微观经济学现代观点讲义

范里安

Chapter one: Introduction

一、资源的稀缺性与合理配置

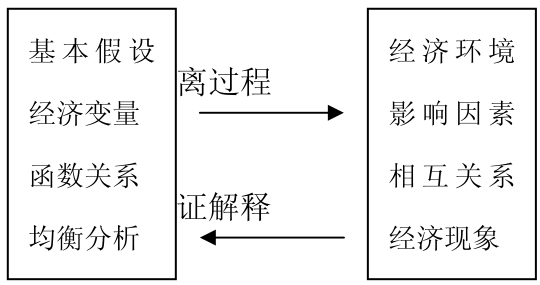
对于消费者和厂商等微观个体来说，其所拥有的经济资源的稀缺性要求对资源进行合理的配置，从而产生微观经济学的基本问题。

资源配置有两种方式，微观经济学研究市场是如何配置资源，并且认为在一般情况下市场的竞争程度决定资源的配置效率。

二、经济理论或模型的实质

微观经济学是实证经济学，它的绝大多数理论和模型都是对微观活动的客观描述，或者是对现实经济观察所做的解释。由现实抽离出理论，然后再用理论对现实做出解释与分析，这就是经济理论的实质。不同的理论实际上就是对经济现象所做的不同的抽离和解释。

理论模型（model）　　　经济现实（reality）



理论从实际中产生　　实际对理论的验证

三、经济理论模型的三个标准

任何一个经济学理论模型都必须满足以下三个标准：

（一）要足够简化（no redundant assumption）

指假设的必要性。假设越少模型的适用面越宽。足够简化还意味着应当使用尽可能简单的方法来解释和说明实际问题，应当将复杂的问题简单化而不是将简单的问题复杂化。应当正确看待数学方法在经济学中的应用，奠定必要的数学基础。熟练的运用三种经济学语言。

（二）内部一致性（internal consistency）

这是对理论模型的基本要求，即在一种假设下只能有一种结论。比如根据特定假设建立的模型只能有唯一的均衡（比如供求模型）；在比较静态分析中，一个变量的变化也只能产生一种结果。内在一致性保证经济学的科学性，而假设的存在决定了理论模型的局限性。经济学家有几只手？

（三）是否能解决实际问题（relevance）

经济学不是理论游戏，任何经济学模型都应当能够解决实际问题。在这方面曾经有关于经济学本土化问题的讨论。争论的核心在于经济学是建立在完善的市场经济的基础上的，而中国的市场经济是不完善的，因此能不能运用经济学的理论体系和方法来研究和解决中的问题。两种观点：一种观点认为经济理论是一个参照系，可以用来对比和发现问题，因此具有普遍的适用性；另一种观点认为中国有自己的国情，需要对经济学进行改造或者使之本土化，甚至有人提出要建立有中国特色的经济学体系。

四、经济分析的两大原则

1.最大化原则（Optimality）

又称理性选择原则（principle of rational selection ），这一原则假定每个经济主体都是“经济人”，并寻求个人利益最大化。最大化原则决定着经济学的预测能力（Power of prediction）。一般说来，经济学不能解释非最大化行为。比如：利他主义、非利润最大化的投资和生产行为，在经济学看来都不符合理性选择原则。

2.均衡原则（equilibrium）

经济活动中的各种因素相互作用会达到某种状态，在这种状态下没有任何压力和动机促使经济主体做出进一步调整或改变，这时各种经济变量达到一种稳定状态，经济学称这种状态为均衡。均衡是经济分析和预测的基础，如果一个经济系统不存在均衡，我们就无法对它进行分析，更无法做出准确的预测。以均衡分析为基础，我们可以进行比较静态分析、对偶分析、包络分析和动态分析等。

