Überblick - Logik

Was ist Logik bei der KI?

→ *Eine Verwendung formaler logischer* ***Systeme****, um Wissen darzustellen, über Fakten nachzudenken und Entscheidungen zu treffen.*

Welche Rolle spielt Logik bei der KI?

→ *Entscheidungsfindungen (Decision making)*

→ *Automatische Denken (Reasoning)*

→ *Verifikation*

Überblick - Logik

Vorteile:

→ *Die Logik ist aussagekräftig und kompakt*

→ *Sie ist in kritischen Anwendungen relativ sicher*

Nachteile:

→ *Logik ist deterministisch und kann nicht gut generalisieren*

→ *Sie ist regelbasiert und kann nicht aus neuen Daten lernen*

Aussagenlogik

In der Vorlesung über Aussagenlogik werden wir zwei miteinander verknüpfte Konzepte behandeln: Syntax und Semantik.

Syntax bezieht sich auf die formalen Regeln, die festlegen, wie logische Aussagen (Formeln) konstruiert werden. Sie spezifiziert die Symbole (atomare Formeln, Junktoren) und Regeln zur Bildung eindeutig lesbarer Formeln.

Die **Semantik** bezieht sich auf die Bedeutung dieser syntaktischen Ausdrücke. Sie definiert Wahrheitswerte (wahr/falsch - 0/1) für Formeln, die auf Interpretationen oder Welten basieren.

Syntax

Logische Aussagenvariabeln oder **atomare Formeln** sind die kleinsten Einheiten (z.B. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$).

Logische **Junktoren** werden mit atomaren Formeln verwendet, um komplexere Formeln rekursiv zu erstellen. Diese sind:

1. Negation (NOT) $\neg$

2. Verknüpfung (AND) $\bigwedge$

3. Disjunktion (OR) $\bigvee$

4. Implikation (IF-THEN) $\longrightarrow$

5. Bi-Implikation (XNOR) $\leftrightarrow$

Syntax - Formeln

Beispiele:

(atomare) Formel: $\mathbf{A}$

Formel: $\neg\mathbf{A}$

Formel f: $f \equiv (\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

Syntax – Eindeutig Lesbarkeit

Obwohl man davon ausgeht, dass die Reihenfolge der Operationen für die Junktoren wie in der vorherigen Folie dargestellt ist, sollten Klammern verwendet werden, um die Formeln eindeutig lesbar zu machen.

Nicht korrekt: $f \equiv \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$

Korrekt: $f \equiv \mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$

Klammern können auch zum Ändern der Formeln verwendet werden und erzwingen, dass Operationen vor allen anderen ausgeführt werden:

Geändert: $g \equiv (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$

Beispiel – Logischer Aussagensatz

Satz: “Wenn es regnet, dann ist der Boden nass.”

“Wenn...dann” ist als “If...then” erkannt – **Implikation**.

Vorgehensweise:

'Es regnet' $\mathbf{A}$

'der Boden ist nass' $\mathbf{B}$

'Wenn es regnet, dann ist der Boden nass' $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$

Wahrheitswerte

Seien f, g aussagenlogische Formeln:

1. Negation: $\neg f = 1 \text{ wenn } f \vDash 0, \text{ und } \neg f = 0 \text{ wenn } f \vDash 1$

2. Konjunktion: $(f \wedge g) = 1 \text{ wenn } f \text{ und } g \vDash 1, \text{ und } (f \wedge g) = 0 \text{ ansonsten}$

3. Disjunktion: $(f \vee g) = 0 \text{ wenn } f \text{ und } g \vDash 0, \text{ und } (f \vee g) = 1 \text{ ansonsten}$

4. Implikation: $(f \rightarrow g) = 0 \text{ wenn } f \vDash 1,\ g \vDash 0, \text{ und } (f \rightarrow g) = 1 \text{ ansonsten}$

5. Bi-implikation: $(f \leftrightarrow g) = 1 \text{ wenn } f \vDash g, \text{ und } (f \leftrightarrow g) = 0 \text{ ansonsten}$

Wahrheitstafel

f	g	$\neg f$	$(f \wedge g)$	$(f \vee g)$	$(f \rightarrow g)$	$(f \leftrightarrow g)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Semantik

Die bisher besprochenen Formeln sind reine Syntax. Sie haben keine semantische Bedeutung!

