



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
«Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского»

Физико-технический институт
Кафедра компьютерной инженерии и моделирования

Лабораторная работа № 3

«Спектральный анализ непериодических сигналов»

По дисциплине
«Обработка сигналов»

Выполнил:

Студент 3 курса

Направления подготовки
09.03.01 «Информатика и
вычислительная техника»

Группы ИВТ-6-о-222

Чудопалов Богдан Андреевич

Проверил:

Таран Е.П.

«_»_____20__г.

Оценка:_____ Подпись:

Симферополь, 2025

Лабораторная работа № 3 «Спектральный анализ непериодических сигналов»

Цель работы: разработать программное обеспечение, которое будет осуществлять спектральный анализ непериодического сигнала.

Техническое задание: задан произвольный сигнал. Необходимо разработать программное обеспечение, которое будет вычислять коэффициенты разложения сигнала в ряд Фурье, амплитуду и фазу гармоник, строить амплитудные и фазовые спектральные диаграммы, а также строить график аппроксимированного сигнала исходя из потери относительной мощности сигнала. Номер варианта: 2

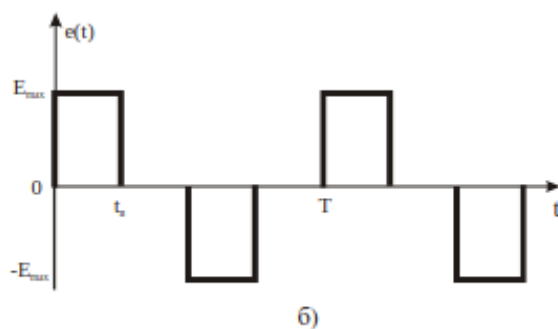


Рис. 1. Форма сигнала согласно варианту

Таблица 1. Параметры сигнала

№ варианта	2
Сигнал	б
E_{\max} , В	10
t_n , мкс	11 2
T , мкс	44 8

Ход работы

1. Пройти инструктаж по технике безопасности работы в компьютерном классе, изучить инструкции по технике безопасности и правилам оказания первой медицинской помощи.
2. Задан одиночный импульс амплитудой E_{\max} и длительностью $t_{\text{и}}$. (Из периодической последовательности импульсов (рисунок 2.1) выбирается один импульс, параметры которого приведены в таблице 2.1).
3. Разработать программное обеспечение, которое позволяет получить спектральную плотность одиночного импульса.
4. Построить амплитудный и фазовый спектр заданного импульса.
5. Провести цикл вычислительных экспериментов, в котором определить практическую ширину спектра исходя из потери относительной энергии сигнала (10 %, 5 %, 2 %, 1 %, 0,1 %).
6. Построить графики амплитудного и фазового спектров заданного импульса в зависимости от практической ширины спектра.
7. Графически изобразить исходный и аппроксимированный периодические сигналы для различной практической ширины спектра.
8. Сделать вывод по полученным результатам.

1. Теоретический раздел:

Одиночный импульс может быть представлен как во временной области, так и в частотной. Переход из временной в частотную область осуществляется с помощью прямого преобразования Фурье:

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \quad (3.1),$$

где $s(t)$ – заданный сигнал; $S(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $s(t)$.

Переход из частотной области во временную осуществляется с помощью обратного преобразования Фурье:

$$s(t) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad (3.2),$$

Спектральная плотность сигнала представляет собой комплексную величину. Спектральную плотность можно выразить через модуль (амплитудный спектр $|S(j\omega)|$) и аргумент (фазовый спектр $\psi(t)$):

$$|S(j\omega)| = \sqrt{[\operatorname{Re}(S(j\omega))]^2 + [\operatorname{Im}(S(j\omega))]^2}; \quad \operatorname{tg} \psi(t) = \frac{\operatorname{Im}(S(j\omega))}{\operatorname{Re}(S(j\omega))} \quad (3.3),$$

где $\operatorname{Re}(S(j\omega))$, $\operatorname{Im}(S(j\omega))$ – вещественная и мнимая части спектральной плотности $S(j\omega)$.

