgleichsfaktors müssen wir die Verzerrung formelmäßig erfassen. Dazu zerlegen wir die Fläche A im (u, v) -Koordinatensystem in kleine Flächenelemente ΔA und studieren die Verzerrung der zugehörigen Flächenstücke in der (x, y) -Ebene.

Die Relationen zwischen (x, y) -Koordinaten und (u, v) -Koordinaten seien durch zwei Funktionen $\psi_1, \psi_2 : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$x = \psi_1(u, v), \quad y = \psi_2(u, v)$$

beschrieben. An der Stelle (u_0, v_0) betrachten wir das rechteckige Flächenelement ΔA in der (u, v) -Ebene mit den Eckpunkten

$$(u_0, v_0), (u_0 + \Delta u, v_0), (u_0, v_0 + \Delta v), (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

und Flächeninhalt $\Delta u \Delta v$, welches durch

$$\Delta A = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta v \end{pmatrix} \mid s, t \in [0, 1] \right\}$$

charakterisiert ist. Für hinreichend kleine Flächenelemente folgt mit Taylor-Entwicklung

$$\psi_1(u_0 + s\Delta u, v_0 + t\Delta v) \approx \psi_1(u_0, v_0) + \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u_0, v_0)s\Delta u + \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u_0, v_0)t\Delta v,$$

$$\psi_2(u_0 + s\Delta u, v_0 + t\Delta v) \approx \psi_2(u_0, v_0) + \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u_0, v_0)s\Delta u + \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u_0, v_0)t\Delta v.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass das rechteckige Flächenstück ΔA durch ein Vektorfeld $\vec{\Psi}$ zu einer krummlinig berandeten Fläche $\vec{\Psi}(\Delta A)$ verzerrt wird, welche bei kleinen Verzerrungen gut durch das Parallelogramm

$$\left\{ \begin{pmatrix} \psi_1(u_0, v_0) \\ \psi_2(u_0, v_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v \end{pmatrix} \mid s, t \in [0, 1] \right\}$$

$$=: \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + s\vec{a} + t\vec{b} \mid s, t \in [0, 1] \right\}$$

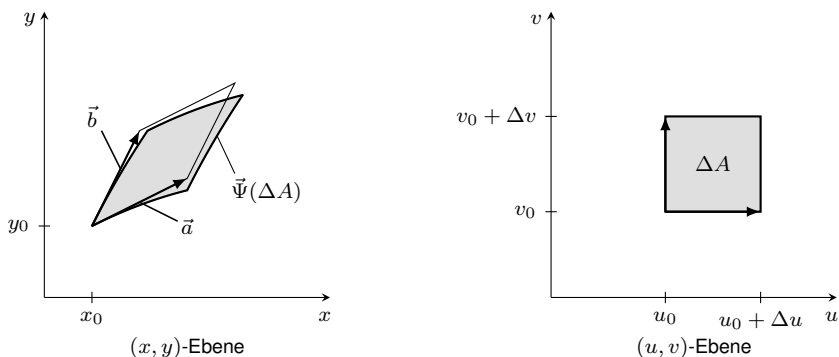


Abb. 8.2: Flächenverzerrung bei der Substitutionsregel.

approximiert wird. Der Flächeninhalt F des Parallelogramms wird durch das Kreuzprodukt der Vektoren

$$\vec{\Psi}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnet. Es ist

$$F = \left\| \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v \right\| = \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \psi_2}{\partial v}(u_0, v_0) - \frac{\partial \psi_2}{\partial u}(u_0, v_0) \frac{\partial \psi_1}{\partial v}(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v.$$

Alternativ kann man die letzte Formel als Determinante der Funktionalmatrix der Koordinatentransformation deuten. Die Funktionalmatrix lautet

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{pmatrix},$$

sodass

$$F = \left| \det \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(u, v)} \right) \right|_{u=u_0, v=v_0} \Delta u \Delta v \quad (8.2)$$

gilt. Der gesuchte Ausgleichsfaktor für den Flächeninhalt ist somit der Betrag der Funktionaldeterminante

$$\left| \det \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(u, v)} \right) \right|.$$

Alle Resultate gelten eigentlich nur, wenn eine Fläche in (u, v) -Koordinaten injektiv, d.h. ohne Überdeckungen, auf eine Fläche in (x, y) -Koordinaten abgebildet wird, was bedeutet, dass zwei verschiedene Punkte $(u, v) \neq (\tilde{u}, \tilde{v})$ auf zwei verschiedene Punkte $(x, y) \neq (\tilde{x}, \tilde{y})$ abgebildet werden. Dies ist gewährleistet, wenn die Determinante der Funktionalmatrix in (8.2) nicht Null wird. Im folgenden Satz wird diese Bedingung etwas abgeschwächt.

Satz 8.3 (Substitutionsregel im \mathbb{R}^2) *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge und*

$$\vec{\Psi}: D \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u, v) \\ \psi_2(u, v) \end{pmatrix}$$

eine injektive, stetig differenzierbare Funktion, für die die Determinante der Funktionalmatrix*

$$J_{\Psi}(u, v) = \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(u, v)} \right)$$

* Die Funktion $\vec{\Psi}$ heißt auf einer kompakten Menge D stetig differenzierbar, wenn es eine offene Menge $G \supset D$ gibt, sodass $\psi_1(u, v)$ und $\psi_2(u, v)$ in G stetig differenzierbar sind.

nicht Null wird. Die Funktion $f: \vec{\Psi}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf der Menge

$$\vec{\Psi}(D) := \{(\psi_1(u, v), \psi_2(u, v)) \mid (u, v) \in D\}$$

stetig. Dann gilt

$$\iint_{\vec{\Psi}(D)} f(x, y) d(x, y) = \iint_D f(\vec{\Psi}(u, v)) |\det J_{\vec{\Psi}}(u, v)| d(u, v). \quad (8.3)$$

Diese Aussage gilt auch noch, wenn die Injektivität von $\vec{\Psi}$ auf einer Nullmenge verletzt wird oder wenn die Determinante der Funktionalmatrix auf einer Nullmenge verschwindet und sonst ihr Vorzeichen nicht ändert.

Bemerkung 8.4

1. Für ebene Bereichsintegrale ist Gleichung (8.3) das genaue Analogon zur Substitutionsregel (8.1) im eindimensionalen Fall. Die Mengen $\vec{\Psi}(D)$ und D in der Substitutionsregel entsprechen den Mengen M und N in Beispiel 8.2.
2. Der Zusatz mit Nullmengen wird bei der Substitutionsregel unter anderem benötigt, um sie für die Transformation auf Polarkoordinaten anwenden zu können. Die Funktion

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\Psi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \psi_1(r, \varphi) \\ \psi_2(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

bildet nämlich die gesamte Nullmenge ($r = 0$, φ beliebig) auf den Ursprung des (x, y) -Koordinatensystems ab und ist daher nicht injektiv. Außerdem verschwindet auch die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial(r, \varphi)} \right) &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial r \cos \varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \cos \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r \sin \varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \sin \varphi}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r \end{aligned}$$

auf dieser Nullmenge. ◇

Beispiel 8.5

1. Die Determinante der Funktionalmatrix der Transformation zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten ist nach der letzten Bemerkung

$$\det \left(\frac{\partial(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}{\partial(r, \varphi)} \right) = r \geq 0.$$

Für den Flächeninhalt F_M der in Beispiel (8.2) betrachteten Viertelkreisscheibe M folgt demnach

$$\begin{aligned} F_M &= \iint_M 1 \, d(x, y) \Big|_{d(x,y)=r}^{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^R 1 \cdot r \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^R d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^2 d\varphi = \frac{1}{2} \left[R^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} R^2. \end{aligned}$$

2. Die Koordinaten des Schwerpunkts von M berechnen wir ebenfalls mithilfe von Polarkoordinaten. Es ist

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{F_M} \iint_M x \, d(x, y) \Big|_{d(x,y)=r}^{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^R r \cos \varphi \cdot r \, dr \right) d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\left[\frac{1}{3} r^3 \cos \varphi \right]_{r=0}^R \right) d\varphi \\ &= \frac{4}{3\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \cos \varphi \, d\varphi = \frac{4R}{3\pi} \left[\sin \varphi \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} R. \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen muss $y_S = x_S$ gelten, was durch die folgende Rechnung bestätigt wird:

$$\begin{aligned} y_S &= \frac{1}{F_M} \iint_M y \, d(x, y) \Big|_{d(x,y)=r}^{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^R r \sin \varphi \cdot r \, dr \right) d\varphi = \frac{4}{\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} r^3 \sin \varphi \right]_{r=0}^R d\varphi \\ &= \frac{4}{3\pi R^2} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{4R}{3\pi} \left[-\cos \varphi \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3\pi} R. \end{aligned}$$

3. Es bezeichne E die Einheitskreisscheibe in der (x, y) -Ebene. Das zwischen E und dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ eingeschlossene Volumen V ist

$$\begin{aligned} V &= \iiint_E (x^2 + y^2) \, d(x, y) \Big|_{d(x,y)=r}^{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi} \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^1 \underbrace{(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)}_{=r^2} r \, dr \right) d\varphi \\ &= \int_{r=0}^1 r^3 \, dr \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^1 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4. Der Kreisring M mit Zentrum im Ursprung und Radien $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ besitze die Massendichte $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Diese Massendichte kann man als das auf die (x, y) -Ebene projizierte Volumen einer homogenen Halbkugel mit Radius 2 interpretieren. Der Wert des Integrals ist das Masse oder Volumen einer solchen Halbkugel, welche eine zentrische Bohrung mit Radius 1 aufweist.

Es ist

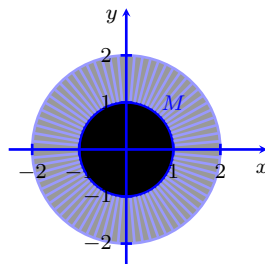


Abb. 8.3: Kreisring.

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_M \sqrt{4 - x^2 - y^2} d(x, y) \Big|_{\substack{x=r \cos \varphi, y=r \sin \varphi \\ d(x,y)=r dr d\varphi}} \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=1}^2 \sqrt{4 - r^2} \cdot r dr \right) d\varphi \\
 &= 2\pi \int_{r=1}^2 \sqrt{4 - r^2} \cdot r dr \Big|_{\substack{t=4-r^2, dt=-2r dr \\ t(1)=3, t(2)=0}} \\
 &= 2\pi \int_{t=3}^0 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = \pi \int_{t=0}^3 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}\pi \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_{t=0}^3 = 2\sqrt{3}\pi.
 \end{aligned}$$

5. Die in Band 1 behandelte Sektorformel von Leibniz folgt als Spezialfall aus der Substitutionsregel.

Es sei D der durch die Kurve

$$K: r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

in Polarkoordinaten definierte Sektor. Sein Flächeninhalt ist

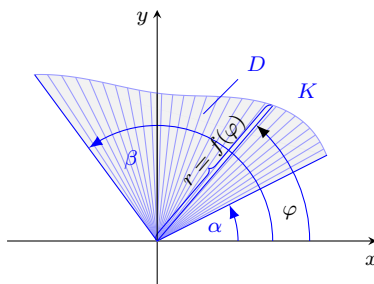


Abb. 8.4: Sektorfläche.

$$F_D = \iint_D 1 d(x, y) \Big|_{\substack{x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ d(x,y)=r dr d\varphi}}$$

$$= \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \left(\int_{r=0}^{f(\varphi)} 1 \cdot r dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{f(\varphi)} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi.$$

6. Bereichsintegrale über Sektoren werden ebenfalls durch Transformation in Polarkoordinaten gelöst. Der Sektor in kartesischen Koordinaten wird dabei in einen Normalbereich bezüglich φ überführt.

Der Sektor D sei durch die Kurve

$$K: r = f(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

in Polarkoordinaten und die Strahlen $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ begrenzt, wobei f stetig und beschränkt vorausgesetzt wird. Außerdem gelte $\beta - \alpha \leq 2\pi$.

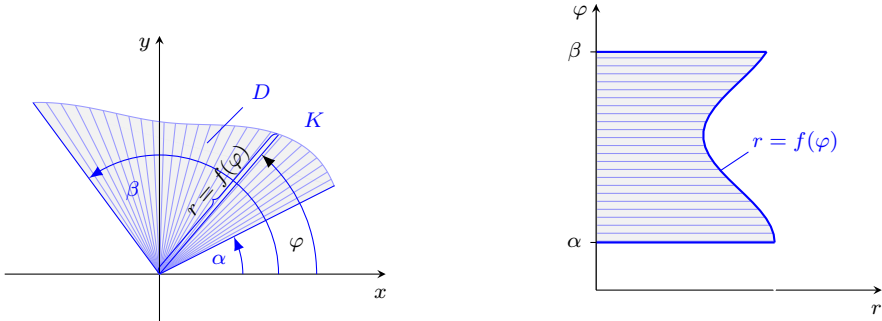


Abb. 8.5: Flächentransformation durch Substitution.

Ist auf D eine stetige Funktion $g(x, y)$ gegeben, folgt mit der Substitutionsregel

$$\iint_D g(x, y) d(x, y) = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \left(\int_{r=0}^{f(\varphi)} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \right) d\varphi.$$

Mit dieser Formel berechnen wir die Koordinaten des Schwerpunkts der durch die Archimedische Spirale

$$K: r = f(\varphi) = \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

begrenzten Fläche D mit Flächeninhalt F_D .

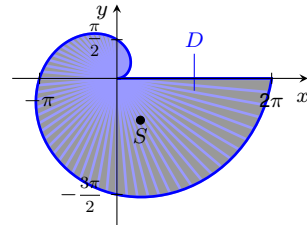


Abb. 8.6: Archimedische Spirale.

Es ist

$$\begin{aligned} F_D &= \iint_D 1 d(x, y) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{\varphi} 1 \cdot r dr \right) d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_{r=0}^{\varphi} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \varphi^2 d\varphi = \left[\frac{1}{6} \varphi^3 \right]_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3, \\ x_S &= \frac{1}{F_D} \iint_D x d(x, y) = \frac{3}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{\varphi} (r \cos \varphi) \cdot r dr \right) d\varphi \\ &= \frac{3}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\left[\frac{1}{3} r^3 \cos \varphi \right]_{r=0}^{\varphi} \right) d\varphi = \frac{1}{4\pi^3} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varphi^3 \cos \varphi d\varphi}_{=12\pi^2} = \frac{3}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_S &= \frac{1}{F_D} \iint_D y \, d(x, y) = \frac{3}{4\pi^3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{\varphi} (r \sin \varphi) \cdot r \, dr \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi^3} \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi} \varphi^3 \sin \varphi \, d\varphi}_{=12\pi - 8\pi^3} = \frac{3}{\pi^2} - 2.
 \end{aligned}$$

Die Integrale $\int \varphi^3 \cos \varphi \, d\varphi$ und $\int \varphi^3 \sin \varphi \, d\varphi$ werden durch dreimalige partielle Integration gelöst.

7. Den Flächeninhalt der durch die Kurve

$$K: \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

begrenzten Ellipsenscheibe M bestimmt man am einfachsten mit der Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{\Psi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} a r \cos \varphi \\ b r \sin \varphi \end{pmatrix},$$

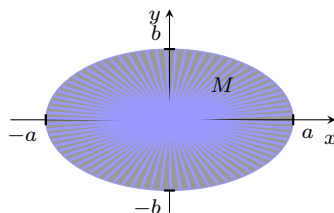


Abb. 8.7: Ellipse.

zu der die Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned}
 \det J_{\Psi}(r, \varphi) &= \det \left(\frac{\partial(a r \cos \varphi, b r \sin \varphi)}{\partial(r, \varphi)} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(a r \cos \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(a r \cos \varphi)}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(b r \sin \varphi)}{\partial r} & \frac{\partial(b r \sin \varphi)}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -a r \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b r \cos \varphi \end{pmatrix} = ab r \geq 0
 \end{aligned}$$

gehört. Damit folgt

$$F_M = \iint_M 1 \, d(x, y) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^1 1 \cdot ab r \, dr \right) d\varphi = 2\pi ab \int_{r=0}^1 r \, dr = \pi ab.$$

△

8.2 Die Substitutionsregel für Volumenintegrale

Für Volumenintegrale gilt die Substitutionsregel analog zum zweidimensionalen Fall. Statt Flächenverzerrungen treten nun Verzerrungen des Volumens auf, welche wieder durch die Funktionaldeterminante aufgefangen werden. Man kann den folgenden Satz auf allgemeinere Integrationsbereiche übertragen, benötigt dann aber mathematische Konzepte, die uns nicht zur Verfügung stehen.

Satz 8.6 (Substitutionsregel im \mathbb{R}^3) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Normalbereich bezüglich der (x, y) -, (x, z) - oder (y, z) -Ebene und

$$\vec{\Psi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{\Psi}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \psi_1(u, v, w) \\ \psi_2(u, v, w) \\ \psi_3(u, v, w) \end{pmatrix}$$

eine injektive, stetig differenzierbare Funktion, für die die Determinante der Funktionalmatrix

$$J_{\Psi}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial(u, v, w)} \end{pmatrix}$$

ihr Vorzeichen nicht ändert.

Die Funktion $f: \vec{\Psi}(D) \rightarrow \mathbb{R}$ sei auf der Menge

$$\vec{\Psi}(D) := \left\{ (\psi_1(u, v, w), \psi_2(u, v, w), \psi_3(u, v, w)) \mid (u, v, w) \in D \right\}$$

stetig. Dann gilt

$$\iiint_{\vec{\Psi}(D)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_D f(\vec{\Psi}(u, v, w)) \left| \det J_{\Psi}(u, v, w) \right| d(u, v, w).$$

Diese Aussage gilt auch noch, wenn die Injektivität von $\vec{\Psi}$ auf einer Nullmenge verletzt wird oder wenn die Determinante der Funktionalmatrix auf einer Nullmenge verschwindet und sonst ihr Vorzeichen nicht ändert.

Der wichtigste Anwendungsfall betrifft die Kugelkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= \psi_1(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \psi_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \psi_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi),$$

mit denen Teilmengen von Kugeln üblicherweise parametrisiert werden. Kugelkoordinaten beschreiben die Punkte im Raum mithilfe einer Abstandskoordinate r und zweier Winkel φ und θ . Dabei misst r den Abstand zum Ursprung und die Winkel entsprechen den Längen- und Breitengraden auf der Erdoberfläche, mit dem Unterschied, dass die mathematischen Breitengrade nicht vom Äquator aus, sondern vom Nordpol aus gemessen werden.

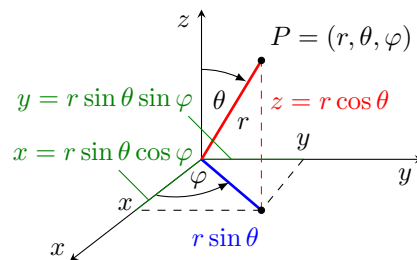


Abb. 8.8: Kugelkoordinaten.

$r \geq 0$: Abstand von $P = (x, y, z)$ zum Ursprung O

$\theta \in [0, \pi]$: „Breitengrad“ von P : Winkel zwischen \overrightarrow{OP} und positiver z -Achse

$\varphi \in [0, 2\pi)$: „Längengrad“ von P : analog zu Polarkoordinaten

Die Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten erfolgt durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \theta &= \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ (x^2 + y^2 > 0). \end{aligned} \right\} \iff \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Der Winkel θ geht nur bis π , da man die „Rückseite“ der Kugel über den Winkel φ erreicht. Man kann dies anhand der Längen- und Breitengrade der Erde veranschaulichen. Die Längengrade reichen von 0° bis 360° , die Breitengrade decken aber nur 180° ab. Der Südpol der Erde liegt auf 90° südlicher Breite, der Nordpol auf 90° nördlicher Breite.

Die Funktionalmatrix der Kugelkoordinaten lautet

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial r \sin \theta \cos \varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \sin \theta \cos \varphi}{\partial \theta} & \frac{\partial r \sin \theta \cos \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r \sin \theta \sin \varphi}{\partial r} & \frac{\partial r \sin \theta \sin \varphi}{\partial \theta} & \frac{\partial r \sin \theta \sin \varphi}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} & \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Determinante dieser Matrix ist

$$\det \left(\frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \psi_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right) = r^2 \sin \theta \geq 0.$$

Bei der Transformation von räumlichen kartesischen Koordinaten auf Kugelkoordinaten gilt also

$$d(x, y, z) = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$$

Beispiel 8.7 Es sei M ein Körper mit der Gestalt der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 und Massendichte

$$f(x, y, z) := (1 - x^2 - y^2 - z^2),$$

dessen Volumen und Gesamtmasse gesucht sind. Um die Integration möglichst einfach durchzuführen, fassen wir M als Bild $\vec{\Psi}(D)$ eines Quaders D in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) auf. Für die Vollkugel gilt

$$(r, \theta, \varphi) \in [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] =: D.$$

Mit der Substitutionsregel berechnet sich das Volumen von M durch

$$\begin{aligned}
 V_M &= \iiint_M 1 \, d(x, y, z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^1 1 \cdot r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left[\frac{1}{3} r^3 \sin \theta \right]_{r=0}^1 d\theta \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi \\
 &= \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[-\cos \theta \right]_{\theta=0}^{\pi} d\varphi = \frac{1}{3} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 1) d\varphi = \frac{4}{3} \pi.
 \end{aligned}$$

Die Masse von M beträgt

$$\begin{aligned}
 m_M &= \iiint_M (1 - \underbrace{x^2 - y^2 - z^2}_{r^2}) d(x, y, z) \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{r=0}^1 (1 - r^2) \cdot r^2 \sin \theta \, dr \right) d\theta \right) d\varphi \\
 &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left[\left(\frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right) \sin \theta \right]_{r=0}^1 d\theta \right) d\varphi \\
 &= \frac{2}{15} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \, d\theta \right) d\varphi = \frac{8}{15} \pi.
 \end{aligned}$$

△

Kapitel 9

Flächenintegrale 1. Art

Bisher hatten wir Bereichsintegrale über ebenen Flächen definiert. Nun behandeln wir gewölbte Flächen im \mathbb{R}^3 als Integrationsbereiche. Dazu ist eine skalare Funktion als Integrand gegeben, die man sich wie bei Kurvenintegralen als Massen- oder Ladungsdichte der Fläche vorstellen darf. Mit dem Integral wird die Gesamtmasse oder Gesamtladung der Fläche berechnet. Der entstehende Integraltyp heißt *Flächenintegral (1. Art)* oder *Oberflächenintegral 1. Art*.

Flächenintegrale 2. Art haben ein Vektorfeld zum Integranden. Solche Integrale werden in Abschnitt 11.2 diskutiert.

9.1 Parameterdarstellung gewölbter Flächen

Zur praktischen Berechnung eines Flächenintegrals benötigt man eine explizite Darstellung der gegebenen Fläche. Dazu wird wie bei Kurven eine Parameterdarstellung verwendet. Zu berücksichtigen ist allerdings, dass eine Kurve ein eindimensionales Gebilde ist, bei dem ein skalarer Kurvenparameter genügt, um die Kurve vollständig zu durchlaufen, wohingegen eine gewölbte Fläche im \mathbb{R}^3 als eine zweidimensionale Menge (in mathematischer Sprechweise: Mannigfaltigkeit) darstellt.

Man kann sich dies so vorstellen, dass eine dehnbare ebene Fläche $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (z.B. ein Rechteck) zu einer gewölbten Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ verzerrt wird. Ein praktisches Anwendungsbeispiel ist durch ein Segel gegeben, welches flach auf dem Boden ausgebreitet die Fläche D ergibt und sich im Wind zur Fläche S verwölbt. Dabei wird jedem Punkt $(u_0, v_0) \in D$ ein eindeutiger Punkt $(x_1, y_1, z_1) \in S$ zugeordnet.

Praktisch wird die Fläche D mithilfe eines ebenen Koordinatensystems repräsentiert. Dieses braucht nicht kartesisch zu sein, aber es muss geeignet sein, jeden Punkt der Fläche D eindeutig darzustellen. Um Verwechslungen zu vermeiden, verwenden wir in der Ebene im Folgenden die Koordinatenvariablen u und v . Die Fläche S entsteht als

Bild einer Funktion $\vec{\Psi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, welche dem Punkt $(u, v) \in D$ den Punkt $(x, y, z) \in S$ zuordnet. Die Koordinatenlinien in D induzieren ein verzerrtes Koordinatensystem auf S .

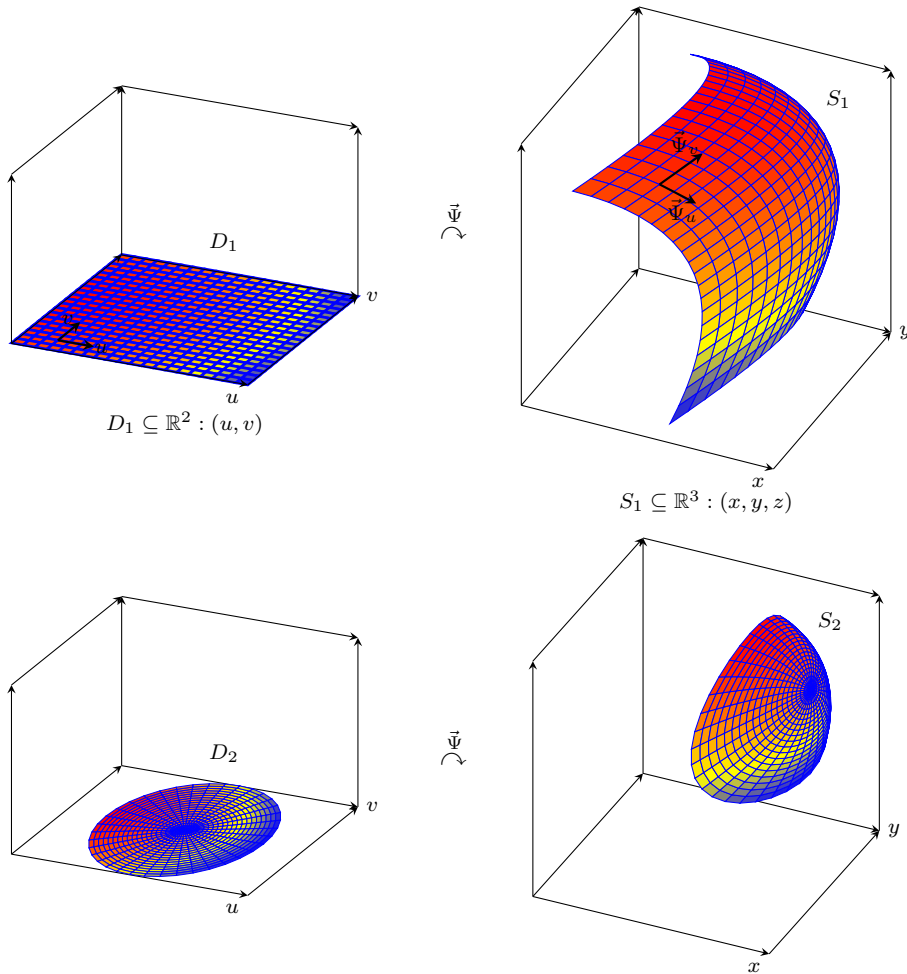


Abb. 9.1: Quadratisches und kreisförmiges Segel. Links auf dem Boden, rechts im Wind.

Eine wohldefinierte Aufgabenstellung ist unter den folgenden Voraussetzungen an D und $\vec{\Psi}$ gewährleistet:

Definition 9.1 Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Gebiet. Die Funktion $\vec{\Psi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ erfülle die folgenden Bedingungen:

1. $\vec{\Psi}$ ist beschränkt, injektiv und stetig differenzierbar.
2. Die Tangentialvektoren $\vec{\Psi}_u(u, v)$ und $\vec{\Psi}_v(u, v)$ sind in jedem Punkt $(u, v) \in D$ linear unabhängig.

Dann heißt die Menge

$$S := \vec{\Psi}(D) = \left\{ \vec{\Psi}(u, v) \mid (u, v) \in D \right\}$$

reguläre Fläche oder parametrisierbare Fläche.

Die Bedingungen sichern, dass ein beschränktes Flächenstück in der (u, v) -Ebene auf ein beschränktes gewölbtes Flächenstück im \mathbb{R}^3 abgebildet wird und nicht etwa auf eine unbeschränkte Fläche, eine Kurve oder einen Punkt. Die Vektoren $\vec{\Psi}_u(u, v)$ und $\vec{\Psi}_v(u, v)$ sind Tangentialvektoren an die Bildkurven der Koordinatengitterlinien in D .

9.2 Flächenintegrale 1. Art

Ist auf einer regulären Fläche $S \in \mathbb{R}^3$ eine skalare Funktion f gegeben, kann man diese als Massendichte interpretieren. In die Berechnung der Gesamtmasse von S geht dann auch der Flächeninhalt von S ein. Im Allgemeinen kann der Flächeninhalt nur über die Parameterdarstellung von S berechnet werden. Dazu muss man wissen, wie sich der Flächeninhalt ändert, wenn D durch $\vec{\Psi}$ zu S verzerrt wird.

Das Problem der Flächenverzerrung bei der Abbildung einer Fläche D auf eine Fläche S hatten wir bereits bei der Substitutionsregel im \mathbb{R}^2 kennengelernt. Die dort angegebene Formel gilt einschließlich ihrer Herleitung auch für gewölbte Flächen im \mathbb{R}^3 : Ein kleines rechteckiges Flächenelement $\Delta A = \Delta u \Delta v$ wird durch $\vec{\Psi}$ auf ein Flächenstück abgebildet, welches durch das von den Vektoren $\vec{\Psi}_u \Delta u$ und $\vec{\Psi}_v \Delta v$ gebildete Parallelogramm mit Flächeninhalt $\left\| \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v \right\| \Delta u \Delta v$ approximiert wird.

Im letzten Kapitel hatten wir den Verzerrungsfaktor alternativ als Determinante der Funktionalmatrix geschrieben, worauf wir hier verzichten. Die nun folgende Definition erklärt Flächenintegrale für skalare Funktionen auf gewölbten Flächen im \mathbb{R}^3 . Inhaltlich ist die Definition identisch mit Satz 8.3, der Substitutionsregel im \mathbb{R}^2 . Die Substitutionsregel schließt ein, dass der Wert des Flächenintegrals (9.1) nicht von der Parameterdarstellung der Fläche abhängt.

Definition 9.2 (Flächenintegral 1. Art) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und

$$\vec{\Psi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u, v) \\ \psi_2(u, v) \\ \psi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

eine beschränkte, injektive und stetig differenzierbare Funktion, für die das Kreuzprodukt

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \psi_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} \psi_2(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} \psi_3(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} \psi_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} \psi_2(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} \psi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

auf D beschränkt ist und nicht Null wird. Auf der Fläche

$$S := \vec{\Psi}(D) = \left\{ \vec{\Psi}(u, v) \mid (u, v) \in D \right\}$$

sei die Funktion $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann heißt

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma := \iint_D f(\vec{\Psi}(u, v)) \left\| \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v \right\| d(u, v) \quad (9.1)$$

Flächenintegral 1. Art.

Die Definition bleibt gültig, wenn die Injektivität von $\vec{\Psi}$ oder die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{\Psi}_u$ und $\vec{\Psi}_v$ auf einer Nullmenge verletzt wird.

Bemerkung 9.3

1. Die Substitutionsregel im \mathbb{R}^2 erkennt man nun als Spezialfall eines Flächenintegrals 1. Art, bei dem die gewölbte Fläche nicht gewölbt, sondern nur verzerrt ist. Satz 8.3 entspricht dem Fall $\psi_3(u, v) \equiv 0$ in Definition 9.2.
2. Für die Funktion $f(x, y, z) \equiv 1$ wird der Flächeninhalt der Fläche S berechnet. \diamond

Beispiel 9.4

1. Ist die gewölbte Fläche S Graph einer Funktion $g: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, lassen sich Flächenintegrale über S mit der kanonischen Parameterdarstellung

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D,$$

berechnen. Beispielsweise für das Paraboloid

$$\begin{aligned} S: z &= x^2 + y^2, \\ (x, y) \in D &:= [-1, 1] \times [-1, 1], \end{aligned}$$

mit Massendichte

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4z}$$

liefert die Parameterdarstellung

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D,$$

über

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

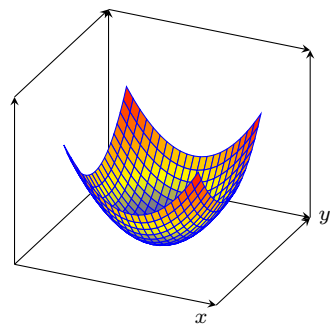


Abb. 9.2: Paraboloid.

und

$$\|\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v\| = \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1}$$

die Gesamtmasse

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \sqrt{1+4z} \, d\sigma = \iint_D \sqrt{1+4(u^2+v^2)} \sqrt{4u^2+4v^2+1} \, d(u,v) \\ &= \int_{u=-1}^1 \left(\int_{v=-1}^1 (4u^2+4v^2+1) \, dv \right) du \\ &= \int_{u=-1}^1 \left[4u^2v + \frac{4}{3}v^3 + v \right]_{v=-1}^1 du \\ &= \int_{u=-1}^1 \left(8u^2 + \frac{8}{3} + 2 \right) du = \left[\frac{8}{3}u^3 + \frac{14}{3}u \right]_{u=-1}^1 = \frac{44}{3}. \end{aligned}$$

2. Gesucht seien der Flächeninhalt und die z -Koordinate des Flächenschwerpunkts der oberen Halbkugelschale mit Radius r .

Zur Berechnung bieten sich Kugelkoordinaten an. Über die vollen Winkelintervalle für θ und φ liefern Kugelkoordinaten für festen Radius r eine Parameterdarstellung der Oberfläche einer Vollkugel mit Radius r . Um die obere Halbkugelschale mit Radius r zu parametrisieren, halbiert man das θ -Intervall und erhält so die Parameterdarstellung

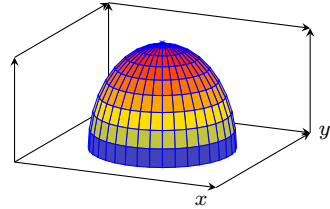


Abb. 9.3: Obere Halbkugelschale.

$$\vec{\Psi}(u,v) = \begin{pmatrix} r \sin u \cos v \\ r \sin u \sin v \\ r \cos u \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in D := \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi].$$

Aus

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v &= \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \cos u \sin v \\ -r \sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \sin u \sin v \\ r \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 u \cos v \\ r^2 \sin^2 u \sin v \\ r^2 \cos u \sin u \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1} \end{pmatrix} = r^2 \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\|\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v\| = r^2 \sin u \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \right\|}_{=1} = r^2 \sin u$$

folgt der Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F_S &= \iint_S 1 \, d\sigma = \iint_D 1 \cdot \|\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v\| \, d(u, v) \\ &= \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{v=0}^{2\pi} r^2 \sin u \, dv \right) du = \left[-2\pi r^2 \cos u \right]_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi r^2. \end{aligned}$$

Die z -Koordinate des Schwerpunkts dieser Fläche ist

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{F_S} \iint_S z \, d\sigma = \frac{1}{2\pi r^2} \iint_D r \cos u \cdot \|\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v\| \, d(u, v) \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{v=0}^{2\pi} \underbrace{r^3 \sin u \cos u}_{\frac{1}{2} \sin(2u)} \, dv \right) du = \frac{1}{2} r \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2u) \, du \\ &= \left[-\frac{1}{4} r \cos(2u) \right]_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} r. \end{aligned}$$

3. Die aus der oberen Halbkugelschale mit Radius 2 gegeben durch

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

vom Kreiszylinder

$$\{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

ausgeschnittene Fläche wird nach Galileis Schüler Viviani als Viviani'sche Fläche bezeichnet.

Als ebenen Integrationsbereich D wählen wir die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1, 0)$ und darin die lokalen Polarkoordinaten

$$x = 1 + u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Die Schnittfläche S ist also durch

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{4 - (1 + u \cos v)^2 - (u \sin v)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{3 - 2u \cos v - u^2} \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Die weitere Rechnung erfolgt wie bisher beschrieben. Es ist

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ \frac{-\cos v - u}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ \frac{u \sin v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u + u^2 \cos v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \\ \frac{u^2 \sin v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \\ u \end{pmatrix}$$

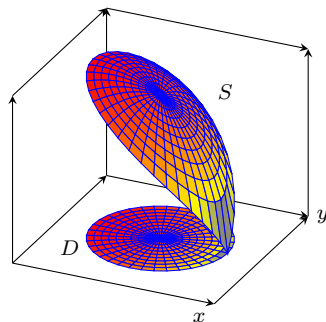


Abb. 9.4: Viviani'sche Fläche.

sowie

$$\begin{aligned}
 \left\| \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v \right\|^2 &= u^2 \left(\frac{(1 + u \cos v)^2}{3 - 2u \cos v - u^2} + \frac{u^2 \sin^2 v}{3 - 2u \cos v - u^2} + 1 \right) \\
 &= u^2 \frac{1 + 2u \cos v + u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v + 3 - 2u \cos v - u^2}{3 - 2u \cos v - u^2} \\
 &= \frac{4u^2}{3 - 2u \cos v - u^2}.
 \end{aligned}$$

Somit gilt für den Flächeninhalt F_S von S :

$$\begin{aligned}
 F_S &= \iint_S 1 \, d\sigma = \iint_D \left\| \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v \right\| \, d(u, v) \\
 &= \int_{v=0}^{2\pi} \int_{u=0}^1 \frac{2u}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \, du \, dv = 4(\pi - 2),
 \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral nur mit viel Mühe berechnet werden kann.

△

Teil III

Vektoranalysis

Kapitel 10

Vektorfelder

Vektoranalysis bezeichnet die Differenzialrechnung für vektorwertige Funktionen. Von hauptsächlichem Interesse sind Vektorfelder, bei denen die Dimension der Vektoren im Definitions- und im Wertebereich übereinstimmt:

Definition 10.1 Eine Funktion $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Vektorfeld*.

Besonders wichtig im Hinblick auf Anwendungen sind Vektorfelder im \mathbb{R}^3 . Ebene Vektorfelder sind ein Spezialfall räumlicher Vektorfelder.

Vektorfelder waren uns beim mehrdimensionalen Newton-Verfahren in Abschnitt 4.4 zum ersten Mal begegnet. Sie traten auch bei der Substitutionsregel für Bereichsintegrale und bei der Parameterdarstellung gewölbter Flächen auf.

Viele Eigenschaften von Vektorfeldern sind komponentenweise definiert, wodurch sich die jeweiligen Merkmale reellwertiger Funktionen auf Vektorfelder übertragen. So heißt ein Vektorfeld stetig, wenn jede Komponente eine stetige Funktion ist. Analog sind Eigenschaften wie stückweise Stetigkeit oder Differenzierbarkeit eines Vektorfelds komponentenweise zu verstehen.

Partielle Ableitungen von Vektorfeldern werden komponentenweise nach den besprochenen Differenzierungsregeln berechnet, wie dies schon in Abschnitt 4.4 thematisiert wurde. Dabei kommen weder neue Funktionsklassen noch neue Ableitungsregeln hinzu. Erweiterungen der bisherigen Theorie ergeben sich daraus, dass mehrere partielle Ableitungen zu Skalaren oder Vektoren zusammengefasst werden und so neue Differenzialoperatoren wie Divergenz und Rotation gebildet werden.

Wir verwenden in diesem Teil die folgende Notation:

1. Wenn die Dimension nicht explizit angegeben wird, liegt ein räumliches Vektorfeld vor.

2. Vektoren werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Die kanonischen Komponenten des Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ lauten x_1, x_2, x_3 . Wenn keine Verwechslungsgefahr besteht, werden stattdessen auch die Koordinaten x, y , und z verwendet.
3. Vektorfelder $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ notieren wir mit Großbuchstaben, ihre Komponenten mit F_1, F_2, F_3 oder mit den Buchstaben f, g und h . Es ist also

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}$$

4. Für den Vektor $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ in der Parameterdarstellung

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

schreiben wir durchgängig $\vec{\gamma}(t)$.

5. Skalarprodukte zwischen Vektoren notieren wir mit einem auffälligen fetten Punkt. Z.B. für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

6. Ist $u: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, wird mit ∇u der Gradient von u bezeichnet. Den Gradienten schreiben wir als Spaltenvektor, z.B. für $n = 3$:

$$\nabla u = \text{grad } u(x, y, z) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Kapitel 11

Kurven- und Flächenintegrale 2. Art

11.1 Kurvenintegrale 2. Art

Neben den in Kapitel 6 betrachteten Kurvenintegralen 1. Art tritt eine zweite Sorte von Kurvenintegralen auf, bei denen Vektorfelder integriert werden. Als Anwendungsbeispiel interpretieren wir das stetige Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}$$

als Kraftfeld, in dem sich ein Teilchen entlang einer J-Kurve

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

bewegt, und berechnen die dabei verrichtete Arbeit.