根据各经济变量之间互动的方式不同，可以将均衡分为两类：

（1）一般均衡（GE）：以完全竞争为基础，考察所有市场同时达到均衡的条件。它是以局部均衡为基础的消费者、厂商、某一个市场的单独决策为基础。

（2）博弈论（Game）：以寡头竞争为基础，是一种相互决策。具有众多均衡概念。比如优势策略均衡、纳什均衡、精炼纳什均衡、贝叶斯均衡等。

Chapter Two: Budget constraint

一、预算约束

预算约束描述的是在给定商品价格和收入的情况下消费者可以消费的两种商品的数量。用(x_1, x_2)表示消费者消费的商品束，(p_1, p_2)表示商品的价格，m 表示消费者的收入，预算约束可表示为实际消费支出小于货币收入，即：

$$p_1x_1 + p_2x_2 \le m$$

设，x_2为复合商品，即除x_1以外的所有其他商品，令其价格$p_2 = 1$，则$p_2x_2 = x_2$。其表示消费者可用于购买其他商品的货币数量。这时预算约束变为：

$$p_1x_1 + x_2 \le m$$

如果假设商品消费者的偏好具有局部非饱和的性质，他会将全部收入都用于消费，这时预算约束可以表示为：

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m$$

二、预算线及其性质

根据预算约束可以画出预算线，它表示在(p_1, p_2, m)条件下，消费者可以消费的(x_1, x_2)的组合轨迹。预算线的斜率为负，等于两种商品的价格比率。(图略)

在收入给定的条件下，要增加x_1的消费就必须减少x_2的消费，因此，它还表示两种商品之间的市场替代比率或者说是相互之间的机会成本。根据预算约束有：

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1\text{；由此可得：}\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}\text{，}$$

这说明两种商品的市场替代比率就等于其价格比率。

三、预算线的变动

收入变动：使预算线平行移动。

价格变动：使预算线转动。P_1下降P_2不动，预算线变得平缓；相反，预算线变得陡峭。P_1，P_2，M同比例变动预算线不变。

四、计价物（numerare）

所谓计价物就是用来衡量其他变量值大小的某一变量的计价单位。作为计价物的变量有的时候取值为 1，这样做的目的是为了减少变量的个数。

在预算约束中可以分别将 p_1，p_2，m 作为计价物，并且令$p = \frac{p_2}{p_1}$，可分别得到三个不同形式的预算约束，即

$x_1 + p x_2 = \frac{m}{p_1}$；　　当$p_1$=1 时，预算约束为：$x_1 + p_2 x_2 = m$

$\frac{1}{p} x_1 + x_2 = \frac{m}{p_2}$；　　当$p_1$=1 时，预算约束为：$p_1 x_1 + x_2 = m$

$\frac{p_1}{m} x_1 + \frac{p_2}{m} x_2 = 1$；　　当$m$=1 时，预算约束为：$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1$

最后一个表示一元钱的预算线。它们都表示同一个预算约束。

五、税收、补贴和配给

首先，从量或者从价税和补贴会改变价格，从而改变预算线的斜率。

- 对商品征税提高价格：从价税（1+ t）p_1；从量税 p_1+T。
- 对商品补贴降低价格：从价补贴（1-τ）p_1；从量补贴 p_1-S。

其次，总额税（lump-sum tax）和总额补贴会改变收入，从而移动预算线

- 总额税减少收入，使预算线向原点移动；
- 总额补贴增加收入，使预算线向外移动。

其次，配给限制商品的消费数量，改变预算集。

- 配给供应会将原来的预算集砍掉一块。
- 配给和税收混合使用，使预算线出现拐点。

六、食品券计划

1979 年以前的食品券计划是对食品的一种从价补贴，使食品的价格下降，预算线向外移动。由于每个家庭最多可以得到 153 美元的食品券配给，所以超过 153 美元以后，只能按照非补贴的价格进行消费。故预算线在 153 美元处有拐点。

