Bài 14: Đồ thị (2/2)

Giảng viên: Hoàng Thị Điệp
Khoa Công nghệ Thông tin – Đại học Công Nghệ

Nội dung chính

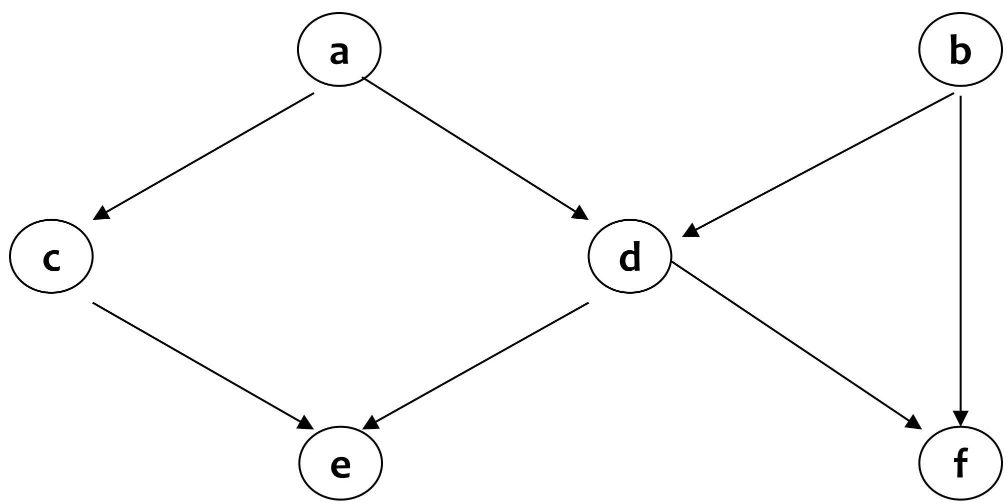
1. Đồ thị và các khái niệm liên quan
2. Cài đặt đồ thị
3. Một số bài toán tiêu biểu
   - Đi qua/duyệt đồ thị
     - BFS, DFS
   - Sắp xếp topo trên đồ thị định hướng không có chu trình
   - Tìm đường đi ngắn nhất
     - Từ một đỉnh nguồn
     - Giữa mọi cặp đỉnh
   - Tìm cây bao trùm ngắn nhất
     - Prim
     - Kruskal
4. Đồ thị và C++