Durch Zerlegung des Parameterintervalls $[a, b]$ approximieren wir die Kurve wie in Abschnitt 6.2 durch einen Polygonzug. Für das vektorielle Teilstück

$$\vec{s}_j = \vec{\gamma}(t_j) - \vec{\gamma}(t_{j-1}) = \begin{pmatrix} x(t_j) - x(t_{j-1}) \\ y(t_j) - y(t_{j-1}) \\ z(t_j) - z(t_{j-1}) \end{pmatrix}$$

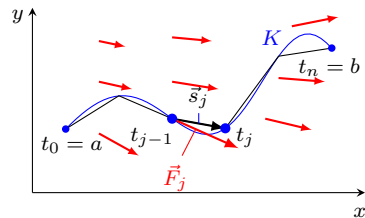


Abb. 11.1: Kurve mit Vektorfeld.

verwenden wir die Approximation

$$\begin{aligned}\vec{s}_j &= \begin{pmatrix} \frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \\ \frac{y(t_j) - y(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \\ \frac{z(t_j) - z(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \end{pmatrix} (t_j - t_{j-1}) \approx \begin{pmatrix} \dot{x}(t_{j-1}) \\ \dot{y}(t_{j-1}) \\ \dot{z}(t_{j-1}) \end{pmatrix} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \dot{\vec{\gamma}}(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}).\end{aligned}$$

Außerdem nehmen wir an, dass die Kraft \vec{F} längs eines kurzen Wegstücks \vec{s}_j weder Betrag noch Richtung wesentlich ändert und durch

$$\vec{F}_j := \vec{F}(\vec{\gamma}(t_{j-1}))$$

approximiert werden darf. Dann ist die längs \vec{s}_j verrichtete Arbeit ungefähr gegeben durch

$$W_j \approx \vec{F}_j \bullet \vec{s}_j \approx \vec{F}(\vec{\gamma}(t_{j-1})) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}).$$

Die insgesamt anfallende Arbeit berechnet sich durch Aufsummation und Grenzwertbildung zu

$$\begin{aligned}W &\approx \sum_j \vec{F}(\vec{\gamma}(t_{j-1})) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t_{j-1})(t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_j \begin{pmatrix} f(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}), z(t_{j-1})) \\ g(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}), z(t_{j-1})) \\ h(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}), z(t_{j-1})) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{x}(t_{j-1}) \\ \dot{y}(t_{j-1}) \\ \dot{z}(t_{j-1}) \end{pmatrix} (t_j - t_{j-1}) \\ &= \sum_j \left(f(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}), z(t_{j-1})) \dot{x}(t_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + g(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}), z(t_{j-1})) \dot{y}(t_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + h(x(t_{j-1}), y(t_{j-1}), z(t_{j-1})) \dot{z}(t_{j-1}) \right) (t_j - t_{j-1}) \\ &\rightarrow \int_a^b \left(f(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + g(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) \right. \\ &\quad \left. + h(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} f(x(t), y(t), z(t)) \\ g(x(t), y(t), z(t)) \\ h(x(t), y(t), z(t)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) dt.\end{aligned}$$

Das letzte Integral verwendet man zur Definition von Kurvenintegralen 2. Art:

Definition 11.1 Die Kurve

$$K: \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b,$$

sei eine J-Kurve. Das Vektorfeld $\vec{F}: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei beschränkt und stückweise stetig auf K . Dann heißt

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

Kurvenintegral 2. Art von \vec{F} über K .

Der Wert eines Kurvenintegrals 2. Art ändert sich nicht, wenn man dieselbe Kurve mit einer anderen Parameterdarstellung *in der gleichen Richtung* durchläuft. Falls man die Kurve rückwärts durchläuft, ändert sich das Vorzeichen des Kurvenintegrals 2. Art. In der Physik ist diese Eigenschaft als Energieerhaltungssatz bekannt. Muss man längs eines Weges Arbeit verrichten, bekommt man diese zurück, wenn man den Prozess umkehrt.

Beispiel 11.2

1. Es sei

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad K: \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \\ z(t) = 1 + t \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 2.$$

K ist die Verbindungsstrecke der Punkte $P = (1, 2, 2)$ und $Q = (2, 4, 3)$ im \mathbb{R}^3 . Es ist

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_1^2 \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ (1+t)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_1^2 (t + 4t + (1+t)^2) dt \\ &= \left[\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{3}(1+t)^3 \right]_1^2 = 10 + 9 - \frac{5}{2} - \frac{8}{3} = \frac{83}{6}. \end{aligned}$$

2. Parametrisiert man dieselbe Kurve um in

$$K: \begin{cases} x(t) = 2 - t \\ y(t) = 4 - 2t \\ z(t) = 3 - t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

dann wird K rückwärts von Q nach P durchlaufen und man erhält

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2-t \\ 4-2t \\ (3-t)^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (t - 2 + 4t - 8 - (3 - t)^2) dt = \left[\frac{5}{2}t^2 - 10t + \frac{1}{3}(3 - t)^3 \right]_0^1 \\
 &= \frac{5}{2} - 10 + \frac{8}{3} - 0 + 0 - 9 = -\frac{83}{6}.
 \end{aligned}$$

3. Für

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad K: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

ist

$$\begin{aligned}
 &\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} \\
 &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.
 \end{aligned}$$

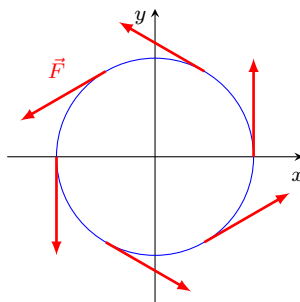


Abb. 11.2: Kurve mit Vektorfeld. \triangle

Kurvenintegrale 2. Art sind ebenso wie Kurvenintegrale 1. Art linear bezüglich des Integranden und additiv hinsichtlich des Integrationsbereichs:

Lemma 11.3 Die J-Kurve K sei die Vereinigung zweier J-Kurven K_1 und K_2 . Die Vektorfelder \vec{F} und \vec{G} seien beschränkt und stückweise stetig auf K . Dann gilt:

1. Linearität: Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_K (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) \bullet d\vec{s} = \alpha \int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} + \beta \int_K \vec{G} \bullet d\vec{s}.$$

2. Additivität: Es ist

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_{K_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_{K_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}.$$

11.1.1 Wegunabhängigkeit

Der Energieerhaltungssatz der Physik beinhaltet, dass die Arbeit, die benötigt wird, um einen Körper in einem Kraftfeld vom Punkt P zum Punkt Q zu bewegen, wegunabhängig ist. Dies bezieht sich nicht nur auf verschiedene Parameterdarstellungen der gleichen Kurve, sondern es gilt auch für verschiedene Kurven, die P und Q verbinden. Diese Eigenschaft besitzen alle Gradientenfelder.

Definition 11.4 Ein Vektorfeld $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Gradientenfeld*, wenn ein skalares Potenzial $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla u(\vec{x})$$

existiert.

Beispiel 11.5

1. Es sei $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Das Potenzial $u: \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto \frac{1}{r^2}$ erzeugt das Vektorfeld \vec{F} mit

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla u(\vec{x}) = -\frac{2}{r^4} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2. Falls das Vektorfeld

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

ein Gradientenfeld ist, muss eine Funktion u mit

$$u_x(x, y) = y, \quad u_y(x, y) = x$$

existieren. Integration der ersten Beziehung ergibt

$$u(x, y) = \int y \, dx = xy + \phi(y)$$

mit einer beliebigen Funktion $\phi(y)$. Differenziation nach y liefert

$$u_y(x, y) = x + \phi'(y) \stackrel{!}{=} x \iff \phi'(y) = 0.$$

Also ist $u(x, y) = xy$ ein mögliches Potenzial zu \vec{F} und somit ist \vec{F} ein Gradientenfeld. \triangle

Es sei nun \vec{F} ein Gradientenfeld und $\vec{\gamma}(t)$ die Parameterdarstellung einer glatten Kurve, welche die Punkte P und Q verbindet. Dann folgt durch Umkehrung der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} u(\vec{\gamma}(t)) = \nabla u(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t),$$

dass man das Kurvenintegral folgendermaßen berechnen darf:

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) \, dt = \int_a^b \nabla u(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} u(\vec{\gamma}(t)) \, dt = \left[u(\vec{\gamma}(t)) \right]_a^b = u(\vec{\gamma}(b)) - u(\vec{\gamma}(a)) = u(Q) - u(P). \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt:

Satz 11.6 Das Vektorfeld $\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei ein Gradientenfeld, d.h. es gebe ein skalares Potenzial $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\vec{F} = \nabla u.$$

P und Q seien zwei beliebige Punkte aus D . Dann gilt

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} = u(Q) - u(P)$$

für jede ganz in D verlaufende J-Kurve, die den Anfangspunkt P mit dem Endpunkt Q verbindet.

Äquivalent gilt: Für jede ganz in D verlaufende geschlossene J-Kurve K ist

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0.$$

In der Mathematik verwendet man anstelle des Potenzials den Begriff *Stammfunktion*. Kurvenintegrale 2. Art mit Integrandem \vec{F} sind also wegunabhängig, wenn \vec{F} eine Stammfunktion u besitzt. Es gilt sogar die Umkehrung. Falls alle Kurvenintegrale 2. Art von \vec{F} in einem Gebiet $D \in \mathbb{R}^3$ wegunabhängig sind, kann man einen beliebigen Punkt $P \in D$ festlegen und durch

$$u(x, y, z) := \int_P^{(x,y,z)} \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

in D eine Stammfunktion u von \vec{F} definieren, welche die Eigenschaft

$$\nabla u(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$$

besitzt. Dabei bezeichnet $\int_P^{(x,y,z)}$ ein Kurvenintegral über eine beliebige ganz in D verlaufende J-Kurve von P zum Punkt (x, y, z) in D .

Wegunabhängigkeit kann man bei einem Kurvenintegral ausnutzen, um eine komplizierte Verbindungskurve zweier Punkte P und Q durch einen einfacheren Integrationsweg zu ersetzen. Dazu muss man wissen, ob ein gegebenes Vektorfeld \vec{F} ein Gradientenfeld ist. Falls \vec{F} ein Gradientenfeld und selbst wieder differenzierbar ist, ist eine zugehörige Stammfunktion u zweimal differenzierbar. Nach dem Satz von Schwarz gilt dann

$$u_{xy} = u_{yx}, \quad u_{xz} = u_{zx}, \quad u_{yz} = u_{zy}.$$

Vektoriell kann man diese Beziehungen in der Form

$$\begin{pmatrix} u_{zy} - u_{yz} \\ u_{xz} - u_{zx} \\ u_{yx} - u_{xy} \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

schreiben.

Definition 11.7 Der Vektor

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix}$$

heißt *Rotation* des Vektorfelds \vec{F} . Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall verschwindet, heißt *rotationsfrei* oder *wirbelfrei*, bei Kraftfeldern auch *konservativ*.

Die Berechnungsformel für die Rotation merkt man sich als Kreuzprodukt eines Gradienten-Operators mit einem Vektorfeld:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix}.$$

Die Rotation eines ebenen Vektorfelds

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

entspricht der dritten Komponente der Rotation eines räumlichen Vektorfelds, d.h.

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y).$$

Die Rotation beschreibt Wirbel in Strömungen. Der Rotationsvektor $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z)$ ist lokale Drehachse der räumlichen Drehbewegung des Strömungsfelds \vec{F} im Punkt (x, y, z) . Die Länge des Rotationsvektors entspricht dem Doppelten der Winkelgeschwindigkeit, mit der ein mitschwimmender Körper um diese Achse rotiert.

Beispiel 11.8

1. Im konstanten Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zeigen alle Strömungsvektoren in positive x -Richtung. Die Strömung ist wirbelfrei, $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.
2. Das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

beschreibt ein Kraftfeld, in welchem der Kraftvektor im Punkt (x, y, z) in Richtung des Nullpunkts des Koordinatensystems wirkt. Offensichtlich treten keine Wirbel auf. Das Kraftfeld ist konservativ mit

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial -z} - \frac{\partial z}{\partial -y} \\ \frac{\partial z}{\partial -x} - \frac{\partial x}{\partial -z} \\ \frac{\partial x}{\partial -y} - \frac{\partial y}{\partial -x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Der Punkt $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ läuft für $t \in [0, 2\pi]$ gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis um den Ursprung. Sein Geschwindigkeitsvektor zur Zeit t lautet $(-\sin t, \cos t) = (-y(t), x(t))$. Die Winkelgeschwindigkeit ist 1, da der Winkel 2π in der Zeit 2π durchlaufen wird.

Hieraus folgt: Rotiert die (x, y) -Ebene im \mathbb{R}^3 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit 1 gegen den Uhrzeigersinn um die positive z -Achse, dann ist diese Drehbewegung durch die Strömungsvektoren

$$\vec{F}(xy, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die Rotation

$$\operatorname{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

bestätigt, dass die positive z -Achse Drehachse der Bewegung ist und dass die Winkelgeschwindigkeit 1 beträgt.

4. Für

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad \vec{G}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + \cos y \\ -x \sin y \end{pmatrix}$$

gilt

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) = 1 + 1 = 2,$$

$$\operatorname{rot} \vec{G} = \frac{\partial}{\partial x} (-x \sin y) - \frac{\partial}{\partial y} (2x + \cos y) = -\sin y - (-\sin y) = 0.$$

Das Vektorfeld \vec{F} ist nicht rotationsfrei und somit auch kein Gradientenfeld. \vec{G} ist ein rotationsfreies Vektorfeld. \triangle

Im Allgemeinen ist Rotationsfreiheit eines Vektorfelds zwar notwendig, aber nicht hinreichend für die Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen 2. Art. Will man aus der Rotationsfreiheit eines Vektorfelds auf die Wegunabhängigkeit schließen, benötigt man noch eine zusätzliche Voraussetzung an das Gebiet, in dem die Kurven liegen dürfen. Ein

Gebiet bezeichnet im Folgenden eine offene und zusammenhängende Menge. Zusammenhängend bedeutet, dass es zu zwei beliebigen Punkten P und Q aus einem Gebiet D eine stetige Kurve von P nach Q gibt, die ganz in D liegt.

Definition 11.9 Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Sterngebiet*, wenn es einen Punkt P in D gibt, sodass für jeden anderen Punkt $Q \in D$ die Verbindungsstrecke von P und Q ganz in D liegt. Der Punkt P heißt *Sternzentrum* von D .

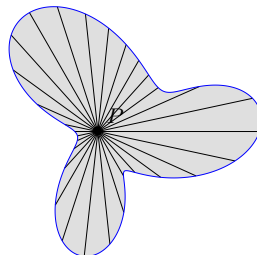


Abb. 11.3: Sterngebiet.

Beispiel 11.10

1. Kreisscheiben und Rechtecke im \mathbb{R}^2 sind Sterngebiete, ebenso Kugeln und Quader im \mathbb{R}^3 . In diesen Fällen darf man das Sternzentrum P beliebig wählen.
2. Die (x, y) -Ebene ohne die negative reelle Achse ist ein Sterngebiet. Ein mögliches Sternzentrum ist $P = (1, 0)$.
3. Ein Kreisring ist kein Sterngebiet.

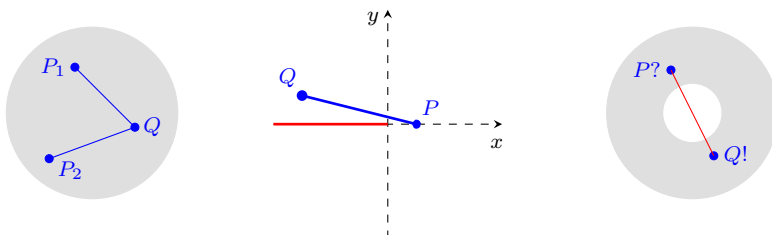


Abb. 11.4: Sterngebietseigenschaft ausgewählter Gebiete.



In Sterngebieten gilt:

Satz 11.11 Das differenzierbare Vektorfeld \vec{F} sei in einem Sterngebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $D \subseteq \mathbb{R}^3$ rotationsfrei. P und Q seien zwei beliebige Punkte aus D . Dann besitzt das Kurvenintegral

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

für jede ganz in D verlaufende J-Kurve, die den Anfangspunkt P mit dem Endpunkt Q verbindet, denselben Wert. Äquivalent gilt

$$\int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} = 0$$

für jede ganz in D verlaufende geschlossene J-Kurve.

Beispiel 11.12

1. Das Vektorfeld

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + z^2 \\ x \\ 2xz \end{pmatrix},$$

ist wegen

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y + z^2 \\ x \\ 2xz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} 2xz - \frac{\partial}{\partial z} x \\ \frac{\partial}{\partial z} (y + z^2) - \frac{\partial}{\partial x} 2xz \\ \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (y + z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 2z - 2z \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

rotationsfrei im Sterngebiet \mathbb{R}^3 . Somit sind alle Kurvenintegrale 2. Art von \vec{F} wegunabhängig.

Für $P = (1, 0, 0)$ und $Q = (1, 0, 2\pi)$ betrachten wir nun die Verbindungskurven

$$K_1: \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad K_2: \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Für K_1 gilt:

$$\begin{aligned} \int_{K_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t + t^2 \\ \cos t \\ 2t \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - t^2 \sin t + \cos^2 t + 2t \cos t) dt. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt &= \int_0^{2\pi} \cos(2t) dt = 0, \\ \int_0^{2\pi} (-t^2 \sin t) dt &\stackrel{\text{p.l.}}{=} \left[t^2 \cos t \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2t \cos t dt = 4\pi^2 - \int_0^{2\pi} 2t \cos t dt, \end{aligned}$$

woraus

$$\int_{K_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} = 4\pi^2$$

folgt.

Für K_2 ist die Rechnung wesentlich einfacher:

$$\int_{K_2} \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 + t^2 \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} 2t dt = \left[t^2 \right]_0^{2\pi} = 4\pi^2.$$

2. Für das Vektorfeld

$$\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 11.2 lieferte das Kurvenintegral über die geschlossene Kurve des Einheitskreises den Wert 2π . Damit kann \vec{F} nicht rotationsfrei sein, was man durch

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) = 2 \neq 0$$

bestätigt.

3. Es sei $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die (x, y) -Ebene ohne den Ursprung sowie

$$\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

In D ist \vec{F} rotationsfrei:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{(-y)}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Für den geschlossenen Kreis mit Radius 1

$$K: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

folgt aber

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{\cos^2 t + \sin^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{F}(\vec{\gamma}(t))} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\dot{\vec{\gamma}}(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Die Erklärung liegt hier im Gebiet. Die (x, y) -Ebene ohne den Ursprung ist kein Sterngebiet, sodass Satz 11.11 nicht anwendbar ist. Wie das Beispiel zeigt, kann ein rotationsfreies Vektorfeld in diesem Fall wegababhängige Kurvenintegrale 2. Art besitzen.

Man beachte, dass \vec{F} im Ursprung nicht stetig fortgesetzt werden kann, da der Grenzwert

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

nicht existiert. Daher kann man den Definitionsbereich von \vec{F} nicht durch Hinzufügen des Nullpunkts zu einem Sterngebiet erweitern. \triangle

11.2 Flächenintegrale 2. Art

Flächenintegrale 1. Art, d.h. Integrale über gewölbte Flächen im \mathbb{R}^3 mit skalarem Integranden, waren Gegenstand von Kapitel 9. Im skalaren Fall stellt man sich den Integranden als Massen- oder Ladungsdichte der Fläche vor. Mit dem Integral wird die Gesamtmasse oder Gesamtladung der Fläche berechnet.

Wir erklären nun Flächenintegrale, bei denen der Integrand ein Vektorfeld \vec{F} ist. Dieses kann man sich als Strömungsfeld eines Fluids vorstellen, welches eine reguläre Fläche S durchströmt.

Zur Herleitung einer Berechnungsformel für den Fluss wird der ebene Parameterbereich D von S mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen, wodurch D in kleine rechteckige Flächenelemente unterteilt wird. Jedes Flächenelement von D wird durch $\vec{\Psi}(u, v)$ auf ein kleines Flächenstück von S abgebildet, welches durch das aus den Vektoren $\vec{\Psi}_u \Delta u$ und $\vec{\Psi}_v \Delta v$ gebildete ebene Parallelogramm ΔA mit Normaleneinheitsvektor \vec{n} approximiert wird.

Auf dem Flächenelement ΔA wird \vec{F} als konstant angenommen. Der Fluss des Vektorfelds durch ΔA ist dann ungefähr

$$(\vec{F} \bullet \vec{n}) \cdot (\text{Flächeninhalt von } \Delta A).$$

Dieses Produkt ist mithilfe des Kreuzprodukts von $\vec{\Psi}_u \Delta u$ und $\vec{\Psi}_v \Delta v$ berechenbar. Das Kreuzprodukt steht nämlich senkrecht auf ΔA und seine Länge gibt den Flächeninhalt von ΔA an. Der Fluss des Vektorfelds \vec{F} durch das Flächenelement ΔA wird also approximiert durch

$$\vec{F} \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) \Delta u \Delta v.$$

Für die vorgenommenen Vereinfachungen kann ein mathematisch strenger Konvergenzbeweis geführt werden. Integration über die gesamte Fläche S liefert die folgende Definition:

Definition 11.13 (Flächenintegral 2. Art) Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und

$$\vec{\Psi}: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \psi_1(u, v) \\ \psi_2(u, v) \\ \psi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

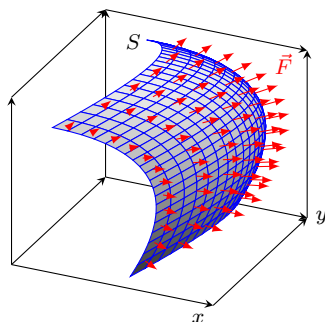


Abb. 11.5: Fluss durch Fläche.

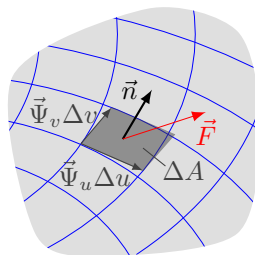


Abb. 11.6: Fluss durch Flächenelement.

eine beschränkte, injektive und stetig differenzierbare Funktion, für die das Kreuzprodukt

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \psi_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} \psi_2(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} \psi_3(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} \psi_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} \psi_2(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial v} \psi_3(u, v) \end{pmatrix}$$

auf D beschränkt ist und nicht Null wird. Auf der regulären Fläche

$$S := \vec{\Psi}(D) = \left\{ \vec{\Psi}(u, v) \mid (u, v) \in D \right\}$$

sei das Vektorfeld $\vec{F}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und beschränkt. Dann heißt

$$\iint_S \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma} := \iint_D \vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) d(u, v) \quad (11.1)$$

Flächenintegral 2. Art.

Bevor wir Beispiele präsentieren, weisen wir auf einige Aspekte der Definition 11.13 hin.

Bemerkung 11.14

1. Fluss durch eine Fläche erfordert, dass man der Fläche eindeutig eine Vorder- und eine Rückseite zuordnen kann. Derartige Flächen heißen *orientierbar*. Für reguläre Flächen ist die Orientierbarkeit durch Definition 9.1 gewährleistet.

Orientierbarkeit ist bei gewölbten Flächen im \mathbb{R}^3 keine Selbstverständlichkeit. Ein bekanntes Gegenbeispiel einer nicht orientierbaren Fläche ist das Möbius-Band.

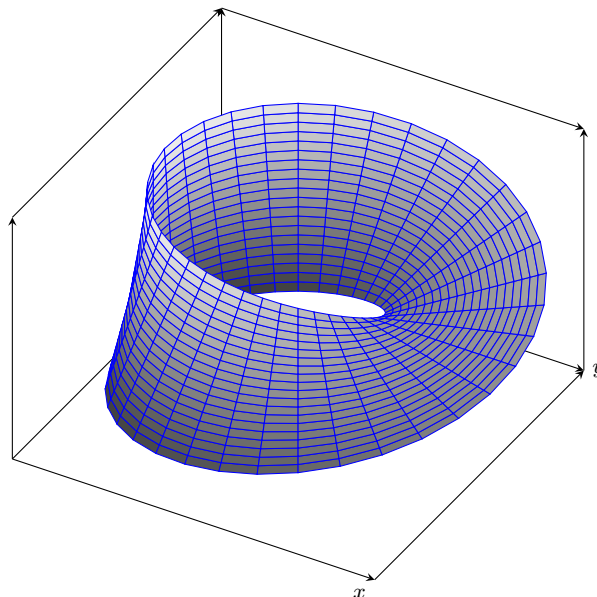


Abb. 11.7: Möbius-Band.

2. Zur korrekten Berechnung des Flusses durch eine Fläche S mithilfe des Integrals (11.1) müssen alle Normalenvektoren auf der gleichen Seite der Fläche liegen. Für eine beliebige Parameterdarstellung von S ist diese Bedingung im Allgemeinen nicht überprüfbar. Ist F aber eine reguläre Fläche mit Parameterdarstellung durch eine stetig differenzierbare Funktion $\vec{\Psi}(u, v)$, dann ist die Bedingung immer erfüllt.

Im Gegensatz zu Definition 9.2 verlangen wir hier, dass das Kreuzprodukt $\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v$ nirgends (auch auf keiner Nullmenge) verschwindet. Die Nullmenge selbst hätte zwar keinen Einfluss auf den Fluss durch S , aber der Normalenvektor könnte darauf unbemerkt seine Richtung ändern und dann außerhalb der Nullmenge auf verschiedenen Seiten von S liegen.

3. Vertauscht man Vorder- und Rückseite von S durch eine Umparametrisierung der Fläche, ändert sich das Vorzeichen des Flusses. Der Betrag des Flusses ist unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung. \diamond

Beispiel 11.15

1. Es sei S das Paraboloid

$$S: z = 4 - x^2 - y^2, \quad (x, y) \in D := [-1, 1] \times [-1, 1]$$

und

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Für die kanonische Parameterdarstellung

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 4 - u^2 - v^2 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D$$

ist

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix}$$

der nach *oben* zeigende Normalenvektor von S . Bei dieser Wahl berechnet sich der Fluss von \vec{F} durch S als

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma} &= \iint_D \vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) d(u, v) \\ &= \frac{1}{4} \iint_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 - 2u^2 - 2v^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ 1 \end{pmatrix} d(u, v) \\ &= \frac{1}{2} \int_{u=-1}^1 \left(\int_{v=-1}^1 (u + v + 4 - u^2 - v^2) dv \right) du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{u=-1}^1 \left[uv + \frac{1}{2}v^2 + 4v - u^2v - \frac{1}{3}v^3 \right]_{v=-1}^1 du \\
&= \frac{1}{2} \int_{u=-1}^1 \left(2u + 8 - 2u^2 - \frac{2}{3} \right) du = \left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{11}{3}u - \frac{1}{3}u^3 \right]_{u=-1}^1 = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

2. Es sei S_2 die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 und \vec{F} das konstante Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um den Fluss von \vec{F} durch S_2 zu berechnen, teilen wir die Fläche in die obere und die untere Halbkugelschale S_2^\pm mit der Parameterdarstellung

$$\vec{\Psi}^\pm(u, v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \pm \cos u \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D := [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi].$$

Bei der Berechnung des Flusses müssen wir die Richtung des Normalenvektors so wählen, dass er überall ins Kugellinnere oder überall in den Außenraum zeigt. Für die untere Halbkugelschale S_2^- zeigt

$$\vec{\Psi}_u^- \times \vec{\Psi}_v^- = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2 u \cos v \\ -\sin^2 u \sin v \\ \cos u \sin u \end{pmatrix}$$

wegen $\cos u \sin u \geq 0$ stets nach oben, also ins Kugellinnere, wohingegen wir für die obere Halbkugelschale den vom Ursprung weg zeigenden Normalenvektor

$$\vec{\Psi}_u^+ \times \vec{\Psi}_v^+ = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ \sin^2 u \sin v \\ \cos u \sin u \end{pmatrix}$$

erhalten.

Wir verwenden in beiden Fällen den äußeren Normalenvektor

$$\begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ \sin^2 u \sin v \\ \pm \cos u \sin u \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Fluss durch die untere Halbkugelschale gegeben durch

$$\iint_{S_2^-} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ \sin^2 u \sin v \\ -\cos u \sin u \end{pmatrix} d(u, v)$$

$$= \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{v=0}^{2\pi} (\sin^2 u (\cos v + \sin v) - \cos u \sin u) dv \right) du.$$

Die Integrationsreihenfolge haben wir so gewählt, dass die Rechnung möglichst einfach wird. Da die innere Integration über eine volle Periode des Kosinus und des Sinus verläuft, liefert der erste Summand keinen Beitrag. Unter Verwendung der Doppelwinkelformel für den Sinus folgt

$$\iint_{S_2^-} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = - \int_{u=0}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \frac{1}{4} \sin(2u) du = \frac{\pi}{2} \left[\cos(2u) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\pi.$$

Für die obere Halbkugelschale gilt

$$\iint_{S_2^+} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \sin^2 u \cos v \\ \sin^2 u \sin v \\ \cos u \sin u \end{pmatrix} d(u, v).$$

Mit gleicher Rechnung wie für S_2^- folgt

$$\iint_{S_2^+} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = +\pi.$$

Der gesamte Fluss des Vektorfelds \vec{F} durch S_2 ist somit Null.

△

Bemerkung 11.16

1. Beim letzten Beispiel kann man die Vorzeichen der Teilflüsse einer Plausibilitätsprüfung unterziehen. Auf der unteren Halbkugelschale zeigt der äußere Normalenvektor überwiegend gegen des Vektorfeld. Der Fluss durch S_2^- ist daher negativ. Auf der oberen Halbkugelschale zeigen äußerer Normalenvektor und Vektorfeld überwiegend in die gleiche Richtung, was einem positiven Fluss entspricht.
2. Das Ergebnis kann man auch so interpretieren, dass von der durch \vec{F} repräsentierten Strömung unten so viel in die Einheitskugel hineinfließt wie oben herausfließt.
3. Die geschlossene Fläche S_2 wird vollständig parametrisiert, wenn man bei den für die obere Halbkugelschale verwendeten Koordinatenfunktionen u im Intervall $[0, \pi]$ wählt. Die dritte Komponente des äußeren Normalenvektors ist in diesem Fall stets

$$\cos u \sin u \begin{cases} \geq 0 \text{ für } u \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \leq 0 \text{ für } u \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Der Fluss durch S_2 wird dann mit einer Integration berechnet:

$$\iint_{S_2} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = \frac{\pi}{2} \left[\cos(2u) \right]_0^\pi = 0.$$

◇

Aus dem physikalischen Prinzip der Massenerhaltung kann man allgemein schließen, dass der Fluss durch eine geschlossene Oberfläche S immer dann Null sein muss, wenn das von S umschlossene Volumen V keine Quellen oder Senken des Fluids enthält. Die sich daraus ergebenden Folgerungen für Flächenintegrale studieren wir im nächsten Kapitel.

11.3 Zusammenfassung

In der folgenden Übersicht sind die vier vorgestellten Integraltypen zu Kurven- und Flächenintegralen zusammengefasst.

Kurvenintegral 1. Art:

$$\int_K f(\vec{x}) \, ds.$$

K : J-Kurve im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 .

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkte und stückweise stetige Funktion mit reellen Funktionswerten.

Anwendung: Berechnung der Masse eines gebogenen Drahtes der Form K mit Massendichte f .

Flächenintegral 1. Art:

$$\iint_S f(\vec{x}) \, d\sigma.$$

S : Reguläre Fläche im \mathbb{R}^3 .

$f: S \rightarrow \mathbb{R}$: beschränkte und stückweise stetige Funktion mit reellen Funktionswerten.

Anwendung: Berechnung der Gesamtmasse einer gewölbten Fläche der Form S mit Massendichte f .

Kurvenintegral 2. Art:

$$\int_K \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{s}.$$

K : J-Kurve im \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 .

$\vec{f}: K \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$: beschränktes, stückweise stetiges Vektorfeld.

Anwendung: Berechnung der Gesamtenergie zur Bewegung eines Teilchens im Kraftfeld \vec{F} entlang des Wegs K .

Flächenintegral 2. Art:

$$\iint_S \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma}.$$

S : Reguläre Fläche im \mathbb{R}^3 .

$\vec{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$: beschränktes und stückweise stetiges Vektorfeld.

Anwendung: Berechnung des Flusses der stationären Strömung \vec{F} durch die Fläche S .

Ist die Kurve K durch die Parameterdarstellung

$$K: \vec{\gamma}(t), \quad a \leq t \leq b$$

gegeben, dann gelten die folgenden Berechnungsformeln für Kurvenintegrale:

$$\int_K f(\vec{x}) \, ds = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \left\| \dot{\vec{\gamma}}(t) \right\| dt,$$

$$\int_K \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) dt.$$

Für eine durch die Parameterdarstellung

$$S := \left\{ \vec{\Psi}(u, v) \mid (u, v) \in D \right\}$$

dargestellte reguläre Fläche berechnet man Flächenintegrale durch

$$\iint_S f(\vec{x}) \, d\sigma = \iint_D f(\vec{\Psi}(u, v)) \left\| \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v \right\| d(u, v),$$

$$\iint_S \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma} = \iint_D \vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) d(u, v).$$

Alle Integrale sind linear bezüglich des Integranden und additiv hinsichtlich des Integrationsbereichs.

Kapitel 12

Integralsätze der Vektoranalysis

Zu den wichtigsten Werkzeugen bei Integralen von Vektorfeldern gehören zwei Integralsätze, die Beziehungen zwischen Volumen- und Flächenintegralen bzw. zwischen Flächen- und Kurvenintegralen herstellen.

12.1 Der Integralsatz von Gauß

Der Gauß'sche Integralsatz ist eine Aussage über die Äquivalenz eines Volumenintegrals einer skalaren Funktion mit einem Flächenintegral 2. Art. Zur Herleitung verwenden wir spezielle Volumina, und zwar Normalbereiche bezüglich der (x, y) -Ebene mit stetig differenzierbaren Schrankenfunktionen g_1 und g_2 :

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Die Oberfläche S eines solchen Volumens wird in drei Teilflächen zerlegt: die untere Begrenzungsfläche S_1 mit Parameterdarstellung

$$S_1 := \{(x, y, z) \mid z = g_1(x, y), (x, y) \in D\},$$

die obere Begrenzungsfläche

$$S_2 := \{(x, y, z) \mid z = g_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

und die Mantelfläche M eines Zylinders, welche S_1 und S_2 verbindet. Der Parameterbereich D ist die Projektion von V auf die (x, y) -Ebene.

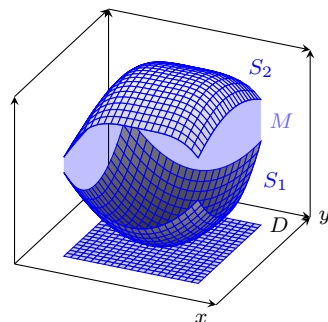


Abb. 12.1: Oberflächenzerlegung.

Wir wollen nun ein Vektorfeld, dessen x - und y -Komponenten überall Null sind, d.h.

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(x, y, z) \end{pmatrix},$$

über die gesamte Oberfläche von V integrieren und dabei stets den äußeren Normalenvektor an die Fläche legen. Das Flächenintegral über S wird dabei als Summe der drei Flächenintegrale über M , S_1 und S_2 berechnet. Dann gilt:

1. Die z -Komponente jedes Normalenvektors an die Mantelfläche M ist Null. Somit ist jeder Normalenvektor an M orthogonal zu \vec{F} und es ist

$$\iint_M \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma} := \iint \underbrace{\vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v)}_{=0} d(u, v) = 0$$

für jede Parameterdarstellung von M .

2. Die kanonische Parameterdarstellung für S_1 ,

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ g_1(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D, .$$

besitzt den nach oben, ins Innere von V zeigenden Normalenvektor

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_{1u} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_{1v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_{1u} \\ -g_{1v} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bei der Integration über S_1 muss die Richtung durch Multiplikation mit -1 korrigiert werden, um den äußeren Normalenvektor zu verwenden.

3. Bei S_2 liefert die kanonische Parameterdarstellung ebenfalls einen nach oben, in diesem Fall wie verlangt nach außen zeigenden Normalenvektor.
4. Für das gesuchte Flächenintegral gilt daher:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} &= \underbrace{\iint_M \vec{F} \bullet d\vec{\sigma}}_{=0} + \iint_{S_1} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} + \iint_{S_2} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} \\ &= \iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(u, v, g_1(u, v)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} g_{1u} \\ g_{1v} \\ -1 \end{pmatrix} d(u, v) \\ &\quad + \iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(u, v, g_2(u, v)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -g_{2u} \\ -g_{2v} \\ 1 \end{pmatrix} d(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D \left(h(u, v, g_2(u, v)) - h(u, v, g_1(u, v)) \right) d(u, v) \\
&= \iint_D \left(\int_{z=g_1(u, v)}^{g_2(u, v)} \frac{\partial}{\partial z} h(u, v, z) dz \right) d(u, v) \\
&= \iint_D \left(\int_{z=g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z) dz \right) d(x, y)
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini für räumliche Normalbereiche ist das letzte Integral ein Volumenintegral über ganz V mit dem skalaren Integranden $\frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z)$. Also gilt

$$\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(x, y, z) \end{pmatrix} \bullet d\vec{\sigma} = \iiint_V \frac{\partial}{\partial z} h(x, y, z) d(x, y, z).$$

Identische Überlegungen für räumliche Normalbereiche bezüglich der (x, z) - und der (y, z) -Ebene liefern die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ g(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix} \bullet d\vec{\sigma} &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial y} g(x, y, z) d(x, y, z), \\
\iint_S \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bullet d\vec{\sigma} &= \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) d(x, y, z).
\end{aligned}$$

Als letzter Schritt ergibt Summation der drei Integrale

$$\iint_S \begin{pmatrix} f(\vec{x}) \\ g(\vec{x}) \\ h(\vec{x}) \end{pmatrix} \bullet d\vec{\sigma} = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x} f(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial y} g(\vec{x}) + \frac{\partial}{\partial z} h(\vec{x}) \right) d(x, y, z). \quad (12.1)$$

Der Integrand im Volumenintegral ist so bedeutend, dass er einen eigenen Namen erhält.

Definition 12.1 Es sei

$$\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix},$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Dann heißt

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial h(x, y, z)}{\partial z}$$

Divergenz von \vec{F} . Für ebene Vektorfelder gilt die Definition analog in zwei Komponenten.

Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)$ ist ein Maß dafür, wie stark die Vektoren des Vektorfelds \vec{F} in einer Umgebung des Punkts (x, y, z) auseinanderstreben. In Strömungsfeldern gibt die Divergenz die Quelledichte an, mit der Masse erzeugt oder vernichtet wird. Quellen besitzen positive Divergenz, Senken negative Divergenz. Ist die Divergenz überall null, so heißt das Vektorfeld *divergenzfrei* oder *quellenfrei*.

Beispiel 12.2

1. Für $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - yz \\ e^x z + 2yz \\ xy - z^2 \end{pmatrix}$ ist $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 1 + 2z - 2z = 1$.

2. Das ebene Vektorfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

besitzt die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0.$$

Das Vektorfeld beschreibt eine quellenfreie Strömung, die sich im Kreis um den Ursprung bewegt.

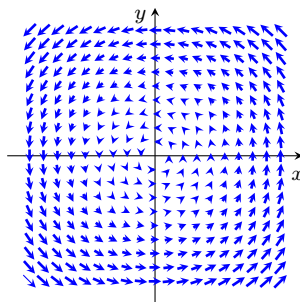


Abb. 12.2: Divergenzfreies Vektorfeld.

3. Für $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = 1 + 1 = 2.$$

Jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist eine Quelle. Für den Ursprung ist dies anschaulich klar, da die Vektoren dort sichtbar auseinanderstreben. Taylor-Entwicklung zeigt, dass dies auch an jedem anderen Punkt (x_0, y_0) gilt. Es ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

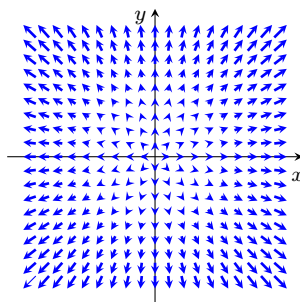


Abb. 12.3: Vektorfeld mit Quellen.

Das Vektorfeld \vec{F} wird so zur Summe eines konstanten divergenzfreien Vektorfelds und eines Vektorfelds, bei dem die Vektoren in einer Umgebung von (x_0, y_0) auseinanderstreben. △

Bemerkung 12.3

1. Ist \vec{F} ein Gradientenfeld mit Stammfunktion u , d.h. $\vec{F} = \nabla u$, dann ist die Divergenz von \vec{F} gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_x(x, y, z) \\ u_y(x, y, z) \\ u_z(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z). \end{aligned}$$

Die letzte Summe zweiter partieller Ableitungen tritt in vielen Anwendungen auf. Der zugehörige Differenzialoperator heißt *Laplace-Operator*. Üblicherweise wird er mit dem Δ -Symbol abgekürzt. In drei Raumdimensionen gilt:

$$\Delta u(x, y, z) = \nabla \bullet (\nabla u) = u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z).$$

2. Die Rotation eines beliebigen, zweimal stetig differenzierbaren Vektorfelds \vec{F} ist divergenzfrei,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} &= \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_3 - \frac{\partial}{\partial z} F_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 - \frac{\partial}{\partial x} F_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial y} F_1 \end{pmatrix} \\ &= F_{3yx} - F_{2zx} + F_{1zy} - F_{3xy} + F_{2xz} - F_{1yz} = 0, \end{aligned}$$

da sich die partiellen Ableitungen unter Anwendung des Satzes von Schwarz gegenseitig aufheben. In Operatorschreibweise lautet das Resultat

$$\nabla \bullet (\nabla \times \vec{F}) = 0. \quad \diamond$$

Die obige Herleitung von (12.1) beschränkt das Resultat zunächst auf Normalbereiche bezüglich aller Koordinatenebenen im \mathbb{R}^3 . Die Voraussetzungen an V lassen sich aber dahingehend abschwächen, dass die Beziehung zwischen Flächen- und Volumenintegral auch für Volumina gilt, welche aus Normalbereichen zusammengesetzt sind:

Satz 12.4 (Integralsatz von Gauß) Die Menge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ sei ein beschränktes Gebiet mit orientierbarer und stückweise regulärer geschlossener Oberfläche S . Das Vektorfeld $\vec{F}: V \cup S \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) d(x, y, z) = \iint_S \vec{F}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma}.$$

Im Flächenintegral ist dabei stets der äußere Normalenvektor an S zu wählen.

