

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
« Московский физико-технический институт »
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования в геофизике и
биоматематике (ИВМ РАН)

Методы решения нелинейных уравнений динамики морского льда с использованием библиотеки Fenics

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Выполнил:

студент группы 471а
Петров Сергей Сергеевич

Научный руководитель:

доктор ф.-м. наук
Яковлев Николай Геннадьевич

Москва 2018

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
2.1	Закон сохранения импульса	4
2.2	Упрощение закона сохранения импульса	4
2.3	Нелинейное слагаемое	5
2.4	Уравнения неразрывности	6
2.5	Полная система уравнений	6
2.6	Начальные и граничные условия	7
2.7	Параметры модели	7
3	Конечно-элементная модель	8
3.1	Дискретные пространства	8
3.2	Аппроксимация давления	8
3.3	Общий план решения системы	9
3.4	Решение уравнения переноса	9
3.5	Методы решения нелинейного уравнения	11
4	Методы решения уравнения переноса	12
4.1	Неявная схема Тейлора–Галеркина	12
4.2	Явная схема Тейлора–Галеркина	13
4.3	Схема Лонера	13
4.4	Метод коррекции потоков	14
5	Методы решения нелинейного уравнения	17
5.1	Явный метод Эйлера интегрирования по времени	17
5.2	Итерационный метод с пересчетом скорости	18
5.3	Итерационный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений	20
6	Заключение	22
	Список литературы	23

1 Введение

Еще в 1978 году американским ученым В. Д. Хиблером была разработана популярная модель динамики морского льда [1]. В ней исследуется динамика трех величин: массы льда, средней высоты и сплоченности, которые определяются на ячейках расчетной области. Лед в данной модели рассматривается как сплошная среда. Такое допущение имеет право на существование в том случае, когда расчетная ячейка достаточно большая и в ней находится достаточно много льдин. Средний размер морской льдины в Арктике – 300 метров, поэтому расчетная ячейка сетки выбирается порядка нескольких десятков километров. Основной идеей данной модели является введение нелинейного слагаемого, которое отвечает за внутреннее взаимодействие льда – чем больше высота и сплоченность льда, тем сильнее это взаимодействие. Выполняется закон сохранения массы и высоты льда, поэтому для них пишется уравнение неразрывности. Взаимодействие же льда происходит в пластичной манере с силой, зависящей от высоты и концентрации. В модели используется исключительно Эйлеров подход описания. Термодинамические процессы, геострофический ветер, геострофическое течение воды, силы Кориолиса и силы градиента давления учитываться не будут, чтобы сосредоточиться на исследовании решения с нелинейным слагаемым, не отвлекаясь на прочие эффекты.

Модель [1] разработана, для решения двумерной задачи динамики льда. Целью же данной работы является построение одномерной модели, с помощью упрощения двумерных уравнений, и исследование методов решения полученных уравнений. Используется конечно-элементный подход дискретизации уравнений. Будут исследованы различные методы решения нелинейных уравнений – явный Эйлеров метод, итерационный метод с пересчетом скорости, итерационный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений. Также будет применен метод Тейлора-Галеркина и его модификация для решения одномерных уравнений переноса массы и сплоченности льда.

Аналогичные [1] уравнения будут взяты из статьи [2] (FESIM). Они включают в себя VP (viscous-plastic) и EVP (elastic-viscous-plastic)-пеологию.

Описанные выше методы были запрограммированы на языке „Python“ с использованием специальной конечно-элементной библиотеки „Fenics“ [4], [3].

2 Постановка задачи

В этой главе будет представлено описание задачи согласно [2] и ее упрощение в одномерном случае.

2.1 Закон сохранения импульса

$$\underbrace{m \frac{D\mathbf{u}}{Dt}}_{\text{инерция}} = \underbrace{-mf\mathbf{k} \times \mathbf{u}}_{\text{сила Кориолиса}} + \underbrace{A\tau_a}_{\text{воздух}} - \underbrace{A\tau_w}_{\text{вода}} - \underbrace{mg\nabla H}_{\text{градиент давления}} + \underbrace{\mathbf{F}}_{\text{напряжение}}, \quad (1)$$

здесь \mathbf{u} — скорость морского льда, m — масса льда в единице площади, A — сплоченность льда (относительная часть поверхности ячейки, занятая льдом), $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla$ — полная производная по времени, \mathbf{k} — единичный вектор нормали к поверхности, H — отклонение высоты поверхности океана от равновесного состояния, f — параметр Кориолиса, g — ускорение свободного падения, τ_a, τ_w — силы действия ветра и воды на лёд, \mathbf{F} — сила, связанная с внутренним напряжением льда.

В дальнейших уравнениях также будет встречаться величина h — средняя толщина льда в ячейке. Естественным образом получается связь между величинами A, h, m :

$$m = AhS\rho_{ice}, \quad (2)$$

где S — площадь ячейки льда, $\rho_{ice} \approx 900 \frac{kg}{m^3}$ — плотность льда.

Касательные напряжения трения ветра и воды τ_a и τ_w в уравнении (1) задаются следующим образом:

$$\tau_a = \rho_a C_a |U_g| (U_g \cos \varphi + \mathbf{k} \times U_g \sin \varphi) \quad (3)$$

$$\tau_w = \rho_w C_w |U_w - u| [(U_w - u) \cos \theta + \mathbf{k} \times (U_w - u) \sin \theta], \quad (4)$$

где U_g — геострофический ветер, U_w — геострофическое течение, C_a, C_w — коэффициенты трения между воздухом/водой и льдом, ρ_a, ρ_w — плотности воздуха и воды соответственно, φ, θ — изменения в угле поворота в пограничном слое в атмосфере и океане.

2.2 Упрощение закона сохранения импульса

Уравнения (1), (2), (3), (4) написаны в двумерном случае, мы же сосредоточимся на исследовании одномерного варианта с существенными упрощениями:

- Одномерная модель ($\mathbf{k} = \mathbf{0}, \nabla = \frac{\partial}{\partial x}$)

- Отсутствие вращения Земли ($\varphi = 0, \theta = 0, f = 0$)
- Отсутствие течения воды ($U_w = 0$)
- Глубина океана постоянна ($\nabla H = 0$)
- Скорость ветра постоянна ($U_g = \text{const}$)
- Линеризация полной производной в приближении малых скоростей ($\frac{D}{Dt} \approx \frac{\partial}{\partial t}$)

При таких предположениях уравнение (2) перепишется:

$$m = Ah\rho_{ice}, \quad (5)$$

Также существенно упростится закон сохранения импульса (1):

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = A\tau_a - A\tau_w + F, \quad (6)$$

а также уравнения действия ветра и сопротивления воды (3), (4):

$$\tau_a = \rho_a C_a |U_g|^2 \quad (7)$$

$$\tau_w = \rho_w C_w u^2. \quad (8)$$

2.3 Нелинейное слагаемое

Опишем нелинейный член F в уравнении (1), отвечающий за напряжения внутри льда, присутствие которого и придает релевантность данной модели:

$$\mathbf{2-D:} \quad F_j = \partial_i \sigma_{ij} \quad \mathbf{1-D:} \quad F = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (9)$$

здесь внутренний тензор напряжений льда σ_{ij} описывается с помощью VP (viscous-plastic)-реологии:

$$\mathbf{2-D:} \quad \sigma_{ij} = 2\eta(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}) + \xi\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk} - \frac{1}{2}\delta_{ij}P \quad (10)$$

$$\mathbf{1-D:} \quad \sigma = (\xi + \eta)\dot{\epsilon} - \frac{1}{2}P \quad (11)$$

В формуле (11) $\dot{\epsilon}_{ij}$ – тензор скоростей деформации, который задается следующим образом:

$$\mathbf{2-D:} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad \mathbf{1-D:} \quad \dot{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

ξ - коэффициент объемной вязкости льда, который отвечает за диссипацию энергии при объемных деформациях, а η - коэффициент сдвиговой вязкости связанный с касательным взаимодействием льдин, P - давление (прочность) льда.