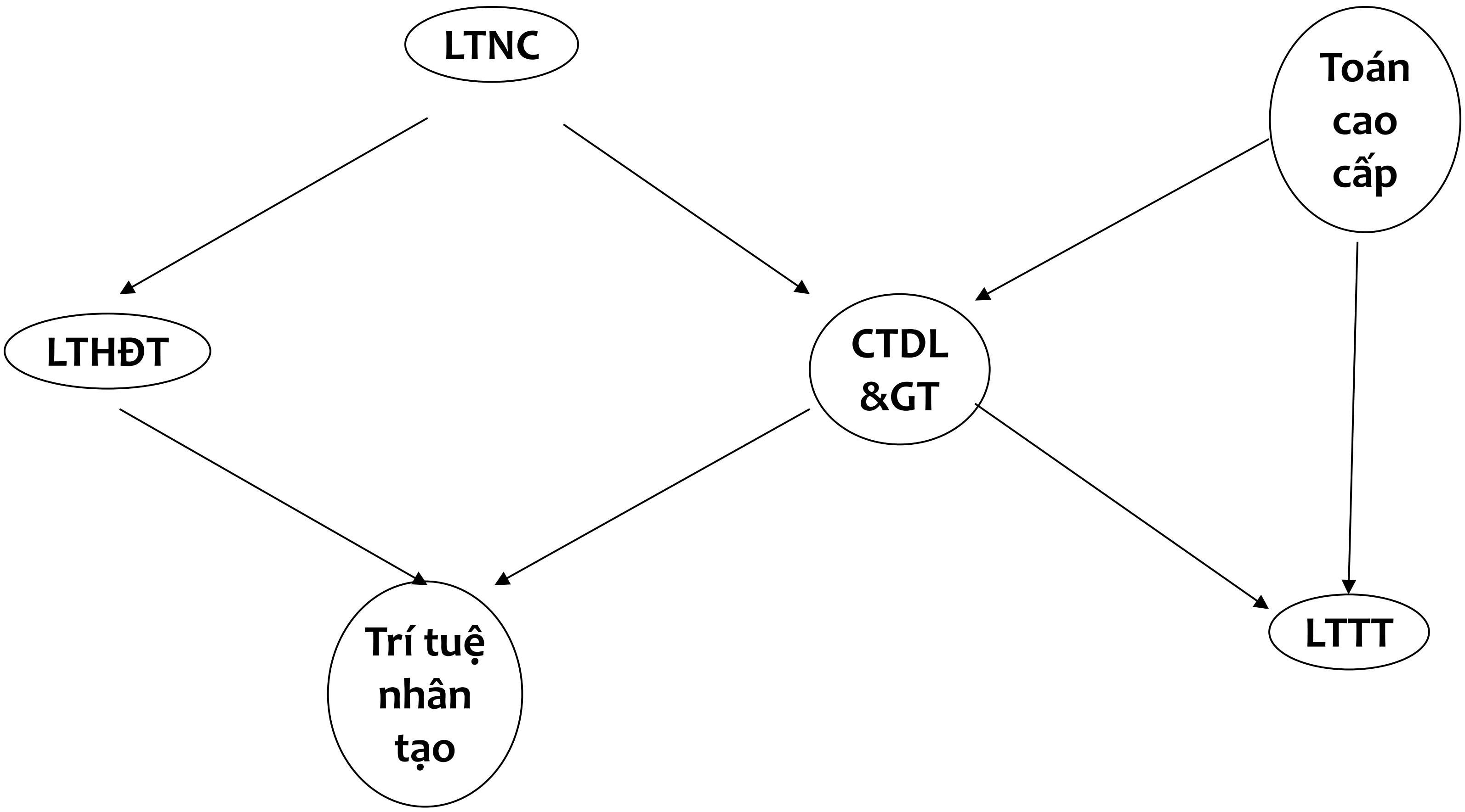
3.1. Đi qua đồ thị

3.2. Sắp xếp topo

Đồ thị định hướng không chu trình

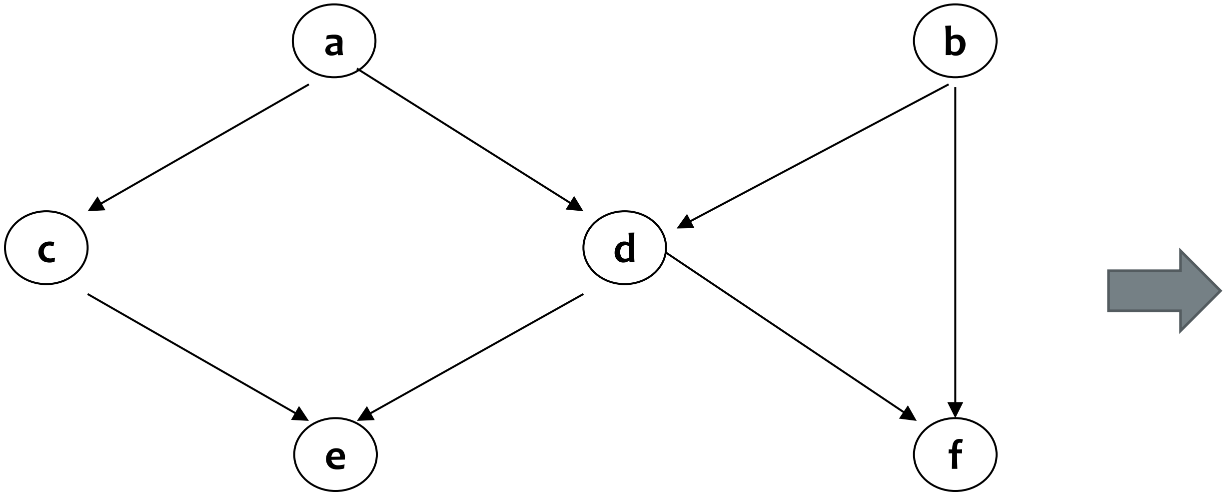
- Thuật ngữ
  - directed acyclic graph **(DAG)**
  - acyclic digraph
- Nhiều dạng quan hệ trên một tập đối tượng có thể biểu diễn bởi DAG. Ví dụ:
  - Quan hệ thứ tự bộ phận trên một tập A
  - Quan hệ thứ tự thời gian giữa các nhiệm vụ trong một đề án
  - Quan hệ thứ tự thời gian giữa các môn học trong một chương trình học




LTNC
Toán cao cấp
LTHĐT
CTDL &GT
Trí tuệ nhân tạo
LTTT

Sắp xếp topo (topological sort)

- Cho G = (V,E) là một DAG, ta cần sắp xếp các đỉnh của đồ thị thành một danh sách
  - sao cho nếu có cung (u,v) thì u cần phải đứng trước v trong danh sách đó.



(a, c, b, d, e, f)

hoặc

(a, b, d, c, e, f)

...

- Dùng kĩ thuật tìm kiếm theo độ sâu?