Bemerkung 12.5

1. Anstelle von $\iint_S \vec{F} \bullet d\vec{\sigma}$ sind auch die Schreibweisen

$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{n} d\sigma \quad \text{ sowie } \quad \oint_S \vec{F} \bullet \vec{n} d\sigma$$

mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor \vec{n} gebräuchlich. Außerdem wird die Divergenz häufig suggestiv als Vektorprodukt des Gradientenoperators mit dem Vektorfeld geschrieben:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \bullet \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \\ h(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Schreibt man noch ∂V anstelle von S und dV anstelle von $d(x, y, z)$, dann bekommt der Gauß'sche Integralsatz eine Darstellung, die an den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung erinnert:

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{F} dV = \iint_{\partial V} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma}.$$

2. Ist das Vektorfeld \vec{F} ein Gradientenfeld, $\vec{F} = \nabla u$, dann lautet der Gauß'sche Integralsatz

$$\iiint_V \Delta u dV = \iint_{\partial V} \nabla u \bullet d\vec{\sigma}.$$

3. Beim Gauß'schen Integralsatz wird der Fluss nach außen positiv gemessen. \diamond

Beispiel 12.6 Es sei V die Einheitskugel im \mathbb{R}^3 und $\vec{F}: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}.$$

Volumenintegration mit Kugelkoordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= \psi_1(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \psi_2(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \psi_3(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad r \in [0, 1], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

und der Funktionaldeterminante

$$\det \left(\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right) = r^2 \sin \theta$$

über

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = 1 + z + 2z = 1 + 3z$$

ergibt

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) d(x, y, z) &= \iiint_V (1 + 3z) d(x, y, z) \\ &= \int_{r=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \left(\int_{\varphi=0}^{2\pi} (1 + 3r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\varphi \right) d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^1 r^2 \left(\int_{\theta=0}^{\pi} (\sin \theta + 3r \cos \theta \sin \theta) d\theta \right) dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^1 r^2 \left[-\cos \theta - \frac{3}{4} r \cos(2\theta) \right]_{\theta=0}^{\pi} dr \\ &= 2\pi \int_{r=0}^1 r^2 \left(1 - \frac{3}{4} r + 1 + \frac{3}{4} r \right) dr = 4\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{r=0}^1 = \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

Alternativ liefert Flächenintegration mit

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}(u, v) &= \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi], \\ \vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v &= \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ -\sin u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} = \sin u \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

denselben Wert:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} &= \int_{u=0}^{\pi} \left(\int_{v=0}^{2\pi} \vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) dv \right) du \\ &= \int_{u=0}^{\pi} \left(\int_{v=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin u \cos v + \sin u \sin v \\ \sin u \sin v \cos u \\ \cos^2 u \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \sin u dv \right) du \\ &= \int_{u=0}^{\pi} \left(\int_{v=0}^{2\pi} (\sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin v \cos v \right. \\ &\quad \left. + \sin^3 u \sin^2 v \cos u + \sin u \cos^3 u) dv \right) du \\ &= \int_{u=0}^{\pi} \sin^3 u du \underbrace{\int_{v=0}^{2\pi} \cos^2 v dv}_{=\pi} + \int_{u=0}^{\pi} \sin^3 u du \underbrace{\int_{v=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \sin(2v) dv}_{=0} \\ &\quad + \int_{u=0}^{\pi} \sin^3 u \cos u du \underbrace{\int_{v=0}^{2\pi} \sin^2 v dv}_{=\pi} + 2\pi \int_{u=0}^{\pi} \sin u \cos^3 u du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \left[-\frac{1}{3} \sin^2 u \cos u - \frac{2}{3} \cos u \right]_0^\pi + 0 + \frac{\pi}{4} \left[\sin^4 u \right]_0^\pi - \frac{\pi}{2} \left[\cos^4 u \right]_0^\pi \\
&= \pi \left(0 + \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{3} \right) + 0 + 0 - 0 = \frac{4}{3} \pi. \quad \triangle
\end{aligned}$$

12.1.1 Der Integralsatz von Gauß in der Ebene

Der Integralsatz von Gauß stellt im \mathbb{R}^3 eine Beziehung zwischen einem Volumenintegral mit skalarem Integranden und einem Oberflächenintegral mit vektorielltem Integranden her. Überträgt man dies auf den \mathbb{R}^2 , würde man eine Äquivalenz zwischen einem Bereichsintegral über ein beschränktes ebenes Gebiet D und einem Kurvenintegral über die Randkurve ∂D von D erwarten. Tatsächlich gilt:

Satz 12.7 (Integralsatz von Gauß in der Ebene) Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei beschränkt. Ihre Randkurve ∂D gehöre ganz zu D und sei eine positiv orientierte geschlossene J -Kurve. Weiter sei

$$\vec{F}: D \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} d(x, y) = \int_{\partial D} \vec{F} \bullet \vec{n} ds. \quad (12.2)$$

Dabei bezeichnet \vec{n} den äußeren Normaleneinheitsvektor an ∂D , der nach Voraussetzung überall (mit eventueller Ausnahme von endlich vielen Punkten) existiert. Positive Orientierung heißt, dass die Randkurve gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

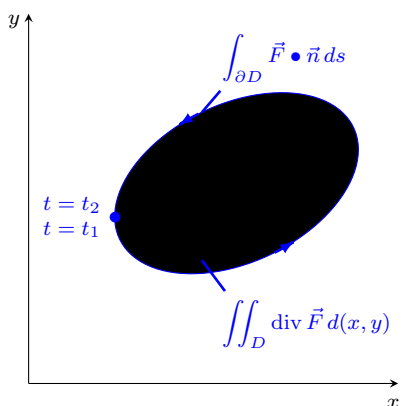


Abb. 12.4.a: Ebene Fläche.

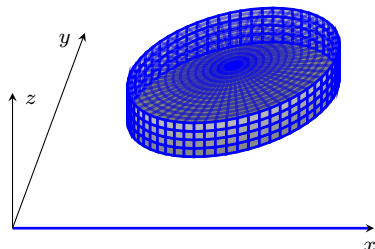


Abb. 12.4.b: Fortsetzung auf Zylinder.

Beweis: Wir führen Satz 12.7 auf Satz 12.4 zurück. Dazu erweitern wir die Menge D zu einem Zylinder V mit Höhe Eins und Grundfläche D , d.h.

$$V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z \in [0, 1]\}.$$

Das Vektorfeld \vec{F} setzen wir durch

$$\vec{G}: V \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{G}(x, y, z) := \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

auf V fort. Dann gilt der Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^3 für V und \vec{G} .

Das Volumenintegral behandeln wir mithilfe des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{G}(x, y, z) d(x, y, z) &= \int_{z=0}^1 \iint_D \operatorname{div} \vec{G}(x, y, z) d(x, y) dz \\ &= \underbrace{\int_{z=0}^1 1 dz}_{=1} \iint_D (f_x(x, y) + g_y(x, y)) d(x, y) = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y) d(x, y). \end{aligned}$$

Um das Oberflächenintegral über den Boden D , den Deckel C und den Mantel M des Zylinders zu berechnen, benötigen wir geeignete Parameterdarstellungen. Für Boden und Deckel sind diese durch

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } (u, v) \in D$$

gegeben. In beiden Fällen ist

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor an die Fläche, wobei bei der Integration über den Boden der bezüglich V äußere Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu verwenden ist. Damit folgen

$$\iint_C \vec{G}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d(u, v) = 0$$

sowie

$$\iint_D \vec{G}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma} = \iint_D \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} d(u, v) = 0.$$

Für die Parametrisierung der Mantelfläche nehmen wir an, dass die positiv orientierte Randkurve ∂D durch eine Parameterdarstellung

$$\partial D: \begin{cases} \varphi(t) \\ \psi(t) \\ 0 \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

gegeben ist. Dann ist

$$\vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi(u) \\ \psi(u) \\ v \end{pmatrix}, \quad u \in [t_1, t_2], \quad v \in [0, 1]$$

eine Parameterdarstellung von M , für die

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(u) \\ \dot{\psi}(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Unter Verwendung des Satzes von Fubini erhalten wir:

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{G}(x, y, z) \cdot d\vec{\sigma} &= \iint_M \begin{pmatrix} f(\varphi(u), \psi(u)) \\ g(\varphi(u), \psi(u)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \\ 0 \end{pmatrix} d(u, v) \\ &= \int_{v=0}^1 \int_{u=t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} f(\varphi(u), \psi(u)) \\ g(\varphi(u), \psi(u)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix} du dv \\ &= \int_{u=t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} f(\varphi(u), \psi(u)) \\ g(\varphi(u), \psi(u)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix} du. \end{aligned}$$

Der Vektor $\begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix}$ ist äußerer Normalenvektor an ∂D mit Länge $\sqrt{\dot{\psi}^2(u) + \dot{\varphi}^2(u)}$. Mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\psi}^2(u) + \dot{\varphi}^2(u)}} \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} &\int_{u=t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} f(\varphi(u), \psi(u)) \\ g(\varphi(u), \psi(u)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix} du \\ &= \int_{u=t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} f(\varphi(u), \psi(u)) \\ g(\varphi(u), \psi(u)) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\psi}^2(u) + \dot{\varphi}^2(u)}} \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix} \underbrace{\sqrt{\dot{\psi}^2(u) + \dot{\varphi}^2(u)} du}_{ds} \\ &= \int_{\partial D} \vec{F} \cdot \vec{n} ds. \end{aligned} \quad \square$$

Man kann den Gauß'schen Integralsatz in zwei Richtungen anwenden: um ein Bereichsintegral über eine ebene Fläche in ein Kurvenintegral entlang der Randkurve zu transformieren oder um Kurvenintegrale über geschlossene ebene Jordan-Kurven in ebene Bereichsintegrale zu überführen. Für beide Fälle existieren vielfältige Anwendungen. Wir stellen im Folgenden nur Spezialfälle vor, in denen Flächenintegrale in Kurvenintegrale überführt werden. Die Hauptschwierigkeit ist dabei stets die Bestimmung eines geeigneten Vektorfelds \vec{F} , sodass der jeweilige Integrand als Divergenz von \vec{F} aufgefasst werden kann und die Berechnung des Kurvenintegrals einfach ist.

Beispiel 12.8 In diesem Beispiel verwenden wir die folgenden Beziehungen, die sich mit partieller Integration verifizieren lassen:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nx) dx = \int_0^{2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi \quad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0 \quad \text{für } m, n \in \mathbb{N} \text{ mit } m \neq n.$$

1. Der Flächeninhalt der von der geschlossenen und positiv orientierten J-Kurve

$$K: \begin{cases} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{cases}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

begrenzten Fläche D beträgt

$$F_D = \iint_D 1 d(x, y).$$

Setzt man $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ mit

- a) $f(x, y) := x, g(x, y) := 0,$
- b) $f(x, y) := 0, g(x, y) := y,$
- c) $f(x, y) := \frac{1}{2}x, g(x, y) := \frac{1}{2}y,$

dann gilt jeweils

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = f_x(x, y) + g_y(x, y) = 1.$$

Mit dem Gauß'schen Integralsatz folgt unter Verwendung des nicht normierten äußeren Normalenvektors $\begin{pmatrix} \psi(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix}$:

- a) $F_D = \iint_D 1 d(x, y) = \int_{t=t_1}^{t_2} \varphi(t) \dot{\psi}(t) dt,$
- b) $F_D = \iint_D 1 d(x, y) = - \int_{t=t_1}^{t_2} \psi(t) \dot{\varphi}(t) dt,$

$$c) F_D = \iint_D 1 \, d(x, y) = \frac{1}{2} \int_{t=t_1}^{t_2} (\varphi(t)\dot{\psi}(t) - \psi(t)\dot{\varphi}(t)) \, dt.$$

Wir bestätigen diese Formeln für die Einheitskreisscheibe. Die kanonische Parameterdarstellung des Einheitskreises lautet

$$\varphi(t) = \cos t, \quad \psi(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

was in allen drei Fällen den Flächeninhalt π ergibt:

$$a) \int_{t=t_1}^{t_2} \varphi(t)\dot{\psi}(t) \, dt = \int_{t=0}^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi,$$

$$b) - \int_{t=t_1}^{t_2} \psi(t)\dot{\varphi}(t) \, dt = - \int_{t=0}^{2\pi} (-\sin^2 t) \, dt = \pi,$$

$$c) \frac{1}{2} \int_{t=t_1}^{t_2} (\varphi(t)\dot{\psi}(t) - \psi(t)\dot{\varphi}(t)) \, dt = \frac{1}{2} \int_{t=0}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \pi.$$

2. Wir berechnen den Schwerpunkt der durch die *Kardioide*

$$K: \begin{cases} \varphi(t) = 2 \cos t - \cos(2t) - 1 \\ \psi(t) = 2 \sin t - \sin(2t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

begrenzten Fläche D . Man beachte, dass die Fläche kein Normalbereich bezüglich x ist und für den Normalbereich bezüglich y keine Funktionen $x = h_1(y)$, $x = h_2(y)$ bekannt sind, mit denen die linke und die rechte Randkurve dargestellt werden kann. Integrale über D können daher nicht mit dem Satz von Fubini praktisch berechnet werden.

Zunächst benötigen wir den Flächeninhalt F_D . Aus

$$\dot{\psi}(t) = 2 \cos t - 2 \cos(2t)$$

folgt

$$\begin{aligned} F_D &= \iint_D 1 \, d(x, y) = \int_{t=0}^{2\pi} \varphi(t)\dot{\psi}(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \cos t - \cos(2t) - 1)(2 \cos t - 2 \cos(2t)) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 6 \cos t \cos(2t) + 2 \cos^2(2t) - 2 \cos t + 2 \cos(2t)) \, dt \end{aligned}$$

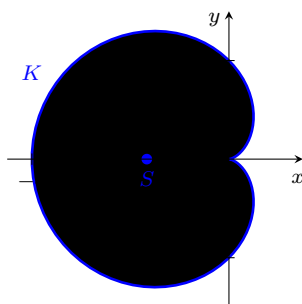


Abb. 12.4: Schwerpunkt der Kardioide.

$$= 4\pi - 6 \cdot 0 + 2\pi - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6\pi.$$

Die x -Koordinate des Schwerpunkts lautet

$$\begin{aligned} x_S &= \frac{1}{F_D} \iint_D \underbrace{x}_{f_x} d(x, y) = \frac{1}{6\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{2} \varphi^2(t) \dot{\psi}(t)}_f dt \\ &= \frac{1}{12\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} (2 \cos t - \cos(2t) - 1)^2 (2 \cos t - 2 \cos(2t)) dt}_{=-20\pi} = -\frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie von D bezüglich der x -Achse ist $y_S = 0$.

△

12.1.2 Die Green'sche Identität

Zum Gauß'schen Integralsatz in der Ebene in der Divergenzdarstellung

$$\iint_D \operatorname{div} \vec{F} d(x, y) = \int_{\partial D} \vec{F} \bullet \vec{n} ds \quad (12.3)$$

betrachten wir noch den Spezialfall, dass das Vektorfeld \vec{F} durch zwei zweimal stetig differenzierbare skalare Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in der Form

$$\vec{F}(x, y) = v(x, y) \nabla u(x, y) = \begin{pmatrix} v(x, y) u_x(x, y) \\ v(x, y) u_y(x, y) \end{pmatrix}$$

definiert wird. Dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (v u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v u_y) = v_x u_x + v u_{xx} + v_y u_y + v u_{yy} \\ &= u_x v_x + u_y v_y + v(u_{xx} + u_{yy}) = \nabla u \bullet \nabla v + v \Delta u. \end{aligned}$$

Aus (12.3) folgt somit die *Green'sche Identität*

$$\iint_D (\nabla u \bullet \nabla v + v \Delta u) d(x, y) = \int_{\partial D} v \nabla u \bullet \vec{n} ds,$$

welche man in Analogie zur partiellen Integration eindimensionaler Integrale als

$$- \iint_D v \Delta u d(x, y) = \iint_D \nabla u \bullet \nabla v d(x, y) - \int_{\partial D} v \nabla u \bullet \vec{n} ds$$

schreiben kann. Diese Formel wird bei der Herleitung der Methode der Finiten Elemente verwendet.

12.2 Der Integralsatz von Stokes

Der Integralsatz von Gauß im \mathbb{R}^3 ,

$$\iint_S \vec{G}(\vec{x}) \bullet d\vec{\sigma} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{G}(x, y, z) d(x, y, z), \quad (12.4)$$

hat eine auf den ersten Blick verblüffende Folgerung. Ist \vec{G} die Rotation eines Vektorfelds \vec{F} , dann folgt wegen

$$\operatorname{div} \vec{G} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0,$$

dass das Volumenintegral in (12.4) verschwindet. Für jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld \vec{F} , das nicht rotationsfrei sein muss, gilt daher

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = 0$$

für jede orientierbare und stückweise reguläre geschlossene Oberfläche S .

Diese Eigenschaft nutzen wir für ein Gedankenexperiment. Wir teilen ein gegebenes Volumen V mit Oberfläche S durch einen Schnitt in zwei Teile, sodass S in zwei Teilflächen S_1 und S_2 zerfällt, welche eine gemeinsame Schnittkurve K besitzen. Wir halten nun S_2 fest und verformen S_1 . Dann besitzt das Flächenintegral über S_2 einen festen Wert C und es ist

$$\iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = - \iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = -C \quad (12.5)$$

für jede zulässige Verformung von S_1 . Analog ändert sich auch der Wert des Flächenintegrals $\iint_{S_2} \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma}$ nicht, wenn man S_2 unter Erhalt der Randkurve K verformt.

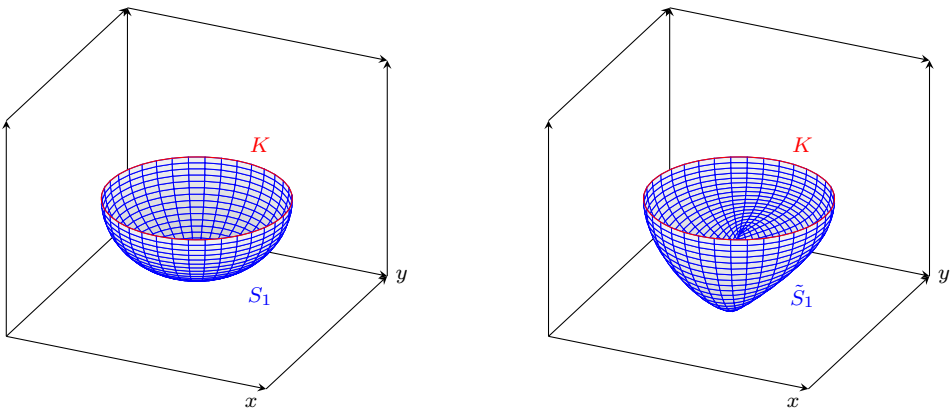


Abb. 12.5: Untere Teilfläche ohne/mit Verformung.

Die einzige Fixgröße bei derartigen Verformungen ist die Schnittkurve K . Dadurch erscheint es plausibel, dass die Flächenintegrale $\iint_{S_{1/2}} \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma}$ zu einem Kurvenintegral über die Randkurve K von S_1 äquivalent sind, dessen Integrand entweder \vec{F} selbst

oder eine Funktion von \vec{F} ist. Gleichzeitig folgt aus (12.5), dass die Orientierung von K für S_1 und S_2 entgegengesetzt gewählt werden muss.

Die vermutete Äquivalenz von Kurven- und Flächenintegral trifft in der Tat zu. Wir verzichten auf eine vollständige Beweisführung und leiten den Zusammenhang stattdessen für den Spezialfall eines ebenen Schnitts her. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, dass die (x, y) -Ebene Schnittebene durch den Körper ist. Durch eine Drehung und Verschiebung des Koordinatensystems lässt sich ein ebener Schnitt immer in diese Lage bringen.

1. Schritt Alternative Darstellung des Gauß'schen Integralsatzes in der Ebene.

Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 12.7 ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \vec{F} \bullet \vec{n} \, ds &= \int_{u=t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} f(\varphi(u), \psi(u)) \\ g(\varphi(u), \psi(u)) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \dot{\psi}(u) \\ -\dot{\varphi}(u) \end{pmatrix} du \\ &= \int_{u=t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} -g(\varphi(u), \psi(u)) \\ f(\varphi(u), \psi(u)) \end{pmatrix} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\varphi}(u) \\ \dot{\psi}(u) \end{pmatrix}}_{d\vec{s}} du \end{aligned}$$

Fasst man die Komponenten $-g$ und f zum ebenen Vektorfeld

$$\vec{G}(x, y) := \begin{pmatrix} -g(x, y) \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

zusammen, wird das Kurvenintegral zu

$$\int_{\partial D} \vec{F} \bullet \vec{n} \, ds = \int_{\partial D} \vec{G} \bullet d\vec{s}$$

und die Divergenz von \vec{F} zur Rotation von \vec{G} :

$$\operatorname{div} \vec{F}(x, y) = f_x(x, y) + g_y(x, y) = f_x(x, y) - ((-g_y(x, y))) = \operatorname{rot} \vec{G}(x, y).$$

Die Beziehung (12.2) erhält die Form

$$\iint_D \operatorname{rot} \vec{G} \, d(x, y) = \int_{\partial D} \vec{G} \bullet d\vec{s}. \quad (12.6)$$

2. Schritt Formulierung als ebener Fall im \mathbb{R}^3 .

Die ebenen Vektorfelder werden durch eine dritte Komponente ergänzt, welche Null gesetzt wird. Für

$$\vec{H}(x, y, z) := \begin{pmatrix} -g(x, y) \\ f(x, y) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$S : \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in D, \quad \partial S : \vec{\gamma}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{cases}$$

folgen

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f_x + g_y \end{pmatrix},$$

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

und weiter

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{H} \bullet d\vec{\sigma} = \iint_D (f_x + g_y) d(x, y) \stackrel{(12.6)}{=} \int_{\partial D} \vec{G} \bullet d\vec{s} = \int_{\partial S} \vec{H} \bullet d\vec{s}.$$

Die letzte Beziehung gilt auch für Flächen, die keine ebene Randkurve besitzen:

Satz 12.9 (Integralsatz von Stokes) *Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit einer J-Kurve K als Randkurve und $\vec{F}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann ist*

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = \int_K \vec{F} \bullet d\vec{s}.$$

Die Parametrisierung von S und K ist so zu wählen, dass ein ins „Äußere“ zeigender Normalenvektor an S , ein Tangentialvektor an K und ein ins Innere von S zeigender Tangentialvektor ein positiv orientiertes Dreiein bilden.

Die Aussage gilt auch für Flächen mit Löchern, sofern alle Randkurven J-Kurven sind. In diesem Fall sind die Kurvenintegrale über alle Randkurven aufzusummieren und jede Randkurve muss geeignet orientiert sein.

Beispiel 12.10

- Wir berechnen den Fluss eines Vektorfelds durch die Viviani'sche Fläche. Diese wird aus der oberen Halbkugelschale mit Radius 2 gegeben durch

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

vom Kreiszylinder

$$\{(x, y, z) \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

ausgeschnitten, vgl. Beispiel 9.4.3.

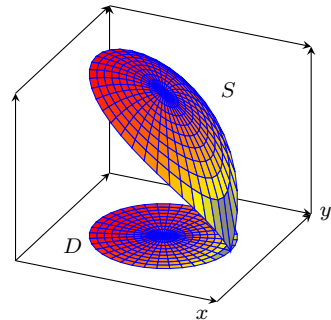


Abb. 12.6: Viviani'sche Fläche.

Als ebenen Definitionsbereich D wählen wir die Kreisscheibe mit Radius 1 und Mittelpunkt $(1, 0)$ und darin die lokalen Polarkoordinaten

$$x = 1 + u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Die Schnittfläche S ist dann durch

$$S: \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{4 - (1 + u \cos v)^2 - (u \sin v)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + u \cos v \\ u \sin v \\ \sqrt{3 - 2u \cos v - u^2} \end{pmatrix}$$

parametrisiert.

Für $u = 1$ erhält man die Randkurve K von S mit der Parameterdarstellung

$$\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sin t \\ \sqrt{2 - 2 \cos t} \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Projektion von K in die (x, y) -Ebene wird in mathematisch positivem Drehsinn durchlaufen. Der Normalenvektor

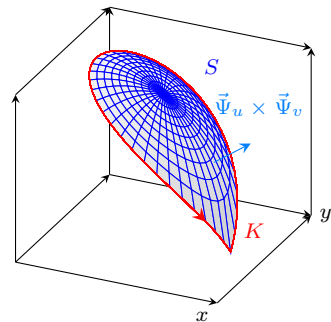


Abb. 12.7: Randkurve der Viviani'schen Fläche.

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} \frac{u + u^2 \cos v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \\ \frac{u^2 \sin v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \\ u \end{pmatrix}$$

an S zeigt nach oben, also in die richtige Richtung.

Gegeben sei nun das Vektorfeld $\vec{F}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es besitzt die Rotation

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für das Flächenintegral ist

$$\text{rot } \vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{u + u^2 \cos v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \\ \frac{u^2 \sin v}{\sqrt{3 - 2u \cos v - u^2}} \\ u \end{pmatrix} = u,$$

also

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = \iint_D u \, d(u, v) = \int_{v=0}^{2\pi} \left(\int_{u=0}^1 u \, du \right) dv = 2\pi \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = \pi.$$

Das Kurvenintegral liefert denselben Wert:

$$\begin{aligned} \int_K \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 + \cos t - \sin t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{\sin t}{\sqrt{2-2\cos t}} \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t - \cos t \sin t + \sin^2 t + \cos t \sin t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = \pi. \end{aligned}$$

2. Es sei S die Mantelfläche des Kreiszylinders mit Radius 1 und Höhe 2, Grundfläche in der (x, y) -Ebene und der z -Achse als Symmetrieachse.

Eine geeignete Parameterdarstellung von S ist die Zylinderkoordinatendarstellung

$$S: \vec{\Psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2].$$

Ein äußerer Normalenvektor an S ist

$$\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die obere und die untere Randkurve verwenden wir die Parameterdarstellungen

$$K_1: \vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_2: \vec{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

welche die beiden Kurven wie vorgeschrieben orientieren.

Integration des Vektorfelds $\vec{F}: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} (z-1)y \\ (1-z)x \\ x+y+z \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1+x \\ -1+y \\ 2-2z \end{pmatrix}$$

ergibt

$$\begin{aligned}
 \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} &= \iint_D \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{\Psi}(u, v)) \bullet (\vec{\Psi}_u \times \vec{\Psi}_v) d(u, v) \\
 &= \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=0}^2 \begin{pmatrix} 1 + \cos u \\ -1 + \sin u \\ 2 - 2v \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} dv \right) du \\
 &= \int_{u=0}^{2\pi} \left(\int_{v=0}^2 (\cos u + \cos^2 u - \sin u + \sin^2 u + 0) dv \right) du \\
 &= 2 \int_{u=0}^{2\pi} (\cos u - \sin u + 1) du = 2(0 + 0 + 2\pi) = 4\pi
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 \int_{K_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}_1(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}_1(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} (-1) \cdot \sin t \\ 1 \cdot \cos t \\ \cos t + \sin t + 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{t=0}^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{K_2} \vec{F} \bullet d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\gamma}_2(t)) \bullet \dot{\vec{\gamma}}_2(t) dt = \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \cdot (-\sin t) \\ (-1) \cdot \cos t \\ \cos t - \sin t + 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
 &= \int_{t=0}^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi,
 \end{aligned}$$

wodurch

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \bullet d\vec{\sigma} = \int_{K_1} \vec{F} \bullet d\vec{s} + \int_{K_2} \vec{F} \bullet d\vec{s}$$

bestätigt wird.

△

Teil IV

Differenzialgleichungen

Kapitel 13

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Viele Naturgesetze, insbesondere solche, welche Bewegungen oder zeitliche Veränderungen beschreiben, enthalten neben den beobachteten Größen auch Ableitungen dieser Größen. Gleichungen, in denen neben einer auf einem Intervall I gesuchten Funktion

$$y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto y(x),$$

auch Ableitungen von y vorkommen, z.B.

$$y'(x) = xy(x)$$

oder

$$y''(x) + y(x) = 0 \tag{13.1}$$

heißen *gewöhnliche Differenzialgleichungen*. Die Ordnung der höchsten Ableitung von y , die in einer gegebenen Differenzialgleichung auftritt, heißt *Ordnung* dieser Differenzialgleichung. Eine auf I hinreichend oft differenzierbare Funktion y , die auf I die Differenzialgleichung erfüllt, nennt man *Lösung* der Differenzialgleichung. Eine Differenzialgleichung, die nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, heißt *explizite Differenzialgleichung*.

Selbstverständlich können Differenzialgleichungen auch mit anderen Variablennamen geschrieben werden. Für die unabhängige Variable wird an Stelle von x auch häufig die Zeitvariable t verwendet, für die abhängige Variable sind neben y auch u und v üblich. Die Differenzialgleichung

$$\ddot{u}(t) + u(t) = 0$$

ist nur eine andere Schreibweise der Differenzialgleichung (13.1). Außerdem lässt man die unabhängige Variable meist weg, wenn sie aus dem Zusammenhang bekannt ist, und schreibt anstelle von (13.1) kurz

$$y'' + y = 0.$$

Beispiel 13.1

1. Die Differenzialgleichung

$$xy''(x) + e^{y(x)} = 0$$

ist eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

2. Die Differenzialgleichung

$$y'(x) = xy(x) + e^{y(x)}$$

ist eine explizite Differenzialgleichung erster Ordnung.

3. Die Funktion
- $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- mit

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

ist eine Lösung der Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = xy(x).$$

Dies folgt sofort mit der Kettenregel aus

$$y'(x) = e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot x = xy(x).$$

4. Die Funktion

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \cos t - \sin t,$$

löst die Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$u'' + u = 0,$$

denn es ist $u''(t) = -\cos t + \sin t = -u(t)$.

△

Im nächsten Beispiel stellen wir Anwendungsprobleme vor, welche auf Differenzialgleichungen führen.

Beispiel 13.2

1. Ein punktförmiges Pendel mit Masse
- m
- , welches sich reibungsfrei bewegt, erfüllt die Bewegungsgleichung

$$m \cdot \ell \cdot \varphi'' = -F = -m \cdot g \cdot \sin \varphi,$$

d.h.

$$\varphi'' + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0.$$

Für kleine Auslenkungen gilt $\sin \varphi \approx \varphi$, woraus sich mit $\nu := \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ die lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi'' + \nu^2 \varphi = 0 \quad (13.2)$$

ergibt. Für beliebige Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ löst

$$\varphi(t) = c_1 \cos(\nu t) + c_2 \sin(\nu t), \quad t \in \mathbb{R},$$

diese Differenzialgleichung.

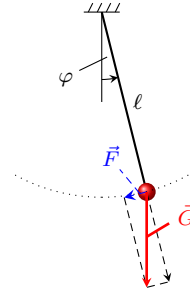


Abb. 13.1: Mathematisches Pendel.

2. Ein Doppelpendel mit zwei gekoppelt schwingenden Massen gemäß Abbildung 13.2 wird durch

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ell_1 \varphi_1'' + m_2 \ell_2 \varphi_2'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + m_2 \ell_2 (\varphi_2')^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + g(m_1 + m_2) \sin \varphi_1 = 0, \\ m_2 \ell_2 \varphi_2'' + m_2 \ell_1 \varphi_1'' \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - m_2 \ell_1 (\varphi_1')^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \\ + g m_2 \sin \varphi_2 = 0 \end{aligned}$$

beschrieben. Dieses System zweier nichtlinearer Differenzialgleichungen kann nicht geschlossen gelöst werden.

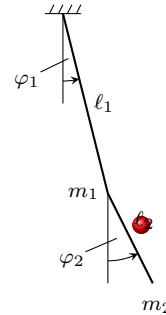


Abb. 13.2: Doppelpendel.

3. Die Gleichung der Stromstärke I in einem elektrischen Schwingkreis mit Widerstand R , einem Kondensator mit Kapazität C und einer Spule mit Induktivität L lautet

$$LC \cdot I'' + RC \cdot I' + I = 0. \quad (13.3)$$

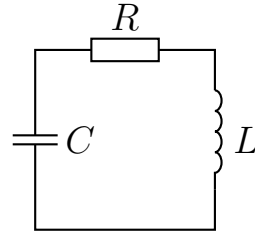


Abb. 13.3: Elektrischer Schwingkreis.

Im widerstandsfreien Idealfall erhält man wieder die Pendelgleichung (13.2). Umgekehrt wird (13.2) durch Einfügen eines Reibungsterms zu (13.3).

4. Ein zwischen zwei Aufhängepunkten gespanntes homogenes Seil ohne Biegesteifigkeit, welches unter der Last seines Eigengewichts durchhängt, genügt der Differenzialgleichung

$$y'' = a \sqrt{1 + y'^2}, \quad a > 0. \quad (13.4)$$

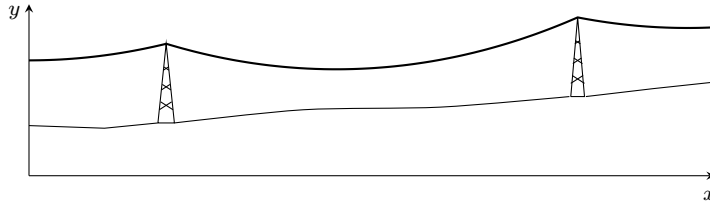


Abb. 13.4: Kettenlinie.

Zur Herleitung der Differenzialgleichung (13.4) betrachten wir das Kräftegleichgewicht im Spezialfall aus Abbildung 13.5. Es ist

$$\vec{H} = -\vec{T} \cos \alpha, \quad \vec{G} = -\vec{T} \sin \alpha.$$

Ist ϱ die konstante Massendichte des Seils und s seine Bogenlänge, dann gilt $G = \varrho s$.

Aus $y'(x) = \tan \alpha$ folgt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{G}{H} = \frac{\varrho}{H} s \\ &= \frac{\varrho}{H} \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

Den Quotienten der Massendichte ϱ und der Horizontalspannung H im tiefsten Punkt des Seils fassen wir zur Konstanten a zusammen. Differenziation der letzten Gleichung nach x liefert dann (13.4).

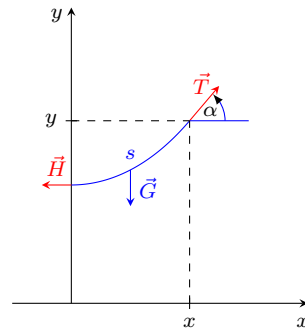


Abb. 13.5: Kräftegleichgewicht im Seil.

5. An der Unterseite eines zylindrischen Wasserbehälters mit Radius r befinde sich eine kreisförmige Öffnung mit Radius $\varrho \ll r$. Nach dem Ausflussgesetz von Torricelli strömt das Wasser mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = 0.6 \sqrt{2gh(t)}$$

aus dem Behälter, wobei h die Füllhöhe zur Zeit t bezeichnet. Der Wurzelterm entspricht der Fallgeschwindigkeit eines Wassertropfens, der aus der Höhe h auf den Behälterboden trifft. Der empirisch ermittelte Geschwindigkeitsbeiwert 0.6 erfasst die Reibung.

Die Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels verhält sich zur Ausströmgeschwindigkeit des Wassers wie die Querschnittsfläche der Öffnung zur Grundfläche des Behälters. Da das Wasser in Richtung der negativen y -Achse strömt, gilt

$$\frac{h'(t)}{-v(t)} = \frac{\varrho^2}{r^2}.$$

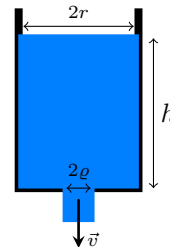


Abb. 13.6: Zylindrischer Wasserbehälter.

Wird die Höhe in cm gemessen, folgt mit $g = 981 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$

$$h' = -0.6\sqrt{2g} \frac{\varrho^2}{r^2} \sqrt{h} \approx -26.58 \frac{\varrho^2}{r^2} \sqrt{h}.$$

Diese Differenzialgleichung kann explizit gelöst werden. Ist h_0 die Füllhöhe zur Zeit $t = 0$, dann ist die Pegelhöhe durch

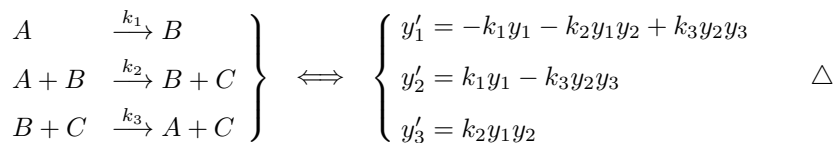
$$h(t) = \left(\sqrt{h_0} - 13.29 \frac{\varrho^2}{r^2} t \right)^2, \quad t \in [0, T],$$

gegeben. Zur Zeit

$$T = \frac{\sqrt{h_0} r^2}{13.29 \varrho^2}$$

ist der Behälter vollständig entleert.

6. Chemische Reaktionsgleichungen werden wie im folgenden Beispiel durch Differenzialgleichungen modelliert. Die Parameter k_i beschreiben Reaktionsgeschwindigkeiten.



Beispiel 13.1 hat unter anderem gezeigt, dass es verhältnismäßig einfach ist, bekannte oder vermutete Lösungen von Differenzialgleichungen zu verifizieren. Die rechnerische Bestimmung von Lösungen gewöhnlicher Differenzialgleichungen ist jedoch häufig schwierig und von vornherein nur in Spezialfällen möglich. In der Regel löst man die bei praktischen Problemen auftretenden Differenzialgleichungen daher numerisch, das heißt näherungsweise. Eine Auswahl an numerischen Verfahren präsentieren wir im letzten Drittel dieses Skriptums.

Dem nun folgenden Einstieg in die Theorie geschlossen lösbarer Differenzialgleichungen stellen wir eine Bemerkung zur Notation von Funktionen voran. Wir haben wiederholt auf die Unterschiede zwischen einem Rechenausdruck wie

$$x + \sqrt{x},$$

einer Funktion wie

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x + \sqrt{x},$$

und einem Funktionsgraphen

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

hingewiesen. Im Umfeld von Differenzialgleichungen tritt allerdings häufig der Fall ein, dass der Definitionsbereich einer Funktion überhaupt nicht oder nur ungefähr bekannt ist.

Außerdem ist es naheliegend, die Lösung einer Differenzialgleichung, welche die Bahn eines bewegten Teilchens beschreibt, mit der Trajektorie selbst, d.h. mit ihrem Graphen, zu identifizieren. Um die Formulierung kurz zu halten, sprechen wir im Folgenden daher oft von der *Funktion* $f(x)$. Gemeint ist damit, dass auf (irgend-)einem Intervall I eine Funktion

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

definiert ist. Analog bezeichnen wir

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

kurz als *Funktion* $f(x, y)$. Die Lösung einer Differenzialgleichung wird ebenfalls in der Kurzform

$$y(x), \quad u(t), \quad \text{usw.}$$

notiert. Die Buchstaben x bzw. t stehen dann für die unabhängige Variable in der Differenzialgleichung, die Buchstaben y bzw. u sowohl für die abhängige Variable, für den Funktionsnamen einer Lösung als auch für den zugehörigen Graphen. Aus dem Zusammenhang ergibt sich jeweils, was gemeint ist.

13.1 Das Richtungsfeld

Jede explizite Differenzialgleichung erster Ordnung kann in der Form

$$y' = f(x, y) \tag{13.5}$$

mit einer Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geschrieben werden. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist eine differenzierbare Funktion $y(x)$, welche

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

in einem Intervall I erfüllt. Durch (13.5) wird jedem Punkt $(x, y) \in D$ eine Steigung mit Neigungswinkel α zugeordnet:

$$\tan \alpha = y' = f(x, y).$$

Dadurch entsteht das *Richtungsfeld* der Differenzialgleichung, in welchem die Lösungskurven der Differenzialgleichung wie Feldlinien in einem Magnetfeld erscheinen. Graphisch kann man darin Näherungslösungen aus Polygonzügen konstruieren (Isoklinenmethode).

Beispiel 13.3 Richtungsfeld der Differenzialgleichung

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Es ist

$$f(x, y) = -\frac{x}{y} \stackrel{!}{=} \tan \alpha$$

$$\stackrel{\alpha \neq 0}{\iff} y = -\frac{1}{\tan \alpha} x.$$

Somit ist jede Ursprungsgerade eine Isokline, d.h. eine Kurve, auf der in allen Punkten der gleiche Steigungswinkel vorliegt. Beispielsweise wird in allen Punkten auf der ersten Winkelhalbierenden $y = x$ die Steigung -1 definiert, wohingegen in allen Punkten auf der zweiten Winkelhalbierenden $y = -x$ die Steigung $+1$ auftritt.

Bei einer Lösungskurve der Differenzialgleichung stimmt die Steigung der Kurve in jedem Kurvenpunkt mit dem Richtungsfeld überein. Umgekehrt ist jede Kurve mit dieser Eigenschaft eine Lösungskurve der Differenzialgleichung. \triangle

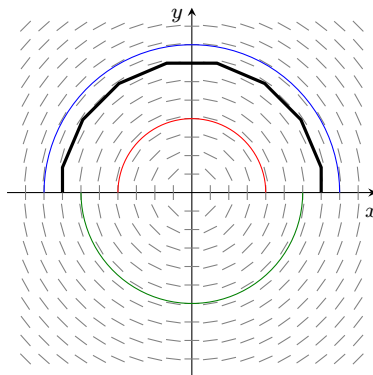


Abb. 13.7: Richtungsfeld mit verschiedenen Lösungskurven und einer Näherungslösung.

13.2 Anfangswertprobleme

Wie Beispiel 13.3 zeigt, ist die Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Unter bestimmten Voraussetzungen an f (siehe Abschnitt 13.5) verläuft durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ genau eine Lösungskurve der Differenzialgleichung. Diese löst das *Anfangswertproblem*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Die Bedingung $y(x_0) = y_0$ heißt *Anfangsbedingung*, die Zahl y_0 *Anfangswert*.

Beispiel 13.4 Für beliebiges $c > 0$ ist

$$y(x) = \sqrt{c - x^2}, \quad x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$$

eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$. Die einzige solche Lösung, die $y(0) = 2$ erfüllt, ist die zum Parameterwert $c = 4$ gehörende Funktion

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in (-2, 2).$$

\triangle

13.3 Separierbare Differenzialgleichungen

Lässt sich f in (13.5) als Produkt zweier Funktionen schreiben, die jeweils nur von einer der Variablen x und y abhängen,

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y),$$

dann heißt die Differenzialgleichung (13.5) *separierbar*. Eine separierbare Differenzialgleichung ist durch *Trennung der Veränderlichen* lösbar.

Zunächst liefert jede Nullstelle η von h eine konstante Lösung $y(x) \equiv \eta$, wegen

$$y' = \frac{d}{dx}\eta = 0 = g(x) \cdot 0 = g(x) \cdot h(\eta).$$

Solche konstanten Lösungen werden auch als *singuläre Lösungen* bezeichnet.

Für $h(y) \neq 0$ gilt

$$y' = g(x) \cdot h(y) \iff \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx. \quad (13.6)$$

Damit ist die Lösung einer separierbaren Differenzialgleichung auf ein Integrationsproblem zurückgeführt. Eine separierbare Differenzialgleichung ist lösbar, wenn die in (13.6) auftretenden Funktionen elementar integrierbar sind und wenn die durch Integration entstehende Gleichung nach y aufgelöst werden kann.

Beispiel 13.5 Gegeben sei die Differenzialgleichung

$$y' = 2x(y - 1)^2. \quad (13.7)$$

Zunächst ist $y(x) \equiv 1$ eine konstante Lösung von (13.7). Trennung der Veränderlichen liefert

$$-\frac{1}{y-1} = \int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int 2x dx = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $c \in \mathbb{R}$ ist

$$y_c(x) := 1 - \frac{1}{x^2 + c}, \quad x \in I_c,$$

(mit einem von c abhängigen Definitionsbereich I_c) Lösung von (13.7). △

Bemerkung 13.6

1. Alle Lösungen von (13.7) sind gegeben durch $y(x) \equiv 1$ und $\{y_c(x) : c \in \mathbb{R}\}$.
2. Die konstante Lösung $y(x) \equiv 1$ ist nicht in der Menge $\{y_c(x) : c \in \mathbb{R}\}$ enthalten.

