

## 五种容易混淆的符号

这五种符号分别是：

- 箭头 (arrow)  $\rightarrow$ 
  - KaTeX: \rightarrow
  - Typst: ->
- 十字转门 (相继式, sequent, turnstile)  $\vdash$ 
  - KaTeX: \vdash
  - Typst: tack
- 魔法横线 (推理线 inference bar, 好玩的横杠, 魔法平衡木)  $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$ 
  - KaTeX: \frac{\dots}{\dots}
  - bussproofs 一类的包效果会更好
  - Typst: (...) / (...)，你用 Proof Trees 一类的包效果会更好
- 竖线箭头  $\mapsto$ 
  - KaTeX: \mapsto
  - Typst: | ->
- 双箭头  $\Rightarrow$  或者  $\Longrightarrow$ 
  - KaTeX: \Rightarrow, \Longrightarrow
  - Typst: =>, ==>

### 蕴含

箭头  $\rightarrow$ 、十字转门  $\vdash$  和推理横线 (inference line) 都在某种程度上表达了“蕴含”或“推导”的关系。但它们分属三个不同的层级：

- 箭头  $\rightarrow$  描述的是对象语言 (object language) ——即我们当前正在研究的语言 (如  $\lambda$ -calculus) 中的词项。例如,  $A \rightarrow B$  可以表示“一个接受  $A$ , 输出  $B$  的函数” (在  $\lambda$ -calculus 中), 或者“命题：若  $A$  成立，则  $B$  成立” (在命题逻辑中)。
- 十字转门  $\vdash$  描述的是判断 (judgment)，位于元语言 (meta language)。例如,  $\Gamma \vdash A$  是在说，“从环境  $\Gamma$  可以推导出  $A$ ”。 $\Gamma, A \vdash B$  就是在作出如下判断：“在环境  $\Gamma$  中，若我们添加假设  $A$ ，则可以得到  $B$ ”。
- 魔法横线描述的则是判断之规则 (rule of judgement)，是元语言的元语言。例如,  $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$  是在说，“如果‘在环境  $\Gamma$  中，若我们添加假设  $A$ ，则可以得到  $B$ ’，那么‘从环境  $\Gamma$  中可以推导出  $A \rightarrow B$ ’。”

### 小坑

在命题逻辑里，有时候你会看到这两种东西：

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \quad \text{versus} \quad A \rightarrow B, A \vdash B$$

然后你可能会想，“这不是一个意思吗？这两种符号难道不可以混用吗？”

不行的。判断就像是一道数学题的答案，而推理规则就像是解题的方法。你不能把“答案”和“方法”混为一谈。更进一步地，左边的这一条严格来说应该写成

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

这样就清楚多了。

在命题逻辑这个阶段， $\Gamma$  这个东西 (管自由变量的) 在开头的阶段用的比较少，再加上大家发明了  $\Gamma \vdash$  以外“替代方案” (见下文) 来表示“引入假设则可得出……”，引起了这种混淆。

其他的“引入假设”的写法

$$\frac{[A] \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \rightarrow B} \text{ 根岑的记号} \qquad \frac{\boxed{A} \quad \begin{matrix} A \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \rightarrow B} \text{ Huth & Ryan 的记号}$$

丑死了，还是十字转门好看，还不浪费垂直空间。

### 竖线箭头

这个符号通常用于对象语言中元素层面的映射：

- 集合映射 (maps to): 例如函数定义  $x \mapsto x + 1$ 。
- 环境绑定 (environment binding): 例如在替换中，变量  $x$  被映射为值  $v$ ，记作  $x \mapsto v$ 。

如果你见到的用法跟这不一样，翻作者的术语表。如果术语表里没有，你可以辱骂作者。

### 短双箭头

这个符号有一个比较重要的常见用法：用来描述小步语义中的“从 ... 求值一步得到 ...”

$$\frac{x_1 \Rightarrow \text{true}}{\text{if } x_1 \text{ then } x_2 \text{ else } x_3 \Rightarrow \text{if true then } x_2 \text{ else } x_3}$$

——直接到  $x_2$  不行吗？不行，那样的话就不是小步语义了。

### 长双箭头

这是一个非正式符号，通常用来描述粗略的“蕴含”/“可推导出”/“综上所述”，可以在说明性文本里用一下，最好别放进公式块。

下课。