В модели VP-реологии вязкости задаются следующим образом:

$$\xi = \frac{(1/2)P}{\Delta + \Delta_{min}}; \quad \eta = \frac{\xi}{4} \quad (13)$$

Поскольку вязкости линейно зависимы и присутствуют в уравнениях как $(\xi + \eta)$, то не будем их различать (введем переобозначения) : $\xi \equiv \xi_{new} \equiv \xi_{old} + \eta = \frac{5}{4}\xi_{old} = \frac{5}{8}\frac{P}{\Delta + \Delta_{min}}$

И наконец Δ вводится как:

$$\mathbf{2-D:} \quad \Delta^2 = \frac{11}{4}(\dot{\varepsilon}_{11}^2 + \dot{\varepsilon}_{22}^2) + \dot{\varepsilon}_{12}^2 \quad \mathbf{1-D:} \quad \Delta = \frac{\sqrt{11}}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad (14)$$

Давление P будем вводить двумя различными способами:

$$P_1 = hP^* e^{-C(1-A)} \quad P_2 = \frac{P_1 \Delta}{\Delta + \Delta_{min}} \quad (15)$$

где P^*, C, Δ_{min} – априорно заданные константы, полученные из некоторых физических соображений.

2.4 Уравнения неразрывности

Также в систему уравнений будут входить два уравнения неразрывности (переноса) – массы и сплоченности:

$$\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(um) = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 + \mathbf{ограничение:} \quad (A < 1) \quad (17)$$

2.5 Полная система уравнений

Окончательно система уравнений запишется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{\partial u}{\partial t} = A\tau_a - A\rho_w C_w u^2 + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad - \text{уравнение сохранения импульса} \\ \sigma = \xi \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}P \quad - \text{тензор напряжений} \\ \xi = \frac{5}{8} \frac{P}{\Delta + \Delta_{min}} \quad - \text{определение вязкости} \\ \Delta = \frac{\sqrt{11}}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \quad - \text{определение „дельта“} \\ P = hP^* e^{-C(1-A)} \quad \text{или} \quad P = \frac{\Delta h P^* e^{-C(1-A)}}{\Delta + \Delta_{min}} \quad - \text{определение давления} \\ \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(um) = 0 \quad - \text{уравнение переноса массы} \\ \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(uA) = 0 \text{ и } A < 1 \quad - \text{уравнение переноса сплоченности} \\ m = hA\rho_{ice} \quad - \text{связь массы, средней толщины и сплоченности} \end{array} \right. \quad (18)$$

2.6 Начальные и граничные условия

Наибольший интерес для нас представляет моделирование движения льдины, которая изначально покоится в середине океана и начинает свое движение под действием постоянного ветра. Поэтому начально распределение скорости — нулевое, среднюю высоту льда делаем равной $0.5(m)$ в центре океана, сплоченность и массу равную 0.8 и $360(kg)$ соответственно (масса выбирается так, чтобы удовлетворить условию $m = hA\rho_{ice}$).

Заметим, что для эйлера описания задачи необходимо задать значения h , m , A в области, где лед отсутствует на самом деле. На самом деле возможно решать и задачу со свободной границей, но зачастую поставить грамотные граничные условия на свободную границу не очень просто. К тому же, перестраивать расчетную сетку на каждом шаге очень затратно с вычислительной точки зрения.

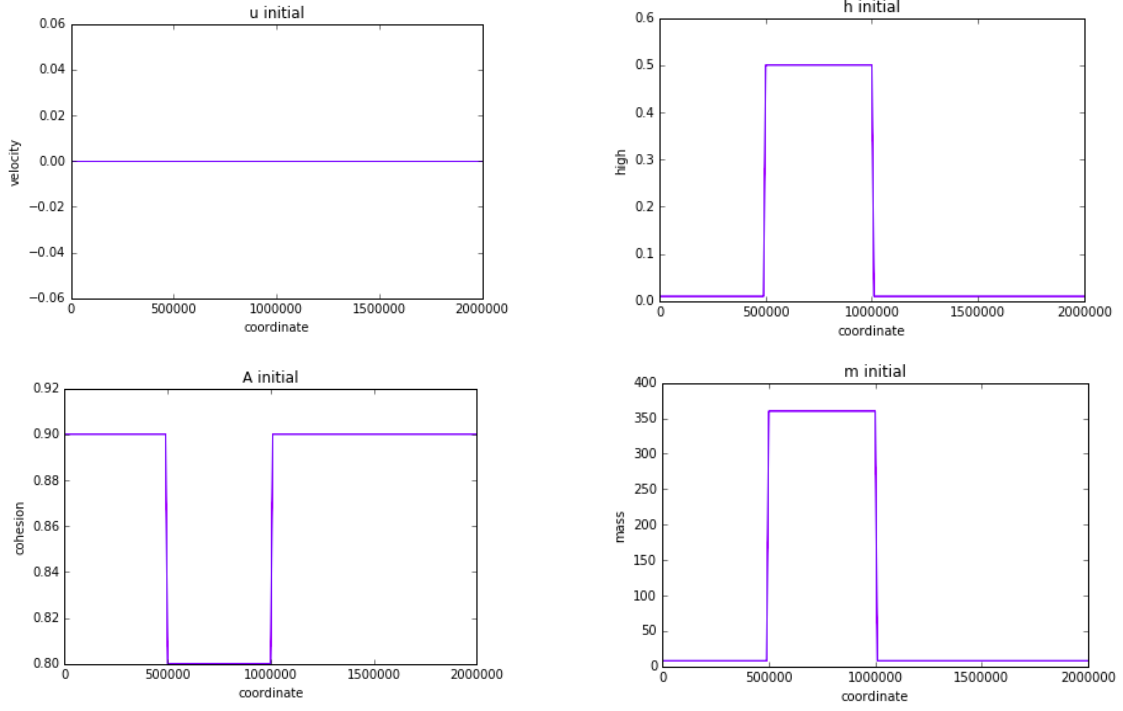


Рис. 1: Начальные условия

От льда мы будем требовать лишь условия непротекания. Поэтому единственным граничным условием будет равенство нулю скорости на границе: $u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \forall t$.

