

Exercise 10

Ngày 29 tháng 1 năm 2021

1. Consider the following bivariate distribution $p(x, y)$ of two discrete random variables X and Y

Y	y_1	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1
	y_2	0.05	0.1	0.05	0.07	0.2
	y_3	0.1	0.05	0.03	0.05	0.04
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
		X				

Compute

- (a) The marginal distributions $p(x)$ and $p(y)$
 - (b) The conditional distributions $p(x|Y = y_1)$ and $p(x|Y = y_3)$
2. Consider two random variables x, y with joint distribution $p(x, y)$. Show that:

$$E_X[X] = E_Y[E_X[x|y]]$$

Here, $E_X[x|y]$ denotes the expected value of x under the conditional distribution $p(x, y)$

3. Một cuộc điều tra cho thấy, ở 1 thành phố 20.7% dân số dùng sản phẩm X, 50% dùng loại sản phẩm Y và trong những người dùng Y thì 36.5% dùng X. Phỏng vấn ngẫu nhiên một người dân trong Thành phố đó, tính xác suất để người ấy:

- (a) Dùng cả X và Y.
 - (b) Dùng Y, và biết rằng người đó không dùng X.
4. Ở một vụ án, ảnh sát xác định được mẫu DNA dài 100 base (ATCG...) của 1 tội phạm ở hiện trường. Một người bình thường có xác suất 10^{-5} trùng đoạn 100 base như vậy. Cảnh sát khoanh vùng được tội phạm là dân cư trong thành phố có một triệu dân, trong đó có 10000 dân đã được thả khỏi tù trong vòng 10 năm trở lại đây và DNA họ vẫn được giữ lại trong tù. Xác suất của 1 người đã từng phạm tội gây án lần này là α , còn xác suất những người còn lại gây án là β . Khi phân tích DNA của các tù nhân, Jones là người duy nhất có DNA match với DNA còn lại ở hiện trường, xác suất Jones là thủ phạm là bao nhiêu?
5. Prove the relationship: $V_X = E_X[x^2] - (E_X[x])^2$, which relates the standard definition of the variance to the raw-score expression for the variance