3. Die Anfangswertprobleme

$$y' = 2x(y-1)^2, \quad y(-2) = \frac{2}{3}, \quad (13.8)$$

$$y' = 2x(y-1)^2, \quad y(0) = 2, \quad (13.9)$$

$$y' = 2x(y-1)^2, \quad y(2) = \frac{2}{3}, \quad (13.10)$$

führen alle auf $c = -1$. Die drei Lösungskurven sind jedoch verschieden, weil jede Lösung auf einem anderen Definitionsbereich definiert ist. Da der Anfangspunkt auf der Lösungskurve liegen muss, gilt hier:

- $1 - \frac{1}{x^2 - 1}, x \in (-\infty, -1)$, löst (13.8),
- $1 - \frac{1}{x^2 - 1}, x \in (-1, 1)$, löst (13.9),
- $1 - \frac{1}{x^2 - 1}, x \in (1, \infty)$, löst (13.10). \diamond

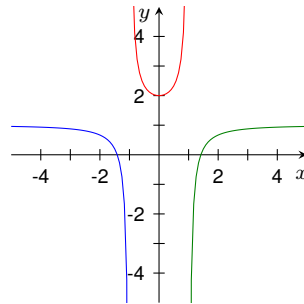


Abb. 13.8: Lösungskurven zu (13.8) - (13.10).

13.4 Die lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

Unter einer *linearen Differenzialgleichung erster Ordnung* versteht man eine Differenzialgleichung der Form

$$y' + a(x)y = b(x)$$

mit zwei auf einem Intervall I stetigen Funktionen $a(x)$ und $b(x)$. Falls $b(x) \equiv 0$ gilt, so handelt es sich um eine *homogene* Differenzialgleichung, andernfalls um eine *inhomogene* Differenzialgleichung. Die Begriffsbildung ist die gleiche wie bei linearen Gleichungssystemen. Dies erklärt sich dadurch, dass lineare Differenzialgleichungen die sinngemäß gleiche Lösungsdarstellung wie lineare Gleichungssysteme besitzen.

13.4.1 Die homogene Differenzialgleichung $y' + a(x)y = 0$

Die homogene lineare Differenzialgleichung

$$y' + a(x)y = 0 \quad (13.11)$$

kann man als separierbare Differenzialgleichung

$$y' = -a(x)y$$

schreiben. Sie besitzt die konstante Lösung

$$y(x) \equiv 0.$$

Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\begin{aligned} y' = -a(x)y &\Rightarrow \underbrace{\int \frac{dy}{y}}_{=\ln|y|} = -\int a(x) dx + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow |y| &= e^{c_1 - \int a(x) dx} = \underbrace{e^{c_1}}_{>0} \underbrace{e^{-\int a(x) dx}}_{>0} \\ \Rightarrow y &= \underbrace{\pm e^{c_1}}_{c \neq 0} e^{-\int a(x) dx}. \end{aligned}$$

Nimmt man die singuläre Lösung $y \equiv 0$ hinzu, sind alle Lösungen von (13.11) gegeben durch

$$y(x) = c e^{-\int a(x) dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 13.7 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' + 2xy = 0, & (13.12) \\ y(1) = 2. & (13.13) \end{cases}$$

Alle Lösungen von (13.12) sind

$$y(x) = c e^{-\int 2x dx} = c e^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Anfangsbedingung (13.13) folgt

$$y(1) = c e^{-1} \stackrel{!}{=} 2 \iff c = 2e.$$

Somit löst

$$y(x) = 2e \cdot e^{-x^2} = 2e^{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

das Anfangswertproblem. △

13.4.2 Die inhomogene Differenzialgleichung $y' + a(x)y = b(x)$

In Band 1 hatten wir die Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme analysiert und festgestellt, dass alle Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ durch eine Partikulärlösung des inhomogenen LGS und alle Lösungen des zugehörigen homogenen LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ gegeben sind. Wir zeigen nun, dass diese Darstellung auch auf die Lösungsmenge der inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{13.14}$$

zutrifft.

Satz 13.8 Es sei $y_p(x)$ eine feste „Partikulärlösung“ von (13.14) und $y_h(x)$ bezeichne alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $y' + a(x)y = 0$. Dann gilt für alle Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung (13.14)

$$y_{\text{inh}}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

Beweis:

1. y_{inh} löst (13.14), denn

$$(y_p + y_h)' + a(x)(y_p + y_h) = \underbrace{y_p' + a(x)y_p}_{=b(x)} + \underbrace{y_h' + a(x)y_h}_{=0} = b(x).$$

2. Es sei $\tilde{y}(x)$ eine beliebige Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (13.14). Dann folgt

$$(\tilde{y} - y_p)' + a(x)(\tilde{y} - y_p) = \underbrace{\tilde{y}' + a(x)\tilde{y}}_{=b(x)} - \underbrace{(y_p' + a(x)y_p)}_{=b(x)} = b(x) - b(x) = 0,$$

d.h. jede Lösung von (13.14) hat die Bauart $y_p(x) + y_h(x)$. □

Alle Lösungen der zu (13.14) gehörenden homogenen Differenzialgleichung sind durch

$$y(x) = c e^{-\int a(x) dx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

gegeben. Zur Ermittlung einer Partikulärlösung $y_p(x)$ von (13.14) verwenden wir den Ansatz

$$y_p(x) = u(x) \cdot e^{-\int a(x) dx}$$

mit einer unbekannten, zu bestimmenden Funktion $u(x)$. Diese Methode wird als *Variation der Konstanten* bezeichnet. Es folgt

$$\begin{aligned} y_p' + a(x)y_p &= \underbrace{u'(x) e^{-\int a(x) dx} - u(x) e^{-\int a(x) dx} \cdot a(x)}_{=y_p'} + a(x) u(x) e^{-\int a(x) dx} \\ &= u'(x) e^{-\int a(x) dx} \stackrel{!}{=} b(x), \end{aligned}$$

also

$$u'(x) = b(x) e^{\int a(x) dx}.$$

Somit ist

$$u(x) = \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx \quad (+d, d \in \mathbb{R})$$

und es gilt die Lösungsdarstellung

$$y_p(x) = e^{-\int a(x) dx} \int b(x) e^{\int a(x) dx} dx.$$

Beispiel 13.9 Gesucht sind die Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung

$$y' + \underbrace{2x}_{a(x)} y = \underbrace{4x}_{b(x)}. \quad (13.15)$$

Mit dem obigen Ansatz der Variation der Konstanten erhalten wir

$$y_p(x) = e^{-\int 2x dx} \int 4x e^{\int 2x dx} dx = e^{-x^2} \int 4x e^{x^2} dx = e^{-x^2} \cdot 2e^{x^2} = 2.$$

Die Probe bestätigt

$$2' + 2x \cdot 2 = 4x.$$

Folglich lauten alle Lösungen von (13.15)

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x) \stackrel{\text{Bsp. 13.7}}{=} 2 + c e^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

13.5 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Ein Anfangswertproblem der Gestalt

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (13.16)$$

kann unlösbar sein oder mehr als eine Lösung besitzen.

Beispiel 13.10 Lösbarkeit von Anfangswertproblemen.

1. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ist eindeutig lösbar.

Zunächst ist die singuläre Lösung $y(x) \equiv 0$ der Differenzialgleichung keine Lösung des Anfangswertproblems. Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int 1 dx,$$

woraus

$$\sqrt{y} = x + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \geq -c$$

folgt. Die Anfangsbedingung ergibt $c = 1$, also

$$y(x) = (x + 1)^2, \quad x \geq -1.$$

Diese Lösung kann durch

$$y(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < -1 \\ (x+1)^2 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$$

auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt werden.

2. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

ist unlösbar, da $\sqrt{-1}$ nicht definiert ist und man somit den Anfangswert nicht in die rechte Seite der Differenzialgleichung einsetzen darf.

3. Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (13.17)$$

besitzt unendlich viele Lösungen. Eine Lösung ist durch die Funktion $y(x) \equiv 0$ gegeben. Außerdem ist für jedes $c \geq 0$ auch

$$y_c(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < c \\ (x-c)^2 & \text{für } x \geq c \end{cases}$$

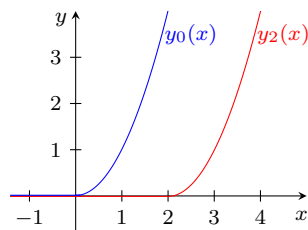


Abb. 13.9: AWP mit mehreren Lösungen.

Lösung von (13.17). Zwei dieser Lösungen sind in Abbildung 13.9 skizziert. \triangle

Ein praktisches Problem, bei dem man eine Lösung beobachtet oder experimentell bestätigt, darf nicht durch fehlerhafte Modellierung auf ein unlösbares Anfangswertproblem führen. Auch eine Vielfalt möglicher Lösungen will man in der Regel durch geeignete Zusatzbedingungen an die Problemstellung vermeiden, da man sonst diskutieren muss, welche von mehreren möglichen Lösungen ein numerisches Verfahren berechnen soll.

Glücklicherweise liefern die nun folgenden Sätze überraschend einfache Antworten auf die Frage zu Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differenzialgleichungen. Beweisen können wir die Aussagen mit den uns zur Verfügung stehenden mathematischen Mitteln nicht. Die Anwendung der Sätze ist dagegen sehr einfach. Die jeweiligen Voraussetzungen sind allgemein gehalten und können für eine gegebene Differenzialgleichung leicht überprüft werden.

Satz 13.11 (Existenzsatz von Peano) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (13.18)$$

sowie ein Rechteck

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig für alle $(x, y) \in R$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (13.18) (mindestens) eine Lösung.

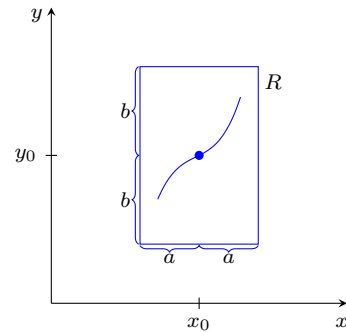


Abb. 13.10: Existenzsatz von Peano.

Für die Existenz von Lösungen von (13.18) genügt also die Stetigkeit von f , was für praktische Anwendungen keine nennenswerte Einschränkung darstellt. Auf das Rechteck in Satz 13.11 kommt es übrigens nicht an. Unsere Formulierung von Satz 13.11 entspricht lediglich der gängigen mathematischen Konvention. Für die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems (13.18) genügt es, dass f in einer (beliebig kleinen) Umgebung des Punktes (x_0, y_0) stetig ist.

Wie Beispiel 13.10 zeigt, ist die Stetigkeit von f nicht hinreichend für die Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems (13.18). Für die Eindeutigkeit von Lösungen ist aber nur eine schwache zusätzliche Voraussetzung erforderlich.

Satz 13.12 (Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard-Lindelöf) Gegeben sei das Anfangswertproblem (13.18). Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig im Rechteck R aus Satz 13.11. Außerdem existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ in R und sei dort beschränkt. Dann besitzt das Anfangswertproblem (13.18) genau eine Lösung.

Wiederum gilt die Aussage auch, wenn das Rechteck R durch eine beliebige Umgebung des Punktes (x_0, y_0) ersetzt wird.

Die beiden letzten Sätze erklären das in Beispiel 13.10 beobachtete Verhalten. In einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $(0, 1)$ ist die Funktion $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ stetig und die partielle Ableitung $f_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ ist beschränkt. Daher ist das erste Anfangswertproblem eindeutig lösbar. In einer hinreichend kleinen Umgebung von $(0, -1)$ ist f nicht definiert, also besitzt das zweite Anfangswertproblem keine Lösung. Das dritte Anfangswertproblem ist nicht eindeutig lösbar, da die partielle Ableitung f_y für $y \rightarrow 0$ gegen Unendlich strebt und daher Satz 13.12 nicht auf dieses Anfangswertproblem angewendet werden darf.

Trotz ihrer vermeintlichen Schlichtheit sind die angegebenen Sätze von essentieller Bedeutung für die Lösung von Differenzialgleichungen. Wir hatten bereits bemerkt, dass für viele Differenzialgleichungen kein Verfahren zur Berechnung exakter Lösungen bekannt ist. Bei praktischen Problemstellungen, die auf Differenzialgleichungen führen, ist

man in der Regel auf numerische Lösungsverfahren angewiesen. In diesem Fall ist es besonders wichtig, die Voraussetzungen der angeführten Sätze zu prüfen, denn die Berechnung einer Näherungslösung ist natürlich nur sachgerecht, wenn die Existenz einer exakten Lösung des Problems gesichert ist.

Neben Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gibt es noch eine dritte Eigenschaft, die ein sachgerecht gestelltes Problem erfüllen muss: die stetige Abhängigkeit der Lösung von Parametern. In der Praxis liegen Parameterwerte meist in Form von fehlerbehafteten Messwerten vor. Wird die exakte Lösung des Problems durch den Messfehler zu sehr gestört, kann man sie aus dem gemessenen Wert nicht rekonstruieren. Jeder numerische Lösungsversuch führt dann fast zwangsläufig in die Irre.

Der relevante Parameterwert des Anfangswertproblems (13.18) ist der Wert y_0 der Anfangsbedingung. Die folgende Aussage stellt sicher, dass zwei Lösungskurven zu unterschiedlichen Anfangswerten benachbart bleiben, wenn sich die Anfangswerte nur geringfügig unterscheiden.

Satz 13.13 (Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert) *Gegeben sei das Anfangswertproblem (13.18). Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig in einer Umgebung U des Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Außerdem existiere die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)$ in U und sei dort beschränkt durch eine Zahl L , d.h. es gelte*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L \text{ in } U.$$

Weiter sei \hat{y}_0 so gewählt, dass der Punkt (x_0, \hat{y}_0) ebenfalls in U liegt. Sind dann y und \hat{y} die Lösungen von $y' = f(x, y)$ zu den Anfangswerten $y(x_0) = y_0$ und $\hat{y}(x_0) = \hat{y}_0$, so gibt es ein Intervall I , welches x_0 enthält und in welchem die Abschätzung

$$|y(x) - \hat{y}(x)| \leq e^{L(x-x_0)} |y_0 - \hat{y}_0|$$

gilt.

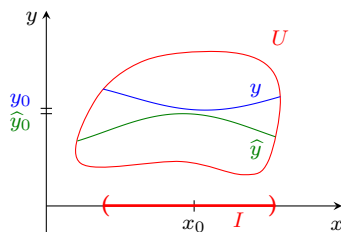


Abb. 13.11: Stetige Abhängigkeit vom Anfangswert.

Für Differenzialgleichungen höherer Ordnung ist es schwierig, auf direktem Weg zu ähnlichen Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu gelangen. Wir nehmen daher einen kleinen Umweg und schreiben eine Differenzialgleichung höherer Ordnung als System von Differenzialgleichungen erster Ordnung. Auf dieses System lassen sich die Sätze 13.11, 13.12 und 13.13 mühelos übertragen.

13.6 Systeme von Differenzialgleichungen

Jede explizite Differenzialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (13.19)$$

kann als System von n Differenzialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden. Dazu setzt man

$$\begin{aligned} y_1(x) &:= y(x), \\ y_2(x) &:= y'(x), \\ &\vdots \\ y_n(x) &:= y^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Dann folgt

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n, \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

und es gilt

$$y(x) \text{ löst (13.19)} \iff \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \text{ löst (13.20)}.$$

In der Formulierung (13.20) liefert offenbar jede Differenzialgleichung einen frei wählbaren Parameter, sodass man erwarten darf, dass eine eindeutige Lösung des Differenzialgleichungssystems durch einen Vektor von Anfangswerten festgelegt wird. Infolgedessen betrachten wir im Folgenden nur noch Anfangswertprobleme für Systeme erster Ordnung der Gestalt

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [a, b], \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (13.21)$$

mit $x_0 \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (beachte: f in (13.21) ist nicht das f aus (13.19)). Gesucht ist eine Funktion $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit differenzierbaren Komponenten, die (13.21) genügt.

Die Größen y , y_0 und f bezeichnen Vektoren bzw. vektorwertige Funktionen. Um die Notation einfach zu halten, verzichten wir hier und im Folgenden auf die früher verwendeten Vektorpfeile. Aus dem Zusammenhang wird jeweils ersichtlich sein, ob ein skalarwertiges Anfangswertproblem der Form (13.16) oder ein vektorielles Anfangswertproblem der Gestalt (13.21) vorliegt.

Beispiel 13.14 Die Gleichung des harmonischen Oszillators lautet

$$y''(x) + y(x) = 0. \quad (13.22)$$

Die zu den Anfangswerten $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ gehörende Lösung ist

$$y(x) = 2 \cos x - \sin x,$$

was man leicht durch Nachrechnen bestätigt.

Setzt man

$$y_1(x) := y(x), \quad y_2(x) := y'(x),$$

so erhält man das zu (13.22) äquivalente Differenzialgleichungssystem

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1.$$

In vektorieller Schreibweise lautet das obige Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Seine Lösung ist

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos x - \sin x \\ -2 \sin x - \cos x \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

Die im letzten Abschnitt vorgestellten Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen treffen sinngemäß unverändert auf Systeme von Differenzialgleichungen zu:

- Das Anfangswertproblem (13.21) besitzt (mindestens) eine Lösung, wenn jede Komponente von f in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ stetig ist.
- Das Anfangswertproblem (13.21) besitzt genau eine Lösung, wenn f in einer Umgebung U des Punktes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ stetig ist und wenn alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, \dots, y_n), \quad i, k = 1, \dots, n$$

in U existieren und beschränkt sind. In diesem Fall hängt die Lösung von (13.21) stetig von jeder Komponente des Anfangswerts $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ab.

Mit diesen Ausführungen ist das theoretische Fundament gelegt, auf dem Lösungsverfahren für spezielle Klassen von Differenzialgleichungen aufgebaut werden können. Dies ist Gegenstand der folgenden Kapitel.

Kapitel 14

Die lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung

Eine *lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung* besitzt die Gestalt

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (14.1)$$

mit auf einem Intervall I stetigen Funktionen $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ und $b(x)$. Wie bei der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung unterscheidet man die beiden Fälle

$b(x) \equiv 0$: homogene Differenzialgleichung,

$b(x) \not\equiv 0$: inhomogene Differenzialgleichung.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir noch die Abkürzung

$$L_n[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

ein. Damit lautet (14.1)

$$L_n[y] = b(x)$$

und die zugehörige homogene Differenzialgleichung ist gegeben durch

$$L_n[y] = 0.$$

Aus den Existenz- und Eindeigkeitssätzen von Abschnitt 13.5 folgt der wichtige

Satz 14.1 (Existenz- und Eindeigkeitssatz für lineare Differenzialgleichungen)

Die Funktionen $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ und $b(x)$ in (14.1) seien stetig in einer Umgebung

$U(x_0)$ der Stelle x_0 . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\left\{ \begin{array}{l} (DGI) \quad L_n[y] = b(x), \\ (AB) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (14.2)$$

für jede Vorgabe von Werten $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $y(x)$ in $U(x_0)$.

Wie bei der linearen Differenzialgleichung erster Ordnung zeigt man:

Satz 14.2 Es sei $y_p(x)$ eine feste Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (14.1) und $y_h(x)$ sei die allgemeine Lösung (d.h. die Menge aller Lösungen) der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $L_n[y] = 0$. Dann sind alle Lösungen der inhomogenen Differenzialgleichung (14.1) gegeben durch

$$y_{inh}(x) = y_p(x) + y_h(x).$$

Aus diesem Satz ergibt sich, dass man die inhomogene lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung (14.1) wie die lineare Differenzialgleichung erster Ordnung in zwei Schritten löst:

1. Bestimme *alle* Lösungen der zugehörigen homogenen dgl.
2. Berechne *eine* Partikulärlösung $y_p(x)$ der inhomogenen Differenzialgleichung.

14.1 Allgemeine Lösung der homogenen linearen DGI

In diesem Abschnitt studieren wir das Problem, alle Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (14.3)$$

in einem Intervall I zu berechnen. Wie oben wird vorausgesetzt, dass die Funktionen $a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ in I stetig sind.

Als erstes Resultat zeigen wir, dass jede Linearkombination von Lösungen von (14.3) wieder eine Lösung von (14.3) ergibt.

Lemma 14.3 Sind $y_1(x), \dots, y_m(x)$ Lösungen der homogenen Differenzialgleichung (14.3), dann ist auch jede Linearkombination

$$y(x) := c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x) \quad \text{mit } c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$$

eine Lösung der homogenen Differenzialgleichung (14.3).

Beweis: Die Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$ seien Lösungen von (14.3), d.h. es gelte

$$L_n[y_k] = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

Dann folgt für jede Linearkombination

$$L_n[c_1 y_1(x) + \dots + c_m y_m(x)] = c_1 \underbrace{L_n[y_1]}_{=0} + \dots + c_m \underbrace{L_n[y_m]}_{=0} = 0. \quad \square$$

Beispiel 14.4 Gegeben sei die homogene lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - y = 0. \quad (14.4)$$

Die Funktionen

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cosh x, \quad y_3(x) = \sinh x$$

lösen (14.4), wie die Probe durch Einsetzen bestätigt. Also ist auch jede Linearkombination

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 \cosh x + c_3 \sinh x, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Lösung von (14.4). △

Es stellt sich nun die Frage, wie viele Lösungen einer homogenen linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung man ausrechnen muss, um die Menge aller Lösungen darstellen zu können. Wir werden zeigen, dass n Lösungen genügen, sofern diese geeignet gewählt sind. Was darunter zu verstehen ist und wie man geeignete Lösungen berechnet, wird im Anschluss an das nächste Beispiel diskutiert.

Beispiel 14.5 Die Menge

$$S := \{c_1 e^x + c_2 \cosh x + c_3 \sinh x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

kann auch als Menge aller Linearkombinationen der Funktionen $\cosh x$ und $\sinh x$ geschrieben werden. Es ist

$$e^x = \cosh x + \sinh x,$$

also folgt

$$c_1 e^x + c_2 \cosh x + c_3 \sinh x = \underbrace{(c_1 + c_2)}_{\hat{c}_1} \cosh x + \underbrace{(c_1 + c_3)}_{\hat{c}_2} \sinh x,$$

sodass sich S als Menge aller Linearkombination von nur *zwei* Funktionen repräsentieren lässt.

Es gibt sogar weitere Möglichkeiten, S darzustellen. Da sich $\cosh x$ und $\sinh x$ mithilfe von e^x und e^{-x} ausdrücken lassen, gilt auch

$$S = \{c_1 e^x + c_2 e^{-x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}. \quad \triangle$$

Wir klären nun, wie man eine Menge von Linearkombinationen von Funktionen möglichst sparsam, d.h. mit möglichst wenigen Basisfunktionen darstellen kann. Dazu übertragen wir den in Band 1 für Vektoren im \mathbb{R}^n eingeführten Begriff der linearen Unabhängigkeit auf Funktionen.

Definition 14.6 Die m auf dem Intervall (a, b) definierten Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$ heißen in (a, b) *linear abhängig*, wenn es Zahlen $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ gibt, die *nicht alle Null* sind, sodass für alle $x \in (a, b)$

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x) = 0 \quad (14.5)$$

gilt, sonst heißen sie *linear unabhängig*.

Sind die Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$ linear abhängig, kann man mindestens eine von Ihnen als Linearkombination der übrigen schreiben und so aus der Menge aller Linearkombinationen eliminieren. Für beliebige m Funktionen kann es allerdings schwierig sein, festzustellen, ob sie linear abhängig oder linear unabhängig sind. Wir interessieren uns jedoch nur für die lineare Abhängigkeit von Lösungen von homogenen linearen Differenzialgleichungen und dürfen daher voraussetzen, dass die betrachteten Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind. Unter dieser zusätzlichen Annahme lässt sich die Frage der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit einfacher klären.

Für m gegebene m -mal differenzierbare Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$ bilden wir durch fortgesetztes Differenzieren von (14.5) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x) &= 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_m y_m'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(m-1)}(x) + c_2 y_2^{(m-1)}(x) + \dots + c_m y_m^{(m-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (14.6)$$

(14.6) ist ein homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix},$$

in dem die Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$ gegeben und die Unbekannten c_1, \dots, c_m gesucht sind. Die nach dem polnischen Mathematiker Josef Hoëné-Wronski benannte *Wronski-Determinante* dieser Matrix,

$$W(y_1, \dots, y_m) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \dots & y_m^{(m-1)}(x) \end{pmatrix},$$

gibt Auskunft über die Lösbarkeit von (14.6). Aus den in Band 1 behandelten Sätzen über Determinanten und lineare Gleichungssysteme folgt:

Satz 14.7 Die Funktionen $y_1(x), \dots, y_m(x)$ seien im Intervall (a, b) $(m - 1)$ -mal differenzierbar. Dann gilt:

1. Falls die Wronski-Determinante für ein $x \in (a, b)$ ungleich Null ist, sind die Funktionen in (a, b) linear unabhängig.
2. Falls die Funktionen linear abhängig sind, ist die Wronski-Determinante für alle $x \in (a, b)$ Null.

Beispiel 14.8

1. Die Funktionen

$$y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = 1 - x$$

sind auf \mathbb{R} linear unabhängig, denn es ist

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} 1+x & 1-x \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -(1+x) - (1-x) = -2 \neq 0.$$

2. Die Funktionen

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = 1 + x$$

sind auf jedem reellen Intervall linear abhängig, denn es ist $y_3 = y_1 + y_2$. Die Wronski-Determinante besitzt für alle $x \in \mathbb{R}$ den Wert Null:

$$W(y_1, y_2, y_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & x & 1+x \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad \triangle$$

Mithilfe von Satz 14.1 konstruieren wir nun n linear unabhängige Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung $L_n[y] = 0$. Dazu setzen wir für eine fest gewählte Stelle $x_0 \in I$ der Reihe nach *genau einen* der Werte $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ Eins und alle übrigen Werte Null und lösen jeweils das zugehörige Anfangswertproblem (14.2). Für die so erhaltenen n Lösungen von $L_n[y] = 0$, die im Folgenden mit $u_0(x), \dots, u_{n-1}(x)$ bezeichnet werden, ist die Wronski-Determinante an der Stelle x_0 die Determinante der Einheitsmatrix, also Eins, d.h. ungleich Null. Diese n Lösungen sind also nach Satz 14.7 linear unabhängig.

Ist $v(x)$ eine weitere Lösung der Differenzialgleichung $L_n[y] = 0$, gehören dazu die Anfangswerte $v_0 = v(x_0), \dots, v_{n-1} = v^{(n-1)}(x_0)$. Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} L_n[y] &= 0, \\ y(x_0) &= v_0, \quad y'(x_0) = v_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = v_{n-1} \end{aligned}$$

wird neben $v(x)$ auch von

$$v_0 u_0(x) + \cdots + v_{n-1} u_{n-1}(x)$$

gelöst. Da das Anfangswertproblem nach Satz 14.1 eindeutig lösbar ist, gilt

$$v(x) = v_0 u_0(x) + \cdots + v_{n-1} u_{n-1}(x),$$

d.h. die $n+1$ Lösungen $u_0(x), \dots, u_{n-1}(x), v(x)$ sind linear abhängig.

Aus der Eindeutigkeit der Lösung jedes Anfangswertproblems (14.2) folgt auch, dass die Wronski-Determinante von n Lösungen von $L_n[y] = 0$ entweder immer Null oder immer ungleich Null ist. Daher kann anhand der Wronski-Determinante an einer beliebigen Stelle $x_0 \in (a, b)$ festgestellt werden, ob n Lösungen von $L_n[y] = 0$ im Intervall (a, b) linear abhängig oder linear unabhängig sind.

Korollar 14.9 1. Mehr als n Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung (14.3) sind im Intervall (a, b) stets linear abhängig.

2. Sind n Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ von (14.3) im Intervall (a, b) gegeben, dann gilt

$$y_1, \dots, y_n \text{ sind } \begin{cases} \text{linear abhängig} \\ \text{linear unabhängig} \end{cases}$$

$$\iff W(y_1, \dots, y_n) \begin{cases} = 0, \\ \neq 0 \end{cases} \quad \text{für alle } x \in (a, b)$$

$$\iff W(y_1, \dots, y_n) \begin{cases} = 0, \\ \neq 0 \end{cases} \quad \text{für ein } x \in (a, b).$$

Beispiel 14.10

1. Die Funktionen

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = \cosh x, \quad y_3(x) = \sinh x$$

sind drei Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' - y = 0, \tag{14.7}$$

also nach Korollar 14.9-1 linear abhängig.

2. Wegen

$$W(\cosh x, \sinh x) = \det \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

$$= \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

sind $y_2(x)$ und $y_3(x)$ in jedem Intervall (a, b) linear unabhängige Lösungen der Differenzialgleichung (14.7). \triangle

Definition 14.11

1. n linear unabhängige Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ der homogenen Differenzialgleichung (14.3) heißen *Fundamentalsystem* von (14.3).
2. Bilden $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ein Fundamentalsystem von (14.3), so heißt die Funktionenmenge

$$c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

allgemeine Lösung von (14.3).

14.2 Das Reduktionsverfahren von d'Alembert

Mithilfe der im letzten Abschnitt konstruierten Funktionen $u_0(x), \dots, u_{n-1}(x)$ wurde gezeigt, dass jede homogene lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung ein Fundamentalsystem besitzt. Da man die verwendeten Anfangswertprobleme in der Regel nicht praktisch lösen kann, ist dieses Resultat überwiegend von theoretischem Interesse.

Bis heute ist kein allgemeines Verfahren bekannt, mit dem man zu einer gegebenen homogenen linearen Differenzialgleichung höherer Ordnung Lösungen berechnen kann. Von dem französischen Mathematiker d'Alembert wurde aber eine Methode angegeben, mit der man eine homogene lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung, von der man eine nichttriviale Lösung kennt, auf eine homogene lineare Differenzialgleichung der Ordnung $n - 1$ zurückführen kann.

Gegeben sei also eine homogene lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung (14.3) sowie eine Lösung $y_1(x) \neq 0$ von (14.3). Setzt man dann

$$y(x) := z(x) \cdot y_1(x), \quad z(x) \neq \text{konstant}$$

mit einem gesuchten Faktor $z(x)$ in (14.3) ein, führt dies auf eine homogene lineare Differenzialgleichung $(n - 1)$ -ter Ordnung für z . Falls man diese lösen kann, liefert jede Lösung $z(x)$ eine Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung. Besonders wichtig ist der Fall $n = 2$, bei dem man nach Reduktion der Ordnung eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung erhält, welche man mit der Formel aus Abschnitt 13.4 lösen kann.

Im Fall $n = 2$ ist die homogene Differenzialgleichung gegeben durch

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (14.8)$$

Es sei nun $y_1(x)$ eine bekannte Lösung von (14.8). Mit der Ansatzfunktion $y(x) = z(x) \cdot y_1(x)$ folgt

$$y' = z'y_1 + zy_1' \Rightarrow y'' = z''y_1 + 2z'y_1' + zy_1''.$$

Einsetzen in (14.8) ergibt

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

$$\begin{aligned}
&= z''y_1' + 2z'y_1' + zy_1'' + a_1(x)z'y_1 + a_1(x)zy_1' + a_0(x)zy_1 \\
&= z \underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1)}_{=0, \text{ da } y_1 \text{ Lösung von (14.8)}} + y_1 z'' + (2y_1' + a_1(x)y_1) z' \stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Setzt man $v(x) := z'(x)$, erhält man eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung für v , welche man explizit lösen kann:

$$\begin{aligned}
v'(x) + \left(2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) \right) v(x) &= 0 \\
\Rightarrow v(x) &= c e^{-\int \left(2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) \right) dx} \\
&= c e^{-2 \ln |y_1(x)| - \int a_1(x) dx} = \frac{c}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x) dx} \stackrel{!}{=} z'(x) \\
\Rightarrow z(x) &= c \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x) dx} dx + c_1.
\end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten c und c_1 darf man hier Eins bzw. Null setzen, da nur *eine* Lösung der Differenzialgleichung erster Ordnung gesucht ist. $y_1(x)$ und

$$y_2(x) := z(x) y_1(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x) dx} dx \quad (14.9)$$

bilden dann ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differenzialgleichung zweiter Ordnung.

Beispiel 14.12 Gegeben sei die homogene lineare Differenzialgleichung

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0, \quad x > 0. \quad (14.10)$$

Die Funktion $y_1(x) = x^2$ löst (14.10). Gesucht ist ein Fundamentalsystem von (14.10). Das Reduktionsverfahren von d'Alembert liefert (wieder ohne Integrationskonstanten) eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung

$$y_2(x) = \underbrace{x^2}_{y_1} \underbrace{\int \frac{1}{x^4} e^{\int \frac{3}{x} dx} dx}_{\frac{1}{y_1^2}} \stackrel{x \geq 0}{=} x^2 \int \frac{1}{x^4} \underbrace{e^{3 \ln x}}_{x^3} dx = x^2 \int \frac{dx}{x} \stackrel{x \geq 0}{=} x^2 \ln x.$$

Die Menge $\{x^2, x^2 \ln x\}$ ist ein Fundamentalsystem von (14.10). △

14.3 Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung

Kennt man ein Fundamentalsystem $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ der homogenen linearen Differenzialgleichung $L_n[y] = 0$, kann man mit dessen Hilfe Partikulärlösungen der inho-

mogenen Differenzialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = b(x)$$

berechnen. Dazu verwenden wir wie im Fall $n = 1$ den Ansatz der Variation der Konstanten

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + \dots + u_n(x)y_n(x)$$

mit gesuchten Funktionen $u_1(x), \dots, u_n(x)$.

Um die Darstellung zu vereinfachen, beschreiben wir das Vorgehen im Folgenden für $n = 2$. Gegeben seien ein Fundamentalsystem $\{y_1(x), y_2(x)\}$ der Differenzialgleichung

$$L_2[y] = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

sowie eine rechte Seite $b(x)$. Gesucht ist eine Partikulärlösung von

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad (14.11)$$

welche die Bauart

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (14.12)$$

mit geeigneten Funktionen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ besitzen soll. Offenbar ist dieses Problem unterbestimmt, da wir zwei Funktionen bestimmen müssen, obwohl nur eine Partikulärlösung gesucht ist. Wir werden daher eine Zusatzbedingung stellen, die uns die Rechnung erheblich erleichtert.

Um (14.12) in (14.11) einzusetzen, benötigen wir die ersten beiden Ableitungen von y_p . Zunächst ist

$$y'_p = u_1y'_1 + u_2y'_2 + u'_1y_1 + u'_2y_2.$$

Die letzten beiden Summanden eliminieren wir durch die Zusatzbedingung

$$u'_1y_1 + u'_2y_2 \stackrel{!}{=} 0. \quad (14.13)$$

Dann folgt

$$y''_p = (u_1y'_1 + u_2y'_2)' = u_1y''_1 + u_2y''_2 + u'_1y'_1 + u'_2y'_2.$$

Setzt man die Ableitungen in (14.11) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} u_1y''_1 + u_2y''_2 + u'_1y'_1 + u'_2y'_2 + a_1(x)(u_1y'_1 + u_2y'_2) + a_0(x)(u_1y_1 + u_2y_2) &= b(x) \\ \iff u_1 \underbrace{(y''_1 + a_1(x)y'_1 + a_0(x)y_1)}_{=L_2[y_1]=0} + u_2 \underbrace{(y''_2 + a_1(x)y'_2 + a_0(x)y_2)}_{=L_2[y_2]=0} &+ u'_1y'_1 + u'_2y'_2 = b(x) \\ \iff u'_1y'_1 + u'_2y'_2 &= b(x). \end{aligned} \quad (14.14)$$

Die Gleichungen (14.13) und (14.14) stellen ein lineares Gleichungssystem $A\vec{u}' = \vec{b}$ für die Unbekannten u'_1 und u'_2 dar. Die Koeffizientenmatrix des LGS ist die *Fundamentalmatrix*

$$A := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix},$$

welche bei der Berechnung der Wronski-Determinante $W(y_1, y_2)$ auftritt. Die rechte Seite des LGS lautet

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel zur Berechnung der Inversen einer 2×2 -Matrix,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix},$$

erhält man

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{pmatrix} -y_2(x)b(x) \\ y_1(x)b(x) \end{pmatrix}.$$

Integration führt schließlich mit (14.12) auf

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)b(x)}{W(y_1, y_2)} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(y_1, y_2)} dx.$$

Beispiel 14.13 Gesucht ist eine Partikulärlösung von

$$y'' - y = x. \quad (14.15)$$

Die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung $y'' - y = 0$ besitzt das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = e^{-x}.$$

Nun folgt

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix} = -e^0 - e^0 = -2$$

und somit

$$u_1(x) = - \int \frac{y_2(x)b(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{-e^{-x}x}{-2} dx = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x},$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)b(x)}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{e^x x}{-2} dx = -\frac{1}{2}(x-1)e^x.$$

Es genügt jeweils *eine* Stammfunktion, sodass die Integrationskonstanten wieder weggelassen wurden. Eine Partikulärlösung von (14.15) lautet folglich

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-x}e^x - \frac{1}{2}(x-1)e^xe^{-x} = -x.$$

Die Probe zeigt:

$$y_p'' - y_p = 0 - (-x) = x. \quad \triangle$$

Bemerkung 14.14 Für $n > 2$ führt das analoge Vorgehen zur Bestimmung der Funktionen $u_1(x), \dots, u_n(x)$ ebenso auf ein lineares Gleichungssystem

$$A\vec{u}' = \vec{b}. \quad (14.16)$$

Die Matrix A ist die Fundamentalmatrix zum Fundamentalsystem $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$ von $L_n[y] = 0$. In der k -ten Spalte von A stehen also $y_k(x)$ und die ersten $n-1$ Ableitungen von $y_k(x)$. Die ersten $n-1$ Komponenten des Vektors b sind Null. Die letzte Komponente von \vec{b} enthält die rechte Seite der inhomogenen Differenzialgleichung $L_n[y] = b(x)$, d.h. $b(x)$.

Die Determinante von A ist die Wronski-Determinante des Fundamentalsystems und daher ungleich Null. Somit ist das LGS (14.16) für jede rechte Seite $b(x)$ eindeutig lösbar. \diamond

14.4 Die lineare DGI mit konstanten Koeffizienten

Sind alle Koeffizientenfunktionen a_k in der linearen Differenzialgleichung n -ter Ordnung in einem Intervall I konstant, ergibt sich der Spezialfall

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b(x), \quad x \in I \quad (14.17)$$

mit $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ und $b(x) \in C^0(I)$. Für (14.17) kann man eine Darstellungsformel aller Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung angeben. Eine Partikulärlösung der inhomogenen Differenzialgleichung lässt sich anschließend wie im letzten Kapitel besprochen durch Variation der Konstanten berechnen.

Die folgende Herleitung wird besonders einfach, wenn man vorübergehend nicht mit reellen, sondern mit komplexwertigen Funktionen rechnet (siehe Band 1).

14.4.1 Allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung

Für die homogene lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (14.18)$$

suchen wir Lösungen der Bauart

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

mit einer zu bestimmenden Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$. Mit formaler Rechnung folgt

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Einsetzen in (14.18) liefert

$$\begin{aligned} & \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= \underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \{ \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \} \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Definition 14.15 Das Polynom

$$p_n(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

heißt *charakteristisches Polynom* von (14.18).

Aus der durchgeführten Rechnung folgt unmittelbar:

Satz 14.16 Die Funktion $y(x) = e^{\lambda x}$ ist genau dann eine Lösung von (14.18), wenn λ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$ ist.

Beispiel 14.17 Das charakteristische Polynom von

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

ist gegeben durch

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

Mit Satz 14.16 folgt, dass

$$y_1(x) = e^x \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{2x}$$

Lösungen der homogenen linearen Differenzialgleichung sind. △

Ein Polynom n -ten Grades besitzt genau n Nullstellen, welche komplex oder mehrfach sein können. Satz (14.16) gilt auch für komplexe Nullstellen. Von den zugehörigen komplexwertigen Lösungen bestimmt man Real- und Imaginärteile, um daraus ein reelles Fundamentalsystem zu berechnen. Mit dem folgenden Satz lassen sich in allen Fällen aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms n linear unabhängige reellwertige Lösungen der homogenen Differenzialgleichung (14.18) ermitteln. Diese bilden ein Fundamentalsystem von (14.18), mit dem sich alle Lösungen darstellen lassen.

Satz 14.18 1. Die reelle Zahl μ sei eine s -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$ von (14.18). Dann sind

$$y_1(x) = e^{\mu x}, y_2(x) = x e^{\mu x}, \dots, y_s(x) = x^{s-1} e^{\mu x}$$

s reelle linear unabhängige Lösungen von (14.18).

2. Die komplexe Zahl $\alpha + i\beta$ sei eine s -fache Nullstelle von $p_n(\lambda)$. Da $p_n(\lambda)$ ein reelles Polynom ist, ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\alpha - i\beta$ eine s -fache Nullstelle von $p_n(\lambda)$. Dann sind

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x), x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x), \\ e^{\alpha x} \sin(\beta x), x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{s-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

$2s$ linear unabhängige Lösungen von (14.18).

3. Alle so berechneten Lösungen sind linear unabhängig und bilden ein Fundamentalsystem von (14.18).

Beweis: Wir beweisen nur die erste Aussage. Der Fall komplexer Nullstellen des charakteristischen Polynoms wird ähnlich gezeigt. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen kann mit der Wronski-Determinante nachgewiesen werden.

