

五种容易混淆的符号

这五种符号分别是：

- 箭头 (arrow) \rightarrow
 - `KaTeX: \rightarrow`
 - `Typst: ->`
- 十字转门 (相继式, sequent, turnstile) \vdash
 - `KaTeX: \vdash`
 - `Typst: \vdash`
- 魔法横线 (推理线 inference bar, 好玩的横杠, 魔法平衡木) $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$
 - `KaTeX: \frac{\dots}{\dots}`, 你用 *bussproofs* 一类的包效果会更好
 - `Typst: (\dots) / (\dots)`, 你用 *Proof Trees* 一类的包效果会更好
- 竖线箭头 \mapsto
 - `KaTeX: \mapsto`
 - `Typst: \mapsto`
- 双箭头 \Rightarrow 或者 \implies
 - `KaTeX: \Rightarrow, \Longrightarrow`
 - `Typst: =>, ==>`

蕴含

箭头 \rightarrow 、十字转门 \vdash 和推理横线 (inference line) 都在某种程度上表达了“蕴含”或“推导”的关系。但它们分属三个不同的层级：

- 箭头 \rightarrow 描述的是对象语言 (object language) ——即我们当前正在研究的语言 (如 λ -calculus) ——中的词项。例如, $A \rightarrow B$ 可以表示“一个接受 A , 输出 B 的函数” (在 λ -calculus 中), 或者“命题: 若 A 成立, 则 B 成立” (在命题逻辑中)。
- 十字转门 \vdash 描述的是判断 (judgment), 位于元语言 (meta language)。例如, $\Gamma \vdash A$ 是在说, “从环境 Γ 可以推导出 A ”。 $\Gamma, A \vdash B$ 就是在作出如下判断: “在环境 Γ 中, 若我们添加假设 A , 则可以得到 B ”。
- 魔法横线描述的则是判断之规则 (rule of judgement), 是元语言的元语言。例如, $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$ 是在说, “如果‘在环境 Γ 中, 若我们添加假设 A , 则可以得到 B ’, 那么‘从环境 Γ 中可以推导出 $A \rightarrow B$ ’。”

小坑

在命题逻辑里, 有时候你会看到这两种东西:

$$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B} \quad \text{versus} \quad A \rightarrow B, A \vdash B$$

然后你可能会想, “这不是一个意思吗? 这两种符号难道不可以混用吗?”

不行的。判断就像是一道数学题的答案, 而推理规则就像是解题的方法。你不能把“答案”和“方法”混为一谈。更进一步地, 左边的这一条严格来说应该写成

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

这样就清楚多了。

在命题逻辑这个阶段, Γ 这个东西 (管自由变量的) 在开头的阶段用的比较少, 再加上大家发明了 $\Gamma \vdash$ 以外“替代方案” (见下文) 来表示“引入假设则可得出……”, 引起了这种混淆。

其他的“引入假设”的写法

$$\frac{[A] \quad \vdots \quad B}{A \rightarrow B} \text{ 根岑的记号} \qquad \frac{\boxed{A \quad \vdots \quad B}}{A \rightarrow B} \text{ Huth \& Ryan 的记号}$$

丑死了，还是十字转门好看，还不浪费垂直空间。

竖线箭头

这个符号通常用于对象语言中元素层面的映射：

- 集合映射 (maps to): 例如函数定义 $x \mapsto x + 1$ 。
- 环境绑定 (environment binding): 例如在替换中，变量 x 被映射为值 v ，记作 $x \mapsto v$ 。

如果你见到的用法跟这不一样，翻作者的术语表。如果术语表里没有，你可以辱骂作者。

短双箭头

这个符号有一个比较重要的常见用法：用来描述小步语义中的“从 ... 求值一步得到...”

$$\frac{x_1 \Rightarrow \text{true}}{\text{if } x_1 \text{ then } x_2 \text{ else } x_3 \Rightarrow \text{if true then } x_2 \text{ else } x_3}$$

——直接到 x_2 不行吗？不行，那样的话就不是小步语义了。

长双箭头

这是一个非正式符号，通常用来描述粗略的“蕴含”/“可推导出”/“综上所述”，可以在说明性文本里用一下，最好别放进公式块。

下课。