2.7 Параметры модели

- Расчетная область (океан) имеет размер $L = 5000(km) = 5 \cdot 10^6(m)$
- Вводится равномерная сетка с 201 узлом
- $\tau_a = 0.2$, что соответствует скорости ветра $U_g = 15(m/s)$
- $\rho_{ice} = 900(kg/m^3)$, $\rho_{water} = 1000(kg/m^3)$
- $C_w = 55 * 10^{-4}$ - коэффициент трения между льдом и водой
- $C = 20.0$, $P^* = 27500.0(\frac{N}{m^2})$, $\Delta_{min} = 2 * 10^{-9}(s^{-1})$
- Будем требовать от метода решения системы устойчивости с глобальным временным шагом $\tau = 1(h) = 3600(s)$.

3 Конечно-элементная модель

В этой главе подробно опишем дискретные пространства и способы дискретизации уравнений с помощью метода конечных элементов.

3.1 Дискретные пространства

Вводятся два основных конечномерных пространства функций: L ('Lagrange') и DG_0 ('Discontinuous Lagrange'). Пространство L представляет из себя линейную оболочку стандартных кусочно-линейных базисных функций Куранта:

$$\varphi_i = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, x \in [x_{i-1}, x_i], i \neq 0, N \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, x \in [x_i, x_{i+1}], i \neq 0, N \\ \frac{x_1 - x}{x_1 - x}, x \in [0, x_1], i = 0 \\ \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, x \in [x_{N-1}, x_N], i = N \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пространство DG_0 является линейной оболочкой функций постоянных на отрезках сетки:

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Будем относить функции h, A, m, u к пространству L . А функции σ, ξ, Δ, P — к пространству DG_0 .

3.2 Аппроксимация давления

Необходимо интерполировать функцию P кусочно-постоянными на отрезке функциями. $P = hP^*e^{-C(1-A)}$, здесь h, A — кусочно-линейные на отрезке функции. Поэтому чтобы получить кусочно-постоянную на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функцию P , будем осреднять значения линейных функций h, A :

$$\forall x \in [x_i, x_{i+1}] \quad P(x) = \left(\frac{h(x_i) + h(x_{i+1})}{2} \right) P^* e^{-C(1 - \frac{A(x_i) + A(x_{i+1})}{2})}$$

Как было сказано ранее, возможны два варианта выбора давления

- $P_1 = hP^*e^{-C(1-A)}$

Достоинство — физически правильное поведение льда вблизи берега. Вблизи берега $A \rightarrow 1, u \rightarrow 0$, поэтому $P_1 \rightarrow P \cdot h$. Следовательно, $\frac{\partial h}{\partial x} = const$ - линейное распределение толщины льда около берега.

Недостаток — при отсутствии начальной скорости и скорости ветра (начало движения) $P_1 \neq 0$. Т.е. лед начинает „расталкиваться“ сам по себе при отсутствии внешних факторов.

- $P_2 = \frac{P_1 \Delta}{\Delta + \Delta_{min}}$

Достоинство — при отсутствии скорости льда и ветра $P = 0$.

Недостаток — при приближении льда к берегу $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ и лед „забивается“ в одну точку.

3.3 Общий план решения системы

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = A\tau_a - A\rho_w C_w u^2 + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \rightarrow u_{new}$$

$$\frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{new}m) = 0 \rightarrow m_{new}$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{new}A) = 0 \rightarrow A_{new}$$

$$m_{new} = hA_{new}\rho_{ice} \rightarrow h_{new}$$

3.4 Решение уравнения переноса

Чтобы получить второй порядок аппроксимации по времени, воспользуемся техникой Тейлора-Галеркина, который подробно описан в [5]. Допустим, мы решаем уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

Раскладываем функцию φ в ряд Тейлора по времени:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} + O(\Delta t^3)$$

С учетом того, что $u(t) = const$, можно записать:

$$\frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[-u \frac{\partial \varphi^n}{\partial t} \right] = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi^n}{\partial t} \right) = u^2 \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x^2}$$

Подставляем в разложение Тейлора:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \Delta t \left[-u \frac{\partial \varphi^n}{\partial x} \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[u^2 \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x^2} \right] + O(\Delta t^3)$$

Получаем:

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + u \frac{\partial \varphi^n}{\partial x} = \frac{\Delta t}{2} u^2 \frac{\partial^2 \varphi^n}{\partial x^2} + O(\Delta t^2) \quad (20)$$

Главный член ошибки: $\frac{\Delta t}{2} u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$

Поэтому вместо дискретизации уравнения (19) будем дискретизировать уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Delta t}{2} u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (21)$$

Аппроксимируем производную по времени прямой разностью первого порядка и напомним неявную схему:

$$\frac{\varphi^{n+1} - \varphi^n}{\Delta t} + u \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x} = \frac{\Delta t}{2} u^2 \frac{\partial^2 \varphi^{n+1}}{\partial x^2},$$

что приводит к вариационной постановке:

Найти $\varphi^{n+1} \in L$, такую, что $\forall v \in L$

$$\langle \varphi^{n+1}, v \rangle + u \Delta t \left\langle \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x}, v \right\rangle + \frac{\Delta t^2}{2} u^2 \left\langle \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle = \langle \varphi^n, v \rangle \quad (22)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в L_2 .

Отсюда, раскладывая φ^{n+1} , φ^n и v в линейную комбинацию базисных функций Куранта, переходим к решению системы линейных уравнений и находим неизвестные коэффициенты.

Также в дальнейшем будет использоваться явная схема Тейлора-Галеркина:

$$\langle \varphi^{n+1}, v \rangle = -u \Delta t \left\langle \frac{\partial \varphi^n}{\partial x}, v \right\rangle - \frac{\Delta t^2}{2} u^2 \left\langle \frac{\partial \varphi^n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle + \langle \varphi^n, v \rangle \quad (23)$$

Как явная, так и неявная схемы Тейлора-Галеркина имеют высокий порядок аппроксимации, поэтому они дают довольно большие нефизичные осцилляции. Чтобы бороться с ними, в дальнейшем будет описан метод коррекции потоков (Flux correction tools for finite elements [6]), который сочетает в себе достоинства монотонной схемы Лэрнера низкого порядка и явной схемы Тейлора-Галеркина.

3.5 Методы решения нелинейного уравнения

- Явный метод Эйлера интегрирования по времени.
- Итеративный метод с пересчетом скорости.
- Итеративный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений.

4 Методы решения уравнения переноса

В данном разделе будут представлены результаты выполнения программы при различных методах реализации схем переноса массы и сплоченности. Нелинейное уравнение для пересчета скорости будет решаться способом, показавшим себя наилучшим образом (итеративный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений), который будет описан в следующем разделе.