Wir nehmen an, dass $e^{\mu x}$ und $y(x) = xe^{\mu x}$ die Differenzialgleichung (14.18) lösen. Es ist

$$y'(x) = (\mu x + 1)e^{\mu x}, \quad y''(x) = (\mu^2 x + 2\mu)e^{\mu x},$$

sowie allgemein

$$y^{(k)}(x) = (\mu^k x + k\mu^{k-1})e^{\mu x}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Setzt man diese Ableitungen in (14.18) ein, folgt

$$\begin{aligned} & (\mu^n x + n\mu^{n-1})e^{\mu x} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} (\mu^k x + k\mu^{k-1})e^{\mu x} \right) + a_0 x e^{\mu x} \\ &= (\mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \dots + a_1\mu + a_0)x e^{\mu x} \\ & \quad + (n\mu^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\mu^{n-2} + \dots + 2a_2\mu + a_1)e^{\mu x} \stackrel{!}{=} 0 \\ & \iff (p_n(\mu)x + p'_n(\mu))e^{\mu x} = 0. \end{aligned}$$

Da $e^{\mu x}$ als Lösung vorausgesetzt war, ist $p_n(\mu) = 0$, sodass die letzte Gleichung genau dann erfüllt ist, wenn zusätzlich $p'_n(\mu) = 0$ gilt. Dies wiederum bedeutet, dass μ eine (mindestens) doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Analog zeigt man, dass $e^{\mu x}$, $xe^{\mu x}$, \dots , $x^{s-1}e^{\mu x}$ genau dann die Differenzialgleichung (14.18) lösen, wenn

$$p_n(\mu) = p'_n(\mu) = \dots = p_n^{(s-1)}(\mu) = 0$$

gilt, also eine s -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms vorliegt. \square

Beispiel 14.19 Für die homogene Differenzialgleichung

$$y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 0 \tag{14.19}$$

gilt

$$p_4(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5).$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 : \text{zweifache reelle Nullstelle,}$$

$$\lambda_{3/4} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i : \text{je einfache komplexe Nullstelle.}$$

Die Funktionen

$$y_1(x) = e^{0 \cdot x} = 1, \quad y_2(x) = xe^{0 \cdot x} = x, \quad y_3(x) = e^{-x} \cos(2x), \quad y_4(x) = e^{-x} \sin(2x)$$

bilden ein Fundamentalsystem von (14.19). Alle Lösungen von (14.19) sind gegeben durch

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} \cos(2x) + c_4 e^{-x} \sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Bemerkung 14.20 Das angegebene Verfahren zur Bestimmung eines Fundamentalsystems ist nur durchführbar, wenn man alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms kennt. Für Polynome vom Grad $n \geq 5$ existiert aber keine Lösungsformel, sodass man Fundamentalsysteme linearer Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im Allgemeinen nur bis zur Ordnung 4 berechnen kann. \diamond

14.4.2 Lösungsansätze für die inhomogene Gleichung

Für spezielle, bei Anwendungsproblemen häufig auftretende rechte Seiten von linearen Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man eine Partikulärlösung durch geeignete „Ansätze vom Typ der rechten Seite“ bestimmen. Rechnerisch ist dies oft einfacher als die Variation der Konstanten. Wir stellen zwei Spezialfälle vor..

Satz 14.21 Gegeben sei die inhomogene Differenzialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (14.17). Dann gilt:

1. Für $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ sei

$$b(x) = e^{\mu x} (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$$

und μ sei eine t -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$. Falls μ keine Nullstelle von $p_n(\lambda)$ ist, setzt man $t = 0$. Dann besitzt (14.17) eine Partikulärlösung der Bauart

$$y_p(x) = x^t e^{\mu x} (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m).$$

Die gesuchten Koeffizienten $c_0, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

2. Für $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $b_0, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ sei

$$b(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$$

oder

$$b(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x) (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$$

und $\alpha + i\beta$ sei eine t -fache komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_n(\lambda)$. Falls $\alpha + i\beta$ keine Nullstelle von $p_n(\lambda)$ ist, setzt man $t = 0$. Dann besitzt (14.17) eine Partikulärlösung der Bauart

$$y_p(x) = x^t e^{\alpha x} (\cos(\beta x) (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) + \sin(\beta x) (d_0 + d_1 x + \dots + d_m x^m)).$$

Die gesuchten Koeffizienten $c_0, \dots, c_m, d_0, \dots, d_m \in \mathbb{R}$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel 14.22

1. Gegeben sei die inhomogene Differenzialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = e^x. \quad (14.20)$$

Wir bestimmen zunächst alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung. Das charakteristische Polynom

$$p_2(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

besitzt die zweifache Nullstelle $\mu = 3$. Mit $s = 2$ folgt aus Satz 14.18, dass

$$y_1(x) = e^{3x}, \quad y_2(x) = xe^{3x}$$

ein Fundamentalsystem der homogenen Differenzialgleichung bilden.

Ansatz für $y_p(x)$: Es ist

$$e^x = e^{1 \cdot x} \cdot 1 \cdot x^0,$$

d.h. in Satz 14.21 liegt der Fall $\mu = 1$, $m = 0$ und $b_0 = 1$ vor. Da $\mu = 1$ keine Nullstelle von $p_2(\lambda)$ ist, folgt mit $t = 0$

$$\begin{aligned} y_p &= x^0 e^{1 \cdot x} \cdot c_0 = c_0 e^x \quad (c_0 \text{ gesucht}) \\ \Rightarrow y'_p &= c_0 e^x, \quad y''_p = c_0 e^x. \end{aligned}$$

Einsetzen in (14.20) ergibt

$$c_0 e^x - 6c_0 e^x + 9c_0 e^x = 4c_0 e^x \stackrel{!}{=} e^x \iff c_0 = \frac{1}{4}.$$

Dies führt auf die Partikulärlösung

$$y_p(x) = \frac{1}{4} e^x.$$

Alle Lösungen von (14.20) lauten damit

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{4} e^x}_{y_p} + \underbrace{c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}_{y_h}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Gesucht sind alle Lösungen von

$$y'' - 6y' + 9y = 25e^x \cos x. \quad (14.21)$$

Im Vergleich zum letzten Beispiel ist nur die rechte Seite verändert. Es liegt der zweite Spezialfall aus Satz 14.21 mit $\alpha = \beta = 1$ und $m = 0$ vor. Die Zahl $\alpha + i\beta = 1 + i$ ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, also ist $t = 0$. Der Ansatz zur Berechnung einer Partikulärlösung von (14.21) lautet somit

$$y_p(x) = e^x (c_0 \cos x + d_0 \sin x) \quad (c_0, d_0 \text{ gesucht}).$$

Für die Ableitungen folgt

$$y_p'(x) = c_0 e^x (\cos x - \sin x) + d_0 e^x (\sin x + \cos x),$$

$$y_p''(x) = -2c_0 e^x \sin x + 2d_0 e^x \cos x.$$

Einsetzen in (14.21) liefert

$$\begin{aligned} & e^x (-2c_0 \sin x + 2d_0 \cos x - 6c_0 (\cos x - \sin x) - 6d_0 (\sin x + \cos x) \\ & \quad + 9c_0 \cos x + 9d_0 \sin x) \\ &= e^x \cos x (2d_0 - 6c_0 - 6d_0 + 9c_0) + e^x \sin x (-2c_0 + 6c_0 - 6d_0 + 9d_0) \\ &= e^x \cos x (3c_0 - 4d_0) + e^x \sin x (4c_0 + 3d_0) \stackrel{!}{=} 25e^x \cos x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3c_0 - 4d_0 = 25 \\ 4c_0 + 3d_0 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem beruht auf der linearen Unabhängigkeit der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. Es besitzt die eindeutige Lösung

$$c_0 = 3, \quad d_0 = -4,$$

was auf die Partikulärlösung

$$y_p(x) = (3 \cos x - 4 \sin x) e^x$$

der Differenzialgleichung (14.21) führt. Alle Lösungen von (14.21) sind

$$y(x) = (3 \cos x - 4 \sin x) e^x + c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad \triangle$$

Ist die rechte Seite einer linearen Differenzialgleichung eine Summe aus zwei Termen, kann man für jeden Summanden eine Partikulärlösung berechnen und die Partikulärlösungen anschließend addieren. Diese Eigenschaft, die wir schon mehrfach benutzt haben, heißt *Superpositionsprinzip*.

Beispiel 14.23 Für die Differenzialgleichung

$$y'' - 6y' + 9y = 2e^x - 25e^x \cos x$$

erhält man aus Beispiel 14.22 ohne weitere Rechnung die Partikulärlösung

$$y_p(x) = 2 \left(\frac{1}{4} e^x \right) - (3 \cos x - 4 \sin x) e^x = \left(\frac{1}{2} - 3 \cos x + 4 \sin x \right) e^x. \quad \triangle$$

Kapitel 15

Elementar lösbare Differenzialgleichungen

Eine Reihe in der Praxis wichtiger Differenzialgleichungen lassen sich durch geeignete Transformationen auf separierbare oder lineare Differenzialgleichungen zurückführen. Wir besprechen vier solche Klassen von Differenzialgleichungen und gehen danach auf Potenzreihenlösungen von Differenzialgleichungen ein.

15.1 Die Euler'sche Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung der Bauart

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = b(x), \quad a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, \quad x > 0, \quad (15.1)$$

heißt Euler'sche Differenzialgleichung. Sie wird durch die Substitution

$$x = e^t, \quad u(t) := y(e^t) \quad (15.2)$$

in eine lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u = u(t)$ transformiert.

Beispiel 15.1 Gegeben sei die Euler'sche Differenzialgleichung

$$x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x}, \quad x > 0. \quad (15.3)$$

Dann folgt aus (15.2) mit der Kettenregel

$$\dot{u}(t) = \frac{d}{dt} y(e^t) = y'(e^t) e^t = xy'(x),$$

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) &= \frac{d}{dt}y'(e^t)e^t = y''(e^t)(e^t)^2 + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x), \\ \ddot{u}(t) &= \frac{d}{dt}(y''(e^t)(e^t)^2 + y'(e^t)e^t) = y'''(e^t)(e^t)^3 + 3y''(e^t)(e^t)^2 + y'(e^t)e^t \\ &= x^3y'''(x) + 3x^2y''(x) + xy'(x).\end{aligned}$$

Auflösen nach den Ableitungen von y ergibt

$$\begin{aligned}xy'(x) &= \dot{u}(t) \\ x^2y''(x) &= \ddot{u}(t) - xy'(x) = \ddot{u}(t) - \dot{u}(t), \\ x^3y'''(x) &= \ddot{u}(t) - 3x^2y''(x) - xy'(x) \\ &= \ddot{u}(t) - 3(\ddot{u}(t) - \dot{u}(t)) - \dot{u}(t) = \ddot{u}(t) - 3\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t).\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehungen in (15.3) liefert die lineare Differenzialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{aligned}\ddot{u}(t) - 3\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) + 2\ddot{u}(t) - 2\dot{u}(t) - \dot{u}(t) + u(t) &= te^{-t} \\ \iff \ddot{u} - \ddot{u} - \dot{u} + u &= te^{-t}\end{aligned}\tag{15.4}$$

für die gesuchte Funktion $u = u(t)$. Das charakteristische Polynom von (15.4) lautet

$$p_3(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

Die Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ führen auf das Fundamentalsystem

$$u_1(t) = e^t, \quad u_2(t) = te^t, \quad u_3(t) = e^{-t},$$

mit welchem sich alle Lösungen der zu (15.4) gehörigen homogenen Differenzialgleichung ausdrücken lassen.

Um alle Lösungen von (15.4) anzugeben, fehlt noch eine Partikulärlösung. Der Koeffizient $\mu = -1$ im Exponenten der rechten Seite

$$b(t) = te^{-t} = (0 + 1 \cdot t^1)e^{-1 \cdot t}$$

ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Außerdem liegt der Fall $m = 1$ vor. Der Ansatz zur Bestimmung einer Partikulärlösung von (15.4) lautet also

$$u_p(t) = t^1 e^{-t} (c_0 + c_1 t) = (c_1 t^2 + c_0 t) e^{-t}.$$

Setzt man die Ableitungen

$$\begin{aligned}\dot{u}_p &= e^{-t}(-c_1 t^2 + (2c_1 - c_0)t + c_0), \\ \ddot{u}_p &= e^{-t}(c_1 t^2 + (-4c_1 + c_0)t + (2c_1 - 2c_0)), \\ \ddot{u}_p &= e^{-t}(-c_1 t^2 + (6c_1 - c_0)t + (-6c_1 + 3c_0))\end{aligned}$$

in (15.4) ein, liefert Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \ddot{u} - \dot{u} + u &= e^{-t}(-c_1 t^2 + (6c_1 - c_0)t + (-6c_1 + 3c_0) - c_1 t^2 + (4c_1 - c_0)t + (-2c_1 + 2c_0) \\ &\quad + c_1 t^2 + (-2c_1 + c_0)t - c_0 + c_1 t^2 + c_0 t) \\ &= e^{-t}(8c_1 t - 8c_1 + 4c_0) \stackrel{!}{=} t e^{-t} \iff c_1 = \frac{1}{8}, \quad c_0 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Alle Lösungen von (15.4) sind gegeben durch

$$u(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + (c_3 + \frac{1}{8}t + \frac{1}{4}t^2)e^{-t}.$$

Mit der Rücktransformation $e^t = x$, $t = \ln x$ für $x > 0$ erhält man alle Lösungen von (15.3):

$$y(x) = (c_1 + c_2 \ln x)x + (c_3 + \frac{1}{8} \ln x + \frac{1}{4}(\ln x)^2) \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad \triangle$$

Mit der folgenden Merkregel können die Terme $x^k y^{(k)}$ in (15.1) bequem durch Linearkombinationen von Ableitungen von u ersetzt werden. Man ordnet $x^k y^{(k)}$ das charakteristische Teilpolynom

$$p_k(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - 1) \dots (\lambda - (k - 1))$$

zu, multipliziert aus und ersetzt anschließend Potenzen von λ durch Ableitungen von u . Für $k = 1, 2, 3$ gilt:

- Zu xy' gehört das charakteristische Teilpolynom $p_1(\lambda) = \lambda$, welches auf $xy' = \dot{u}$ führt.
- Analog führt das zu $x^2 y''$ gehörende charakteristische Teilpolynom

$$p_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda$$

$$\text{auf } x^2 y'' = \ddot{u} - \dot{u}.$$

- Für $x^3 y'''$ liefert

$$p_3(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$$

$$\text{die Ersetzung } x^3 y''' = \ddot{u} - 3\dot{u} + 2u.$$

15.2 Differenzialgleichungen vom Typ $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

Kann man die Funktion $f(x, y)$ in der Differenzialgleichung

$$y' = f(x, y) \tag{15.5}$$

mithilfe einer Funktion $g(u)$ einer Veränderlichen in der Form

$$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

darstellen, dann liefert die Substitution

$$u(x) := \frac{y(x)}{x} \iff y(x) = xu(x)$$

wegen

$$g(u) = g\left(\frac{y}{x}\right) = f(x, y) = y' = (xu)' = u + xu'$$

die separierbare Differenzialgleichung

$$u' = \frac{1}{x} (g(u) - u) \quad (15.6)$$

für u , welche durch Trennung der Veränderlichen gelöst werden kann. Hat man alle Lösungen von (15.6) berechnet, erhält man durch Rücksubstitution alle Lösungen von (15.5).

Beispiel 15.2

1. Die Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad x > 0, \quad (15.7)$$

kann nicht mit den bisher besprochenen Methoden gelöst werden. Schreibt man sie jedoch in der Form

$$y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)},$$

dann führt die Substitution $u(x) := \frac{y(x)}{x}$ auf

$$u' = \frac{1}{x} \left(\frac{1 + u^2}{u} - u \right) = \frac{1}{x} \frac{1}{u}.$$

Da die Funktion $\frac{1}{u}$ keine Nullstellen besitzt, existieren keine singulären Lösungen der transformierten Differenzialgleichung. Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\int u \, du = \int \frac{dx}{x},$$

also

$$\frac{1}{2} u^2 = \ln |x| + c = \ln(e^c |x|).$$

Nach Aufgabenstellung ist $x > 0$ vorausgesetzt, sodass man den Betrag weglassen darf. Weil u^2 nicht negativ sein kann, muss

$$\ln(e^c x) \geq 0 \iff e^c x \geq 1 \iff x \geq \frac{1}{e^c}$$

gelten. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ erhält man die zwei Lösungen

$$u_1(x) = \sqrt{2 \ln x + 2c}, \quad x \geq \frac{1}{e^c},$$

$$u_2(x) = -\sqrt{2 \ln x + 2c}, \quad x \geq \frac{1}{e^c}.$$

Alle Lösungen von (15.7) ergeben sich aus der Rücktransformation $y(x) = xu(x)$:

$$y_1(x) = x\sqrt{2 \ln x + 2c}, \quad x \geq \frac{1}{e^c},$$

$$y_2(x) = -x\sqrt{2 \ln x + 2c}, \quad x \geq \frac{1}{e^c}.$$

2. Bei der Differenzialgleichung

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad x > 0,$$

ergibt gleiches Vorgehen wie beim ersten Beispiel

$$y' = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \iff u' = \frac{1}{x} \left(\frac{1 + u^2}{2u} - u \right) = \frac{1}{x} \frac{1 - u^2}{2u}.$$

Die Funktion $\frac{1 - u^2}{2u}$ besitzt die Nullstellen $u = \pm 1$, welche auf die singulären Lösungen

$$u_1(x) \equiv 1, \quad u_2(x) \equiv -1$$

führen. Unter Berücksichtigung von $x > 0$ liefert Trennung der Veränderlichen

$$\int \frac{2u}{u^2 - 1} du = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\iff \ln |u^2 - 1| = -\ln x + c = c + \ln \left(\frac{1}{x} \right) = \ln \left(\frac{e^c}{x} \right)$$

$$\iff |u^2 - 1| = \frac{e^c}{x}$$

$$\iff u^2 = 1 \pm \frac{e^c}{x}. \quad (15.8)$$

Für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ entspricht e^c einer beliebigen positiven Konstante $\widehat{C} > 0$. Die singulären Lösungen erhält man für $\widehat{C} = 0$, sodass man alle Lösungen von (15.8) durch

$$u^2 = 1 + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

darstellen kann. Dabei muss für negative Werte von C

$$1 + \frac{C}{x} \geq 0 \iff x \geq -C$$

gelten. Durch Auflösen der Wurzel und Rücktransformation erhält man die Lösungen der Differenzialgleichung für y :

$$y_{1/2}(x) = \pm \sqrt{x^2 + Cx}, \quad x \in \begin{cases} [0, \infty), & \text{falls } C \geq 0, \\ [-C, \infty), & \text{falls } C < 0. \end{cases}$$

Das Richtungsfeld und einige Lösungen dieser Differenzialgleichung sind in Abbildung 15.1 veranschaulicht.

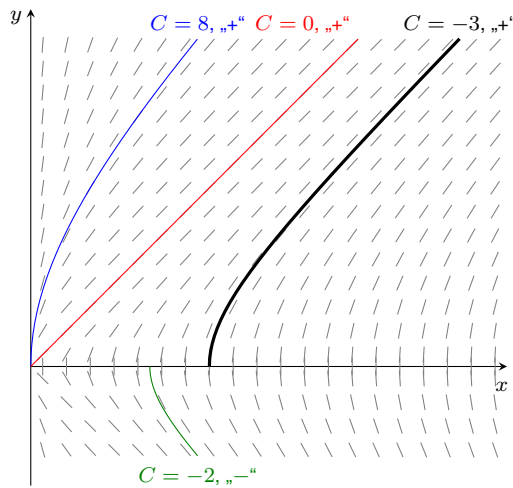


Abb. 15.1: Richtungsfeld mit Lösungskurven.



15.3 Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung

Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung besitzt die Gestalt

$$y' + a(x)y + b(x)y^\alpha = 0 \quad (15.9)$$

mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Die Werte 0 und 1 werden ausgeschlossen, weil die Differenzialgleichung sonst linear ist.

Für $\alpha > 0$ ist offensichtlich $y(x) \equiv 0$ eine Lösung von (15.9). Durch Multiplikation der Differenzialgleichung mit $(1 - \alpha)y^{-\alpha}$,

$$\underbrace{(1 - \alpha)y^{-\alpha}y'}_{(y^{1-\alpha})'} + (1 - \alpha)a(x)y^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(x) = 0.$$

kann man weitere Lösungen berechnen. Die Substitution $u(x) := y(x)^{1-\alpha}$ liefert eine lineare Differenzialgleichung erster Ordnung für u ,

$$u' + (1 - \alpha)a(x)u = (\alpha - 1)b(x),$$

welche mit dem in Abschnitt 13.4 beschriebenen Vorgehen lösbar ist.

Beispiel 15.3

1. $y' + 2xy + x^3y^2 = 0$.

Im Fall $\alpha = 2$ führt die Substitution

$$u(x) := \frac{1}{y(x)}$$

auf die lineare Differenzialgleichung

$$u' - 2xu = x^3. \quad (15.10)$$

Alle Lösungen der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung sind

$$u(x) = ce^{\int 2x dx} = ce^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine Partikulärlösung von (15.10) ist

$$u_p(x) = e^{x^2} \int x^3 e^{-x^2} dx = e^{x^2} \left(-\frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{-x^2} \right) = -\frac{1}{2}(x^2 + 1).$$

Alle Lösungen von (15.10) sind demnach

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + ce^{x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Kehrwertbildung ergibt

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 1 + \widehat{c}e^{x^2}}, \quad \widehat{c} \in \mathbb{R}.$$

Die Lösungen sind auf Intervallen definiert, in denen der Nenner nicht Null wird.

2. $y' - 2y + 2x\sqrt{y} = 0$.

Mit $\alpha = \frac{1}{2}$ erhält man die Differenzialgleichung

$$u' - u = -x$$

für $u(x) := \sqrt{y(x)}$. Ihre Lösungen sind

$$u(x) = x + 1 + ce^x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Da u eine Wurzel ist, muss der Definitionsbereich in Abhängigkeit von c so gewählt werden, dass $u(x) \geq 0$ gilt. Auf diesem Definitionsbereich gilt dann

$$y(x) = u^2(x) = (ce^x + x + 1)^2. \quad (15.11)$$

$$3. \begin{cases} y' - 2y + 2x\sqrt{y} = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Naives Einsetzen der Anfangsbedingung in die Lösungsdarstellung (15.11) ergibt zwei mögliche Werte für den Parameter c :

$$y(0) = (c + 1)^2 \stackrel{!}{=} 1 \iff c_1 = 0, c_2 = -2.$$

Das Anfangswertproblem scheint also nicht eindeutig lösbar. Dies steht im Widerspruch zu Satz 13.12, der hier angewendet werden darf.

Der Widerspruch löst sich durch die erzwungene Positivität von u auf. Für $c = -2$ ist

$$u(x) = -2e^x + x + 1, \quad u(0) = -1 < 0.$$

Diese Wahl von c ist daher unzulässig. Einzige Lösung des Anfangswertproblems im Intervall $(-1, \infty)$ ist

$$y(x) = (x + 1)^2, \quad x > -1. \quad \triangle$$

15.4 Die Riccati'sche Differenzialgleichung

Fügt man der Bernoulli'schen Differenzialgleichung im Fall $\alpha = 2$ eine rechte Seite hinzu, entsteht die Riccati'sche Differenzialgleichung

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 = h(x), \quad (15.12)$$

für welche kein allgemeines Lösungsverfahren bekannt ist. Kennt man allerdings eine Lösung $y_1(x)$, kann man die Riccati'sche Differenzialgleichung durch die Transformation

$$z(x) := y(x) - y_1(x)$$

in eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung für z überführen. Es ist

$$\begin{aligned} z' + y_1' + a(x)z + a(x)y_1 + b(x)(z + y_1)^2 &= h(x) \\ \iff z' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))z + b(x)z^2 &= \underbrace{h(x) - y_1' - a(x)y_1 - b(x)y_1^2}_{=0, \text{ da } y_1 \text{ Lösung von (15.12)}} \\ \iff z' + (a(x) + 2b(x)y_1(x))z + b(x)z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Beispiel 15.4 Gegeben sei die Riccati'sche Differenzialgleichung

$$y' + 2(x - x^4)y + x^3y^2 = 1 + 2x^2 - x^5. \quad (15.13)$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $y_1(x) = x$ eine Lösung dieser Differenzialgleichung. Die Substitution

$$z(x) := y(x) - x$$

führt über

$$\begin{aligned} z' + 1 + 2(x - x^4)(z + x) + x^3(z + x)^2 &= 1 + 2x^2 - x^5 \\ \iff z' + 1 + 2xz - 2x^4z + 2x^2 - 2x^5 + x^3z^2 + 2x^4z + x^5 &= 1 + 2x^2 - x^5 \end{aligned}$$

auf die Bernoulli'sche Differenzialgleichung

$$z' + 2xz + x^3z^2 = 0,$$

deren Lösung wir im letzten Abschnitt berechnet hatten. Mit der Rücksubstitution von z auf y folgt

$$y(x) = x - \frac{2}{x^2 + 1 + \widehat{c}e^{x^2}}, \quad \widehat{c} \in \mathbb{R}.$$

Diese Lösungen von (15.13) sind auf Intervallen definiert, in denen der Nenner nicht Null wird. \triangle

15.5 Potenzreihenlösungen

Manche Anfangswertprobleme lassen sich durch einen Potenzreihenansatz

$$y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \tag{15.14}$$

mit Entwicklungspunkt x_0 in der Anfangsstelle des Anfangswertproblems lösen.

Die gesuchten Koeffizienten a_k bestimmt man, indem man den Potenzreihenansatz in die gegebene Differenzialgleichung einsetzt und durch Koeffizientenvergleich Rekursionsformeln gewinnt. Im günstigen Fall führen diese auf explizite Berechnungsformeln für alle Koeffizienten. Andernfalls kann man aus den Rekursionsformeln zumindest einige der a_k berechnen und an Stelle der Reihe (15.14) ein Taylor-Polynom der gesuchten Lösung als Näherungslösung verwenden.

Falls man aus (15.14) alle Koeffizienten a_k berechnen kann, ist der Erfolg des Potenzreihenansatzes noch nicht gesichert. Es kann nämlich vorkommen, dass die Reihe (15.14) für $x \neq x_0$ divergiert. Man muss also prüfen, ob die erhaltene Potenzreihe einen positiven Konvergenzradius besitzt. Nur in diesem Fall hat man eine gültige Lösungsdarstellung gefunden.

Wir illustrieren die Potenzreihenmethode nun an Beispielen. Zur leichteren Verständlichkeit verwenden wir teilweise Differenzialgleichungen, die man mit früher besprochenen Methoden einfacher lösen könnte.

Beispiel 15.5

1. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (15.15)$$

Die Lösung ist in der Nähe der Anfangsstelle $x_0 = 0$ gesucht. Wir setzen

$$y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Weil man Potenzreihen gliedweise differenzieren darf, folgt

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Damit wir die Reihe für y'' nach dem Einsetzen in (15.15) bequem addieren können, nehmen wir die Indextransformation

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$$

vor. Durch Einsetzen dieser Reihe in (15.15) folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1) a_{k+2} + 4a_k) x^k = 0.$$

Diese Beziehung ist nach dem Identitätssatz für Potenzreihen genau dann erfüllt, wenn

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} + 4a_k = 0$$

für alle k gilt. Man erhält also die Rekursionsformel

$$a_{k+2} = -\frac{4}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Nun gilt:

- Zunächst sind a_0 und a_1 frei wählbar. Dies kann man sich leicht dadurch erklären, dass eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen besitzt, was zwei frei wählbaren Koeffizienten entspricht.
- Die Koeffizienten a_0 und a_1 werden durch die Anfangsbedingung festgelegt. Es ist

$$a_0 = y(0) = 1, \quad a_1 = y'(0) = 0.$$

c) Aus der Rekursionsformel folgt

$$a_{2k+1} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}_0$$

sowie

$$a_2 = -\frac{4}{(0+1)(0+2)}a_0 = -\frac{4}{2!},$$

$$a_4 = -\frac{4}{(2+1)(2+2)}a_2 = \frac{4^2}{4!},$$

$$a_6 = -\frac{4}{(4+1)(4+2)}a_4 = -\frac{4^3}{6!}.$$

Mit vollständiger Induktion zeigt man, dass

$$a_{2k} = \frac{(-4)^k}{(2k)!} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots$$

gilt. Die Lösung des Anfangswertproblems (15.15) ist also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Der Versuch, das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} xy' + y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (15.16)$$

durch einen Potenzreihenansatz zu lösen, schlägt fehl. Ist

$$y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad xy'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k,$$

dann kann

$$(a_1 x + 2a_2 x^2 + \dots) + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \stackrel{!}{=} 1$$

nur für $a_0 = 1$ erfüllt sein, wohingegen die Anfangsbedingung $a_0 = 0$ erfordert.

Der Widerspruch erklärt sich nach Berechnung aller Lösungen der Differenzialgleichung in (15.16). Die allgemeine Lösung lautet

$$y(x) = 1 + \frac{c}{x}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0 \text{ für } c \neq 0.$$

Der Anfangspunkt $x_0 = 0$ liegt nur für $c = 0$ im Definitionsbereich einer Lösung. Diese Lösung besitzt aber den Anfangswert $y_0 = 1$, sodass das Anfangswertproblem (15.16) keine Lösung besitzt.

Dies ist übrigens kein Widerspruch zum Existenzsatz 13.11. Schreibt man (15.16) um in

$$\begin{cases} y' = \frac{1-y}{x} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

dann ist die Funktion $f(x, y) := \frac{1-y}{x}$ für $x = 0$ nicht definiert und Satz 13.11 ist daher nicht anwendbar.

3. Um das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - 2xy' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (15.17)$$

mit dem Reduktionsverfahren von d'Alembert zu lösen, müsste man zunächst eine Lösung der Differenzialgleichung kennen. Die Potenzreihenmethode kommt ohne diese Einschränkung aus. Der Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \\ xy'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k, \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \end{aligned}$$

liefert aus (15.17)

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + 2a_k) x^k = 0,$$

woraus die Rekursionsformel

$$a_{k+2} = \frac{2k-2}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (15.18)$$

folgt. Die Anfangsbedingung ist erfüllt für

$$a_0 = y(0) = 1, \quad a_1 = y'(0) = 0.$$

Mit a_1 sind wegen (15.18) alle Koeffizienten mit ungeradem Index Null. Weiter ist

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{0-2}{(0+1)(0+2)} a_0 = -1 = \frac{(-2)}{2!}, \\ a_4 &= \frac{4-2}{(2+1)(2+2)} a_2 = \frac{(-2) \cdot 2}{4!}, \end{aligned}$$

$$a_6 = \frac{8-2}{(4+1)(4+2)} a_4 = \frac{(-2) \cdot 2 \cdot 6}{6!}.$$

Daraus kann man das Bildungsgesetz für die Koeffizienten ablesen. Im Nenner von a_{2k} steht $(2k)!$, im Zähler das Produkt

$$((-2) \cdot 2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4k-6)) = -2^k (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3)).$$

Diesen Bruch vereinfachen wir unter Verwendung von

$$(2k)! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)$$

zu

$$a_{2k} = -\frac{2^k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2k)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)} = -\frac{1}{k!(2k-1)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems (15.17) ist also

$$y(x) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(2k-1)} x^{2k}, \quad (15.19)$$

sofern diese Reihe einen positiven Konvergenzradius besitzt.

Zur Berechnung des Konvergenzradius bestimmen wir die Häufungspunkte der Folge $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}_{k=0}^{\infty}$. Wegen $a_{2k+1} = 0$ für alle k ist $\ell_1 = 0$ ein Häufungspunkt dieser Folge. Für die Folgenglieder mit geradem Index erhält man den Häufungspunkt

$$\ell_2 := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k]{|a_{2k}|} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{2k}|}} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!(2k-1)}}}$$

Wegen

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 0$$

ist auch dieser Grenzwert Null, sodass $\ell_2 = 0$ gilt. Der Konvergenzradius von (15.19) ist daher unendlich, d.h. die Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$. \triangle

Bemerkung 15.6 Das letzte Beispiel zeigt die Nützlichkeit des Potenzreihenansatzes besonders deutlich. Wir wollen dies hier weiter diskutieren.

Aus der Rekursionsformel (15.18) folgt $a_3 = 0$ und somit

$$a_{2k+1} = 0 \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

unabhängig von a_1 . Eine Lösung der Differenzialgleichung in (15.17) ist daher $y_1(x) = x$, welche man für die Wahl $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ erhält. Mit dem Reduktionsverfahren von

d'Alembert kann man daraus ein Fundamentalsystem bestimmen. Eine zweite, von y_1 linear unabhängige Lösung ist nach (14.9)

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{\int 2x dx} dx = x \int \frac{e^{x^2}}{x^2} dx = x \int_a^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \quad (15.20)$$

für ein $a \in \mathbb{R}$. Für praktische Berechnungen ist diese Lösungsdarstellung jedoch aus den folgenden Gründen problematisch:

1. Die Funktion $t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$ ist nicht elementar integrierbar.
2. Das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ divergiert.

Um das Anfangswertproblem (15.17) zu lösen, müsste man zuerst in (15.20) ein beliebiges $a > 0$ wählen. Das Produkt $x \int_a^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ existiert dann für $x \rightarrow 0$ als uneigentlicher Grenzwert vom Typ „ $0 \cdot \infty$ “ und die Funktionen y_1 und y_2 bilden ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung. Zur Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 in der Lösungsdarstellung

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

sind die uneigentlichen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow 0+} y_2(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 0+} y_2'(x)$ zu berechnen. Anschließend wäre für jede Funktionswertberechnung von y_2 eine geeignete Quadraturformel zu verwenden.

Die Potenzreihendarstellung (15.19) umgeht diese Schwierigkeiten elegant und konvergiert für betragsmäßig kleine Werte von x sehr schnell. \diamond

Der Potenzreihenansatz kann auch bei Differenzialgleichungen, die transzendente Funktionen wie die Exponentialfunktion oder trigonometrische Funktionen enthalten, erfolgreich sein. Die rechnerische Durchführung ist dann aber komplizierter. Zunächst müssen die transzendenten Funktionen ebenfalls in Potenzreihen entwickelt werden (siehe Band 1). Falls anschließend Produkte von Potenzreihen auftreten, werden diese mit dem Cauchy-Produkt berechnet.

Beispiel 15.7 Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + 4y = 3 \sin x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} \quad (15.21)$$

wird analog zu Beispiel 15.5.1 gelöst. Dazu entwickeln wir die rechte Seite ebenfalls in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$:

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für die gesuchte Lösung von (15.21) verwenden wir wieder den Ansatz

$$y(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Einsetzen beider Reihen in (15.21) ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} ((k+2)(k+1)a_{k+2} + 4a_k) x^k = 3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}. \quad (15.22)$$

Auf der rechten Seite stehen nur ungerade Potenzen von x . Ist k gerade, $k = 2j$, gilt also

$$(2j+2)(2j+1)a_{2j+2} + 4a_{2j} = 0 \iff a_{2j+2} = -\frac{4}{(2j+1)(2j+2)} a_{2j}$$

für $j \in \mathbb{N}_0$. Da die Anfangsbedingung $a_0 = 0$ festlegt, folgt aus der Rekursionsformel

$$a_{2j} = 0 \quad \text{für } j \in \mathbb{N}_0.$$

Für die ungeraden Potenzen gilt eine andere Beziehung. Ist $k = 2j+1$ ungerade, liefert Koeffizientenvergleich in (15.22)

$$\begin{aligned} (2j+3)(2j+2)a_{2j+3} + 4a_{2j+1} &= 3 \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}, \\ \iff a_{2j+3} &= \frac{3(-1)^j}{(2j+1)!(2j+2)(2j+3)} - \frac{4}{(2j+3)(2j+2)} a_{2j+1} \\ &= \frac{3(-1)^j}{(2j+3)!} - \frac{4}{(2j+3)(2j+2)} a_{2j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Um ein Bildungsgesetz für die Koeffizienten zu bestimmen, berechnen wir einige Werte. Wegen der Anfangsbedingung $y'(0) = 1$ gilt $a_1 = 1$. Damit folgt:

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{3(-1)^0}{(0+3)!} - \frac{4}{(0+3)(0+2)} a_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}, \\ a_5 &= \frac{3(-1)^1}{(2+3)!} - \frac{4}{(2+3)(2+2)} a_3 = -\frac{3}{5!} + \frac{4}{5!} = \frac{1}{5!}, \\ a_7 &= \frac{3(-1)^2}{(4+3)!} - \frac{4}{(4+3)(4+2)} a_5 = \frac{3}{7!} - \frac{4}{7!} = -\frac{1}{7!}. \end{aligned}$$

Die Vermutung

$$a_{2j+1} = \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}, \quad j \in \mathbb{N}_0$$

lässt sich mit vollständiger Induktion leicht bestätigen. Also ist

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1} = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems. △

Kapitel 16

Numerische Behandlung gewöhnlicher Differenzialgleichungen

Bei den bisher betrachteten Differenzialgleichungen wurden mit analytischen Methoden exakte Lösungen berechnet. Neben den behandelten Spezialfällen sind leider nur wenige weitere Klassen von Differenzialgleichungen exakt lösbar. Bei praktischen Anwendungsproblemen muss man daher regelmäßig auf numerische Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen zurückgreifen.

Gegenstand dieses Kapitels sind Näherungsverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen für Systeme erster Ordnung der Gestalt

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [x_0, T], \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (16.1)$$

mit $y_0 \in \mathbb{R}^m$ und $f: [x_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Gesucht ist der Wert der Lösung an einer Stelle $T > x_0$. Wir setzen dabei generell voraus, dass die Funktion f nach allen Komponenten von y partiell differenzierbar ist und dass die partiellen Ableitungen in einer Umgebung der Stelle (x_0, y_0) beschränkt sind. Unter diesen Voraussetzungen ist das Anfangswertproblem (16.1) eindeutig lösbar. Darüber hinaus nehmen wir an, dass f immer so oft differenzierbar ist, wie es die im Folgenden entwickelten Methoden jeweils erfordern.

Üblicherweise berechnet man den gesuchten Näherungswert der Lösung des Anfangswertproblems (16.1) an der Stelle T nicht in einem Schritt, sondern man unterteilt das Intervall $[x_0, T]$ durch ein Gitter, auf dem die gegebene Differenzialgleichung schrittweise integriert wird. Im einfachsten Fall verwendet man ein äquidistantes Gitter mit n Teilintervallen, Schrittweite $h = (T - x_0)/n$ und Gitterpunkten $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$.

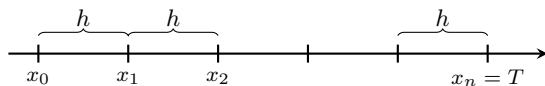


Abb. 16.1: Äquidistantes Gitter.

Ausgehend von y_0 werden sukzessive Näherungen

$$y_k \approx y(x_k), \quad k = 1, \dots, n$$

berechnet. Die Näherung y_n ist dann die gesuchte Approximation für $y(T)$.

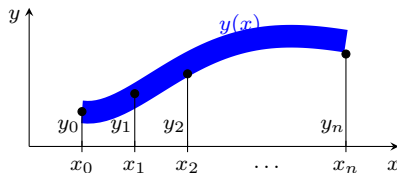


Abb. 16.2: Schrittweise Lösung eines AWP.

16.1 Das explizite Euler-Verfahren

Durch das Richtungsfeld der Differenzialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

ist in jedem (Anfangs-)Punkt $(x_0, y_0) \in D_f$ die Steigung der Lösungskurve des zugehörigen Anfangswertproblems bekannt. Die Idee des Euler-Verfahrens besteht darin, die Lösungskurve lokal durch ihre Tangente zu approximieren. Dadurch entsteht ein Polygonzug, sodass diese Methode auch als Polygonzugverfahren bezeichnet wird.

Im Intervall $[x_0, x_1]$ wird die Lösung des Anfangswertproblems (16.1) durch ihre Tangente im Anfangspunkt $P_0 = (x_0, y_0)$ approximiert (Abbildung 16.3). Der Endpunkt des Geradenstücks

$$\tilde{y}(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad x \in [x_0, x_1],$$

ist $P_1 = (x_1, y_1)$ mit

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

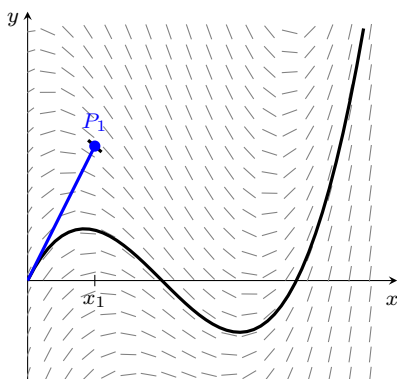


Abb. 16.3: Expliziter Euler: 1. Schritt.

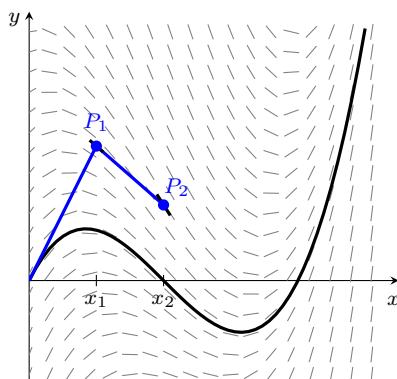


Abb. 16.4: Expliziter Euler: 2. Schritt.

Im Intervall $[x_1, x_2]$ wird die Näherungskurve fortgesetzt, indem man $P_1 = (x_1, y_1)$ als Anfangspunkt eines neuen Anfangswertproblems wählt und dessen Lösung wieder durch die Tangente an die Lösungskurve approximiert (Abbildung 16.4). Nach n Schritten erhält man den gesuchten Näherungswert für $y(T)$.

Das explizite Euler-Verfahren besteht aus dem folgenden Algorithmus:

Algorithmus 16.1: Explizites Euler-Verfahren

Gegeben: $f, x_0, y_0; T, n, h = (T - x_0)/n$.

Für $k = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$y_{k+1} := y_k + h f(x_k, y_k)$$

$$x_{k+1} := x_k + h$$

Pro Integrationsschritt ist eine Funktionsauswertung von f erforderlich.

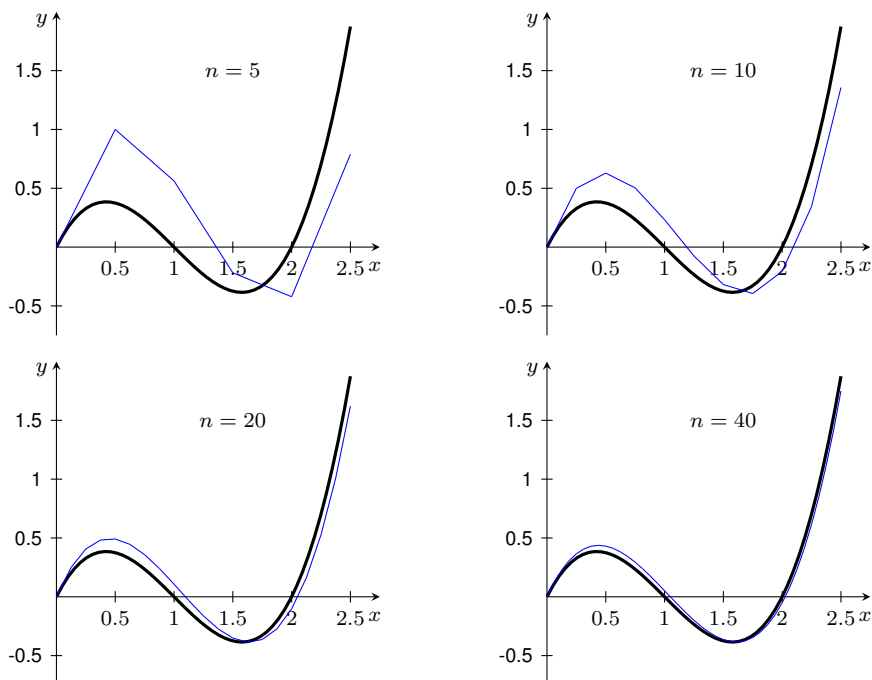


Abb. 16.5: Explizites Euler-Verfahren für verschiedene Schrittweiten.

