THE p-CENTER LOCATION PROBLEM IN AN AREA 阅读笔记

这是一篇图形学的经典论文，提供了用于生成**沃罗诺伊图**（Voronoi Diagram，也称作Dirichlet tessellation，狄利克雷镶嵌）的 Lloyd 算法。Voronoi 图在图形学中应用十分广泛，此片论文也有相当高的引用量（196），因此，我阅读了该论文，了解了如何从 n 个点生成其 Voronoi 图。

Voronoi 图

首先介绍一些 Voronoi 图。 引用维基百科的介绍

> *沃罗诺伊图（Voronoi Diagram，也称作Dirichlet tessellation，狄利克雷镶嵌）是由俄国数学家格奥尔吉·沃罗诺伊建立的空间分割算法。灵感来源于笛卡尔用凸域分割空间的思想。在几何、晶体学、建筑学、地理学、气象学、信息系统等许多领域有广泛的应用。*

给定 n 个点（即下图中的黑点），其对应的 Voronoi 图就是这样的 n 个细胞，他的特性为

- 每个V多边形内有一个生成元
- 每个V多边形内点到该生成元距离短于到其它生成元距离
- 多边形边界上的点到生成此边界的生成元距离相等
- 邻接图形的 Voronoi 多边形界线以原邻接界线作为子集

使用公式描述就是满足这样的式子

$$V(\mathbf{p}_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_i\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_j\|, \forall j \ne i\}$$

Lloyd 方法

这个方法总体上就是如下四步

- 根据当前 $\{\boldsymbol{p}_i\}$ 建立 Voronoi Tesselation
- 计算每个Voronoi Cell的重心 $\{\boldsymbol{c}_i\}$
- 将 $\boldsymbol{p}_i$ 移动至 $\boldsymbol{c}_i$ 后
- 重复迭代直至收敛

定义如下的能量函数

$$E(x_1, \ldots, x_k, R_1, \ldots, R_k) = \sum_{i=1..k} \int_{x \in R_i} \boxed{\rho(x)} \| x - x_i \|^2 \, dx$$

我们要做的就是最小化该函数

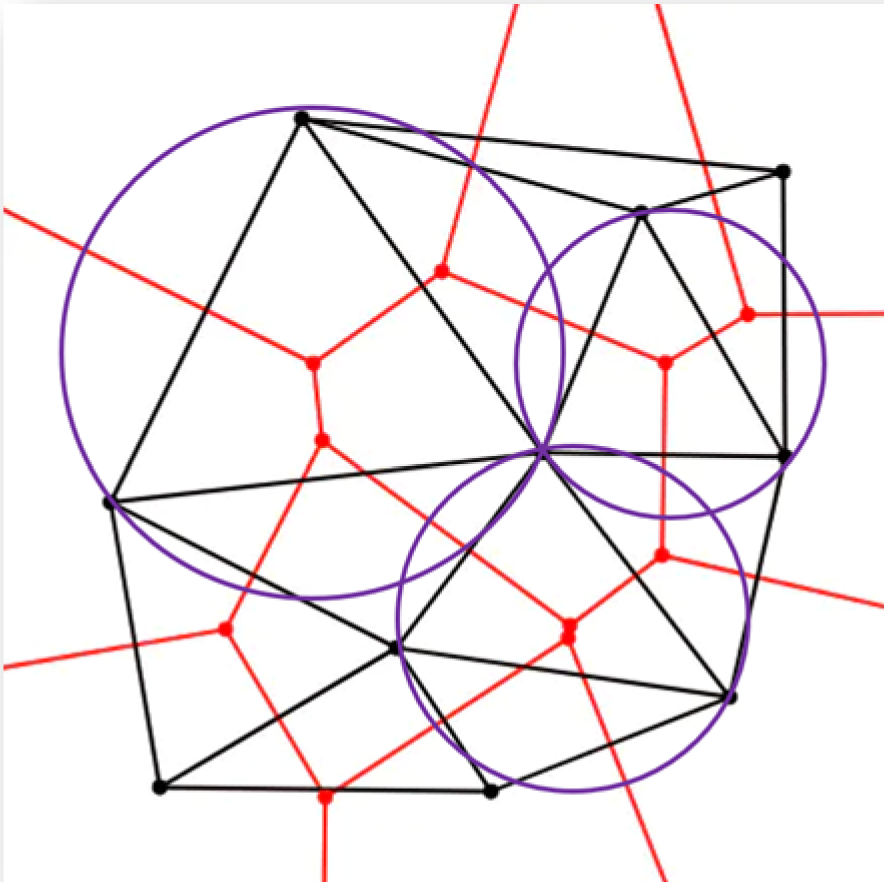
$$\text{argmin}_{division} \ E(x_1, \ldots, x_k, R_1, \ldots, R_k) = \textbf{Voronoi Tessellation}$$

