

Tema 1: Introducción a la Computación

Serafín Moral

Universidad de Granada

Septiembre, 2014

Tema 1: Introducción a la Computación

- Breve introducción histórica a la computación
- Definiciones: palabras y lenguajes
- Operaciones con palabras y lenguajes
- Gramáticas
- Jerarquía de Chomsky

Vamos a tratar de responder varias preguntas:

- ¿Qué puede ser resuelto de forma automática?
- ¿Qué puede ser resuelto de forma eficiente?
- ¿Qué estructuras son comunes en la computación con palabras y símbolos y cómo se pueden procesar en un ordenador?

Vamos a tratar de responder varias preguntas:

- ¿Qué puede ser resuelto de forma automática?
- ¿Qué puede ser resuelto de forma eficiente?
- ¿Qué estructuras son comunes en la computación con palabras y símbolos y cómo se pueden procesar en un ordenador?

Consecuencia: *Estudio de Modelos de Computación*

- *Russell, Hilbert y Boole*: Los precursores
- *Turing y Church*: Los primeros años (30 y 40)
- **FORTRAN, COBOL, LISP**: Los primeros lenguajes
- *Rabin, Scott, Chomsky*: Autómatas y Lenguajes Formales (los 50).
- *Hartmanis, Lewis, Cook*: Complejidad Algorítmica (los 60)
- Complejidad (circuitos, tiempo-espacio), semántica y estructuras de datos (los 70)
- Complejidad paralela, computación distribuida y criptografía (los 80 y 90)

El problema de la parada

¿Existe un programa que lea un programa y unos datos y nos diga si ese programa termina o cicla indefinidamente?

No existe, ya que si existiera (programa $\text{Stops}(P, x)$) podríamos construir el algoritmo $\text{Turing}(P)$ con entrada P .

```
L           If Stops(P,P) GOTO L
```

¿Cual es el resultado de $\text{Turing}(\text{Turing})$?

Un **alfabeto** es un conjunto finito A . Sus elementos se llamarán **símbolos** o **letras**.

Notación - Alfabetos: A, B, C, \dots

Símbolos: a, b, c, \dots o números.

Ejemplos

- $A = \{0, 1\}$
- $B = \{ \langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle \}$

Una **palabra** sobre el alfabeto A es una sucesión finita de elementos de A .

$$u = a_1 \dots a_n$$

donde $a_i \in A, \forall i = 1, \dots, n$.

Ejemplo

Si $A = \{0, 1\}$ entonces 0111 es una palabra sobre este alfabeto.

El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto A se nota como A^* .

Notación - Palabras: u, v, x, y, z, \dots

El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto A se nota como A^* .

Notación - Palabras: u, v, x, y, z, \dots

Si $u \in A^*$, entonces la longitud de la palabra u es el número de símbolos de A que contiene.

Notación: $|u|$

Si $u = a_1 \dots a_n$, entonces $|u| = n$.

El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto A se nota como A^* .

Notación - Palabras: u, v, x, y, z, \dots

Si $u \in A^*$, entonces la longitud de la palabra u es el número de símbolos de A que contiene.

Notación: $|u|$

Si $u = a_1 \dots a_n$, entonces $|u| = n$.

La palabra vacía es la palabra de longitud cero.

Notación: ε

El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto A se nota como A^* .

Notación - Palabras: u, v, x, y, z, \dots

Si $u \in A^*$, entonces la longitud de la palabra u es el número de símbolos de A que contiene.

Notación: $|u|$

Si $u = a_1 \dots a_n$, entonces $|u| = n$.

La palabra vacía es la palabra de longitud cero.

Notación: ε

Notación: El conjunto de cadenas sobre un alfabeto A excluyendo la cadena vacía se nota como A^+ .

Operaciones: Concatenación

Si $u, v \in A^*$, $u = a_1 \dots a_n$, $v = b_1 \dots b_m$, se llama **concatenación** de u y v a la cadena $u.v$ (o simplemente uv) dada por $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$.