Ý tưởng toposort dựa trên DFS

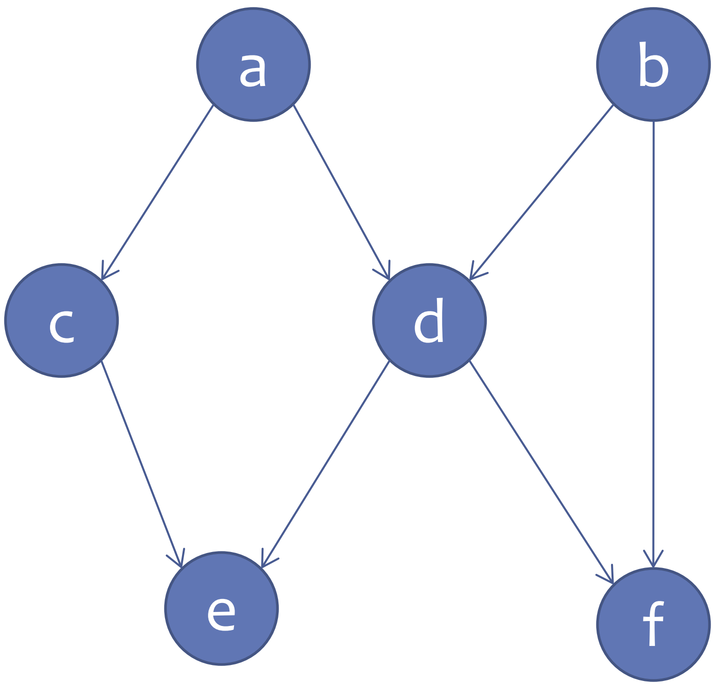
```
Algorithm DFS(v)
// Tìm kiếm theo độ sâu xuất phát từ v.
Input: Đỉnh v chưa được thăm
for (mỗi đỉnh u kề v)
    if ( u chưa được thăm)
        Đánh dấu u đã được thăm;
        DFS(u)

Algorithm DFSTraversal(G)
// Đi qua đồ thị G=(V, E) theo độ sâu
for (mỗi v ∈V) Đánh dấu v chưa được thăm;
for (mỗi v ∈V)
    if (v chưa được thăm)
        Thăm v và đánh dấu v đã được thăm;
        DFS(v);
```

- Thực hiện DFSTraversal trên đồ thị G, thêm lệnh L.append(v) vào cuối hàm DFS(v)
- Đảo ngược L

[Tác giả: Tarjan]

Minh họa TopoSort(G)



DFS(a)
DFS(c)
DFS(e)
L = (e)
L = (e, c)
DFS(d)
DFS(f)
L = (e, c, f)
L = (e, c, f, d)
L = (e, c, f, d, a)
DFS(b)
L = (e, c, f, d, a, b)
L = (b, a, d, f, c, e)

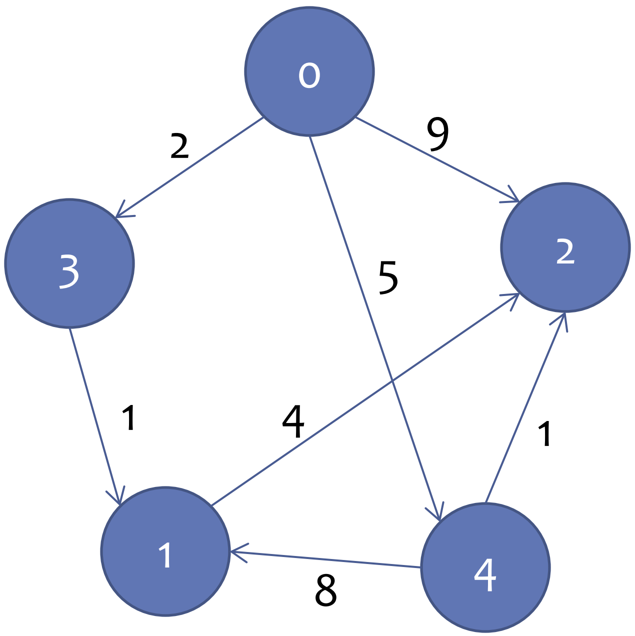
3.3. Tìm đường đi ngắn nhất

Tổng quan

- Tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị
  - Không trọng số: Dùng BFS
  - Có trọng số
    - Trọng số có thể âm: Không xét
      - Bellman-Ford
    - Trọng số không âm
      - độ dài cung (u, v) là c(u,v)
      - không có cung từ u tới v thì c(u,v) = +∞
- Xét hai vấn đề
  - Tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh nguồn tới các đỉnh còn lại.
    - single-source shortest path problem
  - Tìm đường đi ngắn nhất giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị.
    - all-pairs shortest path problem

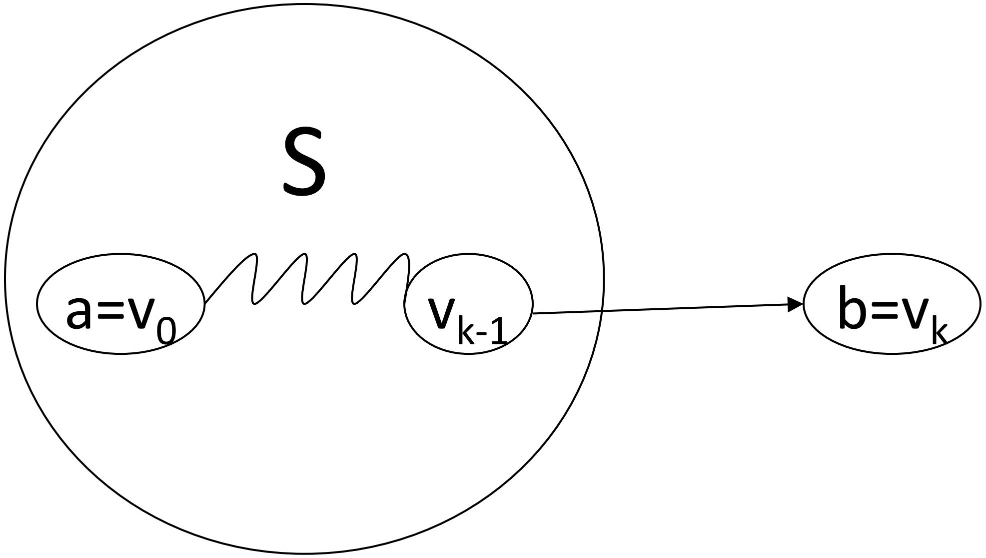
Thuật toán Dijkstra cho bài single-source

