Неявный VP-метод

26 июня 2019 г.

Компоненты тензора деформации имеют вид (Hibler):

$$\sigma_{ij} = 2\eta(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk}) + \xi\delta_{ij}\dot{\varepsilon}_{kk} - \frac{1}{2}\delta_{ij}P \tag{1}$$

Распишем покомпонентно:

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = 2\eta\partial_x u - \eta\partial_x u - \eta\partial_y v + \xi\partial_x u + \xi\partial_y v - \frac{1}{2}P \\
\sigma_{21} = \eta\partial_x v + \eta\partial_y u \\
\sigma_{12} = \eta\partial_y u + \eta\partial_x v \\
\sigma_{22} = 2\eta\partial_y v - \eta\partial_x u - \eta\partial_y v + \xi\partial_x u + \xi\partial_y v - \frac{1}{2}P
\end{gathered} \tag{2}$$

Удобнее записать компоненты в виде (этой записью будем пользоваться в дальнейшем):

$$\begin{gathered}
\sigma_{11} = (\xi+\eta)\partial_x u + (\xi-\eta)\partial_y v - \frac{1}{2}P \\
\sigma_{21} = (\xi+\eta)\partial_y u + \eta\partial_x v - \xi\partial_y u \\
\sigma_{12} = (\xi+\eta)\partial_x v + \eta\partial_y u - \xi\partial_x v \\
\sigma_{22} = (\xi+\eta)\partial_y v + (\xi-\eta)\partial_x u - \frac{1}{2}P
\end{gathered} \tag{3}$$

Компоненты силы: $F_1 = \partial_x\sigma_{11} + \partial_y\sigma_{21}, F_2 = \partial_x\sigma_{12} + \partial_y\sigma_{22}$.

В дифференциальной постановке компоненты силы записываются:

$$\begin{gathered}
F_1 = \partial_x[(\xi+\eta)\partial_x u] + \partial_x[(\xi-\eta)\partial_y v] - \frac{1}{2}\partial_x P + \partial_y[(\xi+\eta)\partial_y u] + \\
\partial_y[\eta\partial_x v] - \partial_y[\xi\partial_y u] \\
F_2 = \partial_x[(\xi+\eta)\partial_x v] + \partial_x[\eta\partial_y u] - \partial_x[\xi\partial_x v] + \partial_y[(\xi+\eta)\partial_y v] + \\
\partial_y[(\xi-\eta)\partial_x u] - \frac{1}{2}\partial_y P
\end{gathered} \tag{4}$$

Скалярно домножая компоненты силы на тестовую функцию κ приходим к слабой постановке($\{.\ ,\ .\ \}$ - скалярное произведение):

$$\tilde{F}_1 = -\{(\xi+\eta)\partial_x u, \partial_x\kappa\} - \{(\xi-\eta)\partial_y v, \partial_x\kappa\} + \frac{1}{2}\{P, \partial_x\kappa\} - \{(\xi+\eta)\partial_y u, \partial_y\kappa\} - \{\eta\partial_x v, \partial_y\kappa\} + \{\xi\partial_y u, \partial_y\kappa\}$$
$$\tilde{F}_2 = -\{(\xi+\eta)\partial_x v, \partial_x\kappa\} - \{\eta\partial_y u, \partial_x\kappa\} + \{\xi\partial_x v, \partial_x\kappa\} - \{(\xi+\eta)\partial_y v, \partial_y\kappa\} - \{(\xi-\eta)\partial_x u, \partial_y\kappa\} + \frac{1}{2}\{P, \partial_y\kappa\} \tag{5}$$

Записываем дискретные скорости $u = \sum_i \varphi_i \mathrm{u}_i, v = \sum_i \varphi_i \mathrm{v}_i$. Введем следующим образом матрицы $N^{kl}_{x_i x_j}$:

$$\left[N^{kl}_{x_i x_j}\right]_{mn} = \int_\Omega (k\cdot\xi + l\cdot\eta)\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_j} dS, \tag{6}$$

и вектора $\mathbf{p_i}$:

$$[\mathbf{p_i}]_k = \frac{1}{2}\int_\Omega P\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i} \tag{7}$$

Таким образом, вектора $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ записываются как:

$$\begin{aligned} \mathbf{F_1} &= -N^{1,1}_{xx}\mathbf{u} - N^{1,-1}_{yx}\mathbf{v} - N^{1,1}_{yy}\mathbf{u} - N^{0,1}_{xy}\mathbf{v} + N^{1,0}_{yy}\mathbf{u} + \mathbf{p_1} \\ \mathbf{F_2} &= -N^{1,1}_{xx}\mathbf{v} - N^{0,1}_{yx}\mathbf{u} + N^{1,0}_{xx}\mathbf{v} - N^{1,1}_{yy}\mathbf{v} - N^{1,-1}_{xy}\mathbf{u} + \mathbf{p_2} \end{aligned} \tag{8}$$