Operaciones: Concatenación

Si $u, v \in A^*$, $u = a_1 \dots a_n$, $v = b_1 \dots b_m$, se llama **concatenación** de u y v a la cadena $u.v$ (o simplemente uv) dada por $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$.

Ejemplo

Si $u = 011, v = 1010$, entonces $uv = 0111010$

Operaciones: Concatenación

Si $u, v \in A^*$, $u = a_1 \dots a_n$, $v = b_1 \dots b_m$, se llama **concatenación** de u y v a la cadena $u.v$ (o simplemente uv) dada por $a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$.

Ejemplo

Si $u = 011, v = 1010$, entonces $uv = 0111010$

Propiedades

- 1 $|u.v| = |u| + |v|, \quad \forall u, v \in A^*$
- 2 *Asociativa.*- $u.(v.w) = (u.v).w, \quad \forall u, v, w \in A^*$
- 3 *Elemento Neutro.*- $u.\varepsilon = \varepsilon.u = u, \quad \forall u \in A^*$

Estructura de **monoide**

Iteración n -ésima de una cadena (u^n) como la concatenación con ella misma n veces.

Si $u \in A^*$ entonces

- $u^0 = \varepsilon$
- $u^{i+1} = u^i.u, \quad \forall i \geq 0$

Ejemplo

Si $u = 010$, entonces $u^3 = 010010010$.

Iteración y Cadena Inversa

Iteración n -ésima de una cadena (u^n) como la concatenación con ella misma n veces.

Si $u \in A^*$ entonces

- $u^0 = \varepsilon$
- $u^{i+1} = u^i.u, \quad \forall i \geq 0$

Ejemplo

Si $u = 010$, entonces $u^3 = 010010010$.

Si $u = a_1 \dots a_n \in A^*$, entonces la **cadena inversa** de u es la cadena $u^{-1} = a_n \dots a_1 \in A^*$.

Ejemplo

Si $u = 011$, entonces $u^{-1} = 110$.

Un **lenguaje** sobre el alfabeto A es un subconjunto del conjunto de las cadenas sobre A : $L \subseteq A^*$.

Notación - *Lenguajes*: L, M, N, \dots

Ejemplos:

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in A^*\}$
- $L_4 = \{a^{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$

Un **lenguaje** sobre el alfabeto A es un subconjunto del conjunto de las cadenas sobre A : $L \subseteq A^*$.

Notación - Lenguajes: L, M, N, \dots

Ejemplos:

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$ *Tres palabras*
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in A^*\}$
- $L_4 = \{a^{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$

Un **lenguaje** sobre el alfabeto A es un subconjunto del conjunto de las cadenas sobre A : $L \subseteq A^*$.

Notación - Lenguajes: L, M, N, \dots

Ejemplos:

- $L_1 = \{a, b, \varepsilon\}$ Tres palabras
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ Una sucesión de a seguida de una de b de la misma longitud
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in A^*\}$
- $L_4 = \{a^{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$

Un **lenguaje** sobre el alfabeto A es un subconjunto del conjunto de las cadenas sobre A : $L \subseteq A^*$.

Notación - Lenguajes: L, M, N, \dots

Ejemplos:

- $L_1 = \{a, b, \varepsilon\}$ *Tres palabras*
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ Una sucesión de a seguida de una de b de la misma longitud
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in A^*\}$ *Palíndromos de longitud par*
- $L_4 = \{a^{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$

Un **lenguaje** sobre el alfabeto A es un subconjunto del conjunto de las cadenas sobre A : $L \subseteq A^*$.