- Ví dụ: tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn là đỉnh 0
- Thiết kế dựa vào kỹ thuật tham ăn
- Xác định đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn a tới các đỉnh còn lại qua các bước
  - Mỗi bước ta xác định đường đi ngắn nhất từ a tới một đỉnh
  - Lưu các đỉnh đã xác định đường đi ngắn nhất từ a tới chúng vào tập S
  - Ban đầu tập S chỉ chứa một đỉnh nguồn a



Thuật toán Dijkstra …

- Gọi đường đi từ a tới đỉnh b là đường đi đặc biệt nếu đường đi đó chỉ đi qua các đỉnh trong S
- Dùng mảng D: Độ dài đường đi đặc biệt từ a tới b lưu trong D[b]
  - Ban đầu S = {a}, D[a] = 0, D[b] = c(a, b) với b≠a



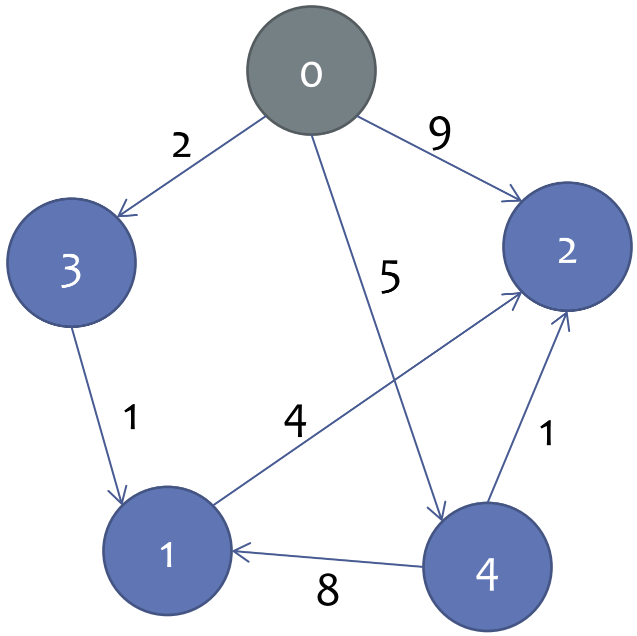
diepht@vnu

Thuật toán Dijkstra …

- Dùng mảng D: Độ dài đường đi đặc biệt từ a tới b lưu trong D[b]
  - Ban đầu S = {a}, D[a] = 0, D[b] = c(a, b) với b≠a
  - Tại mỗi bước
    - Chọn một đỉnh u không thuộc S mà D[u] nhỏ nhất và thêm u vào S
      - xem D[u] là độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới u
    - Sau đó, xác định lại các D[b] với b ở ngoài S

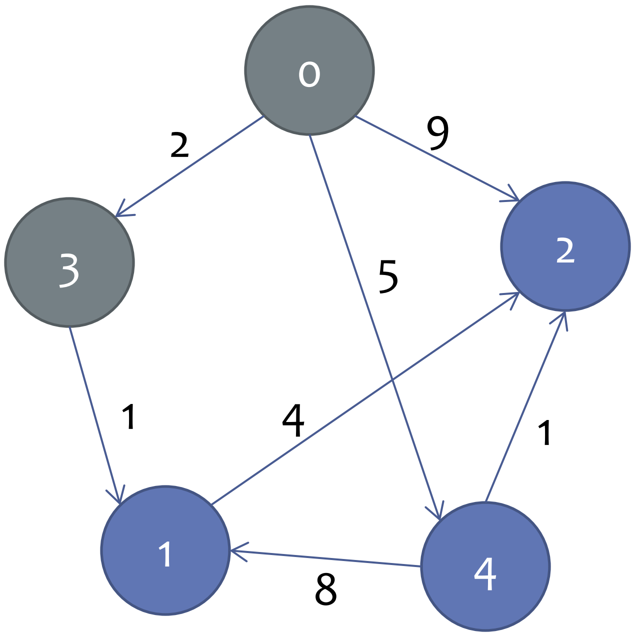
      D[b] = min(D[b], D[u] + c(u, b))
    - Lặp lại cho tới khi S gồm tất cả các đỉnh của đồ thị