1979 年以后的计划是一种总额补贴。预算线的斜率不变，只是向右移动。移动的距离取决于每个家庭得到食品券的数量。由于食品券只能够购买食品不能购买其他物品，因此有一个水平线段。

Chapter three: Preference

一、基数效用与序数效用

消费者的目标函数是寻求个人效用的最大化。而效用是人们的主观感受，因此如何衡量效用的大小就成为一个关键问题。在经济学上有两种方法，一种是以基数为基础度量效用，称为基数效用理论；一种是以序数为基础度量效用，称为序数效用理论。

一方面消费者难以用基数衡量所消费商品的效用，另一方面经济分析只需要消费者能够对任意不同的商品数量进行排序，因此序数效用理论取代了基数效用理论。

二、偏好及其表述

主观效用的大小依赖于人们的偏好，因此偏好是对人们主观心理需求的一种描述。消费者的偏好可以表述如下：

强偏好：$(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$，表示 X 商品束严格比 Y 商品束好。

弱偏好：$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$，表示 X 商品束至少与 Y 商品束一样好。

无差异：$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$，表示两个商品束没有差异。

强偏好、弱偏好和无差异三者之间具有密切的关系：

如果 $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ 而且 $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$，则 $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$。

如果 $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ 而且不是 $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$，则 $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$。

三、关于消费者偏好的三个公理（Axiom）

完备性（complete）：$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ 或者 $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$。任何两个商品束都是可以比较的，消费者可以对任意两个商品束做出偏好判断。

反身性（reflexive）：$(x_1, x_2) \succeq (x_1, x_2)$。任何商品束至少与其自身一样好，或者说相同的商品束对消费者来说是无差异的。

传递性（transitive）：如果 $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ 而且 $(y_1, y_2) \succeq (z_1, z_2)$，则有 $(x_1, x_2) \succeq (z_1, z_2)$。消费者可以对任何两个以上的商品束做出偏好判断。传递链条可以无限长。

在满足三个公理的前提下，给定任意商品束消费者都可以按照一定的偏好对其进行排序。

四、偏好的性质与理性偏好

满足三个公理表明消费者可以对任意商品束进行排序，但是如何排序或者说排序的方式则是由偏好的性质所决定的。在这里主要考察理性偏好的性质，即绝大多数消费者在对绝大多数商品的消费中所表现出来的偏好特征。

（一）单调性：

如果 $X=(x_1, x_2)$ 是正常商品消费束，$Y=(y_1, y_2)$ 为相同商品的较少的消费束（比如

$x_1 = y_1, x_2 = y_1 + 1$），那么单调性假设是说消费者一定偏好 X，即 $X \succ Y$。这意味着对消费者来说较多的商品总比较少的商品更受偏好，即多多益善。

单调性分为强单调性和弱单调性。

弱单调性：如果 $X \geq Y$,则$X \succeq Y$。即消费者认为 X 至少与 Y 一样好。

强单调性：如果 $X \geq Y$，且$X \neq Y$，则$X \succ Y$。即消费者认为 X 严格好于 Y。

（二）连续性：

在商品可以任意分割的条件下，消费者认为多一点总比少一点好，因此偏好的传递链是没有中断的。对于偏好的连续性可以定义为：

如果 $X \geq Y$，且$X \to X^*$，则$X^* \succeq Y$。弱偏好集是个闭集。

如果 $X > Y$，且$X \to X^*$，则$X^* \succ Y$。强偏好集是个开集。

（三）局部非饱和性：

在任意小的局部范围内，消费者认为多一点总比少一点好。局部非饱和性可以定义为：给定任意商品束 X 和任意实数 $\varepsilon > 0$，总存在商品束 Y，满足$|X - Y| < \varepsilon$，使得 $Y \succ X$。这就是说，无论两个商品束在数量上相差多么小，对消费者来说多一点总比少一点好。