Notación - Lenguajes: L, M, N, \dots

Ejemplos:

- $L_1 = \{a, b, \epsilon\}$ *Tres palabras*
- $L_2 = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$ Una sucesión de a seguida de una de b de la misma longitud
- $L_3 = \{uu^{-1} \mid u \in A^*\}$ *Palíndromos de longitud par*
- $L_4 = \{a^{n^2} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$ Sucesiones de a de longitud un cuadrado perfecto

Conjuntos Numerables

Un conjunto se dice **numerable** si existe una aplicación inyectiva de este conjunto en el conjunto de los números naturales, o lo que es lo mismo, se le puede asignar un número natural a cada elemento del conjunto de tal manera que dos elementos distintos tengan números distintos.

Ejemplos

A^* es siempre numerable. Si $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ entonces puedo asignar un número binario distinto y de la misma longitud a cada a_i y a cada palabra $b_1 \dots b_k$ se le asigna el número cuya representación en binario es el que se obtiene sustituyendo cada b_i por su número binario.

Ejemplo: El conjunto de programas bien escritos en C es numerable.

Un conjunto no numerable

Ejemplo: El conjunto de lenguajes sobre A^* (si A no es vacío) nunca es numerable.

Si lo fuese, y se pudiese asignar un número natural distinto $f(L)$ a cada lenguaje L , sea $a \in A$. Definamos el lenguaje L formado por palabras de la forma a^i de acuerdo a lo siguiente: para cada i número natural:

- Si este número no es de un lenguaje, entonces $a^i \in L$.
- Si este número es del lenguaje, M , ($i = f(M)$)
 - Si $a^i \notin M$ entonces $a^i \in L$.
 - Si $a^i \in M$ entonces $a^i \notin L$.

L no puede tener ningún número asociado. Si fuese $i = f(L)$, entonces la pertenencia de a^i a L es contradictoria:

Un conjunto no numerable

Ejemplo: El conjunto de lenguajes sobre A^* (si A no es vacío) nunca es numerable.

Si lo fuese, y se pudiese asignar un número natural distinto $f(L)$ a cada lenguaje L , sea $a \in A$. Definamos el lenguaje L formado por palabras de la forma a^i de acuerdo a lo siguiente: para cada i número natural:

- Si este número no es de un lenguaje, entonces $a^i \in L$.
- Si este número es del lenguaje, M , ($i = f(M)$)
 - Si $a^i \notin M$ entonces $a^i \in L$.
 - Si $a^i \in M$ entonces $a^i \notin L$.

L no puede tener ningún número asociado. Si fuese $i = f(L)$, entonces la pertenencia de a^i a L es contradictoria:

- Si $a^i \in L$ como $i = f(L)$, entonces $a^i \notin L$
- Si $a^i \notin L$ y $i = f(L)$, entonces $a^i \in L$

Aparte de las operaciones de **unión** e **intersección** de lenguajes, dada su condición de conjuntos existe la operación de concatenación.

Si L_1, L_2 son dos lenguajes sobre el alfabeto A , la **concatenación** de estos dos lenguajes se define como,

$$L_1 L_2 = \{u_1 u_2 \mid u_1 \in L_1, u_2 \in L_2\}$$

Propiedades

- $L\emptyset = \emptyset L = \emptyset$
- *Elemento Neutro.*- $\{\epsilon\}L = L\{\epsilon\} = L$
- *Asociativa.*- $L_1(L_2 L_3) = (L_1 L_2)L_3$

Si $L_1 = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$, $L_2 = \{1^i 0^i : i \geq 0\}$ entonces,

$$L_1 L_2 =$$

Si $L_1 = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$, $L_2 = \{1^i 0^i : i \geq 0\}$ entonces,

$$L_1 L_2 = \{0^i 1^i 1^j 0^j : i, j \geq 0\}$$

La **iteración** de lenguajes se define de forma recursiva:

$$L^0 = \{\epsilon\}, \quad L^{i+1} = L^i L$$

Si L es un lenguaje sobre el alfabeto A , la *clausura de Kleene* de L es

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$$

$$L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i$$

Propiedades:

- $L^+ = L^*$ si $\epsilon \in L$
- $L^+ = L^* - \{\epsilon\}$ si $\epsilon \notin L$

Propiedades:

- $L^+ = L^*$ si $\epsilon \in L$
- $L^+ = L^* - \{\epsilon\}$ si $\epsilon \notin L$

Ejemplo

Si $L = \{0,01\}$, entonces:

$L^* =$

$L^+ =$

Propiedades:

- $L^+ = L^*$ si $\epsilon \in L$
- $L^+ = L^* - \{\epsilon\}$ si $\epsilon \notin L$

Ejemplo

Si $L = \{0,01\}$, entonces:

L^* = Conjunto de palabras sobre $\{0,1\}$ en las que un uno va siempre precedido de un cero.

L^+ = Conjunto de palabras sobre $\{0,1\}$ en las que un uno va siempre precedido de un cero y distintas de la palabra vacía.

El **lenguaje inverso** de L es el lenguaje dado por:

$$L^{-1} = \{u \mid u^{-1} \in L\}$$

La **cabecera** de L es el lenguaje dado por

$$\text{CAB}(L) = \{u \mid u \in A^* \text{ y } \exists v \in A^* \text{ tal que } uv \in L\}$$

Ejemlo

Si $L = \{0^i 1^i : i \geq 0\}$,

La **cabecera** de L es el lenguaje dado por

$$\text{CAB}(L) = \{u \mid u \in A^* \text{ y } \exists v \in A^* \text{ tal que } uv \in L\}$$

Ejemlo

Si $L = \{0^i 1^j : i \geq 0\}$, entonces $\text{CAB}(L) = \{0^i 1^j : i \geq j \geq 0\}$.

Si A_1 y A_2 son dos alfabetos, una aplicación

$$h : A_1^* \rightarrow A_2^*$$

se dice que es un **homomorfismo** si y solo si

$$h(uv) = h(u)h(v)$$

Consecuencias

- $h(\epsilon) = \epsilon$
- $h(a_1 \dots a_n) = h(a_1) \dots h(a_n)$

Si $A_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A_2 = \{0, 1\}$

$$\begin{array}{llll} h(0) = 0000, & h(1) = 0001, & h(2) = 0010, & h(3) = 0011 \\ h(4) = 0100, & h(5) = 0101, & h(6) = 0110, & h(7) = 0111 \\ h(8) = 1000 & h(9) = 1001 & & \end{array}$$

$$h(034) = 000000110100, \quad h(\varepsilon) = \varepsilon$$

¿Verdadero o falso?

- Si A es un alfabeto, la aplicación que transforma cada palabra $u \in A^*$ en su inversa es un homomorfismo de A^* en A^* .

¿Verdadero o falso?

- Si A es un alfabeto, la aplicación que transforma cada palabra $u \in A^*$ en su inversa es un homomorfismo de A^* en A^* .
FALSO
- La transformación que a cada palabra sobre $\{0,1\}^*$ le añade 00 al principio y 11 al final es un homomorfismo.

¿Verdadero o falso?

- Si A es un alfabeto, la aplicación que transforma cada palabra $u \in A^*$ en su inversa es un homomorfismo de A^* en A^* .

FALSO

- La transformación que a cada palabra sobre $\{0,1\}^*$ le añade 00 al principio y 11 al final es un homomorfismo.

FALSO

Una **gramática generativa** es un cuádrupla (V, T, P, S) en la que

- V es un alfabeto, llamado de **variables** o símbolos no terminales. Sus elementos se suelen representar con letras mayúsculas.
- T es un alfabeto, llamado de **símbolos terminales**. Sus elementos se suelen representar con letras minúsculas.
- P es un conjunto de pares (α, β) , llamados **reglas de producción**, donde $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$ y α contiene, al menos un símbolo de V . El par (α, β) se suele representar como $\alpha \rightarrow \beta$.
- S es un elemento de V , llamado **símbolo de partida**.