Minh họa thuật toán Dijkstra: Ban đầu



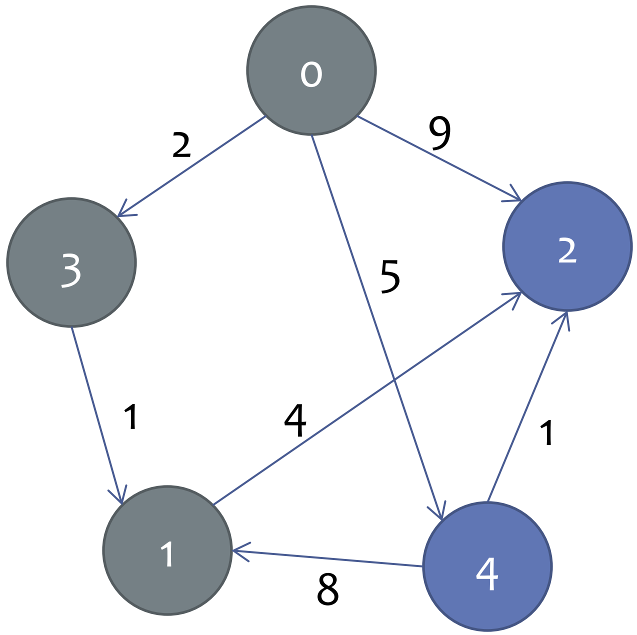
- S = {0}
- D[0] = 0
- D[1] = ∞
- D[2] = 9
- D[3] = 2
- D[4] = 5

Minh họa thuật toán Dijkstra: Thêm 3 vào S



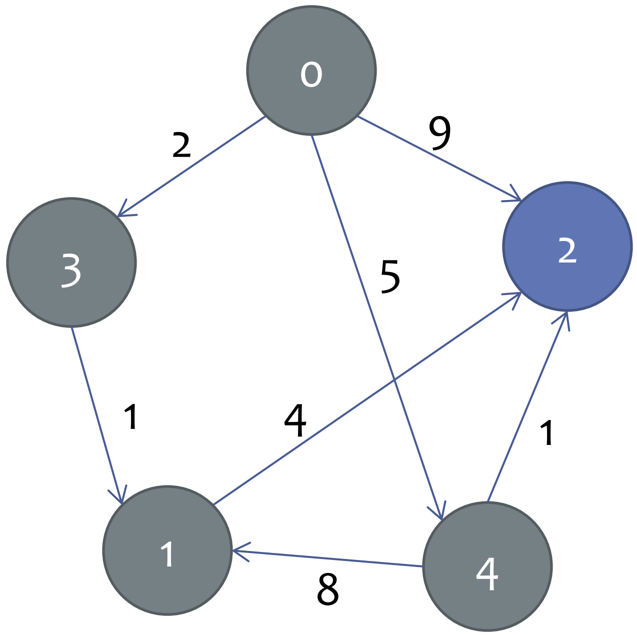
- S = {0, 3}
- D[0] = 0
- D[1] = min(∞, D[3] + 1) = 3
- D[2] = min(9, D[3] + ∞) = 9
- D[3] = 2
- D[4] = min(5, D[3] + ∞) = 5

Minh họa thuật toán Dijkstra: Thêm 1 vào S



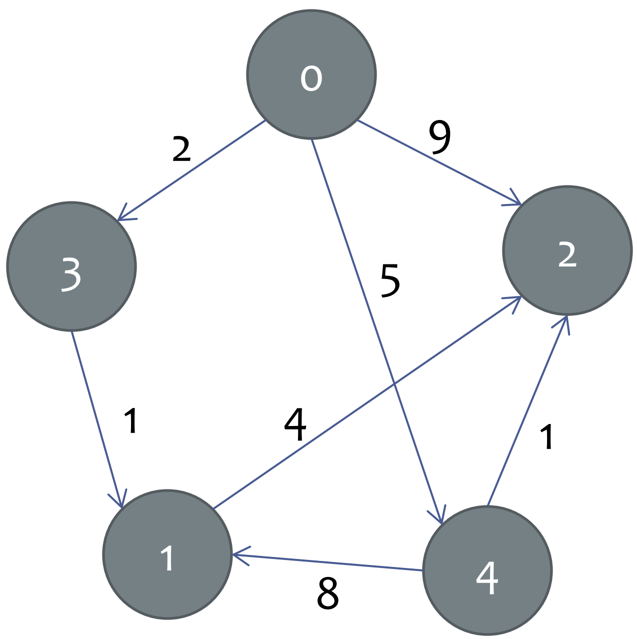
- S = {0, 3, 1}
- D[0] = 0
- D[1] = 3
- D[2] = min(9, D[1] + 4) = 7
- D[3] = 2
- D[4] = min(5, D[1] + ∞) = 5

Minh họa thuật toán Dijkstra: Thêm 4 vào S



- S = {0, 3, 1, 4}
- D[0] = 0
- D[1] = 3
- D[2] = min(7, D[4] + 1) = 6
- D[3] = 2
- D[4] = 5

Minh họa thuật toán Dijkstra: Thêm 2 vào S



- S = {0, 3, 1, 4, 2}
- D[0] = 0
- D[1] = 3
- D[2] = 6
- D[3] = 2
- D[4] = 5
- D[b] lưu độ dài đường đi ngắn nhất từ a=0 tới b, với mọi $b \in V$