我们需要找到该平面上的一种划分使得能量函数取得最小值。根据能量函数的定义对于该平面上的任意一点我们需要将其分配到与之最近的顶点区域才能使能量函数最小。那么结合Voronoi Tessellation的定义我们便可以知道这就是符合我们想法的一种划分方式。

在Voronoi Tessellation中，平面上任意一点到其所在区域的顶点距离小于到其他区域顶点的距离。我们进一步考虑该划分的边界，由于距离的变化是连续的，因此边界上的点到至少两个顶点的距离是相等的，也就意味着边界线其实是顶点之间的中垂线所构成。

由于边界线都是由中垂线所构成，因此事实上该划分的各个顶点其实是每个三角形的外心。

也就是说，我们只要能确定每个三角形的外心即可得到Voronoi Tessellation划分。



确定三角形外心

那么如何确定呢?

设一个三角形

$$\triangle \ \mathrm{ABC} : \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{z_1}) \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{z_3}) \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}, \boldsymbol{z_3})$$

设置这样的约束条件

1. 外心(x,y,z)与▲ ABC共面

$$
\begin{vmatrix}
x & y & z & 1 \\
x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\
x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\
x_3 & y_3 & z_3 & 1
\end{vmatrix} = 0
$$

$$
A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0
$$

2. 外心(x,y,z)到 A，B，C 三点距离相等

$$
\begin{cases}
|\vec{O} - \vec{A}| = |\vec{O} - \vec{B}| \\
|\vec{O} - \vec{A}| = |\vec{O} - \vec{C}|
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow \begin{cases}
A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\
A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0
\end{cases}
$$