Wenn wir in der Logik das Wort „Semantik“ verwenden, beziehen wir uns auf die Zuordnung von Wahrheitswerten zu atomaren Formeln. Dies geschieht mit **Welten***, von denen es viele geben kann, die die Wahrheitswerte zuordnen.

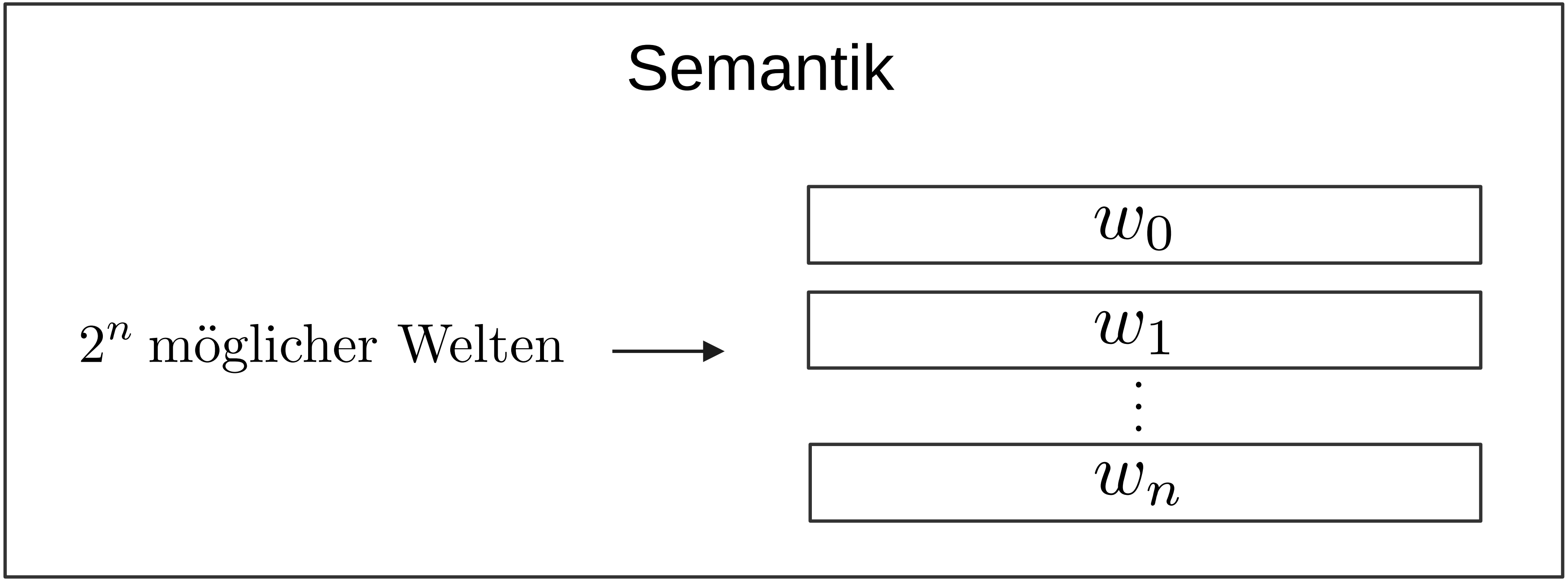
Eine Beispiel für eine Welt w ist:

$$w = \{\mathbf{A}{:}0, \mathbf{B}{:}0, \mathbf{C}{:}1\}$$

***Achtung:** In der Literatur werden *Welten* auch als *Modelle* bezeichnet, aber wir verwenden erstere, um Verwechslungen mit den von uns entwickelten KI-Modellen zu vermeiden.

Welten

Die Semantik kann viele Welten enthalten. Da die Wahrheitswerte in der Logik nur einen von zwei Werten annehmen können (0 und 1), können wir für n *atomare* Formeln höchstens 2^n Welten haben.



Interpretationsfunktion $I(f,w)$

Interpretationsfunktionen **definieren die Semantik**. Die nehmen als Argumente eine Formel und eine Welt und geben eine Wahrheitswert zurück. Bedeutung:

$$I(f,w) \equiv \text{ Semantik}$$

$$I(f,w) = 1 \text{ wenn } f \vDash 1 \text{ für welt } w, \text{ und}$$

$$I(f,w) = 0 \text{ wenn } f \vDash 0 \text{ für welt } w.$$

Wir sagen, dass eine Welt eine bestimmte Formel erfüllt, wenn die Interpretation der Formel für diesen Weltzustand wahr ist. Mit anderen Worten: Wenn $I(f,w)=1$, **erfüllt** w die Formel f.