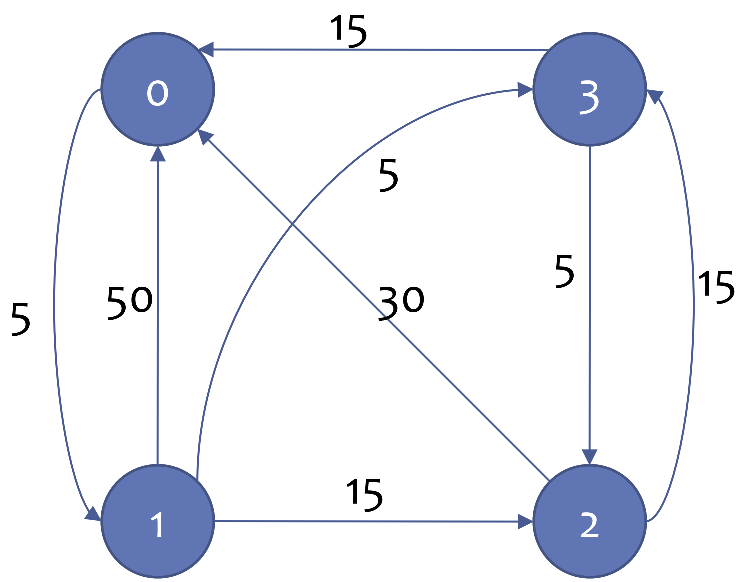
Các vấn đề khác

- Ghi lại vết đường đi ngắn nhất từ nguồn tới các đỉnh khác
- Tính đúng đắn của thuật toán Dijkstra
- Dùng hàng ưu tiên lưu tập đỉnh ngoài S để tăng hiệu quả
  - $O(|V|\log|V| + |E|\log|V|)$

Thuật toán Floyd cho bài all-pairs

- Thiết kế dựa trên kỹ thuật quy hoạch động
- Ký hiệu S_k là tập các đỉnh từ 0 đến k
  - $S_k = \{0,1, \ldots ,k\}$, $k <= n-1$
- Gọi $A_k(i,j)$ là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh i tới đỉnh j nhưng chỉ đi qua các đỉnh trong tập S_k
  - Khi $k = n-1$ thì $S_{n-1} = V$ ⇨ $A_{n-1}(i,j)$ chính là đường đi ngắn nhất từ i tới j trong đồ thị đã cho
  - Khi $k = -1$, S_k rỗng ⇨ $A_{-1}(i,j) = c(i,j)$

Minh họa: k = -1
S_{-1} rỗng, $A_{-1}(i,j)$ cho trong bảng



	0	1	2	3
0	0	5	∞	∞
1	50	0	15	5
2	30	∞	0	15
3	15	∞	5	0

Công thức tính A_k từ A_{k-1}

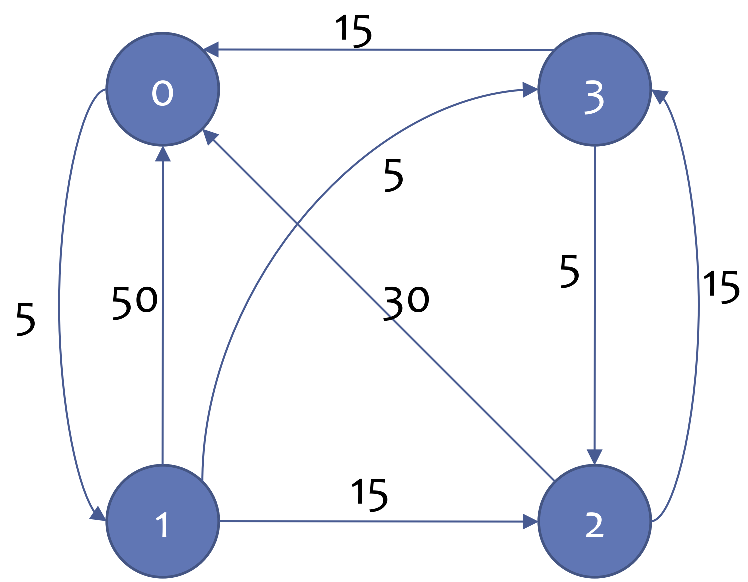
- Nhận xét quan trọng
  - Nếu đỉnh k nằm trên đường đi ngắn nhất từ đỉnh i tới đỉnh j thì đoạn đường từ i tới k và đoạn đường từ k tới j phải là đường đi ngắn nhất từ i tới k và từ k tới j tương ứng
  - Nếu $A_k(i,j)$ là độ dài đường đi không qua đỉnh k, tức là đường đi này chỉ đi qua các đỉnh trong S_{k-1} thì

$$A_k(i,j) = A_{k-1}(i,j)$$

  - Nếu $A_k(i,j)$ là độ dài của đường đi qua đỉnh k thì trên đường đi này đoạn từ i tới k có độ dài là $A_{k-1}(i,k)$, còn đoạn đường từ k tới j có độ dài là $A_{k-1}(k,j)$
- Do đó

$$A_k(i,j) = \min(\, A_{k-1}(i,j)\, ,\, A_{k-1}(i,k) + A_{k-1}(k,j)\,)$$

Minh họa: k=0…?



