

# VP-метод

30 мая 2019 г.

## 1 Описание метода

Компоненты тензора напряжений в случае вязко-пластичной реологии записываются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = 2\eta(\dot{\epsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk}) + \xi\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk} - \frac{1}{2}\delta_{ij}P \quad (1)$$

Классический метод (ссылка на статью) подразумевает запись этого тензора в виде:

$$\sigma_{ij} = (\xi + \eta)(\partial_i u_j) + \eta(\partial_j u_i) - \xi(\partial_i u_j) + (\xi - \eta)\delta_{ij}\dot{\epsilon}_{kk} - \frac{1}{2}\delta_{ij}P \quad (2)$$

Только первое слагаемое в (2) учитывается неявно. После подстановки в уравнения динамики предлагается сделать несколько итераций Пикара по схеме:

$$\begin{aligned} \frac{m^n}{\Delta t} \mathbf{u}^{p+1} - \partial_i \left[ (\xi + \eta)^* \partial_i \mathbf{u}^{p+1} \right] + C_w A^n \rho_w \mathbf{u}^{p+1} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_w| = \\ m^n (\mathbf{f} \times \mathbf{u}^* + \frac{\mathbf{u}^n}{\Delta t}) + C_d A^n \rho_w \mathbf{u}_w^n |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_w| + \tilde{\mathbf{F}}^* - m^n g \nabla H^n, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x^* = \frac{1}{2}(x^p + x^n)$ . Применяя метод Галекина, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{p+1} \\ \mathbf{v}^{p+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{p+1} \\ \mathbf{v}^{p+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Здесь приняты обозначения:

$$[M]_{ij} = \left( \frac{m^n}{\Delta t} + C_w A^n \rho_w |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_w| \right)_j \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dS;$$

$$[B]_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{P_0 \Delta^* (1 + \frac{1}{\epsilon^2})}{2(\Delta^* + \Delta_{min})} \right) \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right] dS.$$

Затем предлагается сделать еще несколько дополнительных итераций, которые неявно учитывают слагаемое с Кориолисом:

$$\begin{aligned}
& \frac{m^n}{\Delta t} \mathbf{u}^{n+1} + m^n \mathbf{f} \times \mathbf{u}^{n+1} + C_w A^n \rho_w \mathbf{u}^{n+1} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_w| = \\
& \frac{m^n}{\Delta t} \mathbf{u}^{N_p} + m^n \mathbf{f} \times \mathbf{u}^* + C_w A^n \rho_w \mathbf{u}^{N_p} |\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_w|
\end{aligned} \tag{5}$$