4.1 Неявная схема Тейлора–Галеркина

Как было получено ранее, метод выглядит следующим образом:

Найти $\varphi^{n+1} \in L$, такую, что $\forall v \in L$

$$\langle \varphi^{n+1}, v \rangle + u \Delta t \langle \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x}, v \rangle + \frac{\Delta t^2}{2} u^2 \langle \frac{\partial \varphi^{n+1}}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \rangle = \langle \varphi^n, v \rangle$$

Данный метод применяется для пересчета массы и сплоченности. Результат выглядит следующим образом:

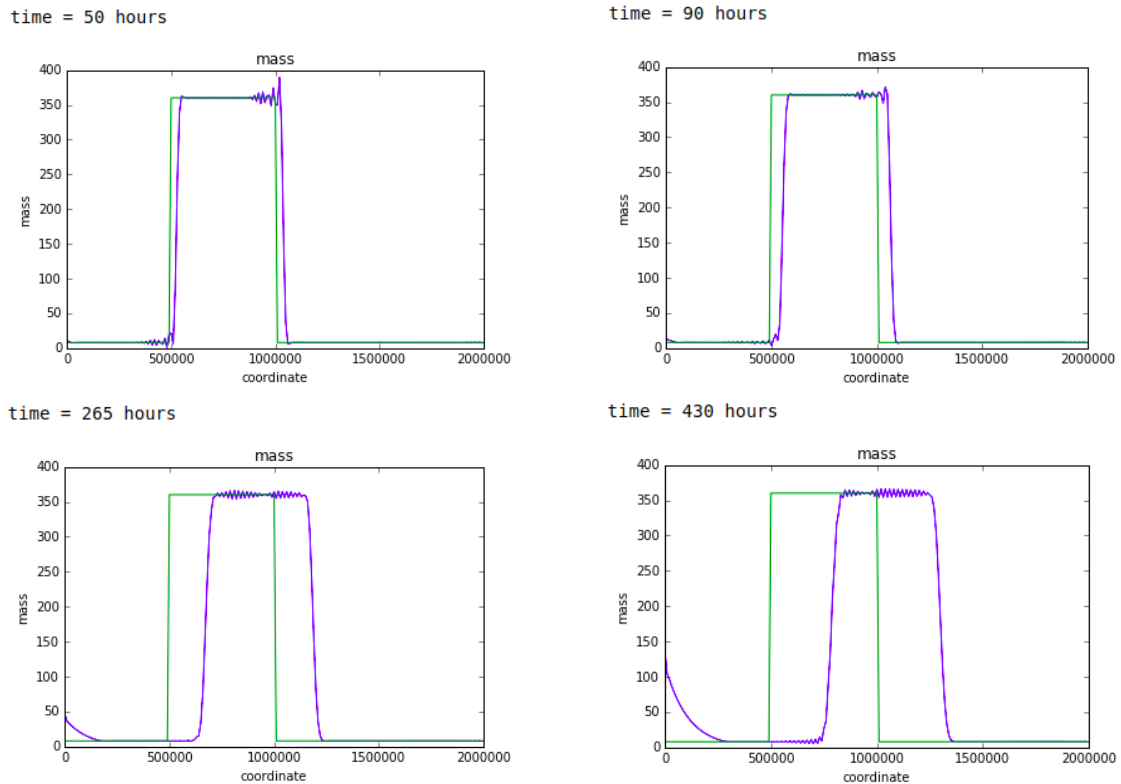


Рис. 2: Неявный метод Тейлора–Галеркина

В связи с присутствием эффекта Гиббса, присутствуют нефизические осцилляции. Можно заметить, что такие осцилляции, распространяясь влево, достигают границы океана и образуют неестественное скопление массы.

4.2 Явная схема Тейлора–Галеркина

Найти $\varphi^{n+1} \in L$, такую, что $\forall v \in L$

$$\langle \varphi^{n+1}, v \rangle = -u \Delta t \langle \frac{\partial \varphi^n}{\partial x}, v \rangle - \frac{\Delta t^2}{2} u^2 \langle \frac{\partial \varphi^n}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \rangle + \langle \varphi^n, v \rangle$$

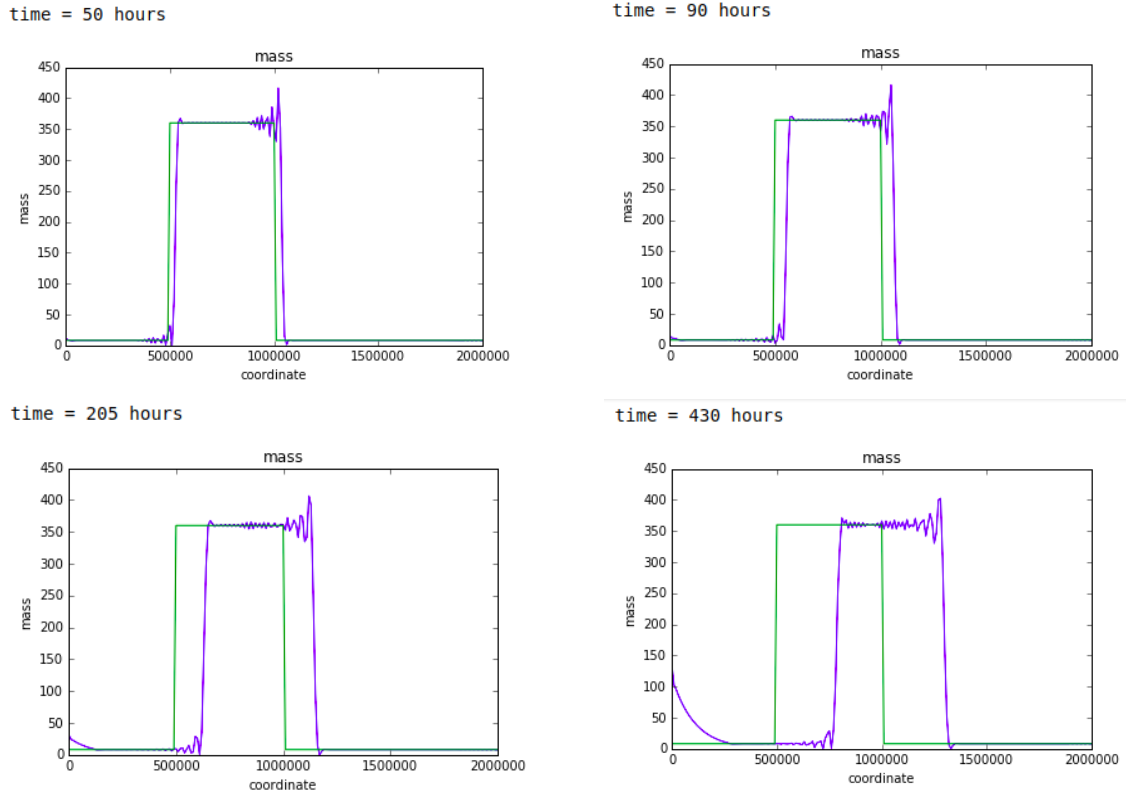


Рис. 3: Явный метод Тейлора–Галеркина

Видим намного более сильные осцилляции, по сравнению с неявным методом. Также присутствует неестественное скопление массы у левой границы.

4.3 Схема Лэрнера

Явную схему Тейлора-Галеркина можно записать следующим образом:

$$M_C \Delta \varphi = R, \quad (24)$$

где M_C – массовая матрица, $\Delta \varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n$, R – вектор правой части. Если произвести лампирование массовой матрицы и добавить явную вязкость, то можно трансформировать схему высокого порядка (Тейлора–Галеркина) в схему низкого порядка:

$$M_L \Delta \varphi^L = R + c_d (M_C - M_L) \varphi^n, \quad (25)$$

где M_C – та же массовая матрица метода Тейлора–Галеркина, M_L – лампированная массовая матрица, c_d – некоторая постоянная вязкость (в расчетах используется значение, равное 0,5). Индекс L обозначает решение, полученное с помощью схемы низкого порядка.