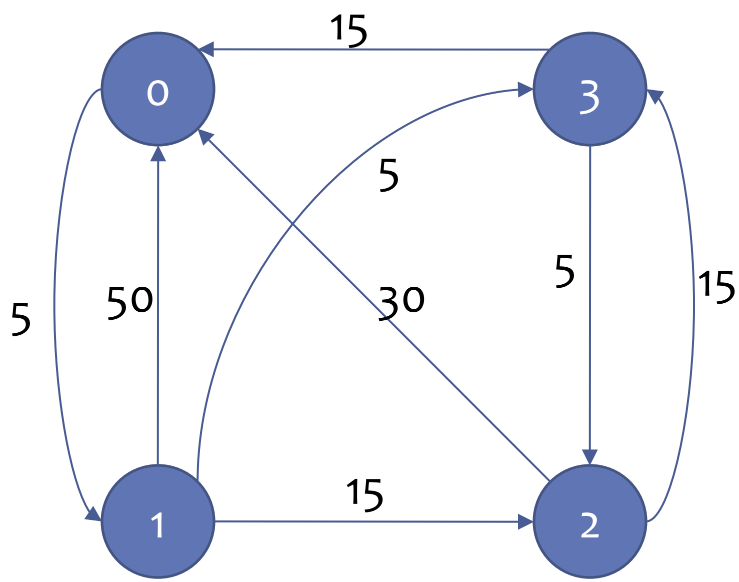
A_{-1}

	0	1	2	3
0	0	5	∞	∞
1	50	0	15	5
2	30	∞	0	15
3	15	∞	5	0

A_0

	0	1	2	3
0	**0**	**5**	**∞**	**∞**
1	**50**	0	15	5
2	**30**	35	0	15
3	**15**	20	5	0

Minh họa: k=0…?



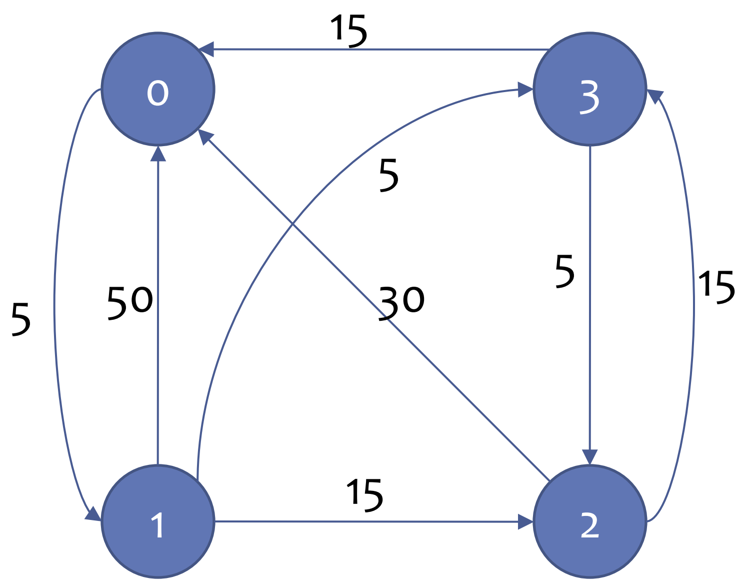
A_0

	0	1	2	3
0	0	5	∞	∞
1	50	0	15	5
2	30	35	0	15
3	15	20	5	0

A_1

	0	1	2	3
0	0	**5**	20	10
1	**50**	**0**	**15**	**5**
2	30	**35**	0	15
3	15	**20**	5	0

Minh họa: k=0…?



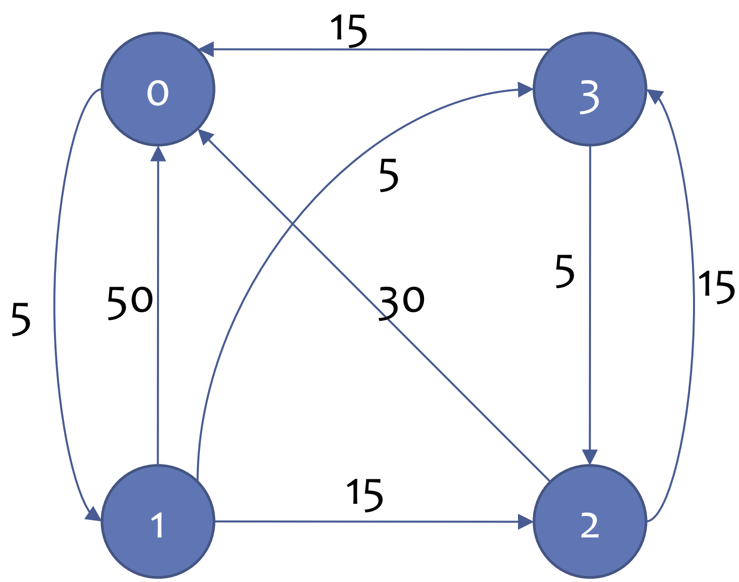
A_1

	0	1	2	3
0	0	5	20	10
1	50	0	15	5
2	30	35	0	15
3	15	20	5	0

A_2

	0	1	2	3
0	0	5	20	10
1	45	0	15	5
2	30	35	0	15
3	15	20	5	0

Minh họa: k=0…?