$G = (V, T, P, S)$ dada por,

- $V = \{E\}$
- $T = \{+, *, (,), a, b, c\}$
- P está compuesto por las siguientes reglas de producción

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

- $S = E$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{l} E \rightarrow E + E, \quad E \rightarrow E * E, \quad E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, \quad \quad E \rightarrow b, \quad \quad E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

E

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$E \Rightarrow E * E$$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E$$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E$$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E$$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E \Rightarrow \\ &(a + b) * E \end{aligned}$$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$\begin{aligned} E &\Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E \Rightarrow \\ &(a + b) * E \Rightarrow (a + b) * b \end{aligned}$$

Lenguaje Generado: idea intuitiva

Una gramática sirve para determinar un lenguaje.

$$\begin{array}{lll} E \rightarrow E + E, & E \rightarrow E * E, & E \rightarrow (E), \\ E \rightarrow a, & E \rightarrow b, & E \rightarrow c \end{array}$$

Las palabras son las de T^* que se obtienen a partir del símbolo inicial efectuando pasos de derivación. Cada paso consiste en elegir una parte de la palabra que coincide con la parte izquierda de una producción y sustituir esa parte por la derecha de la misma producción.

Ejemplo

$$\begin{array}{l} E \Rightarrow E * E \Rightarrow (E) * E \Rightarrow (E + E) * E \Rightarrow (a + E) * E \Rightarrow \\ (a + b) * E \Rightarrow (a + b) * b \end{array}$$

Palabra Generada

Gramática $G = (V, T, P, S)$ y dos palabras $\alpha, \beta \in (V \cup T)^*$
 β es **derivable** a partir de α **en un paso** ($\alpha \Rightarrow \beta$)

si y solo si

existe una producción $\gamma \rightarrow \phi$ tal que

- α contiene a γ como subcadena.
- β se obtiene sustituyendo γ por ϕ en α .

β es **derivable** de α ($\alpha \xRightarrow{*} \beta$),
si y solo si existe una sucesión de palabras $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ($n \geq 1$)
tales que

$$\alpha = \gamma_1 \Longrightarrow \gamma_2 \Longrightarrow \dots \Longrightarrow \gamma_n = \beta$$

Lenguaje generado por una gramática $G = (V, T, P, S)$ al conjunto de cadenas formadas por símbolos terminales y que son derivables a partir del símbolo de partida.

Es decir,

$$L(G) = \{u \in T^* \mid S \xRightarrow{*} u\}$$

Ejemplo

$G = (V, T, P, S)$, donde $V = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, el símbolo de partida es S y las reglas son

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow aB, & S \rightarrow bA, & A \rightarrow a, & A \rightarrow aS, \\ A \rightarrow bAA, & B \rightarrow b, & B \rightarrow bS, & B \rightarrow aBB \end{array}$$

Ejemplo

$G = (V, T, P, S)$, donde $V = \{S, A, B\}$, $T = \{a, b\}$, el símbolo de partida es S y las reglas son

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow aB, & S \rightarrow bA, & A \rightarrow a, & A \rightarrow aS, \\ A \rightarrow bAA, & B \rightarrow b, & B \rightarrow bS, & B \rightarrow aBB \end{array}$$

Esta gramática genera el lenguaje

$$L(G) = \{u \mid u \in \{a, b\}^+ \text{ y } N_a(u) = N_b(u)\}$$

donde $N_a(u)$ y $N_b(u)$ son el número de apariciones de símbolos a y b , en u , respectivamente.

Esto es fácil de ver interpretando,

- A palabra con una a de más
- B palabra con una b de más
- S palabra con igual número de a que de b .

Hay que demostrar dos cosas:

- Todas las palabras generadas por la gramática tienen el mismo número de a que de b .
- Cualquier palabra con el mismo número de a que de b es generada.