При переходе из временной области в частотную сигнал должен быть абсолютно интегрируемым:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| \cdot dt < \infty \quad (3.4).$$

Полная энергия одиночного импульса определяется следующим выражением:

$$E_c = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt \quad (3.5).$$

Энергия, сосредоточенная в полосе частот $[0 \div \omega_k]$, определяется, согласно теоремы Парсеваля, следующим соотношением:

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_k} (S(\omega))^2 \cdot dt \quad (3.6).$$

Определение практической ширины спектра (значения ω_k) зависит от отношения $E_{\Delta\omega}/E_c$:

$$\frac{E_{\Delta\omega}}{E_c} \geq \delta \quad (3.7).$$

где δ - потеря относительной энергии сигнала.

2. Практический раздел

Вывод программы имеет вид:

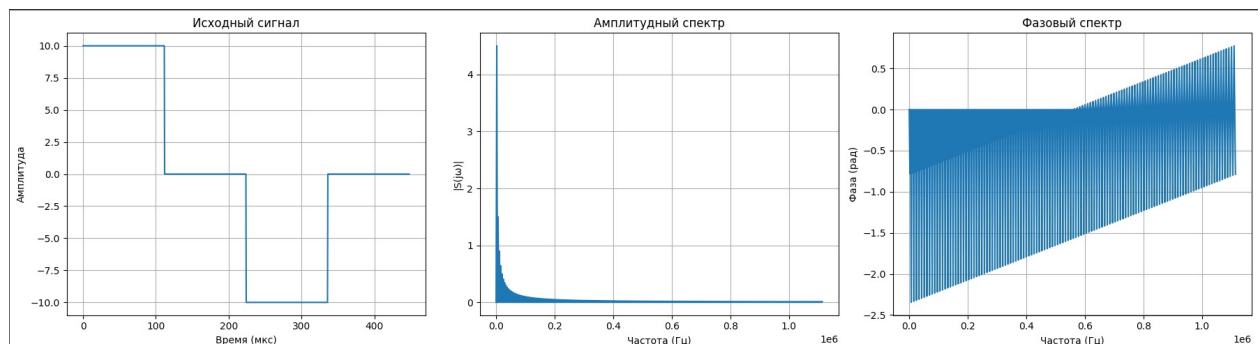


Рис. 1. Исходный сигнал, его амплитудный и фазовый спектр.

```

Ширина спектра с учетом потерь энергии:
Потери 10%: 6696 Гц
Потери 5%: 20089 Гц
Потери 2%: 46875 Гц
Потери 1%: 91518 Гц
Потери 0.1%: 645089 Гц
    
```

Рис. 2. Ширина спектра с учетом потерь энергии.

Ширина спектра рассчитана через энергетические характеристик и сигнала, она считается интегральным выражением

$$E_{\Delta\omega} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\omega_k} (S(\omega))^2 \cdot d\omega$$

Далее проводится аппроксимация сигнала, для этого используются формулы для расчета коэффициентов ряда Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$