Beispiel 16.1

1. Explizites Euler-Verfahren für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = -y + x^3 - 4x + 2, & x \in [0, 2.5], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Speziell für $h = \frac{1}{2}$ berechnet man mit $f(x, y) = -y + x^3 - 4x + 2$ und $x_0 = y_0 = 0$ die folgenden Iterierten:

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}f(0, 0) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = 1 + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$$

$$x_2 = 1$$

u.s.w.

2. Für das System erster Ordnung

$$\begin{cases} u' = f_1(x, u, v) = v - u \\ v' = f_2(x, u, v) = uv + 4 - 2x \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \end{cases}$$

führt man das explizite Euler-Verfahren analog für jede Komponente durch. Mit den Startwerten $x_0 = 0$, $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ und der Schrittweite $h = \frac{1}{4}$ liefert das Verfahren die folgenden Näherungen:

$$u_1 = u_0 + hf_1(x_0, u_0, v_0) = u_0 + h(v_0 - u_0)$$

$$= 0 + \frac{1}{4}(1 - 0) = \frac{1}{4}$$

$$v_1 = v_0 + hf_2(x_0, u_0, v_0) = v_0 + h(u_0v_0 + 4 - 2x_0)$$

$$= 1 + \frac{1}{4}(0 \cdot 1 + 4 - 2 \cdot 0) = 2$$

$$x_1 = \frac{1}{4}$$

$$u_2 = u_1 + hf_1(x_1, u_1, v_1) = u_1 + h(v_1 - u_1)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{16}$$

$$v_2 = v_1 + hf_2(x_1, u_1, v_1) = v_1 + h(u_1v_1 + 4 - 2x_1)$$

$$= 2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \cdot 2 + 4 - 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = 3$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

u.s.w.

△

16.2 Das Taylor-Verfahren

Die Tangente an einen Funktionsgraphen liefert in der Regel nur in einer kleinen Umgebung des Entwicklungspunkts eine gute Approximation. Für das explizite Euler-Verfahren sind also sehr kleine Schrittweiten zu erwarten, wenn man eine gute Näherungslösung berechnen will. Eine naheliegende Verbesserung des Euler-Verfahrens wird dadurch erzielt, dass an Stelle der Tangente ein lokales Taylor-Polynom der Ordnung $p > 1$,

$$T_p(x) = \sum_{j=0}^p \frac{y^{(j)}(x_k)}{j!} (x - x_k)^j, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

zur Approximation der Lösung des Anfangswertproblems (16.1) verwendet wird. Im Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ bezeichnet $y(x)$ dabei die Lösung der Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ zum Anfangswert $y(x_k) = y_k$.

Das Taylor-Verfahren p -ter Ordnung benutzt die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} y_{k+1} &:= T_p(x_k + h) = \sum_{j=0}^p \frac{1}{j!} h^j y^{(j)}(x_k) \\ &= y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{1}{2} h^2 y''(x_k) + \frac{1}{6} h^3 y'''(x_k) + \cdots + \frac{1}{p!} h^p y^{(p)}(x_k). \end{aligned}$$

Für die praktische Durchführung benötigt man die Werte der ersten p Ableitungen von $y(x)$ am Entwicklungspunkt x_k . Diese lassen sich durch fortgesetztes Differenzieren der gegebenen Differenzialgleichung wie beim Satz über implizite Funktionen gewinnen. Aus

$$y' = f(x, y(x))$$

erhalten wir durch Differenziation mit der Kettenregel zunächst

$$y''(x) = f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x)) y'(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y)$$

und weiter

$$y''' = f_{xx} + f_{xy} f + (f_{yx} + f_{yy} f) f + f_y (f_x + f_y f).$$

Analog können Ableitungen beliebig hoher Ordnung berechnet werden.

Beispiel 16.2 Taylor-Verfahren zweiter Ordnung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = -y + x^3 - 4x + 2, & x \in [0, 2.5], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Das Taylor-Polynom zweiten Grades lautet

$$T_2(x_k + h) = y_k + hy'(x_k) + \frac{1}{2}h^2y''(x_k),$$

wobei $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$ gilt. Mit $f(x, y) = -y + x^3 - 4x + 2$ folgt

$$y''(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y)f(x, y) = y - x^3 + 3x^2 + 4x - 6 =: g(x, y).$$

Die Iterationsvorschrift des Taylor-Verfahrens zweiter Ordnung ist somit gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k) + \frac{1}{2}h^2g(x_k, y_k) \\ x_{k+1} &= x_k + h \end{aligned} \right\} \quad k = 0, 1, \dots$$

Für $h = \frac{1}{2}$ erhält man zu $x_0 = y_0 = 0$ die folgenden Iterierten:

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2}f(0, 0) + \frac{1}{8}g(0, 0) = 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{8}(-6) = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8}g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{13}{64}$$

$$x_2 = 1$$

u.s.w.

△

In den Abbildungen 16.6 und 16.7 sind für das Anfangswertproblem (16.1) je fünf Iterationsschritte des expliziten Euler-Verfahrens und des Taylor-Verfahrens zweiter Ordnung mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ gegenübergestellt.

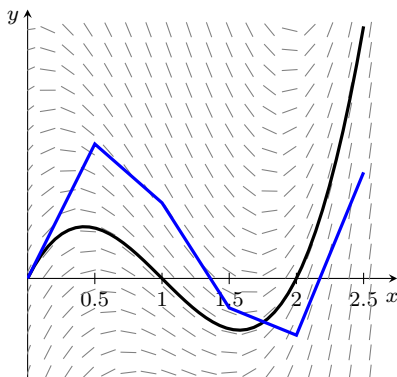


Abb. 16.6: Explizites Euler-Verfahren.

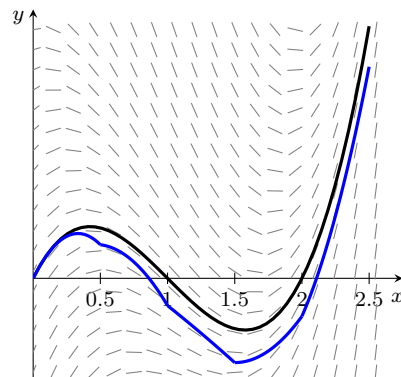


Abb. 16.7: Taylor-Verfahren zweiter Ordnung.

Man beachte, dass auch die Näherungskurve des Taylor-Verfahrens Knicke aufweist. Dies erklärt sich dadurch, dass jeder Parabelbogen mit der Steigung des Richtungsfelds beginnt, aber nicht mit der Steigung des Richtungsfelds endet.

Wendet man das Taylor-Verfahren auf ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung an, kann man die Ableitungen höherer Ordnung durch iterative Differenziation der einzelnen Gleichungen berechnen.

Beispiel 16.3 Taylor-Verfahren zweiter Ordnung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = f_1(x, u, v) = v - u \\ v' = f_2(x, u, v) = uv + 4 - 2x \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \end{cases}$$

Das Taylor-Verfahren zweiter Ordnung beruht auf den Approximationen

$$u(x_k + h) \approx u(x_k) + hu'(x_k) + \frac{1}{2}h^2u''(x_k),$$

$$v(x_k + h) \approx v(x_k) + hv'(x_k) + \frac{1}{2}h^2v''(x_k)$$

mit

$$u' = v - u,$$

$$v' = uv + 4 - 2x,$$

$$u'' = v' - u' = uv + 4 - 2x + u - v,$$

$$v'' = u'v + uv' - 2 = (v - u)v + u(uv + 4 - 2x) - 2.$$

Dies führt auf die Iterationsvorschrift

$$u_{k+1} = u_k + h(v_k - u_k) + \frac{1}{2}h^2(u_k v_k + 4 - 2x_k + u_k - v_k),$$

$$v_{k+1} = v_k + h(u_k v_k + 4 - 2x_k) + \frac{1}{2}h^2((v_k - u_k)v_k + u_k(u_k v_k + 4 - 2x_k) - 2),$$

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad k = 0, 1, \dots$$

Mit der Schrittweite $h = 0.025$ liefert das Verfahren die Iterierten

$$u_{10} = 0.335897 \approx u(0.25) = 0.335886 \dots,$$

$$v_{10} = 2.001833 \approx v(0.25) = 2.002217 \dots,$$

$$u_{20} = 0.834704 \dots \approx u(0.5) = 0.834934 \dots,$$

$$v_{20} = 3.192274 \dots \approx v(0.5) = 3.193596 \dots,$$

u.s.w.

△

Mit wachsender Ordnung erwartet man beim Taylor-Verfahren eine Verkleinerung des Fehlers der Näherungslösung. Diese Fehlerreduktion ist aber teuer erkauft, denn für die höheren Ableitungen sind bei Systemen von Differenzialgleichungen so viele Funktionswerte zu berechnen, dass sich der Mehraufwand gegenüber dem Euler-Verfahren nicht mehr lohnt. Für die Praxis benötigt man Verfahren, die erheblich genauer sind als das Euler-Verfahren, ohne deshalb wesentlich mehr Funktionswerte zu benötigen. Mit den Runge-Kutta-Verfahren werden wir solche Verfahren in Abschnitt 16.6 kennenlernen. Zuvor präzisieren wir den Konvergenzbegriff von numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen.

16.3 Einschrittverfahren

Bei den bisher vorgestellten Verfahren wird in jedem Iterationsschritt zur Berechnung von y_{k+1} nur der unmittelbar vorangehende Näherungswert y_k benötigt. Solche Verfahren heißen *Einschrittverfahren*.

Einschrittverfahren sind durch eine *Verfahrensfunktion* ϕ definiert. Ein *explizites* Einschrittverfahren besitzt die Gestalt

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k, h).$$

Im Allgemeinen hängt die Verfahrensfunktion von der Schrittweite h und den im k -ten Iterationsschritt bereits bekannten Werten x_k und y_k ab. Beim Taylor-Verfahren zweiter Ordnung gilt beispielsweise

$$\phi(x_k, y_k, h) = f(x_k, y_k) + \frac{1}{2}h\left(f_x(x_k, y_k) + f_y(x_k, y_k)f(x_k, y_k)\right).$$

Das explizite Euler-Verfahren verwendet die von der Schrittweite h unabhängige Verfahrensfunktion

$$\phi(x_k, y_k, h) = f(x_k, y_k).$$

16.3.1 Konvergenz von Einschrittverfahren

Wir diskutieren nun Konvergenz und Aufwand von Einschrittverfahren. Konvergenz bezeichnet die Eigenschaft, dass die berechnete Näherung y_n gegen den Wert $y(T)$ der Lösung von (16.1) strebt, wenn die Anzahl n der Iterationsschritte gegen Unendlich bzw. die Schrittweite h gegen Null strebt. Die folgende Definition liefert ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit.

Definition 16.4 Ein Einschrittverfahren mit konstanter Schrittweite h besitzt die *Konvergenzordnung* $p \geq 1$, falls es eine von h unabhängige Zahl K gibt, sodass sich der *globale Verfahrensfehler*

$$y(x_n) - y_n$$

abschätzen lässt durch

$$\|y(x_n) - y_n\| \leq K h^p.$$

Diese Eigenschaft kann man folgendermaßen charakterisieren:

1. Bei einem Einschrittverfahren mit Konvergenzordnung p darf man erwarten, dass der globale Verfahrensfehler durch 2^p dividiert wird, wenn man die Schrittweite halbiert.
2. Der globale Verfahrensfehler eines Einschrittverfahrens mit Konvergenzordnung p und Schrittweite h ist ungefähr so groß wie der globale Verfahrensfehler eines Einschrittverfahrens mit Konvergenzordnung 1 und Schrittweite h^p .

Ein Zahlenbeispiel verdeutlicht das Verhältnis des damit verbundenen Aufwands: Ist $p = 4$ und $h = \frac{1}{10}$, dann müsste man mit einem Einschrittverfahren mit Konvergenzordnung 1 ca. tausend Mal so viele Schritte durchführen, um für $y(T)$ eine Näherung mit gleicher Güte zu berechnen. Verfahren von hoher Konvergenzordnung sind also zu bevorzugen.

Die exakte Lösung eines Anfangswertproblems ist im Allgemeinen unbekannt, sodass sich Definition 16.4 nicht eignet, um die Konvergenzordnung von Einschrittverfahren zu bestimmen. Man stützt sich stattdessen auf den *lokalen Verfahrensfehler*

$$y(x+h) - y(x) - h\phi(x, y(x), h),$$

der in einem einzelnen Iterationsschritt auftritt. Da man den globalen Fehler auf die Summe der lokalen Fehler sowie deren Fortpflanzung zurückführen kann, ist der globale Fehler genau dann klein, wenn alle lokalen Fehler hinreichend klein sind. Für die hier behandelten Verfahren kann man zeigen, dass ein Einschrittverfahren die Konvergenzordnung p besitzt, wenn der lokale Fehler proportional zu h^{p+1} ist. Die Ordnung des lokalen Fehler wird durch Taylor-Entwicklung berechnet.

Beispiel 16.5

1. Beim expliziten Euler-Verfahren ist $\phi(x, y(x), h) = f(x, y)$. Wenn f stetig differenzierbar ist, dann ist die Lösung $y(x)$ der Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ sogar zweimal stetig differenzierbar. Taylor-Entwicklung liefert

$$\begin{aligned} y(x+h) - y(x) - h\phi(x, y(x), h) &= y(x+h) - y(x) - h \underbrace{f(x, y(x))}_{=y'(x)} \\ &= y(x) + h y'(x) + \frac{1}{2} h^2 y''(\xi) - y(x) - h y'(x) = \frac{1}{2} h^2 y''(\xi) \end{aligned}$$

für ein $\xi \in (x, x+h)$. Da y'' als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[x_0, T]$ beschränkt ist, ist der lokale Fehler proportional zu h^2 . Das explizite Euler-Verfahren besitzt also die Konvergenzordnung 1.

2. Der lokale Fehler des Taylor-Verfahren p -ter Ordnung ist nach Konstruktion proportional zu h^{p+1} . Das Taylor-Verfahren p -ter Ordnung besitzt die Konvergenzordnung p . △

16.3.2 Einfluss von Rundungsfehlern

Bei der praktischen Durchführung auf einem Computer wird das Ergebnis eines Einschrittverfahrens nicht nur durch den Verfahrensfehler, sondern auch durch Rundungsfehler verfälscht. Die Auswirkung dieser Rundungsfehler soll nun für ein explizites Einschrittverfahren erläutert werden.

Auf dem Computer wird an Stelle von

$$y_{k+1} = y_k + h \phi(x_k, y_k, h), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

die Iteration

$$\hat{y}_{k+1} = \hat{y}_k + h \phi(x_k, \hat{y}_k, h) + \delta_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

durchgeführt, wobei δ_k die Summe aller im k -ten Schritt anfallenden Rundungsfehler bezeichne. Sind die δ_k durch eine Zahl $\delta \geq 0$ beschränkt, dann gilt:

Satz 16.6 Die Verfahrensfunktion ϕ eines expliziten Einschrittverfahrens besitze die Konvergenzordnung $p \geq 1$ mit zugehöriger Konstante K . Das Verfahren werde mit konstanter Schrittweite h und Rundungsfehlerschranke δ in jedem Iterationsschritt auf einem Computer durchgeführt und liefere die Iterierten $\hat{y}_k \approx y(x_k)$. Dann gibt es eine Konstante C , sodass

$$\|y(x_n) - \hat{y}_n\| \leq K h^p + \frac{C}{h} \quad (16.2)$$

gilt.

Die Fehlerabschätzung (16.2) enthält zwei Terme: Den globalen Verfahrensfehler, welcher mit h^p gegen Null strebt, und die akkumulierten Rundungsfehler, die sich umgekehrt proportional zur Schrittweite verhalten. Die Gesamtfehlerschranke strebt also sowohl für $h \rightarrow \infty$ als auch für $h \rightarrow 0$ gegen Unendlich.

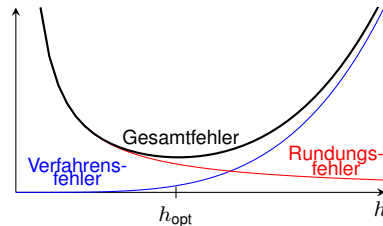


Abb. 16.8: Fehler beim Einschrittverfahren.

16.4 Einschrittverfahren aus numerischer Quadratur

In diesem Abschnitt stellen wir Näherungsverfahren vor, welche auf numerischer Integration beruhen. Dazu transformieren wir das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y), & x \in [x_0, T], \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (16.3)$$

in eine äquivalente Integralgleichung. Ist $y(x)$ eine differenzierbare Lösung des Anfangswertproblems (16.3), dann ist die Funktion

$$x \mapsto f(x, y(x))$$

stetig und $y(x)$ somit sogar stetig differenzierbar. Aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x y'(t) dt,$$

folgt dann

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (16.4)$$

Ist umgekehrt $y(x)$ eine stetige Lösung von (16.4), dann erfüllt y die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Außerdem ist die rechte Seite von (16.4) und daher auch y selbst differenzierbar und es ist

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Das Anfangswertproblem (16.3) und die Integralgleichung (16.4) sind also äquivalent. Diese Äquivalenz kann man ausnutzen, indem man Näherungslösungen des Anfangswertproblems dadurch berechnet, dass das Integral in (16.4) mit einer Quadraturformel approximiert wird.

16.4.1 Das Verfahren von Runge

Wendet man die Mittelpunkregel zur numerischen Integration,

$$\int_a^b g(t) dt \approx (b-a) g\left(\frac{a+b}{2}\right), \quad (16.5)$$

auf (16.4) an, erhält man zunächst die Approximation

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\right).$$

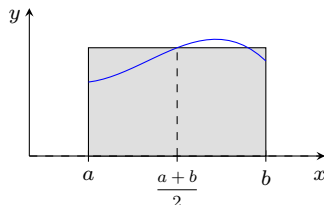


Abb. 16.9: Mittelpunkregel.

Leider kann man die rechte Seite hier nicht unmittelbar auswerten, da $y(x_0 + \frac{h}{2})$, der Wert der Lösung an der Stelle $x_0 + \frac{h}{2}$, nicht bekannt ist und nicht mithilfe von f berechnet werden kann. Zur Abhilfe ersetzt man $y(x_0 + \frac{h}{2})$ durch eine geeignete Näherung. Verwendet man hierzu den Näherungswert, den man erhält, wenn man einen Euler-Schritt mit halber Schrittweite auf das Anfangswertproblem (16.3) anwendet, ergibt sich das *Verfahren von Runge*.

Man führt die Zwischenwerte

$$y\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \approx y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) =: y_{k+\frac{1}{2}}, \quad x_{k+\frac{1}{2}} := x_k + \frac{h}{2},$$

ein und berechnet die Näherungen y_k aus den Hilfsgrößen $x_{k+\frac{1}{2}}$ und $y_{k+\frac{1}{2}}$ wie folgt:

Algorithmus 16.2: Verfahren von Runge

Gegeben: $f, x_0, y_0; T, n, h = (T - x_0)/n$.

Für $k = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$y_{k+\frac{1}{2}} := y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$$

$$x_{k+\frac{1}{2}} := x_k + \frac{h}{2}$$

$$y_{k+1} := y_k + h f(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$$

$$x_{k+1} := x_k + h$$

Das Verfahren von Runge besitzt die Konvergenzordnung $p = 2$ und benötigt in jedem Integrationsschritt zwei Funktionsauswertungen von f . Seine Arbeitsweise ist in Abbildung 16.10 illustriert. Die Steigungen des dunkelblau gezeichneten Polygonzugs der Näherungslösung stammen von den Steigungen des Richtungsfelds an den Endpunkten der hellblauen Strecken.

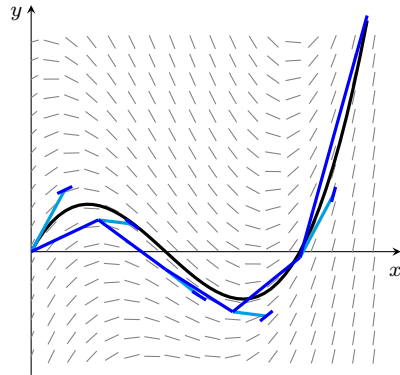


Abb. 16.10: Verfahren von Runge.

Beispiel 16.7 Verfahren von Runge für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = -y + x^3 - 4x + 2, & x \in [0, 2.5], \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ liefert das Verfahren von Runge ausgehend von $x_0 = y_0 = 0$ die folgenden Iterierten:

$$y_{\frac{1}{2}} = 0 + \frac{1}{4} f(0, 0) = 0 + \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = 0 + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{64} - 1 + 2\right) = \frac{33}{128}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_{\frac{3}{2}} = \frac{33}{128} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{2}, \frac{33}{128}\right) = \frac{115}{512}$$

$$x_{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}$$

$$y_2 = \frac{33}{128} + \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{4}, \frac{115}{512}\right) = -\frac{147}{1024}$$

$$x_2 = 1$$

u.s.w.

△

16.4.2 Die Trapezmethode

Die Trapezmethode basiert auf der Trapezregel zur Approximation des Integrals in (16.4). Aus

$$\int_a^b g(t) dt \approx \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b))$$

folgt

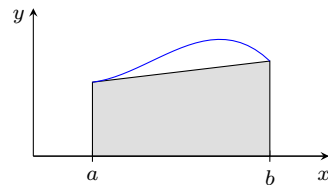


Abb. 16.11: Trapezregel.

$$y(x_0 + h) \approx y_0 + \frac{h}{2} \left(f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y(x_0 + h)) \right),$$

was auf das Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}) \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

führt.

Hier tritt die Unbekannte y_{k+1} auch auf der rechten Seite der Bestimmungsgleichung auf. Derartige Verfahren heißen *implizite Einschrittverfahren*.

Algorithmus 16.3: Trapezmethode

Gegeben: $f, x_0, y_0; T, n, h = (T - x_0)/n$.

Für $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$x_{k+1} := x_k + h$$

Löse $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}) \right)$

nach y_{k+1} auf.

Beispiel 16.8 Die Trapezmethode für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = -y + x^3 - 4x + 2, & x \in [0, 2.5], \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

führt auf die Gleichung

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(-y_k + x_k^3 - 4x_k + 2 - y_{k+1} + x_{k+1}^3 - 4x_{k+1} + 2),$$

welche man nach y_{k+1} auflösen kann:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{h}{2}\right)y_{k+1} &= \left(1 - \frac{h}{2}\right)y_k + \frac{h}{2}(x_k^3 + x_{k+1}^3 - 4x_k - 4x_{k+1} + 4) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= \frac{2-h}{2+h}y_k + \frac{h}{2+h}(x_k^3 + x_{k+1}^3 - 4x_k - 4x_{k+1} + 4). \end{aligned}$$

Mit Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ berechnet man aus $x_0 = y_0 = 0$, $\frac{2-h}{2+h} = \frac{3}{5}$ und $\frac{h}{2+h} = \frac{1}{5}$ die Näherungswerte

$$x_1 = \frac{1}{2},$$

$$y_1 = \frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{1}{5} \left(0 + \frac{1}{8} - 0 - 2 + 4\right) = \frac{17}{40},$$

$$x_2 = 1,$$

$$y_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{17}{40} + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{8} + 1 - 2 - 4 + 4\right) = \frac{51}{200} - \frac{7}{40} = \frac{4}{50},$$

u.s.w.

△

16.5 Implizite Einschrittverfahren

Bei impliziten Einschrittverfahren kann die Verfahrensfunktion von den vier Variablen x_k , y_k , x_{k+1} und y_{k+1} abhängen. Die Hauptschwierigkeit impliziter Einschrittverfahren besteht darin, dass die Iterationsvorschrift

$$y_{k+1} = y_k + h\phi(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1})$$

im Allgemeinen eine nichtlineare Gleichung für die Unbekannte y_{k+1} darstellt, welche man nur näherungsweise, z.B. mit dem Newton-Verfahren, nach y_{k+1} auflösen kann. Implizite Verfahren sind dadurch viel aufwändiger als explizite Verfahren. Dafür haben sie vorteilhafte Stabilitätseigenschaften, die bei gewissen Klassen von Differenzialgleichungen die Verwendung von erheblich größeren Schrittweiten erlauben (siehe Abschnitt 16.8).

16.5.1 Das implizite Euler-Verfahren

Beim *impliziten Euler-Verfahren* berechnet man die Tangentensteigung nicht am linken, sondern am rechten Randpunkt des Intervalls $[x_k, x_{k+1}]$. Das in Abschnitt 16.1 beschriebene Vorgehen liefert für den rückwärts genommenen Differenzenquotienten

$$y'(x_{k+1}) \approx \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

die Beziehung

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}),$$

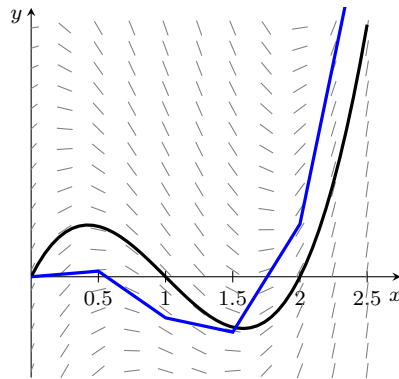


Abb. 16.12: Implizites Euler-Verfahren.

welche in jedem Schritt nach der Unbekannten y_{k+1} aufzulösen ist. Das implizite Euler-Verfahren ist gegeben durch

Algorithmus 16.4: Implizites Euler-Verfahren

Gegeben: $f, x_0, y_0; T, n, h = (T - x_0)/n$.

Für $k = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$x_{k+1} := x_k + h$$

Löse $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$
nach y_{k+1} auf.

Beispiel 16.9 Implizites Euler-Verfahren.

1. Die Differenzialgleichung im Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = -y + x^3 - 4x + 2, & x \in [0, 2.5], \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ist linear, sodass man die Gleichung

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

nach y_{k+1} auflösen kann. Es ist

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h(-y_{k+1} + x_{k+1}^3 - 4x_{k+1} + 2) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= \frac{1}{1+h} \underbrace{(y_k + h(x_{k+1}^3 - 4x_{k+1} + 2))}_{=: g(x_{k+1}, y_k)}. \end{aligned}$$

Speziell für $h = \frac{1}{2}$ berechnet man daraus zu $x_0 = y_0 = 0$ und $\frac{1}{1+h} = \frac{2}{3}$ die folgenden Iterierten:

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_1 = \frac{2}{3} g\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{24}$$

$$x_2 = 1$$

$$y_2 = \frac{2}{3} g\left(1, \frac{1}{24}\right) = -\frac{11}{36}$$

u.s.w.

2. Für das System erster Ordnung

$$\begin{cases} u' = f_1(x, u, v) = uv - u \\ v' = f_2(x, u, v) = v + x \\ u(0) = 1, \quad v(0) = -1 \end{cases}$$

besteht das implizite Euler-Verfahren aus der Iteration

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + hf_1(x_{k+1}, u_{k+1}, v_{k+1}) = u_k + hu_{k+1}(v_{k+1} - 1) \\ v_{k+1} &= v_k + hf_2(x_{k+1}, u_{k+1}, v_{k+1}). \end{aligned}$$

Die Iterationsvorschrift lässt sich nach u_{k+1} und v_{k+1} auflösen. Zunächst folgt aus der zweiten Gleichung

$$v_{k+1} = \frac{v_k + hx_{k+1}}{1 - h}.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1 - h(v_{k+1} - 1)}.$$

In jedem Iterationsschritt wird zuerst v_{k+1} aus der zweiten Gleichung bestimmt und danach u_{k+1} mithilfe der ersten Gleichung berechnet. Für die Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ vereinfacht sich die Iteration zu

$$x_{k+1} = \frac{k+1}{2},$$

$$v_{k+1} = 2v_k + x_{k+1},$$

$$u_{k+1} = \frac{2u_k}{3 - v_{k+1}}.$$

Aus den Anfangswerten $u_0 = 1, v_0 = -1$ berechnet man die Näherungen

$$x_1 = \frac{1}{2},$$

$$v_1 = 2v_0 + x_1 = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2},$$

$$u_1 = \frac{2u_0}{3 - v_1} = \frac{2}{3 + \frac{3}{2}} = \frac{4}{9},$$

$$x_2 = 1,$$

$$v_2 = 2v_1 + x_2 = -3 + 1 = -2,$$

$$u_2 = \frac{2u_1}{3 - v_2} = \frac{\frac{8}{9}}{3 + 2} = \frac{8}{45},$$

u.s.w.

△

16.6 Runge-Kutta-Verfahren

Das explizite Euler-Verfahren ist mit geringem Aufwand durchführbar, besitzt aber nur die Konvergenzordnung 1. Das Taylor-Verfahren der Ordnung p besitzt die Konvergenzordnung p , erfordert dafür aber die aufwändige Berechnung höherer Ableitungen von f . Der klassische Ansatz von Runge (1895) und Kutta (1901) zur systematischen Konstruktion von Einschrittverfahren vermeidet dies dadurch, dass mehrere Funktionswerte von f geeignet kombiniert werden.

Ein explizites s -stufiges Runge-Kutta-Verfahren erhält man dadurch, dass man s Stützstellen c_i sowie s Gewichte b_i und $\frac{1}{2}s(s-1)$ Gewichte a_{ij} , $i = 1, \dots, s$, $j = 1, \dots, i-1$, die Koeffizienten des Verfahrens, geeignet vorgibt und zunächst Hilfsgrößen (die Stufen des Verfahrens)

$$K_i = f\left(x_k + c_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right), \quad i = 1, \dots, s$$

berechnet. Die nächste Iterierte $y_{k+1} \approx y(x_{k+1})$ wird danach durch die gewichtete Summe

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

bestimmt.

Zur übersichtlichen Darstellung eines Runge-Kutta-Verfahrens werden die Koeffizienten in einem sogenannten *Butcher-Tableau* (nach J.C. Butcher, 1964) in der Form

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array} = \begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array}$$

notiert. Bei einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren sind die Diagonalelemente der Matrix A und alle Elemente oberhalb der Diagonale Null.

Algorithmus 16.5: Explizites Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben: $f, x_0, y_0; T, n, h = (T - x_0)/n;$
sowie Verfahrenskoeffizienten
 $a_{ij}, b_i, c_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, i-1.$

Iteration:

Für $k = 0, 1, \dots, n-1:$

Für $i = 1, \dots, s:$

$$K_i := f\left(x_k + c_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j\right)$$

$$y_{k+1} := y_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

$$x_{k+1} := x_k + h$$

Beispiel 16.10

1. Das explizite Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h f(x_k, y_k) = y_k + h K_1 \\ &= y_k + h \cdot 1 \cdot f(x_k + 0 \cdot h, y_k + 0 \cdot h K_1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

ist ein einstufiges Runge-Kutta-Verfahren mit

$$c_1 = 0, \quad a_{11} = 0, \quad K_1 = f(x_k, y_k), \quad b_1 = 1.$$

2. Das Verfahren von Runge

$$y_{k+1} = y_k + h f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)\right)$$

ist ein zweistufiges Runge-Kutta-Verfahren mit zwei Funktionsauswertungen von f in jedem Schritt. Man setzt

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_k, y_k) & (c_1 = 0), \\ K_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_1\right) & (c_2 = \frac{1}{2}, a_{21} = \frac{1}{2}), \\ y_{k+1} &= y_k + h K_2 & (b_1 = 0, b_2 = 1). \end{aligned}$$

Das Verfahren von Runge besitzt die Ordnung 2.

3. Das klassische Runge-Kutta-Verfahren (Runge 1895, Kutta 1901) besitzt vier Stufen. Pro Integrationsschritt werden 4 Funktionswerte von f benötigt. Dies sind zwar doppelt so viele wie beim Verfahren von Runge und viermal so viele wie beim expliziten Euler-Verfahren, aber dafür hat das klassische Runge-Kutta-Verfahren die Ordnung 4. \triangle

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ist z.B. $x_0 = 0$, $b = 1$ und $h = \frac{1}{10}$, dann liefern 10 Schritte des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit 40 Funktionsauswertungen eine Näherung von ungefähr gleicher Genauigkeit wie das Verfahren von Runge mit Schrittweite 10^{-2} , welches 200 Funktionsauswertungen erfordert. Das explizite Euler-Verfahren benötigt für eine vergleichbare Genauigkeit sogar die Schrittweite 10^{-4} , also 10.000 Funktionswerte von f . Bei kleineren Schrittweiten sind die Unterschiede noch gravierender.

Algorithmus 16.6: Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben: $f, x_0, y_0; T, n, h = (T - x_0)/n$.

Für $k = 0, 1, \dots, n - 1$:

$$K_1 := f(x_k, y_k)$$

$$K_2 := f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_1\right)$$

$$K_3 := f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} K_2\right)$$

$$K_4 := f(x_k + h, y_k + h K_3)$$

$$y_{k+1} := y_k + \frac{h}{6} (K_1 + 2 K_2 + 2 K_3 + K_4)$$

$$x_{k+1} := x_k + h$$

Für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = v - u \\ v' = uv \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1 \end{cases}$$

mit

$$u(1) \approx 0.757196406, \quad v(1) \approx 1.491943454$$

liefern diese drei Verfahren Näherungswerte, welche die folgenden Fehler aufweisen:

	Schritte	Fehler $u(1)$	Faktor	Fehler $v(1)$	Faktor
Euler	10.000	$1.427 \cdot 10^{-5}$		$6.850 \cdot 10^{-5}$	
Euler	160.000	$8.927 \cdot 10^{-7}$	15.99	$4.282 \cdot 10^{-6}$	16.00
Runge	100	$1.737 \cdot 10^{-5}$		$2.023 \cdot 10^{-5}$	
Runge	400	$1.087 \cdot 10^{-6}$	15.98	$1.277 \cdot 10^{-6}$	15.84
RKV	10	$2.084 \cdot 10^{-6}$		$8.504 \cdot 10^{-7}$	
RKV	20	$1.263 \cdot 10^{-7}$	16.50	$5.255 \cdot 10^{-8}$	16.18

Tabelle 16.1: Vergleichsrechnung mit verschiedenen Runge-Kutta-Verfahren.

Aus dieser Tabelle kann man die Konvergenzordnung der Verfahren in zweierlei Hinsicht ablesen. Erstens stimmen die gegenseitigen Fehlerrelationen der Verfahren mit der Theorie überein. Zweitens beobachtet man bei der Division der Schrittweite durch 16 bzw. 4 bzw. 2, dass der Fehler ungefähr mit Faktor 16 gedämpft wird, was die jeweiligen Konvergenzordnungen bestätigt.

Bemerkung 16.11

1. Die Konstruktion von Runge-Kutta-Verfahren, d.h. die Bestimmung geeigneter Koeffizienten, ist eine mathematisch sehr anspruchsvolle Aufgabe. Da der Rechenaufwand eines Runge-Kutta-Verfahrens proportional zur Stufenzahl steigt, sind Koeffizienten gesucht, sodass mit möglichst wenigen Stufen eine möglichst hohe Konvergenzordnung erzielt wird.

Unglücklicherweise wächst die Anzahl der Bedingungen, die die Koeffizienten eines Runge-Kutta-Verfahrens erfüllen müssen, um die Konvergenzordnung p zu garantieren, exponentiell mit p . Für $p = 10$ sind bereits 1205 nichtlineare Bedingungen zu erfüllen.

Man kann außerdem zeigen, dass ein explizites Runge-Kutta-Verfahren mit Ordnung p mindestens p , für $p > 6$ sogar mindestens $p + 2$ Stufen besitzen muss. Die bisher bekannten expliziten Runge-Kutta-Verfahren mit hoher Ordnung benötigen sogar noch mehr Stufen. Das Verfahren von Hairer (1978) besitzt $s = 17$ Stufen und die Ordnung $p = 10$. Bis zum Jahr 2006 war dies das explizite Runge-Kutta-Verfahren mit höchster bekannter Ordnung. Seither hält das Verfahren von Ono mit $s = 25$ Stufen und Ordnung $p = 12$ diesen Rekord.

2. Die in den Beispielen verwendeten konstanten Schrittweiten liefern bei der numerischen Integration einer Differenzialgleichung meist keine optimalen Ergebnisse. Anschaulich ist klar, dass große Schrittweiten nur in Bereichen geeignet sind, in denen sich das Krümmungsverhalten der Lösung wenig ändert, wohingegen man in Bereichen, in denen die Lösung oszilliert, mit kurzen Schrittweiten rechnen muss. Strategien zur problemangepassten Schrittweitensteuerung findet man in der mathematischen Fachliteratur. \diamond

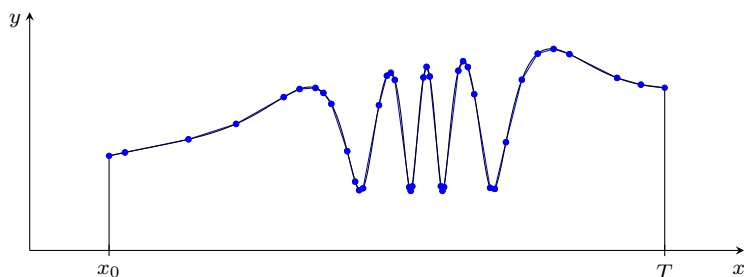


Abb. 16.13: Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung

16.7 Mehrschrittverfahren

In einem s -stufigen Runge-Kutta-Verfahren werden in jedem Iterationsschritt s Funktionswerte von f berechnet. Da dies bei großen Systemen sehr aufwändig ist, wurden numerische Verfahren entwickelt, welche in jedem Iterationsschritt nur einen neuen Funktionswert von f benötigen. Zur Berechnung der nächsten Iterierten y_{k+1} werden zusätzlich einige der zuvor berechneten Funktionswerte von f benutzt. Solche Verfahren heißen *Mehrschrittverfahren*.

Beispiel 16.12 Kennt man Näherungswerte der Lösung von (16.3) an zwei aufeinanderfolgenden Gitterpunkten x_k und x_{k+1} , kann man y_{k+2} dadurch berechnen, dass man die Mittelpunkregel (16.5) auf das Intervall $[x_k, x_{k+2}]$ anwendet:

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= y_k + \int_{x_k}^{x_k+2h} f(t, y(t)) dt \approx y_k + 2hf(x_{k+1}, y(x_{k+1})) \\ &\approx y_k + 2hf(x_{k+1}, y_{k+1}). \end{aligned}$$

Zum Start des Verfahrens verwendet man einmalig ein anderes Verfahren, etwa das explizite Euler-Verfahren, um einen Näherungswert der Lösung an der Stelle x_1 zu berechnen. Das daraus abgeleitete Iterationsverfahren heißt Mittelpunkregel.

Pro Integrationsschritt benötigt die Mittelpunkregel nur eine Funktionsauswertung von f . Bei der Berechnung der nächsten Iterierten y_{k+2} treten Näherungen an zwei unmittelbar vorausgehenden Stellen, nämlich y_k und y_{k+1} auf. Die Mittelpunkregel ist ein Zweischrittverfahren. \triangle

Auch bei Mehrschrittverfahren unterscheidet man explizite und implizite Verfahren. Der allgemeine Ansatz für ein lineares s -Schrittverfahren zur Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

lautet

$$y_{k+1} + \sum_{\ell=1}^s a_{\ell} y_{k+1-\ell} = h \sum_{\ell=0}^s b_{\ell} f(x_{k+1-\ell}, y_{k+1-\ell}) \quad (16.6)$$

mit fest vorgegebenen Verfahrensparametern a_1, \dots, a_s und b_0, \dots, b_s . Die Näherungswerte y_1, \dots, y_{s-1} bestimmt man in einer Anlaufrechnung mit einem anderen Verfahren. Beginnend mit $k = s - 1$ löst man danach (16.6) in jedem Iterationsschritt nach y_{k+1} auf. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- Falls $b_0 = 0$ gilt, tritt die gesuchte Unbekannte y_{k+1} auf der rechten Seite von (16.6) nicht auf. Die Gleichung kann dann direkt nach y_{k+1} aufgelöst werden. Das zugehörige Mehrschrittverfahren ist ein explizites Verfahren.
- Im Fall $b_0 \neq 0$ definiert (16.6) ein implizites Mehrschrittverfahren. In jedem Schritt ist eine i.A. nichtlineare Gleichung für y_{k+1} zu lösen.

Den Hauptvorteil der Mehrschrittverfahren, den geringeren Aufwand, erkaufte man sich leider mit dem Nachteil, dass die Schrittweitensteuerung bei Mehrschrittverfahren erheblich schwieriger ist als bei Einschrittverfahren.

16.8 Stabilität

Neben der Konvergenz ist die Stabilität der zweite Hauptaspekt eines numerischen Verfahrens. Stabilität misst den Einfluss von Diskretisierungsfehlern und von Rundungsfehlern auf das berechnete Ergebnis. Das Verfahren heißt stabil, wenn kleine Diskretisierungs- und Rundungsfehler nur kleine Fehler im Ergebnis zur Folge haben.

Für die Stabilitätsuntersuchung von numerischen Verfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen wird häufig das Modellproblem

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (16.7)$$

mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ herangezogen. Die eindeutige Lösung $e^{\lambda x}$ ist für $\lambda > 0$ auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend, für $\lambda = 0$ konstant Eins und für $\lambda < 0$ auf ganz \mathbb{R} streng monoton fallend mit $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$. Von einem stabilen numerischen Verfahren verlangt man, dass die berechneten Näherungen dieselben Monotonieeigenschaften besitzen. Insbesondere sollen die Näherungen im Fall $\lambda < 0$ abklingen.

Zur Analyse des Stabilitätsverhaltens des expliziten und des impliziten Euler-Verfahrens wenden wir beide Verfahren mit konstanter Schrittweite h auf das Modellproblem (16.7) an. Für das explizite Euler-Verfahren gilt:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= y_0 + h\lambda y_0 = (1 + \lambda h)y_0 = 1 + \lambda h, \\ y_2 &= (1 + \lambda h)y_1 = (1 + \lambda h)^2, \end{aligned}$$

woraus mit vollständiger Induktion

$$y_n = (1 + \lambda h)^n$$

folgt.