Para lo primero, podemos considerar $N_{a,A}(\alpha)$ (número de a + número de A) y $N_{b,B}(\alpha)$ (número de b + número de B) y tener en cuenta lo siguiente para una generación $S \xRightarrow{*} u$:

- Al principio de la generación tenemos: $N_{a,A}(S) = N_{b,B}(S) = 0$
- Al aplicar cualquier regla $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$, si $N_{a,A}(u\alpha_1) = N_{b,B}(\alpha_1)$, entonces $N_{a,A}(\alpha_2) = N_{b,B}(\alpha_2)$
- Luego al final $N_{a,A}(u) = N_{b,B}(u)$, y como u no contiene variables, $N_a(u) = N_b(u)$, como se quería demostrar.

Algoritmo de Generación

Generación por la izquierda, un símbolo cada vez.

- Para generar una a
 - Si a último símbolo de la palabra, aplicar $A \rightarrow a$
 - Si no es el último símbolo
 - Si la primera variable es S aplicar $S \rightarrow aB$
 - Si la primera variable es B aplicar $B \rightarrow aBB$
 - Si la primera variable es A
 - Si hay más variables aplicar $A \rightarrow a$
 - Si no hay más, aplicar $A \rightarrow aS$
- Para generar una b
 - Si b último símbolo de la palabra, aplicar $B \rightarrow b$
 - Si no es el último símbolo
 - Si la primera variable es S aplicar $S \rightarrow bA$
 - Si la primera variable es A aplicar $A \rightarrow bAA$
 - Si la primera variable es B
 - Si hay más variables aplicar $B \rightarrow b$
 - Si no hay más, aplicar $B \rightarrow bS$

Condiciones de Garantía

- Las palabras generadas tienen primero símbolos terminales y después variables.
- Se genera un símbolo de la palabra en cada paso de derivación
- Las variables que aparecen en la palabra pueden ser:
 - Una cadena de A (si hemos generado más b que a)
 - Una cadena de B (si hemos generado más a que b)
 - Una S si hemos generado las mismas a que b
- Antes de generar el último símbolo tendremos como variables:
 - Una A si tenemos que generar a
 - Una B si tenemos que generar b
- Entonces aplicamos la primera opción para generar los símbolos y la palabra queda generada.

Ejemplo

Sea $G = (\{S, X, Y\}, \{a, b, c\}, P, S)$ donde P tiene las reglas,

$$S \rightarrow abc$$

$$S \rightarrow aXbc$$

$$Xb \rightarrow bX$$

$$Xc \rightarrow Ybcc$$

$$bY \rightarrow Yb$$

$$aY \rightarrow aaX$$

$$aY \rightarrow aa$$

Lenguaje Generado

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow abc & S \rightarrow aXbc & Xb \rightarrow bX & Xc \rightarrow Ybcc \\ bY \rightarrow Yb & aY \rightarrow aaX & aY \rightarrow aa & \end{array}$$

Esta gramática genera el lenguaje: $\{a^n b^n c^n \mid n = 1, 2, \dots\}$.

Inicialmente tenemos dos posibilidades:

$$S \Rightarrow abc, \quad S \Rightarrow aXbc$$

Con la primera generamos la palabra abc .

Si seguimos la segunda opción, sólo se puede seguir cómo:

$$aXbc \Rightarrow abXc \Rightarrow abYbcc \Rightarrow aYbbcc$$

Lenguaje Generado: $\{a^n b^n c^n \mid n = 1, 2, \dots\}$

$$\begin{array}{llll} S \rightarrow abc & S \rightarrow aXbc & Xb \rightarrow bX & Xc \rightarrow Ybcc \\ bY \rightarrow Yb & aY \rightarrow aaX & aY \rightarrow aa & \end{array}$$

Ya tenemos abc .