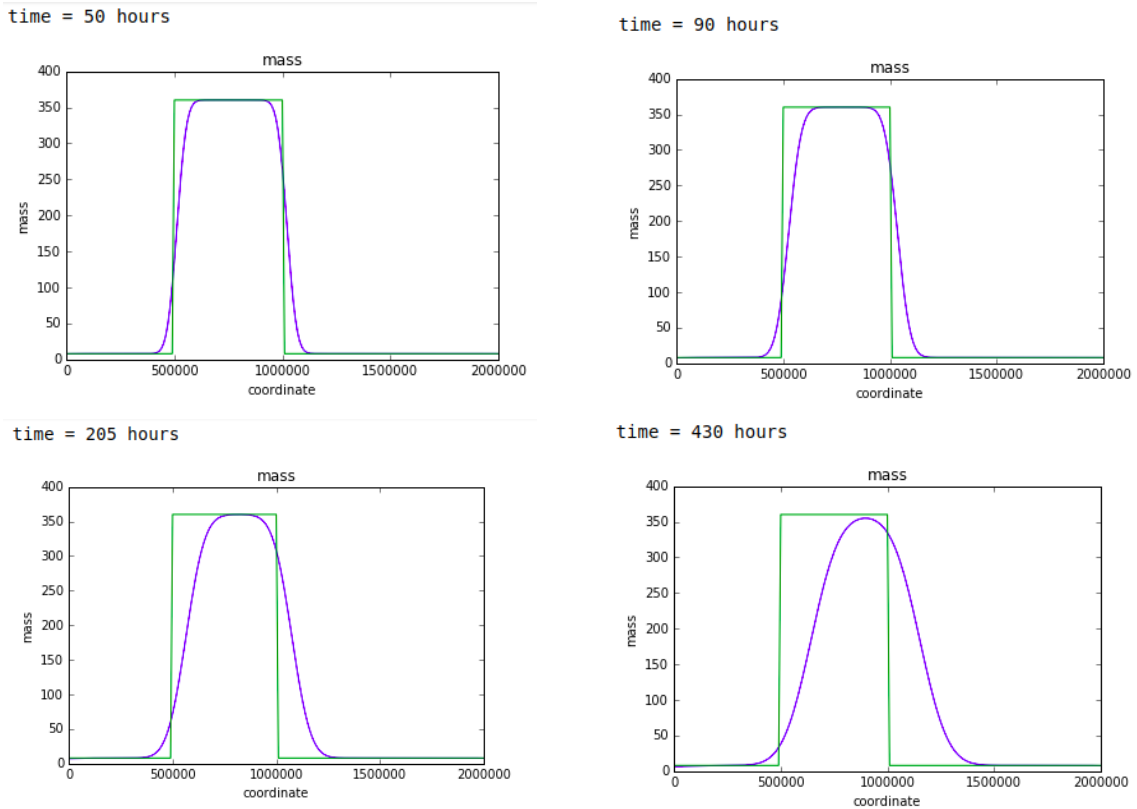


Рис. 4: Схема Лэрнера

4.4 Метод коррекции потоков

Хотелось бы получить результат, в котором бы отсутствовали нефизические осцилляции и контур массы не „размазывался” по океану. В статье [6] предложен общий метод коррекции потоков для конечно–элементных схем.

Необходимо провести 6 этапов:

1. Получить решение, используя явную схему высокого порядка точности.
2. Произвести лампирование массовой матрицы и добавить оператор диффузии в схему высокого порядка, чтобы получить неосциллирующий метод низкого порядка.
3. Получить решение по построенному методу низкого порядка.
4. Вычислить антидиффузионный член F_e для каждого элемента.

5. Ограничить антидиффузионный вклад каждого элемента, чтобы исключить образование нового и повышение существующего локального экстремума.
6. Скорректировать решение, полученное методом низкого порядка, добавлением линейной комбинации антидиффузионных членов. $u_i^{n+1} = u_i^L + \sum_e \alpha_e F_{e,i}$, $0 \leq \alpha_e \leq 1$.

Явную схему Тейлора-Галеркина (24) можно переписать в виде:

$$M_L \Delta \varphi^H = R + (M_L - M_C) \Delta \varphi^H \quad (26)$$

Вычитая (25) из (26) можно получить антидиффузионный вклад каждого элемента:

$$F_e = \varphi^H - \varphi^L = M_L^{-1}|_e (\widetilde{M}_L - \widetilde{M}_C) (c_d \widetilde{\varphi}^n + \Delta \widetilde{\varphi}^H). \quad (27)$$

Здесь \widetilde{M}_C – элементная массовая матрица, \widetilde{M}_L – лампированная элементная массовая матрица, $\widetilde{\varphi}^n, \widetilde{\varphi}^H$ – значение функции в узлах элемента.

Ограничение значений решения проводится в 3 этапа:

1. $\varphi_i^* = \max_{\min} \{\varphi_i^L, \varphi_i^n\}$
2. $\varphi_i^{**} = \max_{\min} \varphi_i^*, i \in N_e$, где N_e – множество всех узлов элемента.
3. $\varphi_i^{\max_{\min}} = \max_{\min} \varphi_e^{**}, e \in E_i$, где E_i – множество всех элементов, граничащих с узлом сетки.

Стратегия ограничения вкладов потоков:

- Вычисляется сумма всех положительных и отрицательных антидиффузионных потоков в каждом узле:

$$P_i^\pm = \sum_{e \in E_i} \max_{\min} \{0, F_{e,i}\}. \quad (28)$$

- Затем вычисляется максимальное/минимальное приращение функции в каждом узле:

$$Q_i^\pm = \varphi_i^{\max_{\min}} - \varphi_i^L. \quad (29)$$

- R_i^\pm – наименьшая верхняя граница поправочных коэффициентов, гарантирующая отсутствие превышения/понижения потока в узле:

$$R_i^\pm = \begin{cases} \min\{1, Q_i^\pm / P_i^\pm\}, & \text{если } P_i^\pm \neq 0 \\ 0, & \text{если } P_i^\pm = 0 \end{cases} \quad (30)$$

- Окончательная поправка вычисляется как:

$$\alpha_e = \min_{i \in N_e} \begin{cases} R_i^+, & \text{если } F_{e,i} \geq 0 \\ R_i^-, & \text{если } F_{e,i} < 0 \end{cases} \quad (31)$$

Действуя описанным способом, гарантируется, что $u_i^{min} \leq u_i^{n+1} \leq u_i^{max}$. Кроме того, схема будет сохранять положительность значений и консервативность.