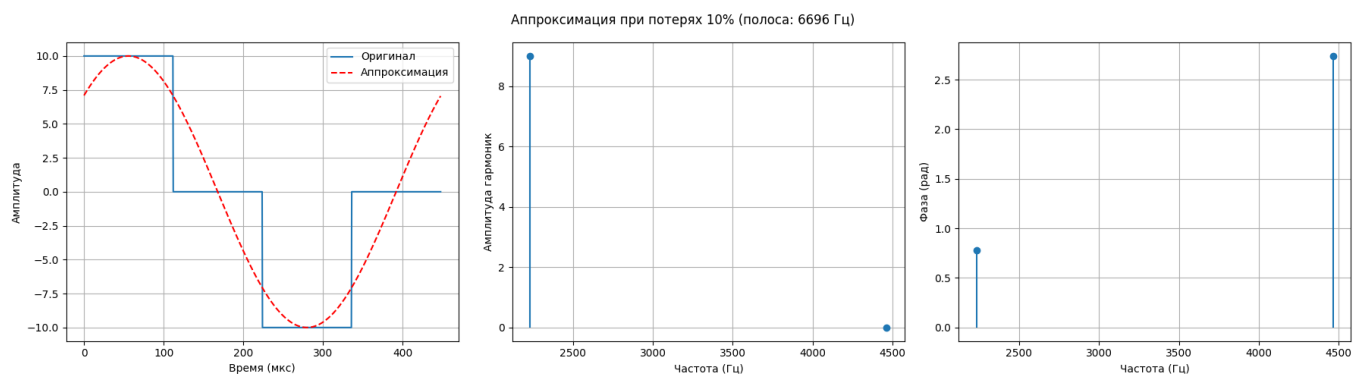
$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt$$

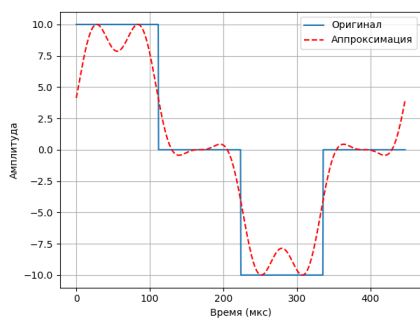
Для реконструкции сигнала используется формула:

$$s_{\text{rec}}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

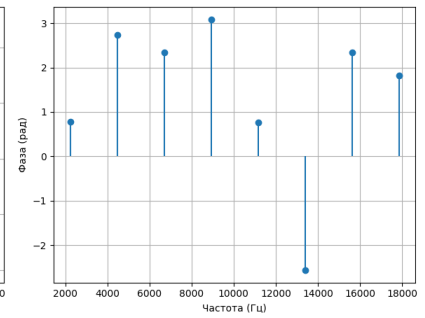
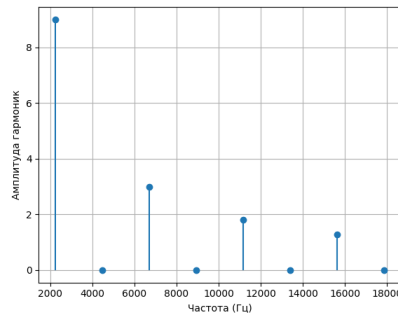
Аппроксимация для 10% потерь:



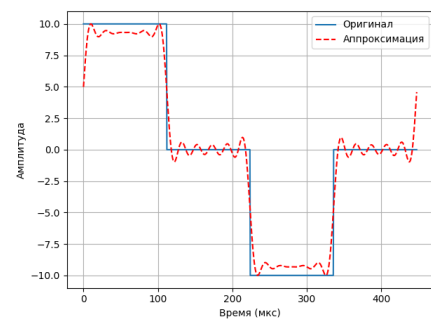
Аппроксимация для 5% потерь:



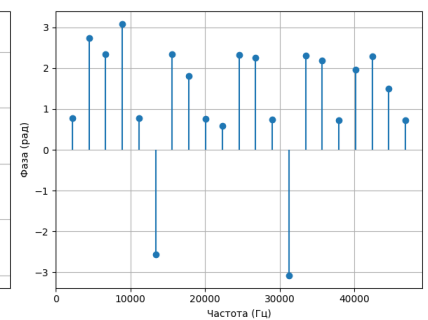
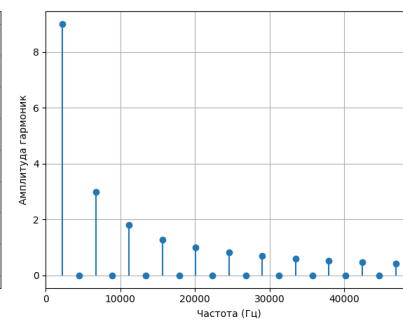
Аппроксимация при потерях 5% (полоса: 20089 Гц)