Das implizite Euler-Verfahren berechnet hingegen die folgenden Näherungen:

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_1 &= y_0 + h\lambda y_1 \iff y_1 = \frac{1}{1 - \lambda h} y_0 = \frac{1}{1 - \lambda h}, \\ y_2 &= \frac{1}{1 - \lambda h} y_1 = \frac{1}{(1 - \lambda h)^2}, \end{aligned}$$

also

$$y_n = \frac{1}{(1 - \lambda h)^n}.$$

Ist λ bei fest gewählter Schrittweite h im expliziten Euler-Verfahren so klein, dass

$$1 + h\lambda < -1$$

gilt, dann divergieren die Iterierten $(1 + h\lambda)^k$ oszillierend. Das explizite Euler-Verfahren ist in diesem Fall numerisch instabil.

Die Iterierten des impliziten Euler-Verfahrens verhalten sich anders. Für beliebige negative Werte λ ist $1 - h\lambda > 1$, sodass die mit dem impliziten Euler-Verfahren berechnete Folge $\left\{ \frac{1}{(1 - \lambda h)^k} \right\}_{k=0}^{\infty}$ im Einklang mit der Lösung $e^{\lambda x}$ von (16.7) streng monoton fällt. Das implizite Euler-Verfahren ist stabil.

Beispiel 16.13 Numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = -11y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

mit dem expliziten und dem impliziten Euler-Verfahren für verschiedene Schrittweiten.

x	e^{-11x}	$h = \frac{1}{5}$		$h = \frac{1}{10}$		$h = \frac{1}{20}$	
		Expl.	Impl.	Expl.	Impl.	Expl.	Impl.
0.1	$1.1 \cdot 10^{-1}$	—	—	$-1.0 \cdot 10^{-1}$	$4.8 \cdot 10^{-1}$	$2.0 \cdot 10^{-1}$	$4.2 \cdot 10^{-1}$
0.2	$3.3 \cdot 10^{-1}$	-1.2	$3.1 \cdot 10^{-1}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$2.3 \cdot 10^{-1}$	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-1}$
0.3	$3.7 \cdot 10^{-2}$	—	—	$-1.0 \cdot 10^{-3}$	$1.1 \cdot 10^{-1}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$	$7.2 \cdot 10^{-2}$
0.4	$1.2 \cdot 10^{-2}$	1.4	$9.8 \cdot 10^{-2}$	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$3.0 \cdot 10^{-2}$
0.7	$4.5 \cdot 10^{-4}$	—	—	$-1.0 \cdot 10^{-7}$	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$
1.0	$1.7 \cdot 10^{-5}$	-2.5	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$1.0 \cdot 10^{-10}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 16.2: Vergleich der Euler-Verfahren für $y' = -11y$, $y(0) = 1$.

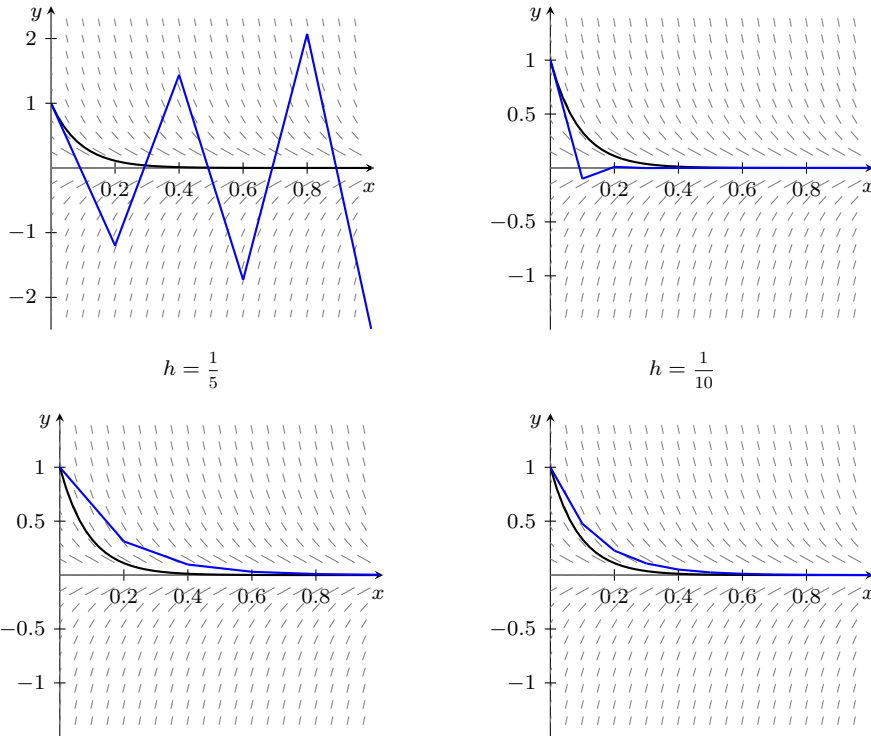


Abb. 16.14: Explizites (oben) und implizites Euler-Verfahren (unten) für das Modellproblem.

Wie Tabelle 16.2 zeigt, fallen die mit dem impliziten Euler-Verfahren berechneten Näherungen für jede der getesteten Schrittweiten streng monoton gegen Null. Beim expliziten Euler-Verfahren tritt dieses Verhalten erst für die Schrittweite $h = \frac{1}{20}$ auf. Bei der Schrittweite $h = \frac{1}{10}$ konvergieren die Näherungen oszillierend gegen Null, bei der Schrittweite $h = \frac{1}{5}$ divergieren sie oszillierend bei wachsenden Beträgen.

Man kann die unterschiedlichen Stabilitätseigenschaften auch so formulieren, dass das explizite Euler-Verfahren für eine zuverlässige Lösung des Anfangswertproblems (16.7) bei einer gegebenen Zahl $\lambda \ll 0$ wesentlich kleinere Schrittweiten erfordert als das implizite Euler-Verfahren, obwohl beide Verfahren die gleiche Konvergenzordnung besitzen.
 \triangle

Beispiel 16.14 Lösung der Differenzialgleichung der logistischen Funktion

$$\begin{cases} y' = ry(1 - y) \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

mit verschiedenen Einschrittverfahren.

	Verfahren	$y(1)$	Fehler
$r = 2$	exakt	0.8807970782	—
	expl. Euler	0.8902203384	$9.4 \cdot 10^{-3}$
	impl. Euler	0.8719633725	$8.8 \cdot 10^{-3}$
	Runge	0.8805815929	$2.2 \cdot 10^{-4}$
	RKV	0.8807963544	$7.2 \cdot 10^{-7}$
$r = 30$	exakt	1.0000000000	—
	expl. Euler	0.3846309308	$6.1 \cdot 10^{-1}$
	impl. Euler	0.9999994475	$5.5 \cdot 10^{-7}$
	Runge	0.6667640394	$3.3 \cdot 10^{-1}$
	RKV	0.7608171158	$2.4 \cdot 10^{-1}$
$r = 60$	exakt	1.0000000000	—
	expl. Euler	$-4 \cdot 10^{460}$	—
	impl. Euler	0.9999999985	$1.5 \cdot 10^{-9}$
	Runge	$-1.5 \cdot 10^{228732}$	—
	RKV	$-7.4 \cdot 10^{115692330820}$	—

Tabelle 16.3: Lösung der logistischen Differenzialgleichung mit Schrittweite $h = \frac{1}{10}$.
RKV bezeichnet das klassische Runge-Kutta-Verfahren.

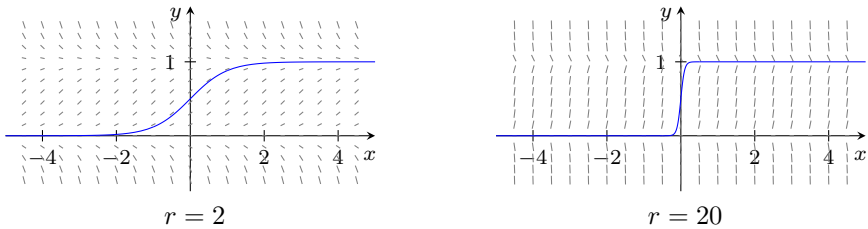


Abb. 16.15: Logistische Gleichung.

Die logistische Funktion beschreibt das Wachstumsverhalten einer Bakterienpopulation bei begrenzten Ressourcen. Der Parameter r begrenzt die maximale Wachstumsgeschwindigkeit. Die Differenzialgleichung ist durch Trennung der Veränderlichen exakt lösbar. Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = \frac{1}{1 + e^{-rx}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für $r > 0$ beschreibt der Graph der Funktion eine S-Kurve, die für $x \rightarrow -\infty$ gegen Null und für $x \rightarrow \infty$ gegen Eins strebt. Je größer r ist, desto steiler verläuft die Kurve in der Nähe von $x = 0$ und desto höher sind die Stabilitätsanforderungen an numerische Löser. Mit Schrittweite $h = \frac{1}{10}$ berechnen die expliziten Verfahren für $r = 30$ nur noch ungenaue Näherungen. Für $r = 60$ sind sie sogar völlig unbrauchbar, wohingegen das implizite Euler-Verfahren trotz niedriger Konvergenzordnung zuverlässige Werte liefert. \triangle

Das beobachtete Verhalten ist typisch für die Stabilitätseigenschaften von expliziten und impliziten Verfahren. Bei einem impliziten Verfahren kann der Rechenaufwand eines einzelnen Iterationsschritts hoch sein, aber das Verfahren ist stabil. Explizite Verfahren kommen mit vergleichsweise wenigen Rechenoperationen pro Iterationsschritt aus. Sie sind bei als *steif* bezeichneten Differenzialgleichungen aber instabil und somit unzuverlässig. Dies gilt sowohl für Einschrittverfahren als auch für Mehrschrittverfahren.

Für nicht steife Differenzialgleichungen sind explizite Verfahren genauso zuverlässig wie implizite Verfahren und in der Regel erheblich schneller. Falls von einer zu lösenden Differenzialgleichung nicht bekannt ist, ob sie *steif* ist, wird man daher zunächst ein explizites Verfahren zur Lösung verwenden. Wenn man dabei lange Rechenzeiten beobachtet oder die berechneten Werte nicht den Erwartungen entsprechen, empfiehlt sich eine Kontrollrechnung mit einem impliziten Verfahren.

Kapitel 17

Rand- und Eigenwertprobleme

17.1 Randwertprobleme

Bisher hatten wir Anfangswertaufgaben betrachtet, um eine eindeutige Lösung aus einer Lösungsschar zu einer gegebenen Differenzialgleichung zu identifizieren. Bei manchen Anwendungsproblemen hat man aber keine vollständige Information über den Funktionswert und alle benötigten Werte höherer Ableitungen an *einer* Stelle, sondern man kennt nur Werte der gesuchten Lösung sowie eventuell Werte von Ableitungen der Lösung an *verschiedenen* Stellen des Integrationsintervalls. Solche Aufgabenstellungen werden als Randwertprobleme oder Randwertaufgaben bezeichnet. Bereits einfache Beispiele zeigen, dass die Lösungstheorie von Randwertproblemen komplizierter ist als der in den Sätzen 13.11 und 13.12 formulierte Sachverhalt von Anfangswertaufgaben.

Wir verzichten auf eine allgemeine Diskussion und stellen lediglich zwei Beispiele vor, welche einige der auftretenden Schwierigkeiten illustrieren.

Beispiel 17.1 Die lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (17.1)$$

Nach Satz 14.1 ist das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(x_0) = \eta_1, \quad y'(x_0) = \eta_2 \end{cases}$$

für jede beliebige Vorgabe von x_0 , η_1 und η_2 eindeutig lösbar.

Statt einer Anfangsbedingung stellen wir nur Randbedingungen derart, dass an zwei verschiedenen Stellen $x_1 < x_2$ jeweils der Funktionswert der Lösung vorgeschrieben wird.

1. Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = 1. \end{cases}$$

Setzt man die allgemeine Lösung (17.1) in die Randbedingung ein, erhält man das eindeutig lösbares lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin 0}_{=0} &\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_1 = 1, \\ c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 &\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1 - \cos 1}{\sin 1}. \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

dieses linearen Gleichungssystems ist nichtsingulär, sodass das LGS auch für jede andere Vorgabe von Funktionswerten an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ eindeutig lösbar ist.

2. Analoges Vorgehen beim Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y(\pi) = -1 \end{cases}$$

liefert

$$\begin{aligned} c_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin 0}_{=0} &\stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_1 = 1, \\ c_1 \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + c_2 \underbrace{\sin \pi}_{=0} &\stackrel{!}{=} -1 \Rightarrow c_1 = 1. \end{aligned}$$

Der Parameter c_2 darf beliebig gewählt werden. Jede Funktion

$$y(x) = \cos x + c_2 \sin x, \quad c_2 \in \mathbb{R}$$

löst das Randwertproblem.

Der Sachverhalt erklärt sich leicht mithilfe der Lösungstheorie linearer Gleichungssysteme. Die Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist singulär, sodass das LGS je nach rechter Seite entweder keine oder unendlich viele Lösungen besitzt.

3. Ändert man das letzte Randwertproblem ab in

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1, y(\pi) = 2, \end{cases}$$

dann ergibt sich aus

$$c_1 \underbrace{\cos 0}_{=1} + c_2 \underbrace{\sin 0}_{=0} \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow c_1 = 1,$$

$$c_1 \underbrace{\cos \pi}_{=-1} + c_2 \underbrace{\sin \pi}_{=0} \stackrel{!}{=} 2 \Rightarrow c_1 = -2$$

ein Widerspruch. Dieses LGS und somit auch die gestellte Randwertaufgabe sind unlösbar. \triangle

Beispiel 17.2 Ein einfaches Beispiel für eine praktische Randwertaufgabe ist die Kurve eines homogenen und ideal biegsamen Seils, das zwischen zwei Aufhängepunkten durchhängt.

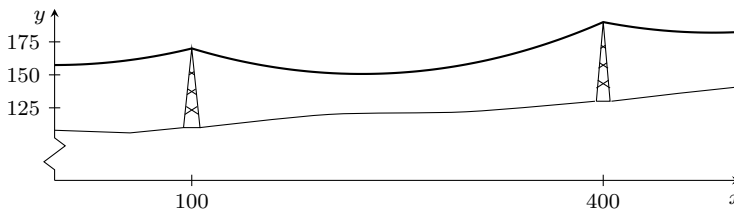


Abb. 17.1: Stromleitung zwischen zwei Masten.

Die Seilkurve $y(x)$ genügt der Differenzialgleichung

$$y'' = a\sqrt{1 + y'^2},$$

wobei der Parameter a die Materialeigenschaften des Seils beschreibt. Mit der Substitution $u = y'$ erhält man die separierbare Differenzialgleichung

$$u' = a\sqrt{1 + u^2},$$

welche durch Trennung der Veränderlichen gelöst wird. Es ist

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = a dx \iff \operatorname{arsinh} u = ax + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Auflösen nach u ergibt

$$y' = u = \sinh(ax + c_1)$$

und durch Integration die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{a} \cosh(ax + c_1) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind für jede Randbedingung

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2$$

mit gegebenen Zahlen $x_1 < x_2$, y_1 und y_2 eindeutig bestimmt. Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\frac{1}{a} \cosh(ax_1 + c_1) + c_2 = y_1$$

$$\frac{1}{a} \cosh(ax_2 + c_1) + c_2 = y_2$$

zur Bestimmung von c_1 und c_2 ist aber im Allgemeinen nur iterativ, z.B. mit dem mehrdimensionalen Newton-Verfahren, lösbar.

Als konkretes Zahlenbeispiel sei eine Hochspannungsleitung mit den Werten

$$a = 0.0025, \quad x_1 = 100, \quad x_2 = 400, \quad y_1 = 170, \quad y_2 = 190$$

gegeben. Gesucht sind c_1 und c_2 mit

$$400 \cosh(0.25 + c_1) + c_2 = 170,$$

$$400 \cosh(1 + c_1) + c_2 = 190,$$

welche mit dem Newton-Verfahren berechnet werden sollen.

Zur Durchführung des Newton-Verfahrens sind zunächst Startwerte zu bestimmen. Dazu nehmen wir den symmetrischen Fall $y_1 = y_2 = 180$ an und fordern

$$400 \cosh(0.25 + c_1) + c_2 \stackrel{!}{=} 400 \cosh(1 + c_1) + c_2 \iff \cosh(0.25 + c_1) = \cosh(1 + c_1).$$

Wir suchen somit zwei unterschiedliche Stellen $z_1 = 0.25 + c_1$ und $z_2 = 1 + c_1$, an denen der Kosinushyperbolicus denselben Funktionswert besitzt. Dies ist genau für $z_1 = -z_2$ erfüllt, also

$$0.25 + c_1 \stackrel{!}{=} -(1 + c_1) \iff c_1 = -0.625.$$

Einen Startwert für c_2 erhält man aus dem Ansatz

$$400 \cosh(0.375) + c_2 \stackrel{!}{=} 180 \iff c_2 = 180 - 400 \cosh(0.375) \approx -248.456$$

Zu diesen Startwerten liefert das Newton-Verfahren nach vier Iterationen die Näherungswerte

$$c_1 = -0.560, \quad c_2 = -249.364.$$

△

17.2 Eigenwertprobleme

Eigenwertprobleme entstehen, wenn eine homogene lineare Differenzialgleichung einen Parameter λ enthält und zu einer gegebenen Randwertaufgabe diejenigen Werte λ gesucht sind, für welche das Randwertproblem nichttriviale Lösungen besitzt. Solche Zahlen heißen Eigenwerte des Randwertproblems, die zugehörigen nichttrivialen Lösungen Eigenfunktionen.

Die uns zur Verfügung stehenden mathematischen Mittel erlauben keine allgemeine Untersuchung von Eigenwertproblemen. Wir diskutieren daher nur zwei einfache Spezialfälle, welche als Vorbereitung auf das nächste Kapitel genügen.

Beispiel 17.3 Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{cases} y'' = \lambda y \\ y(0) = 0, y(\ell) = 0. \end{cases} \quad (17.2)$$

Dabei ist $\ell > 0$ fest vorgegeben.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ löst $y(x) \equiv 0$ das Randwertproblem (17.2). Dies ist die *triviale* Lösung. Gesucht sind nun solche Werte von λ , dass (17.2) zusätzlich nichttriviale Lösungen besitzt. Dazu ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1. Es sei $\lambda > 0$. Dann lautet die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y'' = \lambda y$

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Setzt man diese Lösung in die Randbedingung ein, erhält man das LGS

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_2 = -c_1, \\ y(\ell) &= c_1 \left(\underbrace{e^{\sqrt{\lambda}\ell}}_{>1} - \underbrace{e^{-\sqrt{\lambda}\ell}}_{<1} \right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_1 = 0. \end{aligned}$$

Für $\lambda > 0$ ist daher keine nichttriviale Lösung möglich. Das Eigenwertproblem (17.2) besitzt also keine positiven Eigenwerte.

2. Im Fall $\lambda = 0$ ist die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y'' = 0$ gegeben durch

$$y(x) = c_1 + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen in die Randbedingung ergibt wegen $\ell \neq 0$

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \stackrel{!}{=} 0, \\ y(\ell) &= c_1 + c_2 \ell = c_2 \ell \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_2 = 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $\lambda = 0$ kein Eigenwert von (17.2).

3. Es verbleibt der Fall $\lambda < 0$ mit der allgemeinen Lösung

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus der Randbedingung folgt

$$y(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_1 = 0,$$

$$y(\ell) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} \ell) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \ell) = c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} \ell) \stackrel{!}{=} 0.$$

Die letzte Bedingung ist für $c_2 = 0$ erfüllt, was aber wieder auf die triviale Lösung führt, *oder wenn λ so gewählt wird, dass*

$$\sin(\sqrt{-\lambda} \ell) = 0$$

gilt. Dies ist genau für

$$\sqrt{-\lambda} \ell = k\pi \iff \lambda = -\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

richtig. Also ist jede Zahl

$$\lambda_k = -\frac{k^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad k \in \mathbb{N}$$

ein Eigenwert von (17.2). Eine zu λ_k gehörige Eigenfunktion ist

$$y_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right). \quad \triangle$$

Beispiel 17.4 Gegeben sei ein senkrechter, unten vertikal eingespannter elastischer Stab der Länge ℓ mit Elastizitätsmodul E und axialem Flächenträgheitsmoment J . Wird der Stab in Richtung seiner Längsachse durch eine Kraft F belastet, besteht die Gefahr des seitlichen Ausknickens (Euler'sche Knicklasten).

Für kleine Durchbiegungen wird die Auslenkung $y(x)$ für $0 \leq x \leq \ell$ durch das Randwertproblem

$$y'' = -\frac{F}{EJ} y, \quad y(0) = y'(\ell) = 0$$

beschrieben. Dabei ist das Koordinatensystem geschickt so zugrunde gelegt, um diese Randbedingungen zu ermöglichen. Man beachte, dass die unbekannte seitliche Auslenkung des Stabs nicht auftritt.

Mit $\lambda := -\frac{F}{EJ}$ ergibt sich dieselbe Differenzialgleichung wie im letzten Beispiel. Wie dort zeigt man, dass das Eigenwertproblem

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(\ell) = 0$$

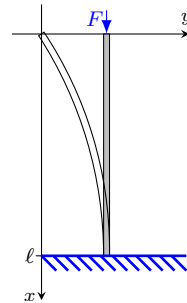


Abb. 17.2: Ausknicken eines Stabs.

keine positiven Eigenwerte besitzt und dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist. Setzt man für $\lambda < 0$ das Fundamentalsystem

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda} x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

in die Randbedingungen ein, liefern die Gleichungen

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1 \stackrel{!}{=} 0, \\ y'(\ell) &\stackrel{c_1=0}{=} \sqrt{-\lambda} c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} \ell) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

nichttriviale Lösungen, wenn

$$\cos(\sqrt{-\lambda} \ell) = 0 \iff \sqrt{-\lambda} \ell = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

gilt. Für $k = 0$ erhält man die kleinste Last, bei der ein Ausbrechen des Stabs auftritt:

$$\sqrt{-\lambda} = \frac{\pi}{2\ell} \iff F = \frac{\pi^2 EJ}{4\ell^2}.$$

△

Kapitel 18

Partielle Differenzialgleichungen

Zum Abschluss geben wir einen Ausblick auf die Theorie und die numerische Behandlung partieller Differenzialgleichungen. Wir stellen drei repräsentative Aufgabenstellungen aus Anwendungen vor, die jeweils durch eine lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung modelliert werden. Dazu besprechen wir je ein problemspezifisches Lösungsverfahren.

Eine partielle Differenzialgleichung (PDG) ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion u von mehreren Veränderlichen, welche neben u und den Veränderlichen auch partielle Ableitungen von u enthält. Die Ordnung der höchsten vorkommenden partiellen Ableitung heißt *Ordnung* der Differenzialgleichung. Eine hinreichend oft differenzierbare Funktion u , welche die Differenzialgleichung erfüllt, heißt *Lösung* der Differenzialgleichung. Eine partielle Differenzialgleichung für u heißt *linear*, wenn sie bezüglich u und aller partiellen Ableitungen von u linear ist. Die Unterscheidung in homogene und inhomogene lineare partielle Differenzialgleichungen erfolgt wie bei gewöhnlichen Differenzialgleichungen.

Beispiel 18.1

1. Die Gleichung

$$u_t(x, t) - tu_x(x, t) = 0 \quad (18.1)$$

ist eine homogene lineare partielle Differenzialgleichung erster Ordnung für die Funktion $u(x, t)$. Wie man durch Nachrechnen bestätigt, ist $u(x, t) = 2x + t^2$ eine Lösung von (18.1). Ebenfalls durch Einsetzen in (18.1) zeigt man, dass jede Funktion der Bauart

$$u(x, y) = \phi(2x + t^2)$$

mit einer differenzierbaren Funktion ϕ einer Veränderlichen die Gleichung (18.1) löst.

2. Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

steuert die Massen- oder Ladungserhaltung physikalischer Größen. Dabei ist ϱ die Massendichte einer Erhaltungsgröße $u(x, y, z, t)$ und \vec{j} die zugehörige Stromdichte.

3. Die Korteweg-de Vries-Gleichung

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (18.2)$$

ist eine nichtlineare partielle Differenzialgleichung dritter Ordnung. Sie beschreibt die Ausbreitung von Wellen in flachen Kanälen und wird deshalb auch Flachwassergleichung genannt. Für beliebige $a, c > 0$ ist

$$u(x, t) = \frac{2c^2}{\cosh^2(c(x - 4c^2 t - a))}$$

eine Lösung von (18.2).

△

Eine partielle Differenzialgleichung besitzt im Allgemeinen unendlich viele Lösungen. Um ein sachgerecht gestelltes Problem zu erhalten, sind zu jeder partiellen Differenzialgleichung typspezifische Zusatzbedingungen zu stellen, welche Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung sowie die stetige Abhängigkeit der Lösung von diesen Eingangsdaten sichern. Je nach Aufgabenstellung erreicht man dies durch Anfangsbedingungen, Randbedingungen oder sowohl Anfangs- als auch Randbedingungen.

Analytische Lösungsverfahren für partielle Differenzialgleichungen sind nur in einfachen Spezialfällen verfügbar und zur Lösung praktischer Probleme nahezu bedeutungslos. Letztere können nur näherungsweise numerisch gelöst werden. Allerdings darf man die Theorie partieller Differenzialgleichungen bei einer numerischen Herangehensweise nicht unberücksichtigt lassen. Der Typ eines gegebenen Problems legt zum einen fest, in welcher Form Zusatzbedingungen zu stellen sind, und hat zum anderen unmittelbaren Einfluss auf die Konvergenz und Stabilität numerischer Methoden. Daher müssen Näherungsverfahren zur Lösung partieller Differenzialgleichungen typspezifisch konstruiert und eingesetzt werden.

Aufgrund der hohen Bedeutung partieller Differenzialgleichungen, vor allem auch in den Ingenieurwissenschaften, wurden in den letzten Jahrzehnten eine Fülle numerischer Verfahren entwickelt, mit denen sich in vielen Fällen zuverlässige Näherungslösungen berechnen lassen. Derartige Verfahren sind immer noch ein intensiv betriebenes Forschungsgebiet sowohl von Mathematikern als auch von Anwendern.

18.1 Grundtypen zweiter Ordnung

Die allgemeine lineare partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung in zwei Variablen ist durch

$$\begin{aligned} a(x, y)u_{xx}(x, y) + b(x, y)u_{xy}(x, y) + c(x, y)u_{yy}(x, y) \\ + d(x, y)u_x(x, y) + e(x, y)u_y(x, y) + f(x, y)u(x, y) = g(x, y) \end{aligned} \quad (18.3)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen $a(x, y), \dots, g(x, y)$ gegeben. Die Einteilung in drei Grundtypen berücksichtigt nur die Terme mit zweiten partiellen Ableitungen und orientiert sich am Vorzeichen des Ausdrucks

$$D(x, y) := 4a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y).$$

- Ist $D(x, y) = 0$, dann heißt (18.3) *parabolisch* im Punkt (x, y) .
- Im Fall $D(x, y) < 0$ bezeichnet man (18.3) als *hyperbolisch* im Punkt (x, y) .
- Falls $D(x, y) > 0$ gilt, wird (18.3) *elliptisch* im Punkt (x, y) genannt.

Die Bezeichnungen gehen auf eine Analogie zu Kegelschnitten zurück. Schneidet man einen Kegel mit einer Ebene, kann sich als Schnittkurve je nach Lage von Kegel und Schnittebene u.a. eine Parabel

$$ax^2 + ey + f = 0 \quad (a, e \neq 0),$$

eine Hyperbel

$$ax^2 - cy^2 + f = 0 \quad (a, c > 0, f \neq 0),$$

oder eine Ellipse

$$ax^2 + cy^2 + f = 0 \quad (a, c > 0, f < 0)$$

ergeben. Die obige Einteilung partieller Differenzialgleichungen stimmt damit überein, wenn man Potenzen in Kegelschnitten durch partielle Ableitungen ersetzt.

Das jeweils einfachste Beispiel der genannten Grundtypen ist

- die homogene eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

für den parabolischen Typ,

- die homogene eindimensionale Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t)$$

für hyperbolische Differenzialgleichungen,

- die homogene Potenzialgleichung in der Ebene

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$$

bei elliptischen Problemen.

18.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Mit der Wärmeleitungsgleichung werden die Ausbreitung von Wärme sowie Diffusionsprozesse beschrieben. Je nachdem, ob die Wärmeausbreitung in einer, zwei oder drei Raumdimensionen erfolgt, lautet die inhomogene lineare Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(x, t),$$

$$u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + f(x, y, t),$$

oder

$$u_t(x, y, z, t) = u_{xx}(x, y, z, t) + u_{yy}(\cdot) + u_{zz}(\cdot) + f(x, y, z, t),$$

kurz

$$u_t = \Delta u + f,$$

wobei f eine stetige Funktion bezeichnet. Im nichtlinearen Fall darf f jeweils auch von u und räumlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung von u abhängen.

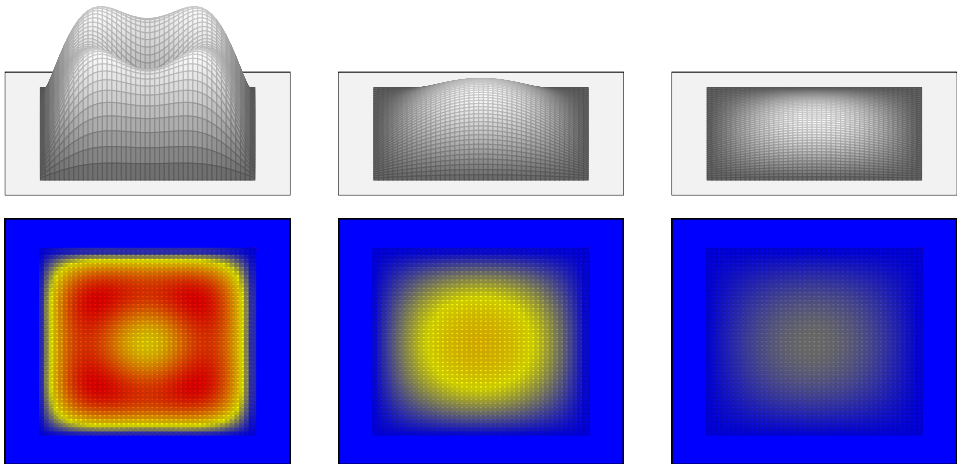


Abb. 18.1: Abkühlung einer rechteckigen Platte.

Betrachtet wird nun ein einfacher Spezialfall, nämlich die Wärmeverteilung in einem isolierten Stab der Länge ℓ , dessen Anfangstemperatur $u(x, t) = \varphi(x)$ zur Zeit $t = 0$ an jeder Stelle x des Stabs bekannt ist und in dem zur Zeit $t > 0$ an der Stelle x die Wärme $f(x, t)$ erzeugt wird. An den Endpunkten $x = 0$ und $x = \ell$ des Stabs werden für $t > 0$ die Temperaturen $u(0, t) = \psi_1(t)$ und $u(\ell, t) = \psi_2(t)$ vorgegeben. Gesucht ist die Temperaturfunktion $u(x, t)$ im Stab für $t > 0$ und $0 < x < \ell$.

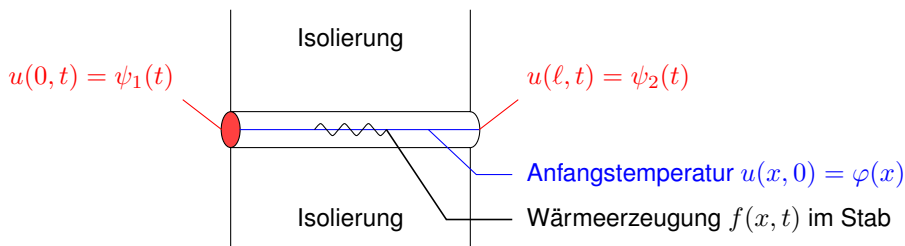


Abb. 18.2: Wärmeausbreitung im Stab.

Die Temperaturverteilung genügt der *Wärmeleitungsgleichung*

$$u_t(x, t) = a u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad (18.4)$$

wobei $a > 0$ die Temperaturleitfähigkeit des Stabs bezeichnet. Um eine eindeutig lösbare Problemstellung zu erhalten, sind die eingangs erwähnten Zusatzbedingungen zu stellen, also die *Anfangsbedingung*

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (18.5)$$

sowie die *Randbedingungen*

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(\ell, t) = \psi_2(t), \quad t > 0 \quad (18.6)$$

mit gegebenen stetigen Funktionen $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$ und $\psi_2(t)$.

Die Gleichungen (18.4), (18.5) und (18.6) bilden gemeinsam das *erste Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung*. Damit eine stetige Lösung dieses Problems möglich ist, müssen die *Übergangsbedingungen*

$$u(0, 0) = \varphi(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \psi_1(t),$$

$$u(\ell, 0) = \varphi(\ell) = \lim_{t \rightarrow 0+} \psi_2(t)$$

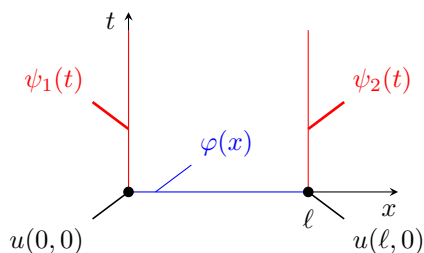


Abb. 18.3: Übergangsbedingungen.

erfüllt sein.

18.2.1 Lösung des homogenen 1. ARWPs mit Produktansatz

Zur Vereinfachung der nun folgenden Rechnung fordern wir im Anfangsrandwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung zusätzlich, dass die Funktionen $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ und $f(x, t)$ verschwinden. Gesucht ist also eine Lösung der Aufgabe

$$u_t(x, t) = a u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \quad (18.7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (18.8)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \quad t > 0. \quad (18.9)$$

Dabei ist φ eine gegebene stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0.$$

Diese Voraussetzung sichert, dass die Übergangsbedingungen erfüllt sind.

Das Berechnungsverfahren für eine Lösung von (18.7) - (18.9) besteht aus zwei Schritten. Zunächst bestimmen wir spezielle Lösungen der Differenzialgleichung (18.7), die auch der Randbedingung (18.9) genügen. Anschließend wird aus diesen Funktionen eine Reihe gebildet, welche die Anfangsbedingung (18.8) erfüllt.

1. Schritt: Produktansatz

Wir suchen Lösungen der Differenzialgleichung (18.7), welche als Produkt zweier Funktionen von je einer der Veränderlichen x und t geschrieben werden können, die also die Form

$$u(x, t) = v(x) w(t)$$

besitzen. Setzt man die partiellen Ableitungen

$$u_t(x, t) = v(x) w'(t), \quad u_{xx}(x, t) = v''(x) w(t)$$

in (18.7) ein, folgt aus

$$v(x) w'(t) = a v''(x) w(t)$$

durch Trennung der Veränderlichen

$$\frac{w'(t)}{a w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} \quad \text{für alle } (x, t) \text{ mit } 0 < x < \ell, t > 0. \quad (18.10)$$

Da die $\left\{ \begin{array}{l} \text{linke} \\ \text{rechte} \end{array} \right\}$ Seite von (18.10) nicht von $\left\{ \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \right\}$ abhängt, gibt es eine reelle Zahl λ , für die

$$\frac{w'(t)}{a w(t)} = \lambda = \frac{v''(x)}{v(x)} \quad \text{für } 0 < x < \ell, t > 0$$

gilt. Die Funktionen $v(x)$ und $w(t)$ lösen also die gewöhnlichen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} w'(t) - a\lambda w(t) &= 0, \\ v''(x) - \lambda v(x) &= 0. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Gesucht sind nichttriviale Lösungen dieser Differenzialgleichungen.

Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} u(0, t) &= v(0)w(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für alle } t > 0, \\ u(\ell, t) &= v(\ell)w(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für alle } t > 0 \end{aligned}$$

sind genau dann erfüllt, wenn

$$v(0) = v(\ell) = 0$$

oder

$$w(t) = 0 \text{ für alle } t > 0$$

gilt. Nichttriviale Lösungen treten nur im ersten Fall auf, d.h. wenn $v(x)$ Lösung des Eigenwertproblems

$$\begin{cases} v'' = \lambda v \\ v(0) = 0, v(\ell) = 0 \end{cases} \quad (18.12)$$

ist. Aus Beispiel 17.3 ist bekannt, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Eigenfunktion

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

zum Eigenwert

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$$

von (18.12) existiert.

Zugehörige Lösungen $w(t)$ werden durch Einsetzen von λ_k in (18.11) bestimmt. Die gewöhnliche lineare Differenzialgleichung erster Ordnung

$$w'(t) + \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} w(t) = 0$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$w_k(t) = c_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}at}, \quad c_k \in \mathbb{R},$$

woraus schließlich

$$u_k(x, t) = c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}at}, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

folgt. Jede solche Funktion erfüllt die Wärmeleitungsgleichung (18.7) sowie die homogenen Randbedingungen (18.9).

2. Schritt: Reihenansatz

Da jede Summe von Lösungen wieder eine Lösung ergibt, löst auch jede konvergente Reihe

$$u(x, t) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}at} \quad (18.13)$$

die Differenzialgleichung (18.7) unter Einhaltung von (18.9). Um zusätzlich die Anfangsbedingung (18.8) zu erfüllen, sind die Koeffizienten c_k in (18.13) so zu wählen, dass

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = \varphi(x)$$

gilt. Indirekt ist dies eine Voraussetzung an φ : Die Funktion $\varphi(x)$, $x \in [0, \ell]$ muss als Fourier-Reihe in eine reine Sinusreihe entwickelbar sein. Dies ist genau dann möglich, wenn man der Fourier-Entwicklung die 2ℓ -periodische ungerade Hilfsfunktion

$$\tilde{\varphi}(x) := \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq \ell \\ -\varphi(-x), & -\ell < x < 0 \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x + 2\ell) = \tilde{\varphi}(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

zugrunde legt. Diese Funktion ist wegen der Voraussetzung $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ auf ganz \mathbb{R} stetig. Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten c_k gilt aufgrund der Symmetrie von $\tilde{\varphi}$

$$c_k = \frac{2}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \tilde{\varphi}(x) \sin\left(\frac{2k\pi}{2\ell}x\right) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Funktion $\tilde{\varphi}$ wird also nur zur Herleitung der Berechnungsformel, nicht aber zur praktischen Berechnung der Koeffizienten c_k in (18.13) benötigt.

Beispiel 18.2

1. Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u_{xx}(x, t), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Es liegt der Fall $a = 1$, $\ell = \pi$, $\varphi(x) = \sin x$ vor. Die Übergangsbedingungen sind wegen $\sin 0 = \sin \pi = 0$ erfüllt.

Der Reihenansatz

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) e^{-k^2 t}$$

führt auf

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx) \stackrel{!}{=} \varphi(x) = \sin x.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourier-Entwicklung kann man die Koeffizienten c_k hier ohne Rechnung direkt ablesen. Es ist

$$c_1 = 1, \quad c_k = 0 \text{ für } k \geq 2.$$

Somit löst

$$u(x, t) = \sin x e^{-t}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t > 0$$

das gestellte Problem.

2. Beim Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
 u_t &= 4u_{xx}, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= 1 - |x - 1|, & 0 \leq x \leq 2, \\
 u(0, t) &= u(2, t) = 0, & t > 0,
 \end{aligned}$$

besitzen die Parameter die Werte $a = 4$, $\ell = 2$ und es ist

$$\varphi(x) = 1 - |x - 1| = \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Die Übergangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$ sind erfüllt. Die Lösung des Problems lautet daher

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{\ell}x\right) e^{-\frac{k^2\pi^2 a t}{\ell^2}} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) e^{-k^2\pi^2 t}$$

mit

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 \varphi(x) \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx \\
 &= \int_0^1 x \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx + \int_1^2 (2 - x) \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx
 \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
 c_k &= \left[-\frac{2}{k\pi} x \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \right]_0^1 + \frac{2}{k\pi} \int_0^1 \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx \\
 &\quad - \left[\frac{2}{k\pi} (2 - x) \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \right]_1^2 - \frac{2}{k\pi} \int_1^2 \cos\left(\frac{k\pi}{2}x\right) dx \\
 &= -\frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + 0 + \frac{4}{k^2\pi^2} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \right]_0^1 \\
 &\quad - 0 + \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{4}{k^2\pi^2} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right) \right]_1^2 \\
 &= \frac{4}{k^2\pi^2} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \sin 0 - \sin(k\pi) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{8}{k^2\pi^2} & \text{für } k = 1, 5, 9, \dots, \\ -\frac{8}{k^2\pi^2} & \text{für } k = 3, 7, 11, \dots \end{cases}
 \end{aligned}$$

Setzt man $k = 2j - 1$, kann man die beiden letzten Fälle zu

$$c_{2j-1} = \frac{8(-1)^{j+1}}{(2j-1)^2\pi^2}$$

zusammenfassen, woraus

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{j+1}}{(2j-1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{(2j-1)\pi x}{2}\right) e^{-(2j-1)^2\pi^2 t} \quad (18.14)$$

folgt. △

Bemerkung 18.3

1. Alle Summanden in der Reihe (18.14) klingen mit wachsender Zeit t exponentiell ab. Das Lösungsverhalten entspricht dem einer heißen Herdplatte (Anfangsbedingung), die nach dem Ausschalten ($f(x, t) = 0$) auf Zimmertemperatur (Randbedingung) abkühlt.
2. Die Wärmeleitungsgleichung kann man nicht rückwärts in der Zeit lösen. Ersetzt man t in (18.14) durch $-t$, werden alle Summanden der Reihe exponentiell verstärkt. Eine kleine Störung in der Anfangsbedingung, z.B. durch Messfehler, würde nach kurzer Zeit zu beliebigen großen Änderungen der Lösung führen.

Auch diesen Sachverhalt kann man sich an einer Herdplatte klar machen. Bei einer auf Zimmertemperatur abgekühlten Herdplatte kann man nicht sagen, welche Temperatur sie einige Stunden zuvor hatte. ◇

18.3 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung modelliert die Ausbreitung von Wellen und Schwingungen. Wichtige praktische Anwendungsfälle sind Schwingungen von Hängebrücken oder Turbinen.

Eine schwingende Saite der Länge ℓ , die durch eine stetige äußere Kraft $f(x, t)$ erregt wird, genügt der inhomogenen Wellengleichung

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0,$$

wobei die zweimal partiell nach x und t differenzierbare Funktion $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite an der Stelle x zur Zeit t und $c > 0$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle beschreibt.