После применения описанного выше метода получаем следующий результат:

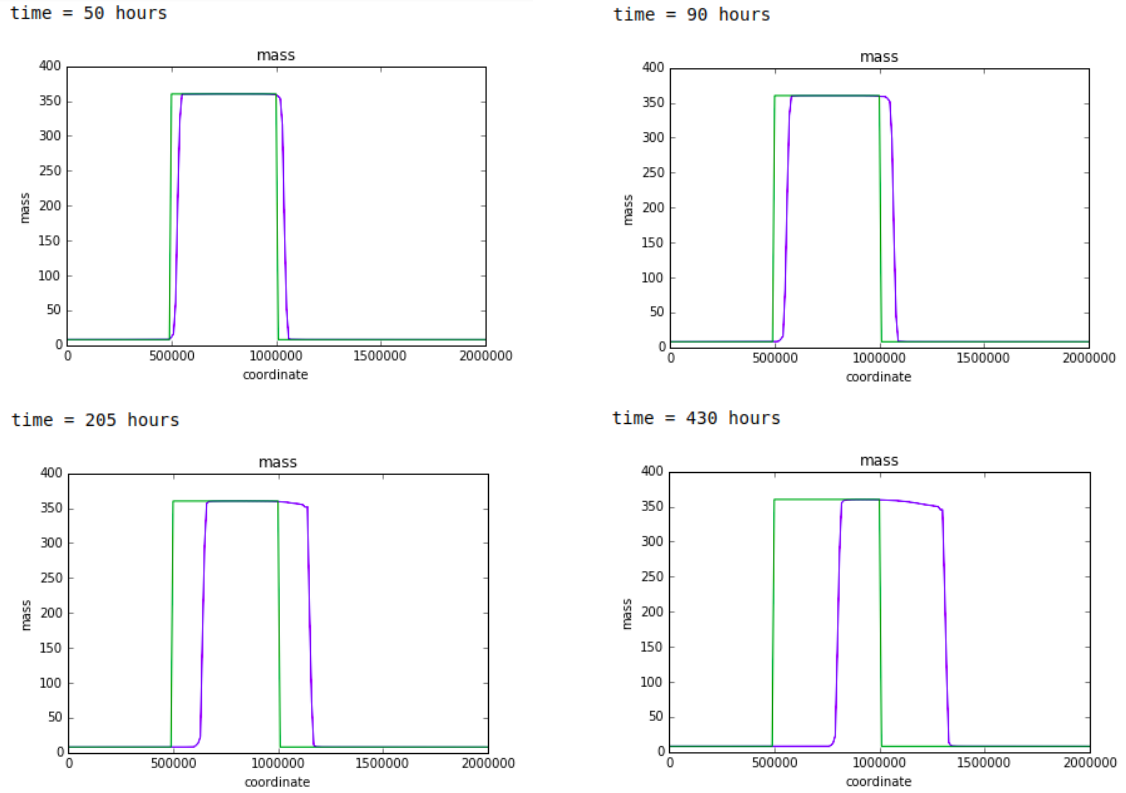


Рис. 5: Метод коррекции потоков

Удалось добиться исключения осцилляций и положительности решения во всех узлах. При этом решение практически сохраняет форму при переносе.

5 Методы решения нелинейного уравнения

В данном разделе исследуем методы решения нелинейного уравнения закона сохранения импульса (6):

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = A\tau_a - A\tau_w + F.$$

Для пересчета массы и сплоченности будет использоваться скорректированный метод Тейлора–Галеркина с помощью схемы Лэрнера: $u_i^{n+1} = u_i^L + \sum_e \alpha_e F_{e,i}$, $0 \leq \alpha_e \leq 1$, подробно описанный в прошлом разделе.

5.1 Явный метод Эйлера интегрирования по времени

Наиболее очевидный путь решения состоит в явном интегрировании уравнения (6):

$$m \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = A\tau_a - \rho_w C_w (u^n)^2 + F(u^n)$$

Вариационная формулировка:

Найти $u^{n+1} \in L$, такую что $\forall v \in L$

$$\langle m u^{n+1}, v \rangle = \langle m u^n, v \rangle + \langle \Delta t A \tau_a, v \rangle - \langle \rho_w C_w (u^n)^2, v \rangle + \langle F(u^n), v \rangle$$

Проведем тестирование программы при различных временных шагах.

Для шага по времени в 1 час:

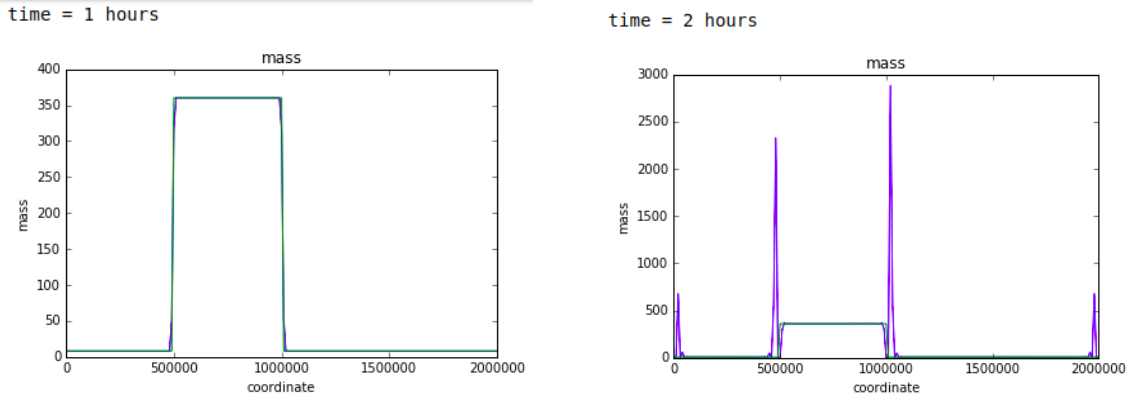


Рис. 6: Явный метод Эйлера, $\Delta t = 1$ hour

Для шага по времени в 1 минуту:

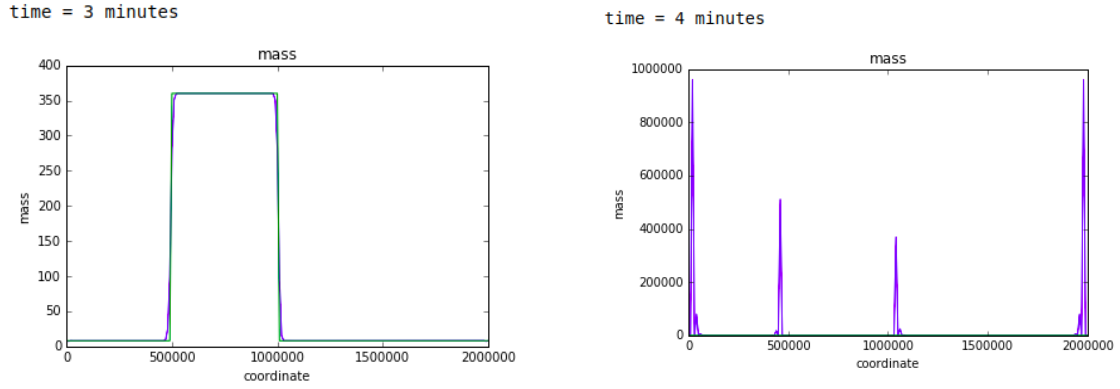


Рис. 7: Явный метод Эйлера, $\Delta t = 1$ minute

Видно, что явный метод Эйлера неустойчив для достаточно больших шагов по времени. Метод начинает быть устойчивым только при шагах по времени около 10 секунд. Поскольку требуется устойчивость на шагах по времени около 1 часа, то делаем вывод, что явные схемы не применимы в данном случае.

5.2 Итерационный метод с пересчетом скорости

Гораздо более разумным будет использование итерационных методов решения нелинейного уравнения (6). Рассмотрим метод простой итерации с пересчетом скорости.