需要注意的是偏好的结构问题，可能 Y<X， 但是 Y 的结构更受偏好。而局部非饱和性忽略偏好的结构问题。

（四）凸性：

凸性假设是说消费者认为平均消费束比极端消费束更好。对$(x_1, x_2), (y_1, y_2)$两个消费束，求其加权平均数构成一个新的消费束$[tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2]$，这一消费束一定比原来的任一个消费束更受偏好，即

$[tx_1 + (1-t)y_1, tx_2 + (1-t)y_2] \succeq (x_1, x_2) or (y_1, y_2)$

满足单调性、连续性、局部非饱和性和凸性的偏好称为理性偏好。理性偏好假设是研究寻求个人利益最大化的消费者行为的基础。

五、弱偏好集合与无差异曲线

偏好的性质可以用弱偏好集合和无差异曲线来描述。弱偏好集合是所有至少与原消费束一样好的其他消费束的集合。弱偏好集合的边界就是无差异曲线。

（一）假定存在三个不同数量的消费束，他们对消费者来说是无差异的，即$(x_1,x_2)\approx(y_1,y_2)\approx(z_1,z_2)$，根据单调性假设可以画出弱偏好集合。如图 3-1 所示：

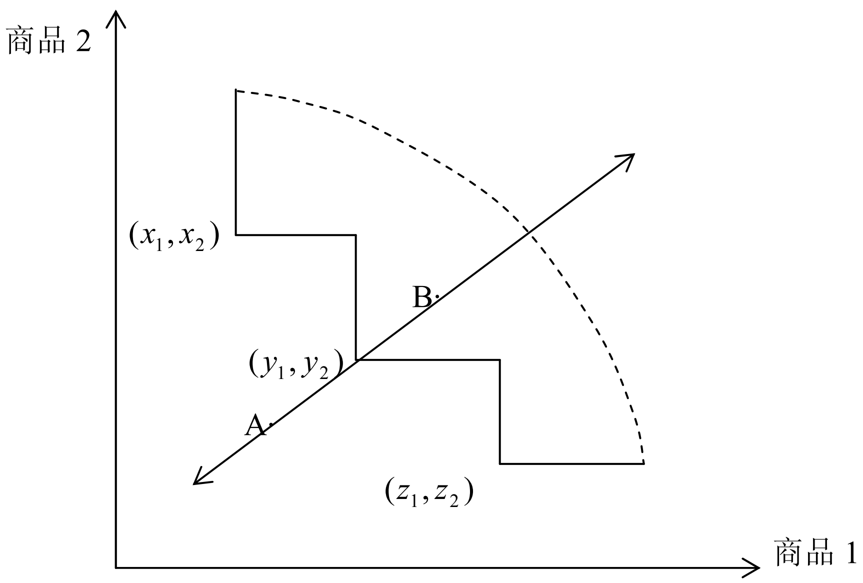


图 3-1　单调性与弱偏好集合

B 点所代表的数量比(y_1,y_2)点的多，故处于弱偏好集合中；A 点所代表的商品数量比(y_1,y_2)的少，故处于弱偏好集合之外。

（二）如果有很多得无差异消费束，就可以得到一条具有比较平滑边界的弱偏好集合。这条边界就是无差异曲线，曲线上的每一点所代表的消费束对消费者来说都具有相同的偏好，因此是无差异的。如图 3-2 所示。