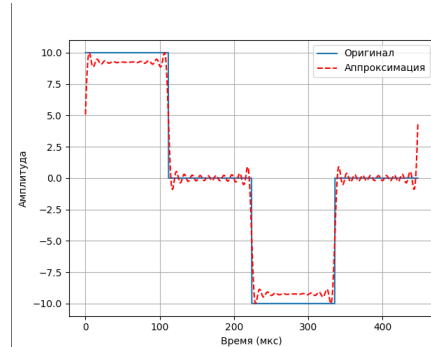
Аппроксимация для 2% потерь:



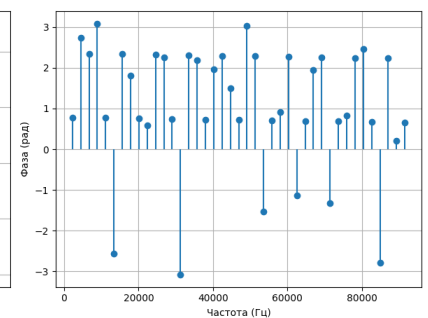
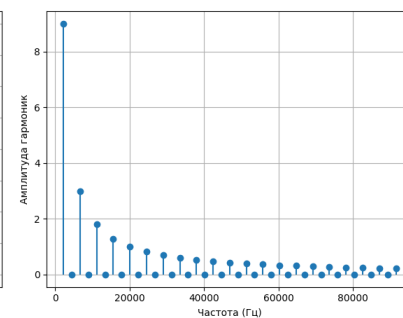
Аппроксимация при потерях 2% (полоса: 46875 Гц)



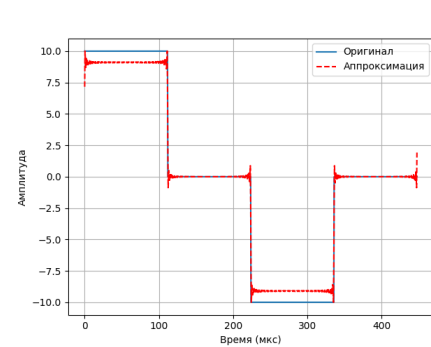
Аппроксимация для 1% потерь:



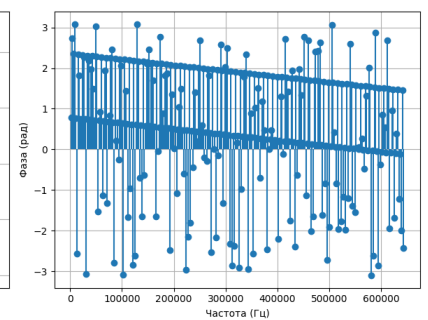
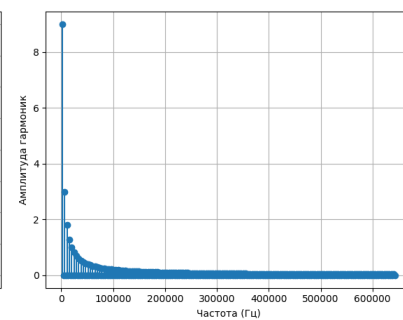
Аппроксимация при потерях 1% (полоса: 91518 Гц)



Аппроксимация для 0.1% потерь:



Аппроксимация при потерях 0.1% (полоса: 645089 Гц)



При уменьшении процентов потерь энергии в процессе аппроксимации сигнала с помощью ряда Фурье наблюдается улучшение точности восстановления сигнала. На графиках во временной области аппроксимированный сигнал становится ближе к оригинальному, что указывает на более точное отражение деталей исходного сигнала. В частотной области амплитудный спектр гармоник становится более детальным, поскольку учитывается большее количество гармоник, что приводит к более точному представлению сигнала. Фазовый спектр также становится более точным, что важно для сохранения временных характеристик сигнала. Уменьшение потерь энергии требует увеличения ширины спектра, что соответствует более широкому диапазону частот, необходимому для точной аппроксимации. В результате, графики демонстрируют улучшение качества аппроксимации по мере уменьшения допустимых потерь энергии.