Мотивация: Нам хотелось бы решать полностью неявное уравнение:

$$m \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = A\tau_a - \rho_w C_w (u^{n+1})^2 + F(u^{n+1})$$

Но обращение нелинейного оператора F не представляется возможным.

Реализация:

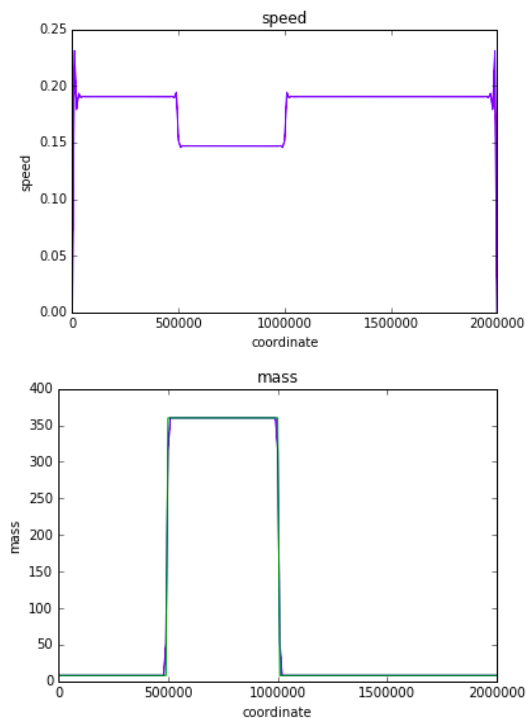
Добавляем в начало фиктивный член $\beta m(u^{m+1} - u^m)$ при некотором достаточно большом β :

$$\beta m(u^{m+1} - u^m) + m \frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t} = A\tau_a - \rho_w C_w u^{m+1} u^m + F(u^m)$$

Тогда, если предположить, что $u^{m+1} - u^m \rightarrow 0$, то фактически в пределе получается требуемая неявная схема.

В программе задается априорная точность 10^{-5} и итерационный процесс продолжается до тех пор, пока заданная точность не будет достигнута. Результат работы программы при $\beta = 50$:

time = 1 hours
iter=4813: ,norm_u=9.99841e-05



time = 122 hours
iter=19: ,norm_u=9.94494e-05

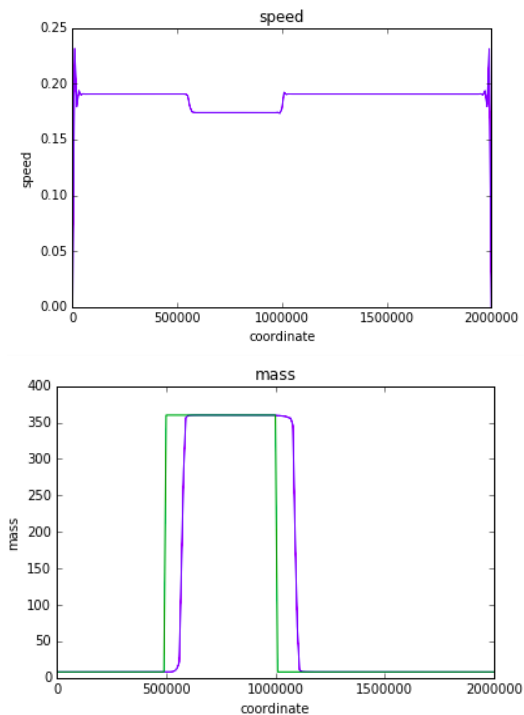
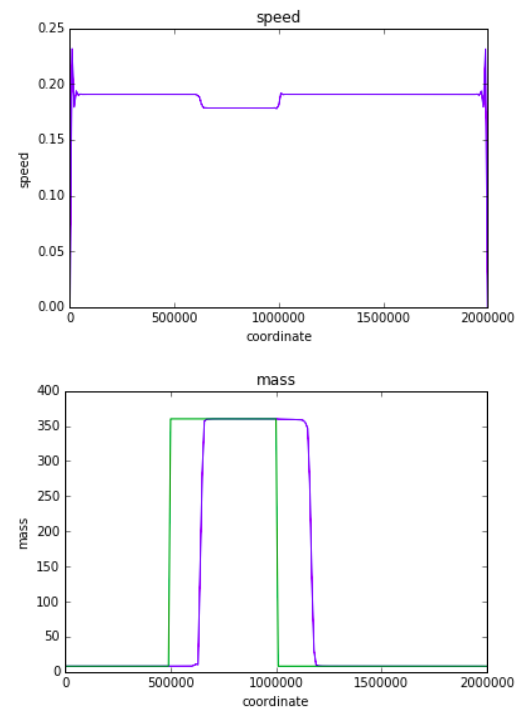


Рис. 8: Итерационный метод с пересчетом скорости (1)

time = 226 hours
iter=1: ,norm_u=8.69092e-05



time = 435 hours
iter=1: ,norm_u=8.66941e-05

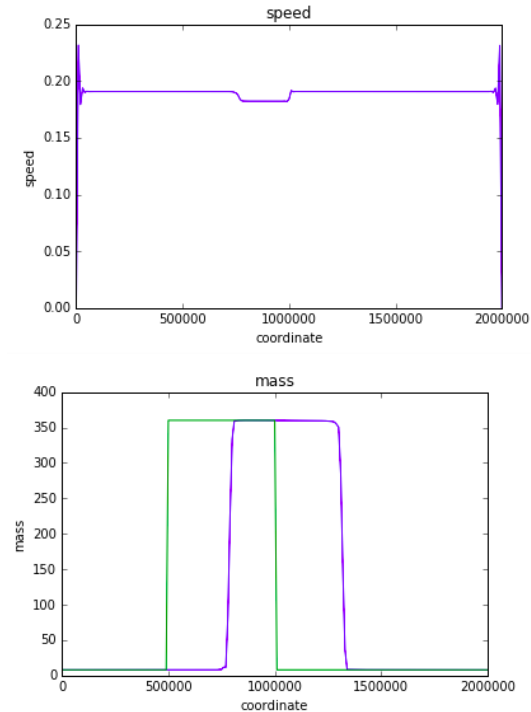


Рис. 9: Итерационный метод с пересчетом скорости (2)

В почти установившемся режиме итерационный метод сходится за одну итерацию. Но, к сожалению, присутствует проблема долгого установления скорости льдины.