Habíamos generado también: $aYbbcc$. En este momento podemos aplicar dos reglas:

- $aY \rightarrow aa$, en cuyo caso producimos $aabbcc = a^2b^2c^2 \in L(G)$
- $aY \rightarrow aaX$, en cuyo caso producimos $aaXbbcc$

A partir de $aaXbbcc$ repetimos el proceso: sólo se puede mover la X a la derecha hasta la frontera $b-c$. Entonces se añade una b y una c y se cambia X por Y . Después, se mueve la Y a la izquierda hasta que encuentra la frontera $a-b$. Entonces, tiene dos opciones: añadir sólo a , obteniendo la siguiente palabra, o aX con lo que se vuelven a generar las otras palabras.

- **Tipo 0** Cualquier gramática. Sin restricciones.
Lenguajes recursivamente enumerables.
- **Tipo 1** Si todas las producciones tienen la forma

$$\alpha_1 A \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \beta \alpha_2$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in (V \cup T)^*$, $A \in V$, y $\beta \neq \epsilon$, excepto posiblemente la regla $S \rightarrow \epsilon$, en cuyo caso S no aparece a la derecha de las reglas. **Lenguajes dependientes del contexto.**

- **Tipo 2** Si cualquier producción tiene la forma

$$A \rightarrow \alpha$$

donde $A \in V, \alpha \in (V \cup T)^*$.

Lenguajes Independientes del Contexto

- **Tipo 3** Si toda regla tiene la forma

$$A \rightarrow uB \text{ ó } A \rightarrow u$$

donde $u \in T^*$ y $A, B \in V$.

Conjuntos Regulares

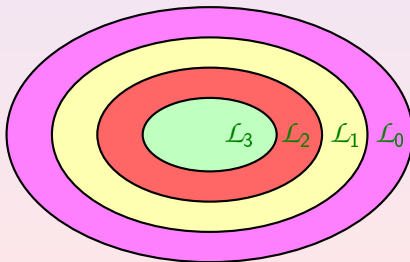
Clases de Lenguajes

Un lenguaje se dice que es de **tipo** i ($i = 0, 1, 2, 3$) si y solo si es generado por una gramática de tipo i .

La clase o familia de lenguajes de tipo i se denota por \mathcal{L}_i .

Propiedad

$$\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$$



Demostrar que la gramática

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$$

genera el lenguaje $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$

Demostrar que la gramática

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$$

genera el lenguaje $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$

Inicialmente tenemos dos opciones:

$$S \Rightarrow \epsilon, \quad S \Rightarrow aSb$$

Demostrar que la gramática

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$$

genera el lenguaje $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$

Inicialmente tenemos dos opciones:

$$S \Rightarrow \epsilon, \quad S \Rightarrow aSb$$

Con eso generamos la palabra vacía, o continuamos generando.
Otra vez hay dos opciones:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow ab, \quad S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb$$

Demostrar que la gramática

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$$

genera el lenguaje $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$

Si seguimos este procedimiento, nos encontramos que podemos ir generando todas las palabras de la forma $a^i b^i$, y siempre nos queda la palabra $a^i S b^i$ para seguir generando las palabras de mayor longitud.

Demostrar que la gramática

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \rightarrow \epsilon, S \rightarrow aSb\}, S)$$

genera el lenguaje $L = \{a^i b^i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$

Si seguimos este procedimiento, nos encontramos que podemos ir generando todas las palabras de la forma $a^i b^i$, y siempre nos queda la palabra $a^i S b^i$ para seguir generando las palabras de mayor longitud.

Por otra parte, estas son las únicas palabras que se pueden generar.

Encontrar el lenguaje generado por la gramática

$G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ donde P contiene las siguientes producciones

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow aAB & bB \rightarrow a & Ab \rightarrow SBb \\ Aa \rightarrow SaB & B \rightarrow SA & B \rightarrow ab \end{array}$$

Encontrar el lenguaje generado por la gramática
 $G = (\{A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$ donde P contiene las siguientes producciones

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow aAB & bB \rightarrow a & Ab \rightarrow SBb \\ Aa \rightarrow SaB & B \rightarrow SA & B \rightarrow ab \end{array}$$

El resultado es el **Lenguaje vacío**: nunca se puede llegar a generar una palabra con símbolos terminales. Siempre que se sustituye S aparece A , y siempre que se sustituye A aparece S .