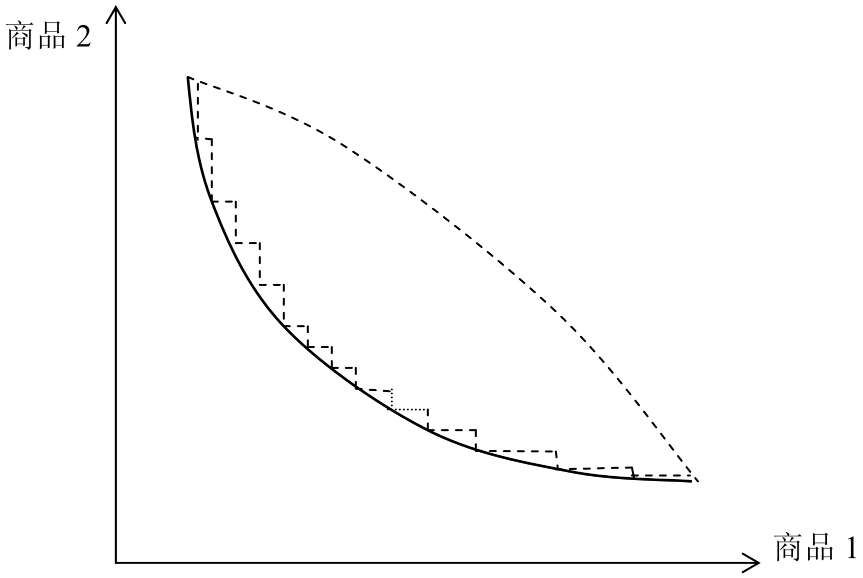


图 3-2　具有平滑边界的弱偏好集合

（三）偏好集合可以是一个开集，也可以是一个闭集。这要由偏好的连续性来决定。在强偏好条件下，偏好的连续性决定偏好集是一个开集。在开集的条件下，总有一些点无限接近无差异集但不包括在弱偏好集合内。而在弱偏好条件下，偏好的连续性决定偏好集是一个闭集。在这一集合中的所有点都包括在弱偏好集合内。因此，我们一般用弱偏好集合及其边界来定义偏好的性质。