Вывод:

1. Спектральный анализ: Было проведено спектральное исследование заданного сигнала с использованием преобразования Фурье. Это позволило получить амплитудный и фазовый спектры сигнала, что важно для понимания его состава и временных характеристик.

2. Аппроксимация сигнала: Реализована аппроксимация сигнала с помощью ряда Фурье для различных уровней потерь энергии (10%, 5%, 2%, 1%, 0.1%). Это показало, как уменьшение допустимых потерь энергии улучшает точность восстановления сигнала.

3. Графическое представление: Построены графики исходного сигнала, его амплитудного и фазового спектров, а также графики аппроксимированных сигналов для разных уровней потерь энергии. Это визуально демонстрирует улучшение качества аппроксимации при уменьшении потерь.

В ходе лабораторной работы была успешно реализована программа для спектрального анализа и аппроксимации сигнала с использованием ряда

Фурье. Уменьшение процентов потерь энергии привело к улучшению точности восстановления сигнала, что подтверждается как теоретически, так и графически. Результаты работы демонстрируют важность спектрального анализа и ряда Фурье в обработке сигналов для точного представления и восстановления сигналов с заданными характеристиками.

Приложение

```
T = 448e-6
Emax = 10

def rectangular_signal(x):
    x = x % T
    quarter = T / 4

    if 0 <= x < quarter:
        return Emax
    elif quarter <= x < 2 * quarter:
        return 0
    elif 2 * quarter <= x < 3 * quarter:
        return -Emax
    else:
        return 0
```

1.1. Генерация сигнала.

```
S = fft(signal)
frequencies = fftfreq(N, dt)
positive_freqs = frequencies[:N//2]
S_positive = S[:N//2]

amplitude_spectrum = np.abs(S_positive) / N
phase_spectrum = np.angle(S_positive)
```

1.2. Вычисление спектра сигнала.

```
E_s_time = np.sum(np.abs(signal)**2) * dt
energy_per_bin = (np.abs(S_positive)**2) * (dt/N)
cumulative_energy = np.cumsum(energy_per_bin)
E_s_freq = cumulative_energy[-1]
normalized_cumulative_energy = cumulative_energy / E_s_freq
```

1.3. Расчет энергии сигнала и ширины спектра.

```

def a_n(n, T):
    integral = np.sum(signal * np.cos(2*np.pi*n*t/T)) * dt
    return (2/T) * integral

def b_n(n, T):
    integral = np.sum(signal * np.sin(2*np.pi*n*t/T)) * dt
    return (2/T) * integral

for loss, bandwidth in zip(loss_percentage, w_final):
    if not bandwidth: continue

    n_max = int(bandwidth * T)

    a0 = a_n(0, T)/2
    a_coeffs = [a_n(n, T) for n in range(1, n_max+1)]
    b_coeffs = [b_n(n, T) for n in range(1, n_max+1)]

    reconstructed = a0 + sum(
        a*np.cos(2*np.pi*n*t/T) + b*np.sin(2*np.pi*n*t/T)
        for n, (a, b) in enumerate(zip(a_coeffs, b_coeffs), 1)
    )

    reconstructed *= Emax / np.max(np.abs(reconstructed))

    fig, ax = plt.subplots(1, 3, figsize=(18,5))
    fig.suptitle(f"Аппроксимация при потерях {loss}% (полоса: {bandwidth} Гц)")

    ax[0].plot(t*1e6, signal, label="Оригинал")
    ax[0].plot(t*1e6, reconstructed, 'r--', label="Аппроксимация")
    ax[0].set_xlabel("Время (мкс)")
    ax[0].set_ylabel("Амплитуда")
    ax[0].legend()
    ax[0].grid(True)

```

1.4. Аппроксимация и визуализация.