A_2

	0	1	2	3
0	0	5	20	10
1	45	0	15	5
2	30	35	0	15
3	15	20	5	0

A_3

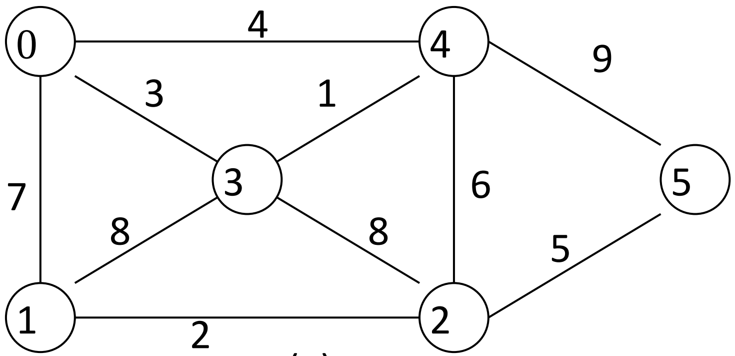
	0	1	2	3
0	0	5	15	10
1	20	0	10	5
2	30	35	0	15
3	15	20	5	0

3.4. Tìm cây bao trùm ngắn nhất

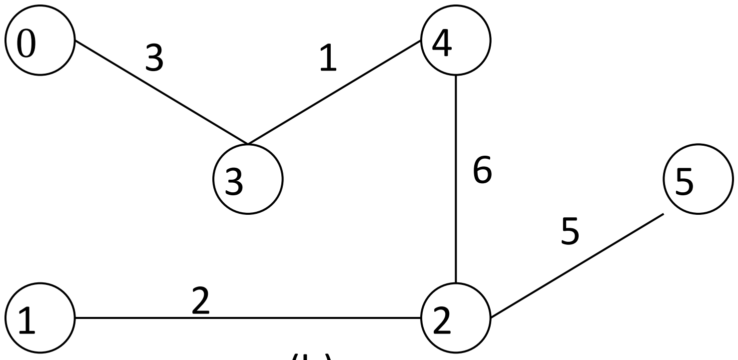
Bài toán

- G = (V,E) là đồ thị vô hướng liên thông
- G' = (V,T) có $T \subseteq E$, liên thông và không có chu trình được gọi là cây bao trùm của G
  - Cây này có |V| - 1 cạnh
- Ta cần tìm cây bao trùm ngắn nhất của một đồ thị G vô hướng liên thông có trọng số không âm
  - tức là cây bao trùm có tổng độ dài các cạnh là nhỏ nhất
  - Thuật ngữ: minimum spanning tree (MST)

Minh họa một cây bao trùm ngắn nhất



(a)

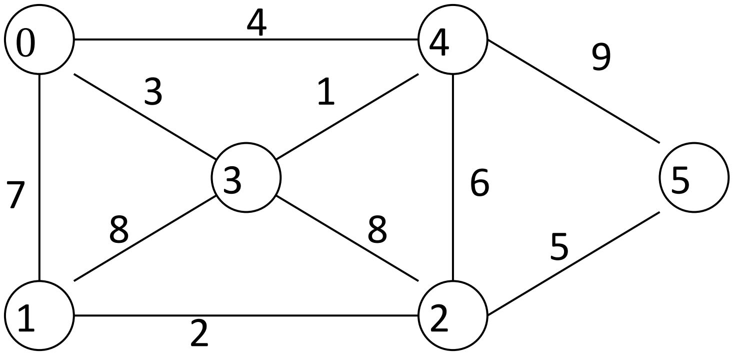


(b)

Ý tưởng

- Thiết kế theo kỹ thuật tham ăn
- Xây dựng tập T các cạnh dần từng bước xuất phát từ T rỗng
- Trong mỗi bước lặp, ta sẽ chọn cạnh (u,v) ngắn nhất trong các cạnh còn lại để đưa vào tập T
  - Prim: $T \cup (u, v)$ phải liên thông, không có chu trình
  - Kruskal: $T \cup (u, v)$ không có chu trình
    - Sử dụng KDLTT họ các tập con không cắt nhau (disjoint set ADT) [chương 13]

Minh họa



Các vấn đề khác

- Độ phức tạp thời gian
- Tính đúng đắn

Tóm tắt

3.2. Sắp xếp topo trên DAG: Thuật toán của Tarjan

3.3. Tìm đường đi ngắn nhất

- Single-source: Thuật toán tham ăn Dijsktra
- All-pairs: Thuật toán quy hoạch động Floyd

3.4. Tìm cây bao trùm ngắn nhất

- Thuật toán tham ăn Prim
- Thuật toán tham ăn Kruskal