
Práctica 1 Introducción a la Computación. Lenguajes y Gramáticas

1. Describir el lenguaje generado por las siguientes gramáticas en $\{a,b,c,d\}^*$:

a) $S \rightarrow aS_1b$	$S_1 \rightarrow aS_1 bS_1 \epsilon$
b) $S \rightarrow a S a b S b S_1$	$S_1 \rightarrow a b \epsilon$
c) $S \rightarrow a S b a S_1 b$	$S_1 \rightarrow c S_1 d \epsilon$
d) $S \rightarrow S_1 bb S_1$	$S_1 \rightarrow a S_1 b S_1 \epsilon$

a) $S \rightarrow aS_1b \quad S_1 \rightarrow aS_1 | bS_1 | \epsilon$

S_1 genera cualquier palabra generada por “a” y por “b”

La S genera cualquier palabra generada por ‘a’ y por ‘b’ que empiece por ‘a’ y termine por ‘b’.

$$S \Rightarrow aS_1b \left| \begin{array}{l} \text{1) Caso } S_1 \rightarrow aS_1 : S \Rightarrow a a S_1 b \Rightarrow a a a S_1 b \Rightarrow a^i S_1 b \\ \text{2) Caso } S_1 \rightarrow bS_1 : S \Rightarrow a b b b S_1 b \Rightarrow a b b b S_1 b \Rightarrow a b^j S_1 b \\ \text{3) Caso } S_1 \rightarrow \epsilon : S \Rightarrow a \epsilon b \Rightarrow a b \end{array} \right.$$

Podemos ver que el lenguaje está formado por todas las palabras que empiezan por “a” y terminan por “b” simultáneamente.

Formalmente hablando podemos ver que la gramática propuesta genera el siguiente lenguaje:

$$L(G) = \{ u \in A^* \text{ con } A = \{a, b\} \}$$

$$b) S \rightarrow a S a \mid b S b \mid S_1 \quad S_1 \rightarrow a \mid b \mid \epsilon$$

La S_1 genera o ϵ o "a" o "b". Por tanto S genera o ϵ o "a" o "b" o una cadena generada por "a" y "b".

Caso 1

$$S \rightarrow a S a \quad S \rightarrow S_1 \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow a S a \Rightarrow a S_1 a \Rightarrow a \epsilon a \Rightarrow aa$$

Caso 2

$$S \rightarrow S_1 \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow \epsilon$$

Caso 3

$$S \rightarrow b S b \quad S \rightarrow S_1 \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow b S b \Rightarrow b S_1 b \Rightarrow bb$$

Caso 4

$$S \rightarrow a S a \quad S \rightarrow S_1 \quad S_1 \rightarrow a$$

$$S \Rightarrow a S a \Rightarrow a S_1 a \Rightarrow aaa$$

Caso 5

$$S \rightarrow a S a, S \rightarrow S_1, \quad S_1 \rightarrow b$$

$$S \Rightarrow a S a \Rightarrow a S_1 a \Rightarrow aba$$

Caso 6

$$S \rightarrow b S b \quad S \rightarrow S_1 \quad S_1 \rightarrow a$$

$$S \Rightarrow b S b \Rightarrow b S_1 b \Rightarrow bab$$

Caso 7

$$S \rightarrow b S b \quad S \rightarrow S_1 \quad S_1 \rightarrow b$$

$$S \Rightarrow b S b \Rightarrow b S_1 b \Rightarrow b b b$$

Por lo que la gramática anterior forma el lenguaje:

$$L(G) = \{ uu^{-1} \mid u \in A^* \text{ con } A = \{a, b\} \}$$

Es decir, se formarían cadenas de palíndromos de longitud par.

c) $S \rightarrow a S b \mid a S_1 b \quad S_1 \rightarrow c S_1 d \mid \epsilon$

Caso 1

$$S \rightarrow a S b \quad S \rightarrow a S_1 b \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow a S b \Rightarrow a S_1 b \Rightarrow a b$$

Caso 2

$$S \rightarrow a S b \quad S \rightarrow a S_1 b \quad S_1 \rightarrow c S_1 d \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow a S b \Rightarrow a S_1 b \Rightarrow a c S_1 d b b \Rightarrow a a c c \epsilon d b b = a a c c d b b$$