Теперь вернемся к уравнениям динамики. Необходимо решать следующее уравнение:

$$m(\partial_t + \mathbf{f}\times)\mathbf{u} = AC_a\rho_a|\mathbf{u_a}|\mathbf{u_a} - AC_w\rho_w(\mathbf{u}-\mathbf{u_w})|\mathbf{u}-\mathbf{u_w}| + \mathbf{F} - mg\nabla H \tag{9}$$

Аппроксимируя производную по времени, запишем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} m^n\frac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^n}{\Delta t} + m^n\mathbf{f}\times\mathbf{u}^{n+1} = A^nC_a\rho_a|\mathbf{u_a}^n|\mathbf{u_a}^n - \\ -A^nC_w\rho_w(\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u_w}^n)|\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u_w}^n| + \mathbf{F}^{n+1} - m^n g\nabla H^n \end{aligned} \tag{10}$$

Перенося все неизвестные значения налево, получаем следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \frac{m^n}{\Delta t}\mathbf{u}^{p+1} + m^n\mathbf{f}\times\mathbf{u}^{p+1} + A^nC_w\rho_w\mathbf{u}^{p+1}|\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u_w}^n| - \mathbf{F}^{p+1} = \\ \frac{m^n}{\Delta t}\mathbf{u}^n + A^nC_a\rho_a|\mathbf{u_a}^n|\mathbf{u_a}^n + A^nC_w\rho_w\mathbf{u_w}^n|\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u_w}^n| - m^n g\nabla H^n \end{aligned} \tag{11}$$

Поделим уравнение на массу и будем использовать следующий итерационный процесс:

$$\begin{gathered}\frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}^{p+1} + \mathbf{f}\times\mathbf{u}^{p+1} + \frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w\mathbf{u}^{p+1}|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n| - \frac{1}{m^n}\mathbf{F}^{p+1} = \\ \frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}^n + \frac{A^n}{m^n}C_a\rho_a|\mathbf{u_a}^n|\mathbf{u_a}^n + \frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w\mathbf{u_w}^n|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n| - g\nabla H^n\end{gathered} \tag{12}$$

Расписывая систему покомпонентно и применяя метод Галеркина:

$$\begin{cases}\frac{1}{\Delta t}M\mathbf{u} - 2\omega_e M\mathbf{v} + \overline{\frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n|}M\mathbf{u} - \frac{1}{m^n}\mathbf{F_1}^{p+1} = \\ \frac{1}{\Delta t}M\mathbf{u}^n + \overline{\frac{A^n}{m^n}C_a\rho_a|\mathbf{u_a}^n|}M\mathbf{u_a}^n + \overline{\frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n|}M\mathbf{u_w}^n - \mathbf{h_1} \\ \frac{1}{\Delta t}M\mathbf{v} + 2\omega_e M\mathbf{u} + \overline{\frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n|}M\mathbf{v} - \frac{1}{m^n}\mathbf{F_2}^{p+1} = \\ \frac{1}{\Delta t}M\mathbf{v}^n + \overline{\frac{A^n}{m^n}C_a\rho_a|\mathbf{u_a}^n|}M\mathbf{v_a}^n + \overline{\frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n|}M\mathbf{v_w}^n - \mathbf{h_2}\end{cases} \tag{13}$$

Здесь M - массовая матрица. Поскольку вместо массовой матрицы можно использовать лампированную массовую матрицу, то проще будет домножить оба матричных равенства слева на обратную лампированную матрицу M_L^{-1}. Теперь можно подставить слабую форму компонент силы (8):

$$\begin{gathered}\begin{bmatrix}\frac{1}{\Delta t}I + D_w & -2\omega_e I \\ 2\omega_e I & \frac{1}{\Delta t}I + D_w\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\overline{m}^{-1}M_L^{-1}(N_{xx}^{1,1} + N_{yy}^{1,1} - N_{yy}^{1,0}) & \overline{m}^{-1}M_L^{-1}(N_{xy}^{0,1} + N_{yx}^{1,-1}) \\ \overline{m}^{-1}M_L^{-1}(N_{yx}^{0,1} + N_{xy}^{1,-1}) & \overline{m}^{-1}M_L^{-1}(N_{xx}^{1,1} + N_{yy}^{1,1} - N_{xx}^{1,0})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u} \\ \mathbf{v}\end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix}\frac{1}{\Delta t}\mathbf{u}^n + D_a\mathbf{u_a}^n + D_w\mathbf{u_w}^n - \mathbf{h_1} + \overline{m}^{-1}M_L^{-1}\mathbf{p_1} \\ \frac{1}{\Delta t}\mathbf{v}^n + D_a\mathbf{v_a}^n + D_w\mathbf{v_w}^n - \mathbf{h_2} + \overline{m}^{-1}M_L^{-1}\mathbf{p_2}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{14}$$

Здесь

$$\begin{gathered}D_w = diag(\overline{\frac{A^n}{m^n}C_w\rho_w|\mathbf{u}^p - \mathbf{u_w}^n|}) \\ D_a = diag(\overline{\frac{A^n}{m^n}C_a\rho_a|\mathbf{u_a}^n|})\end{gathered} \tag{15}$$