（四）在弱偏好集合为闭集的条件下，偏好的局部非饱和性保证无差异集合是一条曲线而不是一个曲面。这可以保证最有选择的唯一性。如图 3-3 所示。

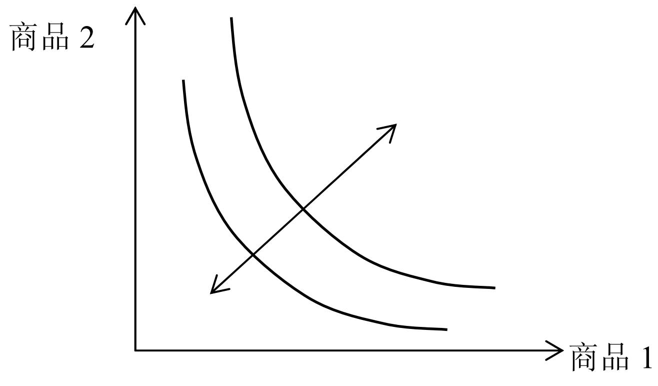


图 3-4　局部非饱和性与无差异集合

（五）取任意两个无差异的消费束，求其加权平均数。如果消费者认为加权平均消费束闭任意一个消费束更受偏好，那么我们就说这个消费者具有凸性偏好，其弱偏

好集一定凸向原点。如图 3-5 所示。

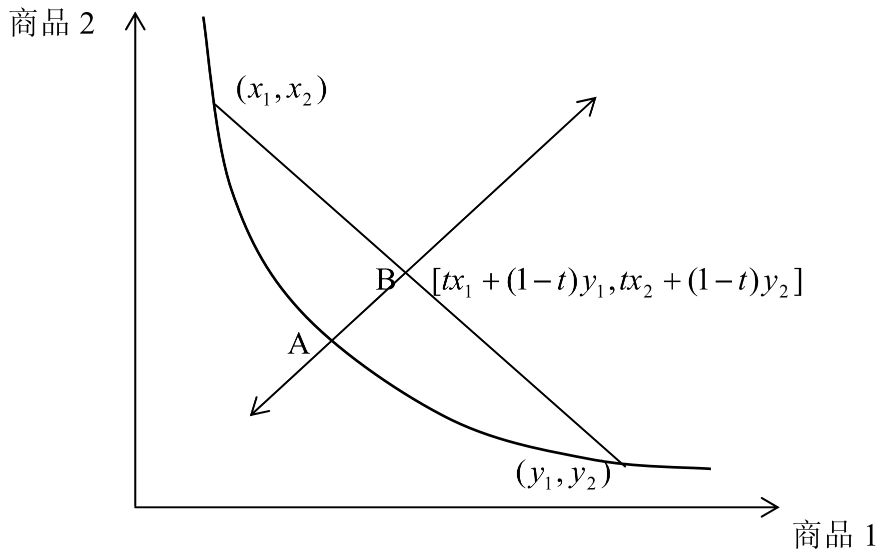


图 3-5　凸性与弱偏好集合

根据单调性和传递性，(x_1, x_2) 与 A 无差异，而 B 是 A 的弱偏好，所以 B 是 (x_1, x_2) 的弱偏好，即消费者认为平均消费比极端消费好。

如果消费者认为任意一个极端消费束比加权平均消费束更受偏好，那么就说这个消费者具有凹性偏好，其弱偏好集凹向原点。如图 3-6 所示。

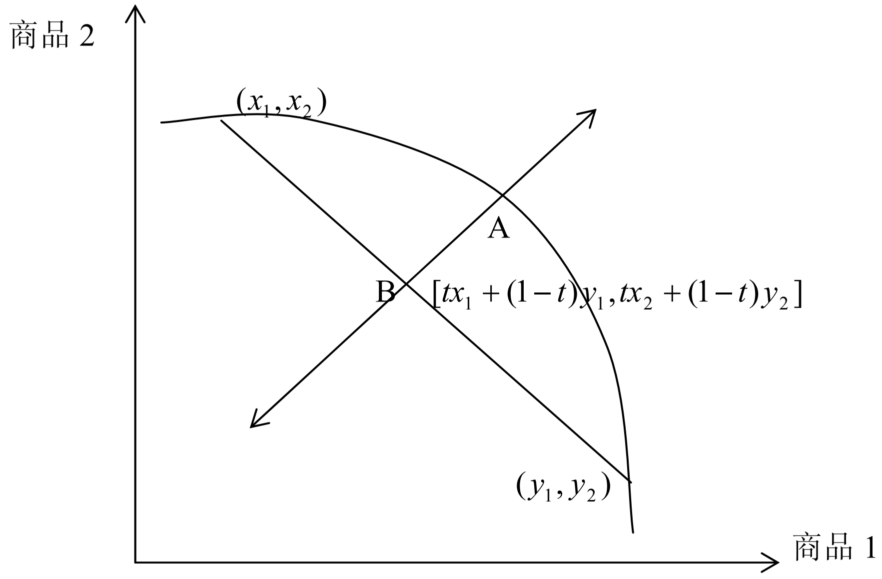


图 3-5　凹性与弱偏好集合

根据单调性和传递性，(x_1, x_2) 与 A 无差异，而 A 是 B 的弱偏好，所以 (x_1, x_2) 是 B 的弱偏好，即消费者认为极端消费比平均消费好。

如果消费者认为在一定的范围内，平均消费束与任意一个消费束是没有差异的，

但在更大的范围内认为是有差异的，那么就说这个消费者具有拟凸或者拟凹性。拟凸性就是说消费者认为在更大的范围内平均消费比极端消费更受偏好，而
拟凹性则正好相反。拟凸和拟凹的弱偏好集合如图 3-6 所示。（略）

六、不同类型的偏好和无差异曲线

虽然面对相同的商品，不同的消费者会表现出不同的偏好，但对经济分析来说更为重要的是考察绝大多数消费者对不同种类商品所表现出来的共同偏好特征。对消费者全体或者代表性消费者来说，对于六种不同的商品表现出不同类型的偏好，因此具有不同形状的无差异曲线。在此重点讨论消费者对可替代品、完全替代品和完全互补品的偏好。