Encontrar una gramática libre del contexto para generar cada uno de los siguientes lenguajes

- 1 $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$
- 2 $L = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- 3 $L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$
- 4 $L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$
- 5 $L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a, b\}^*\}$
- 6 $L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$

donde \mathbb{N} es el conjunto de los números naturales incluyendo el 0.

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \leq j\}$$

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$S \rightarrow Sb$$

$$L = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Este lenguaje es generado por la siguiente gramática:

$$L = \{a^i b^j a^j b^i \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Este lenguaje es generado por la siguiente gramática:

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow B, \quad B \rightarrow bBa, \quad B \rightarrow \epsilon$$

$$L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Podemos generar $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con:

$$L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Podemos generar $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con:

$$S_1 \rightarrow aS_1b, \quad S_1 \rightarrow \epsilon$$

$$L = \{a^i b^i a^j b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Podemos generar $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con:

$$S_1 \rightarrow aS_1b, \quad S_1 \rightarrow \varepsilon$$

El lenguaje L se puede generar añadiendo:

$$S \rightarrow S_1 S_1$$

siendo S el símbolo inicial.

$$L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

$$L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Podemos generar $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con:

$$S_1 \rightarrow aS_1b, \quad S_1 \rightarrow \varepsilon$$

y $\{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con

$$S_2 \rightarrow bS_2a, \quad S_2 \rightarrow \varepsilon$$

$$L = \{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Podemos generar $\{a^i b^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con:

$$S_1 \rightarrow aS_1b, \quad S_1 \rightarrow \varepsilon$$

y $\{b^i a^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ con

$$S_2 \rightarrow bS_2a, \quad S_2 \rightarrow \varepsilon$$

El lenguaje L se puede generar añadiendo:

$$S \rightarrow S_1, \quad S \rightarrow S_2$$

siendo S el símbolo inicial.

$$L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a,b\}^*\}$$

Este lenguaje se genera con la gramática:

$$L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a,b\}^*\}$$

Este lenguaje se genera con la gramática:

$$S \rightarrow aSa, \quad S \rightarrow bSb, \quad S \rightarrow \varepsilon$$

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Este lenguaje se genera con la gramática:

$$L = \{a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Este lenguaje se genera con la gramática:

$$S \rightarrow aSc, \quad S \rightarrow B,$$

$$B \rightarrow bBc, \quad B \rightarrow \varepsilon$$

Determinar si la gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ donde P es el conjunto de reglas de producción:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow AB & A \rightarrow Ab & A \rightarrow a \\ B \rightarrow cB & B \rightarrow d & \end{array}$$

genera un lenguaje de tipo 3.

Determinar si la gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ donde P es el conjunto de reglas de producción:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow AB & A \rightarrow Ab & A \rightarrow a \\ B \rightarrow cB & B \rightarrow d & \end{array}$$

genera un lenguaje de tipo 3.

Esta gramática genera el lenguaje: $\{ab^i c^j d : i, j \in \mathbb{N}\}$

Determinar si la gramática $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ donde P es el conjunto de reglas de producción:

$$\begin{array}{lll} S \rightarrow AB & A \rightarrow Ab & A \rightarrow a \\ B \rightarrow cB & B \rightarrow d & \end{array}$$

genera un lenguaje de tipo 3.

Esta gramática genera el lenguaje: $\{ab^i c^j d : i, j \in \mathbb{N}\}$

Y este lenguaje se puede generar mediante la gramática:

$$S \rightarrow aB, \quad B \rightarrow bB, \quad B \rightarrow C, \quad C \rightarrow cC, \quad C \rightarrow d$$

Como esta gramática es de tipo 3, el lenguaje lo es.