Durch Hinzufügen weiterer Ortskoordinaten lässt sich die Wellengleichung auf höhere Raumdimensionen erweitern. Die Ausbreitung von Wasserwellen auf der Oberfläche eines Gewässers wird durch die Gleichung

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad u = u(x, y, t)$$

beschrieben, die Ausbreitung von Schallwellen im \mathbb{R}^3 durch

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad u = u(x, y, z, t).$$

Dimensionsunabhängig ist die Wellengleichung durch

$$u_{tt} = \Delta u + f$$

gegeben. Die stetige rechte Seite f kann im nichtlinearen Fall von u sowie von räumlichen partiellen Ableitungen erster Ordnung von u abhängen. Für eine eindeutige Lösung dieser Gleichungen sind dabei noch Zusatzbedingungen zu stellen, die wir unten näher spezifizieren.

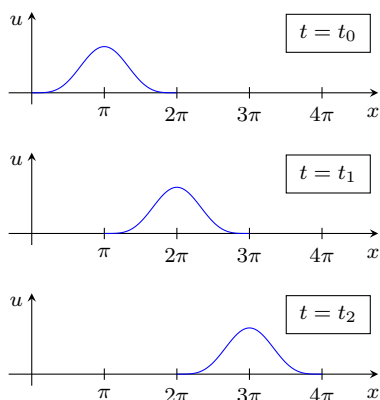


Abb. 18.4a: Wellenausbreitung in einem Seil.

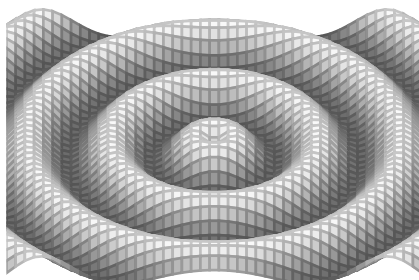


Abb. 18.4b: Wasserwellen.

Speziell betrachten wir nun freie Schwingungen einer unendlich langen Saite, d.h. die homogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (18.15)$$

Von dieser Differentialgleichung lassen sich durch Einführung eines neuen Koordinatensystems (ξ, η) mit

$$\left. \begin{array}{l} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ t = \frac{1}{2c}(\xi - \eta) \end{array} \right.$$

alle Lösungen berechnen. Man definiert die Funktion $v(\xi, \eta)$ durch

$$u(x, t) = u\left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)\right) =: v(\xi, \eta) = v(x + ct, x - ct) \quad (18.16)$$

und transformiert partielle Ableitungen von u nach x und t mithilfe der Kettenregel in partielle Ableitungen von v nach ξ und η . Partielle Ableitung nach x bzw. t in (18.16) ergibt

$$\begin{aligned} u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x = v_\xi + v_\eta, \\ u_t &= v_\xi \xi_t + v_\eta \eta_t = v_\xi \cdot c + v_\eta \cdot (-c) = c(v_\xi - v_\eta). \end{aligned}$$

Ebenso berechnen sich die zweiten partiellen Ableitungen zu

$$u_{xx} = v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}, \quad u_{tt} = c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}).$$

Die Differenzialgleichung (18.15) geht über in

$$c^2(v_{\xi\xi} - 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}) = c^2(v_{\xi\xi} + 2v_{\xi\eta} + v_{\eta\eta}),$$

woraus

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \quad (18.17)$$

folgt.

Gleichung (18.17) kann durch zweimalige Integration gelöst werden. Aus

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta}(v_{\xi})(\xi, \eta) = 0$$

folgt durch Integration bezüglich η

$$v_{\xi}(\xi, \eta) = \phi(\xi),$$

wobei $\phi(\xi)$ eine Funktion von ξ ist. Mit

$$\int \phi(\xi) d\xi =: \chi(\xi)$$

erhält man durch Integration bezüglich ξ schließlich

$$v(\xi, \eta) = \chi(\xi) + \psi(\eta) \quad (18.18)$$

mit einer Funktion $\psi(\eta)$.

Aufgrund der Herleitung müssen χ und ψ in (18.18) zweimal differenzierbar sein. Abgesehen von dieser Einschränkung dürfen diese Funktionen aber beliebig gewählt werden. Durch Einsetzen zeigt man, dass jede Funktion $u(x, t)$ der Bauart

$$u(x, t) = v(\xi, \eta) = \chi(\xi) + \psi(\eta) = \chi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

eine Lösung der homogenen Wellengleichung (18.15) darstellt.

Zusatzbedingungen in Form zweier vorgegebener Funktionen $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R})$ und $\varphi_2 \in C^1(\mathbb{R})$, für die

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

gelten soll, machen die Lösung eindeutig. Für die Wellenfunktion u wird die Anfangsauslenkung $\varphi_1(x)$ und eine Anfangsgeschwindigkeit $\varphi_2(x)$ der Welle zur Zeit $t = 0$ vorgeschrieben. Aus

$$u_t(x, t) = \chi'(x + ct) \cdot c + \psi'(x - ct) \cdot (-c)$$

folgt zunächst

$$u_t(x, 0) = c(\chi'(x) - \psi'(x)) \stackrel{!}{=} \varphi_2(x)$$

und weiter durch Integration

$$\chi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x \varphi_2(s) ds,$$

wobei die Untergrenze x_0 des Integrals einer beliebigen Integrationskonstante entspricht. Fügt man zu der letzten Beziehung die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \chi(x) + \psi(x) = \varphi_1(x)$$

hinzu, dann entsteht ein lineares Gleichungssystem für χ und ψ , welches die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}\chi(x) &= \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \varphi_2(s) ds, \\ \psi(x) &= \frac{1}{2}\varphi_1(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x \varphi_2(s) ds\end{aligned}$$

besitzt. Mit den auf diese Weise bestimmten Funktionen χ und ψ erhält man schließlich die *d'Alembert'sche Lösung* der homogenen Wellengleichung (18.15):

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \chi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2}\varphi_1(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} \varphi_2(s) ds + \frac{1}{2}\varphi_1(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x-ct} \varphi_2(s) ds \\ &= \frac{1}{2}(\varphi_1(x + ct) + \varphi_1(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_2(s) ds.\end{aligned}\tag{18.19}$$

Man beachte, dass die unbekannte Integrationsgrenze x_0 in dieser Lösungsdarstellung nicht mehr auftritt und die Lösung durch Vorgabe der Funktionen φ_1 und φ_2 in der Tat eindeutig bestimmt wird.

Beispiel 18.4 Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \cos x, \quad u_t(x, 0) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Hier ist $c = 1$. Einsetzen in (18.19) liefert die Lösung

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2}(\cos(x + t) + \cos(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \sin s ds \\ &= \frac{1}{2}(\cos(x + t) + \cos(x - t)) - \frac{1}{2} \left[\cos s \right]_{x-t}^{x+t} = \cos(x - t).\end{aligned}$$

Die Lösung stellt eine im zeitlichen Verlauf nach rechts fortschreitende Welle dar.

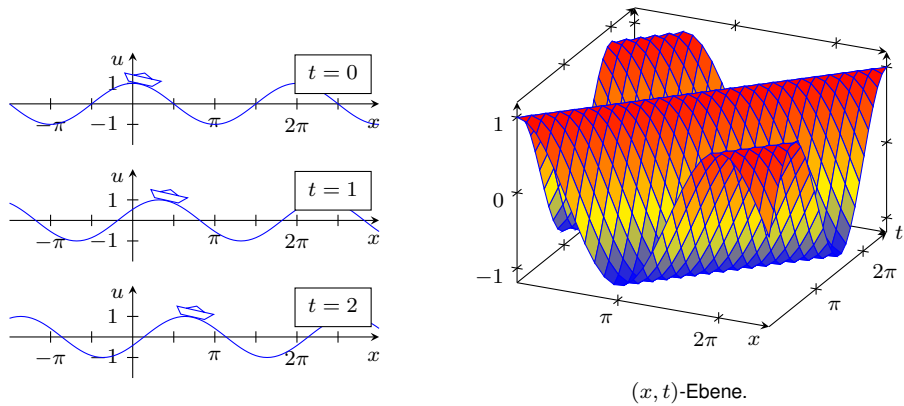


Abb. 18.5: Nach rechts fortschreitende Welle.

△

Zur geometrischen Veranschaulichung der d'Alembert'schen Lösung der homogenen Wellengleichung halten wir nun einen Punkt (x_0, t_0) mit $t_0 > 0$ in der (x, t) -Ebene fest. Der Funktionswert $u(x_0, t_0)$ berechnet sich dann durch

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x_0 + ct_0) + \varphi_1(x_0 - ct_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} \varphi_2(s) ds.$$

Es gehen nur die Funktionswerte von φ_1 an den Stellen $x_0 - ct_0$ und $x_0 + ct_0$ sowie das Integral von φ_2 über das Intervall $I := [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0]$ in die Berechnung ein. Funktionswerte von φ_1 oder φ_2 außerhalb dieses Intervalls haben keinen Einfluss auf den Funktionswert von u an der Stelle (x_0, t_0) . Aufgrund dieser Eigenschaft heißt das Intervall I *Abhängigkeitsgebiet* des Punkts (x_0, t_0) .

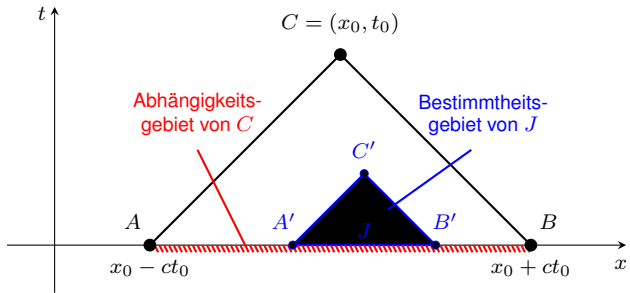


Abb. 18.6: Abhängigkeits- und Bestimmtheitsgebiet.

Das beobachtete Lösungsverhalten spiegelt die physikalische Realität der Wellenausbreitung wieder. Wellen pflanzen sich mit endlicher Geschwindigkeit c fort. Ereignisse,

die weit entfernt stattfinden, benötigen eine gewisse Zeit, bis sie sich an einem bestimmten Ort bemerkbar machen. Dies gilt für eine eindimensionale Welle, die sich entlang eines elastischen Seils ausbreitet genauso wie für Wasser- oder Schallwellen.

Umgekehrt kann man fragen, für welche Punkte in der (x, t) -Ebene der Funktionswert von u ausschließlich von den Anfangswerten von φ_1 und φ_2 in einem Intervall J abhängt. Dies sind gerade die Punkte, die durch das Dreieck $\triangle A'B'C'$ in Abbildung 18.6 gebildet werden. Man nennt dieses Dreieck *Bestimmtheitsgebiet* von J .

Zum Abschluss besprechen wir noch zwei Spezialfälle des Anfangswertproblems zur homogenen Wellengleichung.

Beispiel 18.5

1. Es sei $\varphi_2(x) = 0$ und

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} (1 + \cos x)^2 & \text{für } \pi \leq x \leq 3\pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im elastischen Seil befindet sich zur Zeit $t = 0$ eine (zweimal stetig differenzierbare) Beule. Das Seil wird in dieser Position fixiert, die Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Löst man die Fixierung, breitet sich die Welle nach beiden Seiten aus.

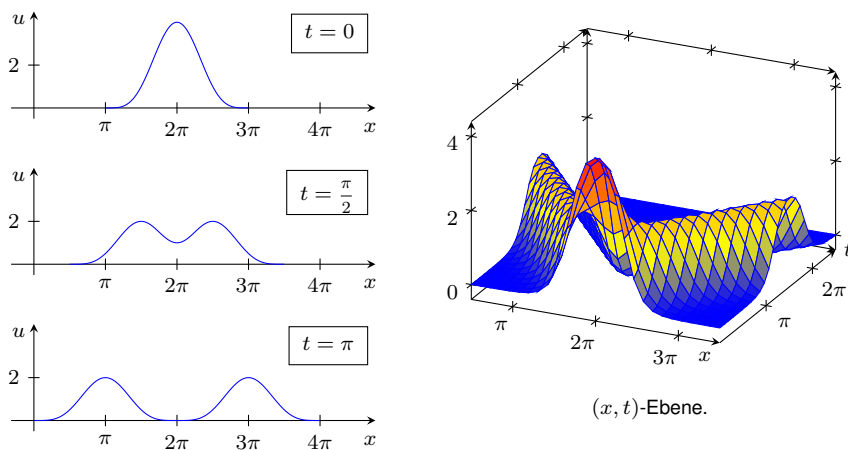


Abb. 18.7: Sich teilende Welle (für $c = 1$).

In der Lösungsdarstellung (18.19) verschwindet zunächst das Integral. Es gilt also

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x + ct) + \varphi_1(x - ct)).$$

Die Auslenkung des Seils an der Stelle (x, t) ist genau dann ungleich Null, wenn

$$x + ct \in (\pi, 3\pi) \quad \text{oder} \quad x - ct \in (\pi, 3\pi)$$

gilt. Für hinreichend späte Zeitpunkte t , wenn der Unterschied zwischen $x + ct$ und $x - ct$ größer ist als die Länge des Intervalls $(\pi, 3\pi)$, also für

$$2ct \geq 2\pi \iff t \geq \frac{\pi}{c},$$

gibt es keine Stellen x mehr, die beide Bedingungen erfüllen. Die Welle zur Zeit $t = 0$ teilt sich und läuft mit halber Amplitude nach links und nach rechts.

2. Als zweiten Sonderfall betrachten wir im Fall $c = 1$ die homogene Anfangsbedingung $\varphi_1(x) = 0$ sowie

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{für } \pi \leq x \leq 3\pi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Seil befindet sich in der Ruhelage $u(x, 0) \equiv 0$ und erhält zur Zeit $t = 0$ einen seitlichen Stoß, der sich mit fortschreitender Zeit im Seil fortpflanzt.

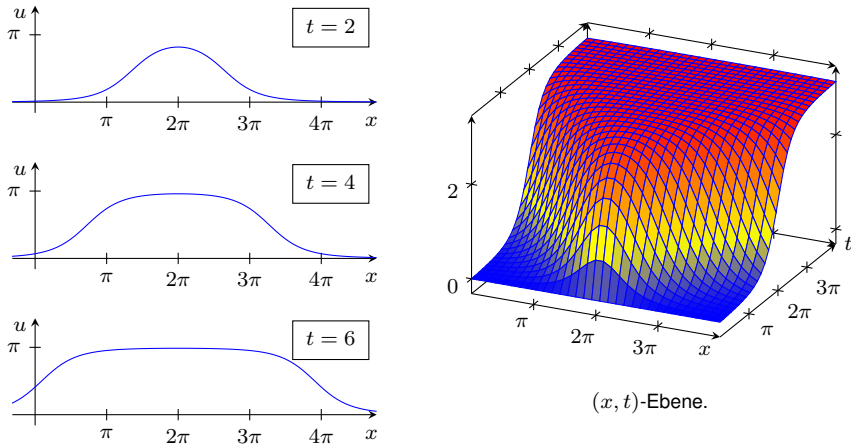


Abb. 18.8: Seil nach seitlichem Stoß.

In diesem Beispiel kann man die (x, t) -Ebene in verschiedene Bereiche unterteilen. Im ersten Bereich ist die Störung noch nicht angekommen. Das Seil befindet sich in der Ausgangslage $u = 0$. Über den zweiten Bereich ist die komplette Störung hinweggegangen. Das Intervall $[\pi, 3\pi]$ ist ganz im Abhängigkeitsgebiet enthalten und es ist

$$u = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_2(s) ds = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{3\pi} (1 + \cos s) ds = \pi.$$

In diesem Bereich bewegt sich das Seil bei konstanter Auslenkung π nicht mehr.

Das Gebiet zwischen den genannten Bereichen besteht aus zwei Halbstreifen in der (x, t) -Ebene, in denen sich das Seil von $u = 0$ auf $u = \pi$ aufschwingt. \triangle

Bemerkung 18.6 Das Anfangswertproblem

$$u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (18.20)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (18.21)$$

zur inhomogenen Wellengleichung für die unendlich lange Seite löst man mit dem Superpositionsprinzip folgendermaßen. Zunächst bestimmt man eine beliebige Lösung $v(x, t)$ der inhomogenen Wellengleichung (18.20). Dazu kann man wieder die obige Koordinatentransformation verwenden. Anschließend berechnet man mit der Formel von d'Alembert die Lösung $w(x, t)$ des Anfangswertproblems

$$w_{tt}(x, t) = c^2 w_{xx}(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$w(x, 0) = \varphi_1(x) - v(x, 0), \quad w_t(x, 0) = \varphi_2(x) - v_t(x, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dann erfüllt

$$u(x, t) := v(x, t) + w(x, t)$$

die inhomogene Wellengleichung (18.20) und die Anfangsbedingungen (18.21). \diamond

18.4 Die Potenzialgleichung

Die Potenzialgleichung

$$-\Delta u = f$$

mit stetiger rechter Seite f beschreibt stationäre Zustände, wie sie bei einer stationären Temperaturverteilung, bei Spannungen in einer eingespannten Membran oder beim elektrostatischen Potenzial im ladungsfreien Raum auftreten. Das Minuszeichen vor dem Laplace-Operator hat keine praktische Relevanz, entspricht aber der üblichen mathematischen Konvention.

Der einfachste Fall ist durch die homogene Potenzialgleichung in zwei Raumdimensionen,

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (18.22)$$

gegeben. Diese Gleichung wird *Laplace-Gleichung* genannt. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u(x, y)$, die die Differenzialgleichung erfüllt. Tritt auf der rechten Seite von (18.22) an Stelle von Null eine stetige Funktion $f(x, y)$ auf, erhält man die *Poisson-Gleichung*

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y), \quad (18.23)$$

die ein ähnliches Lösungsverhalten wie die Laplace-Gleichung besitzt. Je nach Anwendung repräsentiert die Funktion f stationäre Wärmequellen, äußere Lasten, Ladungsdichten, etc.

Wie die Wärmeleitungsgleichung und die Wellengleichung besitzt auch die Potenzialgleichung eine große Schar an Lösungen. Beispielsweise rechnet man leicht nach, dass jede Funktion der Bauart

$$u(x, y) = (a \cos(kx) + b \sin(kx)) e^{ky} \quad (18.24)$$

mit beliebigen reellen Konstanten a , b und k eine Lösung der Laplace-Gleichung ist. Man darf bzw. muss also wieder Zusatzbedingungen stellen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten.

Der Lösung (18.24) entnimmt man, dass kleine Störungen in Anfangswerten auf der x -Achse in y -Richtung exponentiell verstärkt werden. Anfangswerte können daher nicht zu stabilen Problemstellungen führen, sodass sachgerechte Zusatzbedingungen bei der Potenzialgleichung nicht in Form von Anfangs-, sondern von Randbedingungen bereitgestellt werden.

18.4.1 Dirichlet-Problem

Beim Dirichlet-Problem ist ein beschränktes Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Rand ∂D gegeben. Gesucht ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $u(x, y)$, die der Poisson-Gleichung (18.23) im Innern $\text{int } D$ des Gebiets D genügt und die zusätzlich für eine gegebene stetige Funktion g die Randbedingung

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ für } (x, y) \in \partial D$$

erfüllt. Unter geeigneten Voraussetzungen an das Gebiet D ist das Dirichlet-Problem

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y) \text{ für } (x, y) \in \text{int } D, \quad (18.25)$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ für } (x, y) \in \partial D \quad (18.26)$$

eindeutig lösbar. Zulässig sind in erster Linie Gebiete, deren Randkurve durch eine stückweise glatte geschlossene Jordan-Kurve gegeben ist. Einfache Beispiele sind kreis- oder ellipsenförmige Gebiete sowie Rechteckgebiete.

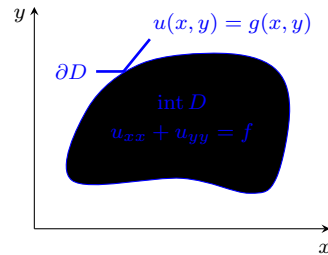


Abb. 18.9: Dirichlet-Problem.

18.4.2 Das Differenzenverfahren

Bei der Potenzialgleichung hat die Form des Gebiets D einen großen Einfluss auf die Lösung des Dirichlet-Problems (18.25), (18.26). Analytische Lösungen sind nur für Spezialfälle berechenbar und in praxisbezogenen Anwendungen in der Regel nicht verfügbar. Daher stellen wir im Folgenden mit dem Differenzenverfahren ein numerisches Verfahren vor, welches ein über die hier diskutierte Problemstellung hinausgehendes breites Anwendungsspektrum besitzt.

Speziell behandeln wir das Dirichlet-Problem zur Poisson-Gleichung auf dem Rechtecken. Wir beginnen mit dem Einheitsquadrat $D = [0, 1] \times [0, 1]$ und suchen eine Näherungslösung für das Dirichlet-Problem

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y) \text{ für } (x, y) \in \text{int } D,$$

$$u(x, y) = g(x, y) \text{ für } (x, y) \in \partial D.$$

Zur Approximation der gesuchten Funktion $u(x, y)$ wird D mit einem quadratischen Gitter mit *Gitterkonstante*

$$h = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und Gitterpunkten

$$(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad i, j = 0, \dots, n$$

überdeckt. Man begnügt sich nun damit, an den Gitterpunkten im Innern des Gebiets Näherungswerte $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$ der unbekannten Lösung zu berechnen.

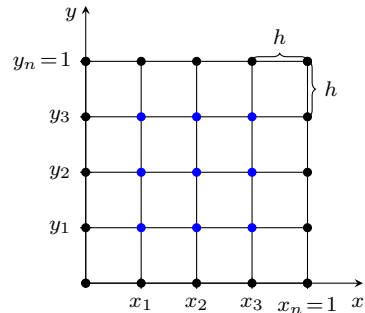


Abb. 18.10: Quadratisches Gitter.

Die partiellen Ableitungen u_{xx} und u_{yy} in der Differenzialgleichung werden mithilfe von Taylor-Entwicklungen der Lösung durch Differenzenquotienten ersetzt. Für eine viermal stetig differenzierbare Funktion u gelten

$$u(x+h, y) = u(x, y) + hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x, y) + \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x, y) + \frac{1}{24}h^4u_{xxxx}(\xi_1, y)$$

sowie

$$u(x-h, y) = u(x, y) - hu_x(x, y) + \frac{1}{2}h^2u_{xx}(x, y) - \frac{1}{6}h^3u_{xxx}(x, y) + \frac{1}{24}h^4u_{xxxx}(\xi_2, y).$$

Die Zahlen $\xi_1 \in (x, x+h)$ und $\xi_2 \in (x-h, x)$ bezeichnen unbekannte Zwischenstellen in den Fehlertermen. Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned} & u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y) \\ &= h^2 u_{xx}(x, y) + \frac{1}{24} h^4 u_{xxxx}(\xi_1, y) + \frac{1}{24} h^4 u_{xxxx}(\xi_2, y). \end{aligned}$$

Für hinreichend kleine h vernachlässigt man die letzten beiden Summanden und approximiert u_{xx} durch

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2}.$$

Eine analoge Entwicklung für u_{yy} führt auf die Näherung

$$u_{yy}(x, y) \approx \frac{u(x, y + h) - 2u(x, y) + u(x, y - h)}{h^2}.$$

In einem quadratischen Gitter mit Gitterkonstante h wird die Ableitung $\begin{Bmatrix} u_{xx} \\ u_{yy} \end{Bmatrix}$ im Gitterpunkt (x_i, y_j) also durch die Differenz von Funktionswerten an der Stelle (x_i, y_j) selbst und an den benachbarten Gitterpunkten $\begin{Bmatrix} \text{links und rechts davon} \\ \text{darüber und darunter} \end{Bmatrix}$ approximiert (Abb. (18.11)).

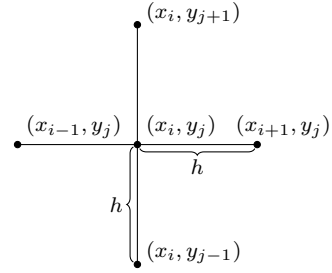


Abb.

18.11: Fünf-Punkte-Differenzenstern.

Im Gitterpunkt (x_i, y_j) liefern die so ermittelten Differenzenquotienten eingesetzt in die Poisson-Gleichung (18.23) die Beziehung

$$\frac{u_{i,j-1} + u_{i-1,j} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}}{h^2} = f(x_i, y_j). \quad (18.27)$$

Stellt man die Gleichung (18.27) für jeden inneren Gitterpunkt auf, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit $(n-1)^2$ Gleichungen für die $(n-1)^2$ unbekannten Näherungswerte u_{ij} , $i, j = 1, \dots, n-1$. Die Zeilenvektoren der zugehörigen Koeffizientenmatrix sind linear unabhängig, sodass das LGS für jede Funktion $f(x, y)$ und jede Vorgabe von Funktionswerten $g(x_i, y_j)$ auf den Gitterpunkten am Rand eine eindeutige Lösung besitzt.

Beispiel 18.7 Für das Einheitsquadrat $D := [0, 1] \times [0, 1]$ sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 && \text{für } (x, y) \in \text{int } D, \\ u(x, y) &= 9(x^2 + y^2) && \text{für } (x, y) \in \partial D \end{aligned}$$

gegeben. Wir wählen $n = 3$ und erhalten für $h = \frac{1}{3}$ die Gitterpunkte

$$(x_i, y_j) = \left(\frac{i}{3}, \frac{j}{3}\right), \quad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

An den Randpunkten des Gitters sind die Werte von u_{ij} durch $g(x, y) := 9(x^2 + y^2)$ folgendermaßen vorgeschrieben:

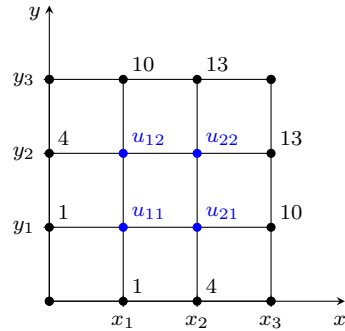


Abb. 18.12: Gitter mit Randwerten.

$$u_{10} = g(x_1, y_0) = g\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 1,$$

$$u_{20} = g(x_2, y_0) = g\left(\frac{2}{3}, 0\right) = 4,$$

$$u_{01} = g\left(0, \frac{1}{3}\right) = 1, \quad u_{31} = g\left(1, \frac{1}{3}\right) = 10,$$

$$u_{02} = g\left(0, \frac{2}{3}\right) = 4, \quad u_{32} = g\left(1, \frac{2}{3}\right) = 13,$$

$$u_{13} = g\left(\frac{1}{3}, 1\right) = 10, \quad u_{23} = g\left(\frac{2}{3}, 1\right) = 13.$$

Gesucht sind die Näherungen u_{ij} an den inneren Gitterpunkten, d.h. für $i, j = 1, 2$. In jedem dieser Gitterpunkte stellen wir nun die Gleichung (18.27) auf. Wegen $f(x, y) = 0$ folgt:

$$(i, j) = (1, 1) : u_{10} + u_{01} - 4u_{11} + u_{21} + u_{12} = 0,$$

$$(i, j) = (2, 1) : u_{20} + u_{11} - 4u_{21} + u_{31} + u_{22} = 0,$$

$$(i, j) = (1, 2) : u_{11} + u_{02} - 4u_{12} + u_{22} + u_{13} = 0,$$

$$(i, j) = (2, 2) : u_{21} + u_{12} - 4u_{22} + u_{32} + u_{23} = 0.$$

Üblicherweise werden diese Gleichungen noch mit -1 multipliziert, um in der Koeffizientenmatrix positive Diagonalelemente zu erzeugen. Nach Einsetzen der Randwerte entsteht so das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 14 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung

$$u_{11} = 4 \approx u\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad u_{21} = 7 \approx u\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad u_{12} = 7 \approx u\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad u_{22} = 10 \approx u\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

besitzt. △

Das Differenzenverfahren ist auch durchführbar, wenn für f und g keine geschlossenen Funktionsausdrücke vorliegen, sondern stattdessen nur Messwerte an den Gitterpunkten im Innern bzw. auf dem Rand bekannt sind. Im Gegensatz dazu lassen sich die bei der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung vorgestellten analytischen Lösungsmethoden nicht so einfach anpassen, wenn in den Anfangs- und Randbedingungen nur Messwerte zur Verfügung stehen.

Für Rechteckgebiete verwendet man meist Rechteckgitter mit Gitterabständen h_x in x -Richtung und h_y in y -Richtung. Die partielle Ableitung u_{yy} wird dann approximiert durch den Differenzenquotienten

$$\frac{u(x, y + h_y) - 2u(x, y) + u(x, y - h_y)}{h_y^2}.$$

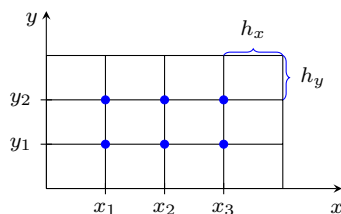


Abb. 18.13: Rechteckgitter.

Prinzipiell ist das Differenzenverfahren auch für andere Differenzialgleichungen und für nicht rechteckige Gebiete durchführbar. Treten höhere als zweite Ableitungen auf, bestimmt man für diese ebenfalls durch Taylor-Entwicklung analoge Differenzenquotienten.

Beispiel 18.8

Gegeben sei das Dirichlet-Problem für die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= x - 2y - 2 & \text{für } (x, y) \in \text{int } D, \\ u(x, y) &= 0 & \text{für } (x, y) \in \partial D, \end{aligned}$$

auf dem durch die Punkte $(0, 0)$, $(2, 0)$ und $(2, 4)$ begrenzten Dreiecksgebiet D .

Mit den Schrittweiten $h_x = \frac{1}{2}$, $h_y = 1$ ergeben sich die Gitterkoordinaten

$$(x_i, y_j) = \left(\frac{i}{2}, j\right), \quad i, j = 0, \dots, 4.$$

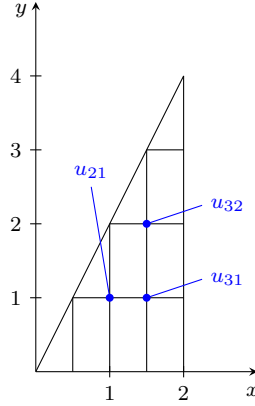


Abb. 18.14: Dreiecksgitter.

Die Approximation der partiellen Ableitungen erfolgt durch

$$\begin{aligned} u_{xx}(x_i, y_j) &\approx \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h_x^2} \approx 4(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}), \\ u_{yy}(x_i, y_j) &\approx \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h_y^2} \approx u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}. \end{aligned}$$

In jedem inneren Gitterpunkt wird die Differenzialgleichung also durch die Gleichung

$$\begin{aligned} 4u_{i+1,j} - 8u_{ij} + 4u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1} &= f(x_i, y_j) \\ \iff -u_{i,j-1} - 4u_{i-1,j} + 10u_{ij} - 4u_{i+1,j} - u_{i,j+1} &= -(x_i - 2y_j - 2) \end{aligned}$$

approximiert, wobei im letzten Schritt wieder mit -1 multipliziert wurde. Dies führt auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (i, j) = (2, 1) : & -u_{20} - 4u_{11} + 10u_{21} - 4u_{31} - u_{22} = -(x_2 - 2y_1 - 2) = 3, \\ (i, j) = (3, 1) : & -u_{30} - 4u_{21} + 10u_{31} - 4u_{41} - u_{32} = -(x_3 - 2y_1 - 2) = \frac{5}{2}, \\ (i, j) = (3, 2) : & -u_{31} - 4u_{22} + 10u_{32} - 4u_{42} - u_{33} = -(x_3 - 2y_2 - 2) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Die Randwerte u_{20} , u_{11} , u_{22} , u_{30} , u_{41} , u_{42} , u_{33} sind alle Null, sodass schließlich

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{31} \\ u_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

zu lösen ist. Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$u_{21} = u_{31} = u_{32} = \frac{1}{2}.$$

△

18.5 Die Methode der Finiten Elemente

In Körpern mit komplexer Form können physikalische Größen wie Druck oder Temperatur sehr ungleichmäßig verteilt sein. Dies gilt unter anderem für Spannungen in zusammengesetzten Bauteilen unter Belastung.

In diesen Fällen ist es naheliegend, die gesuchte Größe nicht durch einen global gültigen Funktionsausdruck zu beschreiben, sondern das zu untersuchende Objekt in Teilbereiche zu unterteilen, auf denen jeweils eine einfach auszuwertende Funktion, etwa ein Polynom niedriger Ordnung, zur Approximation verwendet wird. Die Möglichkeit zur adaptiven Verfeinerung einer vorgenommenen Unterteilung ist dabei besonders hilfreich.

Die systematische Umsetzung dieser Idee zur näherungsweisen Lösung von Randwertproblemen bei partiellen Differenzialgleichungen ist als Methode der Finiten Elemente (FEM) bekannt. FEM ist ein vielseitiges Verfahren, das besonders im Bauwesen sowie im Fahrzeug- und Flugzeugbau häufig eingesetzt wird und sich auch für verästelte Gebiete eignet, in denen Differenzenverfahren nur schwer durchführbar sind.

Für die weitere Beschreibung der Methode der Finiten Elemente verweisen wir auf die umfangreiche Fachliteratur.

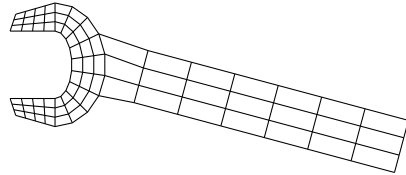


Abb. 18.15: FE-Gitter.

Literaturverzeichnis

Lehrbücher zur Höheren Mathematik

- [1] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, and H. Stachel. *Mathematik*, 3. Aufl. Springer Spektrum, Berlin, 2015.
- [2] G. Bärwolff. *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*, 3. Aufl. Spektrum-Verlag, Heidelberg, 2017.
- [3] K. Burg, H. Haf, F. Wille, and A. Meister. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. I, Analysis*, 11. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2018.
- [4] K. Burg, H. Haf, F. Wille, and A. Meister. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Bd. II, Lineare Algebra*, 7. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2012.
- [5] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, Band 1*, 14. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2014.
- [6] Lothar Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium, Band 2*, 14. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015.
- [7] Thomas Rießinger. *Mathematik für Ingenieure, Eine anschauliche Einführung für das praxisorientierte Studium*, 10. Aufl. Springer Vieweg, Berlin, 2017.
- [8] W. Strampp. *Höhere Mathematik 1, Lineare Algebra*, 3. Aufl. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2012.
- [9] W. Strampp. *Höhere Mathematik 2, Analysis*, 4. Aufl. Springer Vieweg, Wiesbaden, 2015.
- [10] T. Westermann. *Mathematik für Ingenieure, Ein anwendungsorientiertes Lehrbuch*, 7. Aufl. Springer Vieweg, Berlin, 2015.

Aufgaben- und Formelsammlungen

- [1] T. Arens, F. Hettlich, C. Karpfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, and H. Stachel. *Arbeitsbuch Mathematik*, 3. Aufl. Springer Spektrum, Berlin, 2016.
- [2] Thomas Rießinger. *Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure*, 7. Aufl. Springer Vieweg, Berlin, 2017.
- [3] Claus Wilhelm Turtur. *Prüfungstrainer Mathematik, Klausur- und Übungsaufgaben mit vollständigen Musterlösungen*, 5. Aufl. Springer Spektrum, Wiesbaden, 2014.
- [4] E. Zeidler, W. Hackbusch, J. Hromkovič, B. Luderer, H.R. Schwarz, J. Blath, A. Schied, S. Dempe, G. Wanka, and S. Gottwald. *Springer-Taschenbuch der Mathematik: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler Herausgegeben von E. Zeidler*. Springer Spektrum, 2013.

Index

- ε -Umgebung
 - im \mathbb{R}^n , 11
- abgeschlossene Menge, 13
- Abhängigkeitsgebiet, 306
- Abstand
 - von Punkten im \mathbb{R}^n , 10
- Anfangsbedingung, 215
- Anfangsrandwertproblem, 297
- Anfangswert, 215
- Anfangswertproblem, 215
- Bereichsintegral, 125
- Bernoulli'sche Differenzialgleichung, 248
- bestimmtes Integral
 - für Rechteckbereich, 125
- Bestimmtheitsgebiet, 307
- Bogenlänge
 - einer Kurve in Parameterdarstellung, 118
- Butcher-Tableau, 275
- charakteristisches Polynom, 238
- Differenzial
 - vollständiges, 48, 55
- Differenzialgleichung, 209
 - explizite, 209
 - Lösung, 209
 - Ordnung, 209
 - partielle, 293
 - separierbare, 216
 - System von Differenzialgleichungen, 223
- differenzierbare Funktion, 42, 48
- Divergenz, 189
- divergenzfrei, 190
- Eigenfunktion, 289
- Eigenwertproblem, 289
- Einschrittverfahren, 266
 - explizites, 266
 - implizites, 272
 - Konvergenzordnung, 266
 - Rundungsfehler, 268
- elliptische PDG, 295
- Euler'sche Differenzialgleichung, 243
- Euler-Verfahren
 - explizites, 261
 - implizites, 273
- Extremstelle, 92
- Extremwert
 - globaler, 91
 - lokaler, 91
 - mit Nebenbedingung, 100
- Fünf-Punkte-Differenzenstern, 312
- Flächenintegral (1. Art), 157
- Flächenintegral 1. Art, 160
- Flächenintegral 2. Art, 181
- Folge
 - beschränkte, 20
 - konvergente, 18
- Fubini
 - Satz von
 - für Normalbereiche, 136
 - für Rechtecke, 130
 - im \mathbb{R}^n , 133
- Fundamentalmatrix, 235
- Funktion
 - differenzierbare, 42, 48
 - natürlicher Definitionsbereich, 4
 - partiell differenzierbare, 44
 - stetig differenzierbare, 55

- stetige, 31
- Funktionaldeterminante, 83, 147
- Funktionalmatrix, 83, 147
- Gebiet, 14, 177
- Gebietsintegral, 125
- Geschwindigkeitsvektor, 112
- Gitterkonstante, 311
- glatte Kurve, 113
- Gradient, 55
- Gradientenfeld, 173
- Green'sche Identität, 199
- Grenzwert
 - einer Folge, 18
 - einer Funktion, 23
- Häufungspunkt
 - einer Menge, 12
- Höhenlinie, 8
- hyperbolische PDG, 295
- implizite Funktion, 73
- innerer Punkt, 12
- Integral
 - bestimmtes
 - für Rechteckbereich, 125
 - iteriertes, 130
- Isoklinenmethode, 214
- J-Kurve, 114
- Jacobi-Matrix, 83
- Jordan-Kurve, 113
- Kardioide, 198
- Kettenregel, 56, 59
- kompakt, 14
- Konvergenzordnung
 - eines Einschrittverfahrens, 266
- Kugel
 - abgeschlossene, 11
 - offene, 11
- Kugelkoordinaten, 153
- Kurve
 - glatte, 113
 - Orientierung, 112
 - Parameterdarstellung, 112
- stetige, 12
- Kurvenintegral
 - 1. Art, 116
 - 2. Art, 171
- Lösung
 - einer Differenzialgleichung, 209
 - einer partiellen Differenzialgleichung, 293
- Lagrange-Multiplikator, 103
- Laplace-Gleichung, 309
- Laplace-Operator, 191
- lineare Differenzialgleichung n -ter Ordnung, 227
- lineare Differenzialgleichung erster Ordnung, 217
- Maximum
 - im engeren Sinne, 92
- Mehrschrittverfahren, 279
- Menge
 - abgeschlossene, 13
 - beschränkte, 14
 - kompakte, 14
 - offene, 13
 - zusammenhängende, 13
- Minimum
 - im engeren Sinne, 92
- Normalbereich
 - bezüglich x , 135
 - bezüglich der (x, y) -Ebene, 140
- Nullmenge, 126
- Oberflächenintegral 1. Art, 157
- offene Menge, 13
- Ordnung
 - einer Differenzialgleichung, 209
- orientierbare Fläche, 181
- parabolische PDG, 295
- parametrisierbare Fläche, 159
- partiell differenzierbar, 44
- partielle Ableitung, 44
- Peano
 - Existenzsatz von, 222

- Picard-Lindelöf
 - Existenz- und Eindeutigkeitssatz von, 222
- Poisson-Gleichung, 309
- Potenzialgleichung, 309
- Punktfolge, 17
- Randpunkt, 13
- Randwertproblem, 285
- reguläre Fläche, 159
- Riccati'sche Differenzialgleichung, 250
- Richtungsableitung, 66
- Richtungsfeld, 214
- Rotation, 175
- rotationsfrei, 175
- Runge-Kutta-Verfahren
 - explizites, 275
 - Algorithmus, 276
- Sandwich-Theorem, 25
- Sattelpunkt, 94
- Satz
 - über implizite Funktionen, 76
 - vom Minimum und Maximum, 38
 - von Bolzano-Weierstraß, 20
 - von Fubini
 - für Normalbereiche, 136
 - für Rechtecke, 130
 - im \mathbb{R}^n , 133
 - von Peano, 222
 - von Picard-Lindelöf, 222
 - von Schwarz, 47
 - von Taylor, 88
- Stammfunktion, 174
- stationärer Punkt, 94
- steife Differenzialgleichung, 284
- Sterngebiet, 177
- Sternzentrum, 177
- stetige Funktion, 31
- stetige Kurve, 12
- Substitutionsregel
 - im \mathbb{R}^2 , 147
 - im \mathbb{R}^3 , 152
- Superpositionsprinzip, 242
- Tangentialebene, 42, 45
- Tangentialhyperebene, 49
- Taylor'sche Formel, 89
- Trennung der Veränderlichen, 216
- Übergangsbedingungen, 297
- Umgebung, 11
 - punktierte, 11
- Variation der Konstanten, 219, 235
- Vektorfeld, 82, 167
 - divergenzfreies, 190
 - rotationsfreies, 175
- Verfahren von Runge, 269, 276
- Verfahrensfehler
 - globaler, 266
 - lokaler, 267
- Volumenintegral, 134
- Wärmeleitungsgleichung, 296
 - Anfangsrandwertproblem, 297
 - Produktansatz, 298
 - Reihenansatz, 299
- Wellengleichung, 302
 - Abhängigkeitsgebiet, 306
 - Bestimmtheitsgebiet, 307
 - d'Alembert'sche Lösung, 305
- Wronski-Determinante, 230
- Zerlegungsnullfolge, 125
- zusammenhängende Menge, 13
- Zwischensumme
 - für Rechteckbereich, 124
- Zwischenwertsatz, 39
- Zykloide, 119