3. 联立求解三元一次方程组

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = 0$$

根据Cramer法则即可得到外心坐标关于三角形三点坐标的表达式

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix}$$

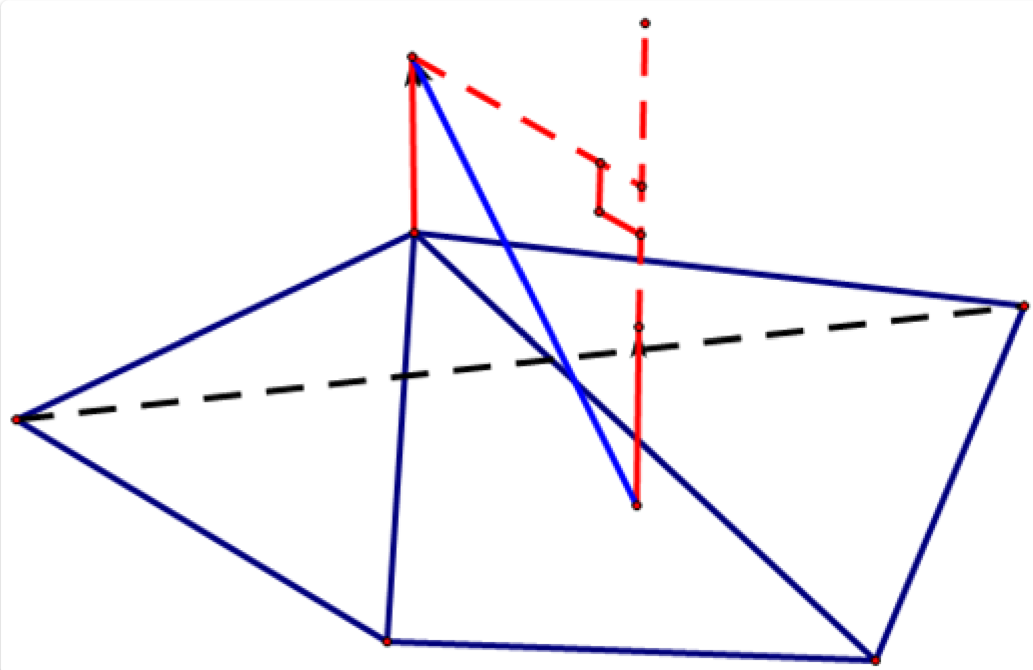
调整顶点

单独考虑一个Voronoi Tessellation划分块的能量函数值，根据刚体力学中的平行轴定理可知当顶点位于该块重心时能量函数最小。

$$E(x_1,..,x_k,R_1,...,R_k) = \sum_{i=1..k} \int_{x\in R_i} \boxed{\rho(x)} \| x - x_i \|^2 \, dx$$

$$p_i' = \frac{1}{|V(R_i)|} \sum_{v\in V(R_i)} v$$

$$p_i \to p_i' + nn^{\mathrm{T}}(p_i - p_i')$$



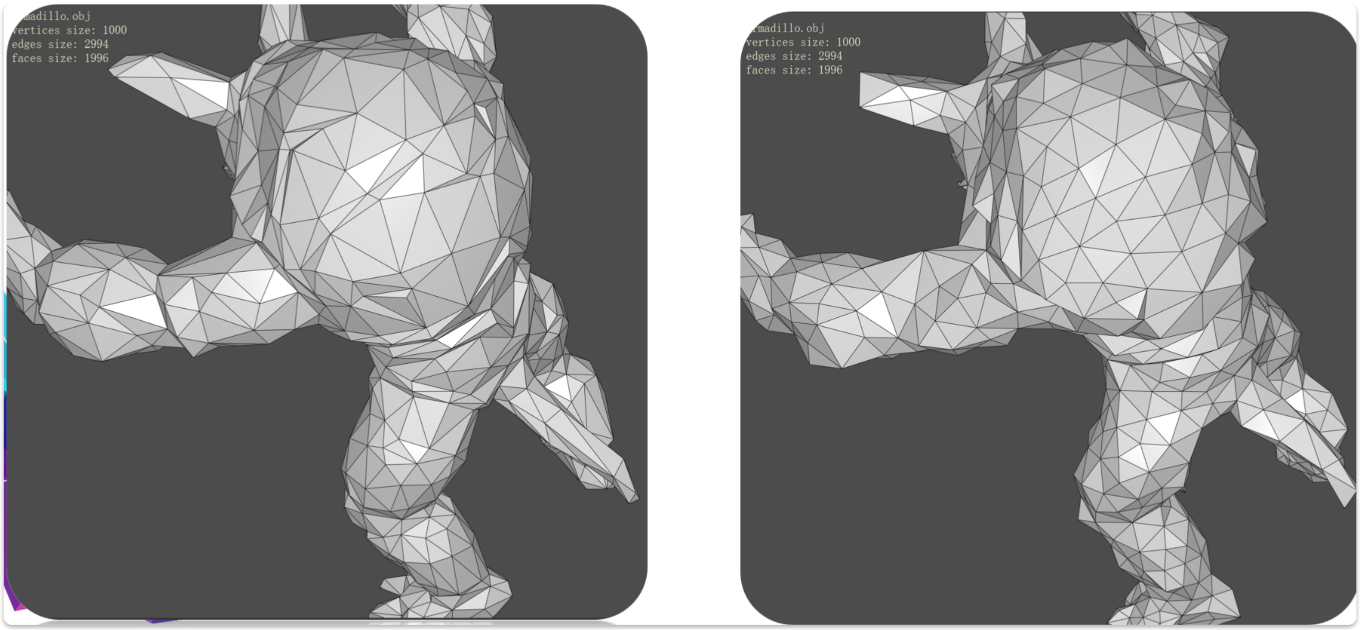
顶点法向量

$$\boldsymbol{n}_i = \frac{1}{|\aleph_f(v_i)|}\sum_{f\in\aleph_f(v_i)} \theta \boldsymbol{n}_f$$

其中$\aleph_f(v_i)$为顶点v_i的邻接三角面，$\boldsymbol{\theta}$为该三角面以v_i 为顶点的夹角，$\boldsymbol{n}_f$ 为该面的单位法向

结果

使用该方法，实现了这样的效果



可以看到右边的三角更加细腻、均匀。