电子科技大学

课程实验报告

课程名称：	最优化理论与应用
实验题目：	MATLAB 编程大 M 法
姓　　名：	徐宇健
学　　号：	202422280813
专　　业：	085400 电子信息工程
学　　院：	（深圳）高等研究院
完成日期：	2024 年 9 月 25 日

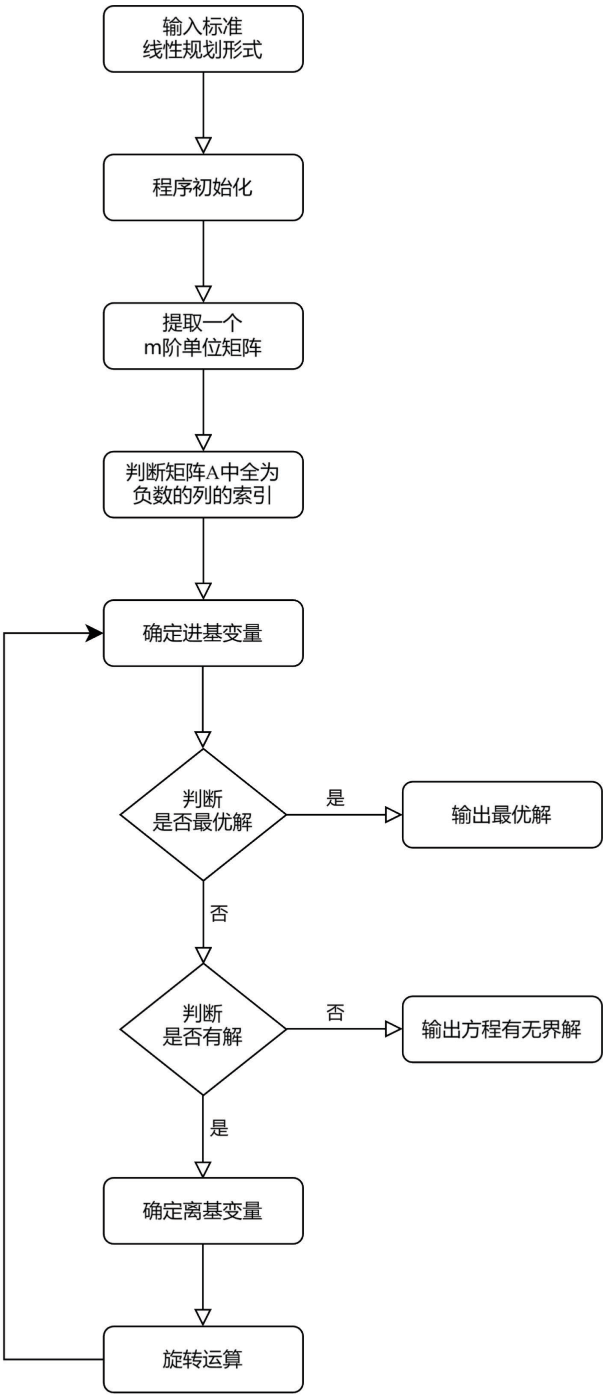
实验目的：

1. 以本次实验为案例，了解算法复现流程；

2. 掌握 matlab 的基本操作，学习编写 matlab 程序，提高编程能力和技巧；

3. 学习用已学的知识解决实际问题，将理论应用于实际。

算法步骤：



Matlab 程序：

函数：

```
function [xm,fm,noi] = dcxf(A,b,c)
%% 介绍
% 单纯形法求解标准形线性规划问题: min cx s.t. Ax=b x>=0
% 输入参数: c 为目标函数系数, A 为约束方程组系数矩阵, b 为约束方程组常数项
% 输出参数: xm 为最求解，fm 为最优函数值，noi 为迭代次数
%% 准备
format rat                %元素使用分数表示
[m,n] = size(A);          %m 约束条件个数, n 决策变量量数
v=nchoosek(1:n,m);
index_Basis=[];
%% 提取可行解所在列
for i=1:size(v,1)         %size(v,1)为在 n 中取 m 个的种类
    if A(:,v(i,:))==eye(m)
        index_Basis=v(i,:);
    end
end
%% 判断矩阵 A 中全为负数的列的索引
my_negative=[];
for i=1:n
    is_negative = all(A(:, i) < 0);
    if is_negative
    my_negative(end+1) = i;
    end
end
%disp(my_negative);
%% 提取非基变量的索引
ind_Nonbasis = setdiff(1:n, index_Basis);
noi=0;
%disp(ind_Nonbasis);
while true
    x0 = zeros(n,1);
    x0(index_Basis) = b;             %初始基可行解
    cB = c(index_Basis);           %计算 cB，即目标函数在基变量处对应的系数
    %disp(cB);
    Sigma = zeros(1,n);            %Sigma 为检验数向量
    %计算检验数（非基变量），因为基变量对应的初始检验数一定为 0
    Sigma(ind_Nonbasis) = c(ind_Nonbasis)' - cB'*A(:,ind_Nonbasis);
    %disp(Sigma);
    %选出最大检验数，确定进基变量索引 s；
    [~, s] = min(Sigma);    %~表示忽略第一个参数（即最大值），s 是索引
    %disp(s);
    Theta = b ./ A(:,s);           %计算 b/ai(点除)
```

```
    %disp(Theta);
    Theta(Theta<=0) = 10000;
    %disp(Theta);
    %disp(size(Theta,1));
    %优化选取最小值的方案
    for i=1:size(Theta,1)
        if Theta(i,1)==min(Theta)
           q=i;
        end
    end
    %[~, q] = min(Theta);   %选出最小θ
    %disp(q);
    %disp(s);
    q = index_Basis(q);   %确定出基变量在系数矩阵中的列索引 el, 主元为 A(q,s)
    %disp(Sigma);
%% 判断是否是最优解
%所有检验数都小于 0，此基可行解为最优解, any 表示存在某个检验数>0
     if ~any(Sigma < 0)
        xm = x0;
        fm = c' * xm;             %算出最优解
        return
        break
    end
%% 判断是否有解
    %disp(A);
    %disp(s);
    if all(A(:,s) <= 0)           %表示检验数这一列每个数都<=0, 有无界解
        fprintf("向量 y%d=\n", s);
        disp(A(:,s));
        disp("全是小于等于 0，因此该问题是无界解");
        xm = [];
        break
    end
%% 换基
    index_Basis(index_Basis == q) = s;     %新的基变量索引
    ind_Nonbasis = setdiff(1:n, index_Basis);   %非基变量索引
%% 核心——旋转运算
    %核心——非基变量的部分等于（=）基变量索引的矩阵的逆乘剩余非基变量的矩阵
    A(:,ind_Nonbasis) = A(:,index_Basis) \ A(:,ind_Nonbasis);
    %核心——约束方程组常数项(=)基变量索引的矩阵的逆乘原约束方程常数项目
    b = A(:,index_Basis) \ b;
    %核心——基变量索引的矩阵更换成单位矩阵
    A(:,index_Basis) = eye(m,m);
    noi=noi+1;
end
end
```