Si volvemos a repetir obtenemos

$$S \Rightarrow a a c c d d b b$$

Por lo que la gramática anterior genera el siguiente lenguaje:

$$L(G) = \{ u \in \{a^i c^j d^j b^i\} \mid i \geq 1 \text{ y } j \geq 0 \}$$

d) $S \rightarrow S_1 b b S_1 \quad S_1 \rightarrow a S_1 \mid b S_1 \mid \epsilon$

S_1 genera cualquier palabra generada por el símbolo 'a' y el símbolo 'b'. Por tanto S genera cualquier palabra generada por 'a' y por 'b' seguida de la cadena 'bb' seguida de cualquier palabra generada por 'a' y por 'b'.

Caso 1

$$S \rightarrow S_1 bb S_1, \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow S_1 bb S_1 \Rightarrow \epsilon bb \epsilon \Rightarrow bb$$

Caso 2

$$S \rightarrow S_1 bb S_1, \quad S_1 \rightarrow a S_1, \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow a S_1 bb a S_1 \Rightarrow a \epsilon bb a \cancel{\epsilon} \Rightarrow abba$$

ó también se podría $S \Rightarrow a bb$

Caso 3

$$S \rightarrow S_1 bb S_1, \quad S_1 \rightarrow b S_1, \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$S \Rightarrow S_1 bb S_1 \Rightarrow b S_1 bb b S_1 \Rightarrow b \epsilon bb b \epsilon \Rightarrow bbb$$

ó también se podría bbb

La gramática anterior genera el siguiente lenguaje:

$$L(G) = \{u \in A^* \text{ con } A = \{a, b\}\}$$

Es decir, u debe contener la cadena 'bb'.

- 2. Encontrar gramáticas de tipo 2 para los siguientes lenguajes sobre el alfabeto {a,b}. En cada caso determinar si los lenguajes generados son de tipo 3, estudiando si existe una gramática de tipo 3 que los genera.**

a. Palabras que tienen 2 o 3 b.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a S \mid b S_1 \\ S_1 &\rightarrow b S_2 \mid a S_1 \\ S_2 &\rightarrow b S_3 \mid a S_2 \mid \epsilon \\ S_3 &\rightarrow a S_3 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Tipo 2 como de tipo 3.

b. Palabras en las que el número de b no es tres.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a S \mid b S_1 \\ S_1 &\rightarrow b S_2 \mid a S_1 \mid \epsilon \\ S_2 &\rightarrow b S_3 \mid a S_2 \mid \epsilon \\ S_3 &\rightarrow b S_4 \mid a S_3 \\ S_4 &\rightarrow b S_4 \mid a S_4 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Tipo 2 y de tipo 3.

c. Palabras que no contienen la subcadena ab.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow b S \mid a S_1 \mid \epsilon \\ S &\rightarrow a S_1 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Lenguaje es de tipo 2 y de tipo 3.

d. Palabras que no contienen la subcadena baa.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a S \mid b S_1 \mid \epsilon \\ S_1 &\rightarrow a \mid b S_1 \mid \epsilon \end{aligned}$$

Lenguaje es de tipo 2 y de tipo 3.

- 3. Determinar si el lenguaje sobre el alfabeto A={a,b} generado por la siguiente gramática es regular (justifica tu respuesta):**

$$S \rightarrow S_1 a S_2$$

$$S_1 \rightarrow b S_1 \mid \epsilon$$

$$S_2 \rightarrow S_1 \mid b a S_2 \mid \epsilon$$

Para comprobar si el lenguaje es regular tenemos que comprobar si se puede crear otra gramática pero ésta tiene que ser de tipo 3.

El lenguaje que genera la gramática anterior es la palabra vacía seguida de una ‘a’ o una cadena formada por ‘a’ y por ‘b’ que no contenga la cadena ‘aa’. También puede formar una cadena de ‘b’ seguida de una ‘a’ o seguida de una cadena formada por ‘a’ y por ‘b’ que no contenga la cadena ‘aa’.

Luego una gramática para este lenguaje que sea de tipo 3 puede ser la siguiente:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow a S_1 \mid b S_1 \\ S_1 &\rightarrow b S_1 \mid \epsilon \end{aligned}$$