$I(f, w)$ Rekursive Definition

Wir können die Implementierungsfunktion rekursiv definieren. Zum Beispiel können wir für die atomaren Formeln $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, und $\mathbf{C}$, die Formeln f und g wie folgt definieren:

$$f \equiv \ (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{C}$$

$$g \equiv \ (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$$

Dann könnten wir weitere Formeln mit Junktoren erstellen:

$$(f \vee g)$$

Diese Formel könnte dann im letzten Schritt der Definition der Interpretationsfunktion verwendet werden:

$$I((f \vee g), w)$$

$I(f, w)$ Rekursive Auswertung

Genau wie bei der Definition erfolgt die Auswertung von $I(f, w)$ rekursiv, beginnend mit den atomaren Formeln. Beispiel:

Für Welt $w = \{\, \mathbf{A}{:}0, \mathbf{B}{:}0, \mathbf{C}{:}1 \,\}$

sind die Auswertungen der atomaren Formeln:

$I(\mathbf{A}, w) = 0$; $I(\mathbf{B}, w) = 0$; $I(\mathbf{C}, w) = 1$.

Auf dieser Grundlage können wir dann die Formeln f und g (vorheriger Seite) bewerten:

$$I(f, w) = I((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \to \mathbf{C}, w) = (0 \wedge 0) \to 1 = 0 \to 1 = 1$$

$$I(g, w) = I((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}, w) = (0 \vee 0) \wedge 1 = 0 \wedge 1 = 0$$

$I(f,w)$ Rekursive Auswertung

Schließlich bewerten wir die Formel $(f \vee g)$:

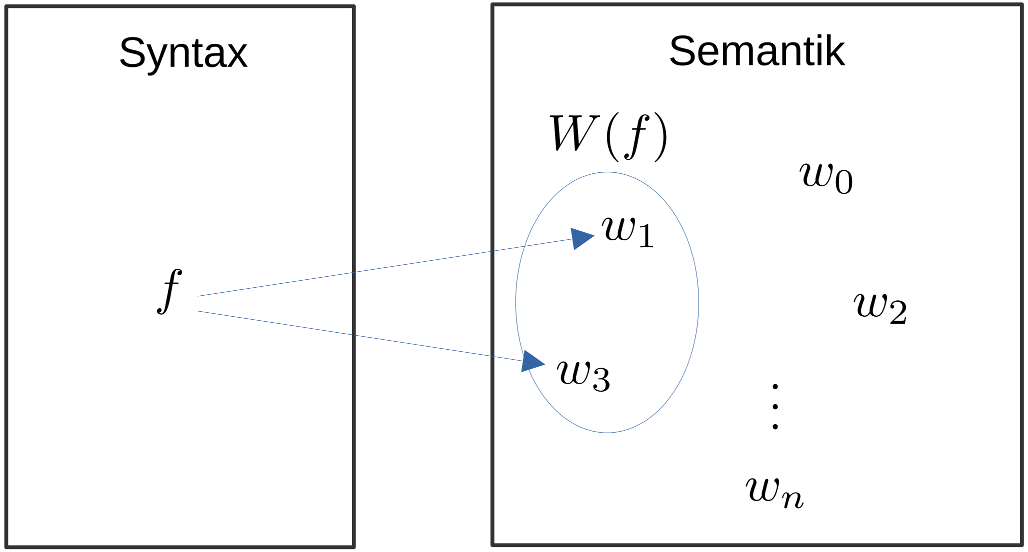
$$I((f \vee g), w_1) = 1 \vee 0 = 1$$

Da die Auswertung einen wahren Wert ergibt, sagen wir: $\boldsymbol{w}$ **erfüllt** $(\boldsymbol{f} \vee \boldsymbol{g})$.

Syntax auf Semantik

Wir können eine Teilmenge von Welten finden, die eine bestimmte Formel erfüllen.
Sei $W(f)$ eine Menge von Formeln, für die $I(f, w) = 1$ ist.

Beispiel: $W(f) = \{ w_1, w_3 \}$



Kurzeinführung - Wissensbasis

Eine **Wissensbasis** WB ist eine Menge von Formeln, die ihre Konjunktion/Schnittmenge darstellen. Die Formeln in WB sind auch als **Fakten** bekannt.

In der nächsten Vorlesung (28.03.2025) werden wir Wissensbasen behandeln! Wir werden auch einige Beispiele durchgehen und Sie werden Ihre Teamaufgaben erhalten.