主函数：

```
clc,clear;
%大M法（题目1）
% M=2e32;
% A=[ 1  -2  1  1  0  0 0;
%     2  1  -4  0  -1 1 0;
%     1  0  -2  0  0  0 1];
% b=[11 3 1]';
% c=[1  1  -3  0  0 M  M]';

%大M法（题目2）
M=2e32;
A=[ 1  1  1  1  0  0  0;
    -2  1  -1  0  -1 1 0;
    0  3  1  0  0  0 1];
b=[4 1 9]';
c=[3  0  -1  0  0 M  M]';

%例题
% A=[ 1  1  -2  1  0  0;
%     2  -1  4  0  1  0;
%     -1  2  -4  0 0  1];
% b=[10 8 4]';
% c=[1 -2 1 0  0  0]';

[xm,fm,noi] = dcxf(A,b,c);
disp('最优解为：');
disp(xm);
disp('最优函数值为：');
disp(fm);
disp('迭代次数为：');
disp(noi);
```

实验结果：

题目 1：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\
\text{s. t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant 3, \\
& x_1 - 2x_3 = 1, \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

命令行窗口

```
最优解为:
        9
        1
        4
        0
        0
        0
        0

最优函数值为:
       -2

迭代次数为:
        3
```

题目 2：

$$
\min f = 3x_1 - x_3
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\
-2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 1 \\
3x_2 + x_3 = 9 \\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
$$

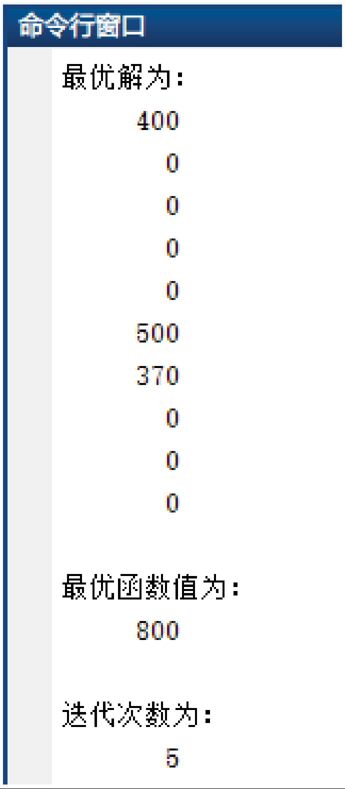
命令行窗口

```
最优解为:
        0
        5/2
        3/2
       -1/6004799503160661
        0
        0
        0

最优函数值为:
       -3/2

迭代次数为:
        3
```

题目 3：

$$\min Z=2x_1+7x_2+4x_3+9x4+5x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+6x_4+18x_5 \geqslant 700 \\ x_1+0.5x_2+0.2x_3+2x_4+0.5x_5 \geqslant 30 \\ 0.5x_1+x_2+0.2x_3+2x_4+0.8x_5=200 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \\ x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$



实验收获：

通过这次最优化理论与应用课程的实验二，让我深刻理解了**大 M 法的原理和作用**，同时在进行实验的过程中，我也明白了单纯形法具有一定的**局限性**，比如对于一般的线性规划，矩阵 A 中未必刚好有一个 m 阶的单位矩阵，这便是题目三的特点，这时候我深入了解了**两阶段法**和**大 M 法**。通过对两种方法的细致学习后，我发现**大 M 法**更加简洁以及非常适用于题目算法的求解，其原理是在约束中增加人工变量 x，同时修改目标函数，加上罚项 $Me^{\mathrm{T}}x_a$，其中 M 是很大的正数，这样，在极小化目标函数的过程中，由于**大 M** 的存在，将迫使人工变量离基，同时也相当于构造了一个 m 阶的单位矩阵用于后续算法的求解。

经过本次实验，让我受益匪浅，希望未来能够继续深入学习最优化理论与应用的相关内容，为后续更加专业的研究打下坚实的基础！