5.3 Итерационный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений

Имеем равенство:

$$\sigma(u) = \xi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{P(u)}{2}$$

Поэтому при достаточно больших α и β можем добавить уравнение пересчета тензора напряжений:

$$\begin{cases} \alpha(\sigma^{m+1} - \sigma^m) + \sigma(u^m) = \xi(u^m) \frac{\partial u^m}{\partial x} - \frac{P(u^m)}{2} \\ \beta m(u^{m+1} - u^m) + m \frac{u^{m+1} - u^m}{\Delta t} = A\tau_a - \rho_w C_w u^{m+1} u^m + \frac{\partial}{\partial x} \sigma^{m+1} \end{cases} \quad (32)$$

Результат выполнения программы при $\alpha = 50$, $\beta = 30$:

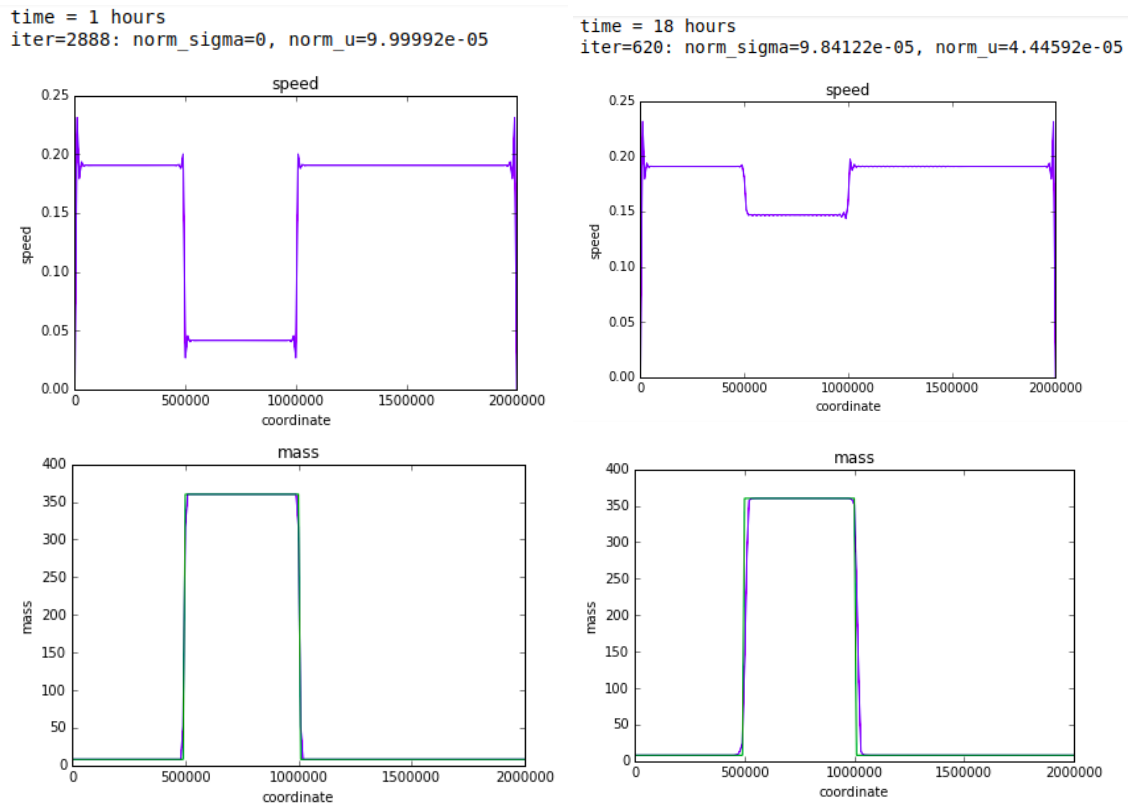
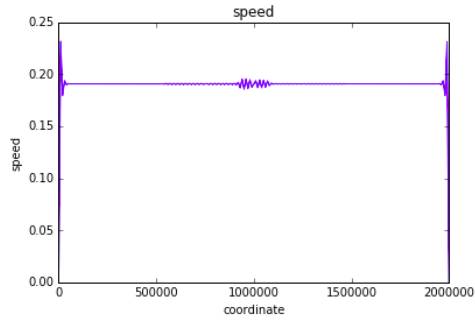


Рис. 10: Итерационный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений (1)

time = 86 hours
iter=626: norm_sigma=9.87576e-05, norm_u=1.11844e-05



time = 118 hours
iter=628: norm_sigma=9.80002e-05, norm_u=1.0579e-05

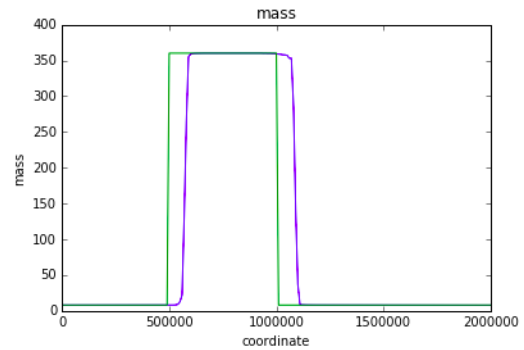
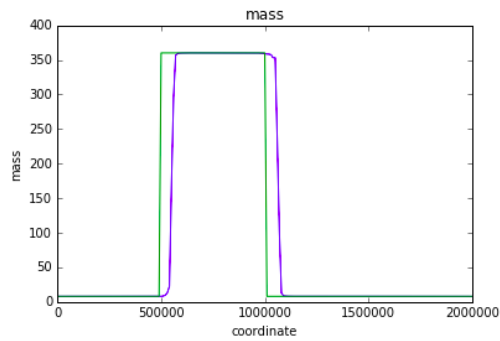
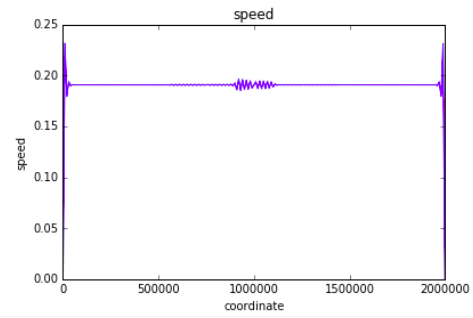


Рис. 11: Итерационный метод с пересчетом скорости и тензора напряжений (2)

Видим, что в установившемся режиме требуется около 600 итераций, чтобы достичь заданной точности. Это намного хуже, чем в случае пересчета только скорости, но основная масса льда набирает нужную скорость намного быстрее, что более физично.

6 Заключение

В данной работе были упрощены уравнения двумерной динамики морского льда и исследованы некоторые методы их решения. Часть этих методов естественным образом несложно обобщаются на двумерный случай (метод коррекции потоков). Наилучшим образом показал себя метод простой итерации с пересчетом скорости и тензора напряжений. Метод коррекции потоков, примененный для явной схемы Тейлора–Галеркина, в качестве схемы интегрирования по времени высокого порядка, и схема Лэрнера, в качестве схемы низкого порядка, показали отличный результат. В существующих конечно–элементных моделях используется более сложный вид давления P , который требует специальных методов интегрирования. В данной работе используется более модельный вид давления. Освоен конечно–элементный пакет „Fenics“ языка „Python“. В качестве улучшения построенной модели, можно рассмотреть схемы интегрирования по времени с переменным шагом.

Список литературы

- [1] A Dynamic Thermodynamic Sea Ice Model, W.D.Hibler III (1978).
- [2] Finite-Element Sea Ice Model (FESIM) version 2, S. Danilov, Q. Wang, R. Timmermann, N. Iakovlev, D. Sidorenko, M. Kimmritz, T. Jung, and J. Schroter (2015).
- [3] Solving PDEs in Python – The FEniCS Tutorial Volume I, Hans Petter Langtangen, Anders Logg (2017).
- [4] Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method, Anders Logg, Kent-Andre Mardal, Garth N. Wells (2011).
- [5] The Finite Element Method. Fifth edition. Volume 3: Fluid Dynamics, O.C. Zienkiewicz (1999).
- [6] Flux correction tools for finite elements, D.Kuzmin, S.Turek (2002).