（一）完全替代品的偏好和无差异曲线

完全替代品的偏好又称为线性偏好。消费者愿意按照固定的比率用一种商品来替代另一种商品。完全替代的一种极端情况是按照 1：1 的比率在两种商品之间进行替代。

描述完全替代品偏好的无差异曲线是一条斜率等于 1 的向右下方倾斜的直线。如图 3-7 所示。（略）

（二）完全互补品的偏好和无差异曲线

完全互补品的偏好又称为列昂惕夫偏好。消费者愿意按照一个固定的比率共同消费两种商品。完全互补的一种极端情况是按照 1：1 的比率同时消费两种商品。

描述完全互补品的无差异曲线呈“L”形。从原点过无差异曲线的交点做射线，其斜率决定互补比率。无差异曲线上的其它点都存在自由处置品。如图 3-8 所示。（略）

（三）性状良好的偏好和无差异曲线

性状良好的偏好又称为科布-道格拉斯偏好或者凸性偏好，它是消费者对绝大多数正常品所具有的偏好。消费者愿意用一种商品来替代另一种商品，但是随着一种商品消费量的增加消费者愿意替代的另一种商品的数量不断减少。经济学用边际替代率及其递减来描述这种现象。

边际替代率表示消费者在一定的条件下主观上愿意用一种商品去替代另一种商品的比率。如图 3-9 所示，消费者愿意用增加对商品 1 的消费（Δx_1）来替代一部分对商品 2 的消费（$-\Delta x_2$），其替代比率可以表示为：

$$MRS = -\Delta x_1 / \Delta x_2$$

边际替代率为负表明消费者要增加一种商品的消费必须减少另一种商品的消费，因此两种商品消费数量的变化方向是相反的。

从几何图形上可以看出，边际替代率是不断递减的，这可以说是凸性偏好的一个基本特征，也可以说是绝大多数消费者在对绝大多数正常商品的消费中所表现出来的一个基本规律。因此又叫做边际替代率递减规律。

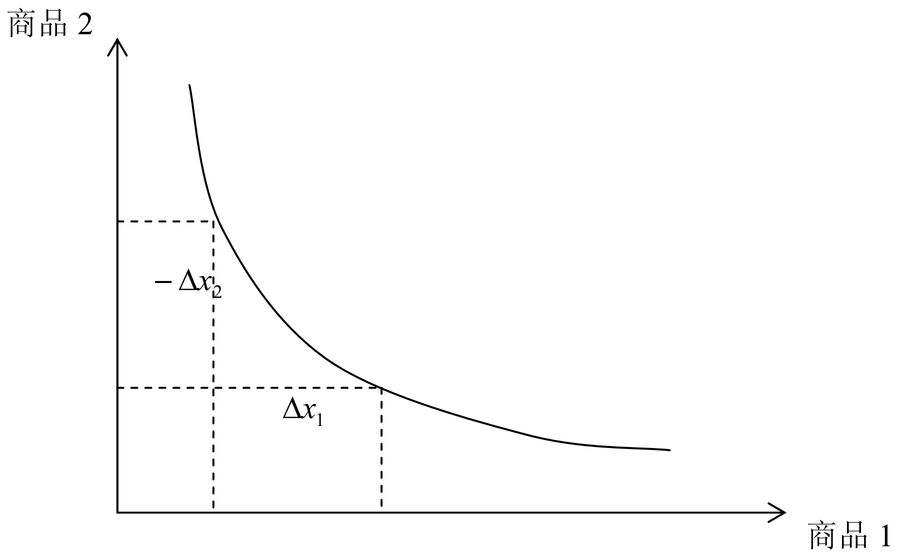


图 3-9　边际替代率

Chapter Four: Utility and Utility Function

一、消费者偏好的数学描述

消费者的偏好有两种描述方法，一种是无差异曲线（几何方法），另一种是效用函数（数学方法）。在现代经济学中，效用和效用函数仅仅被看作是描述偏好的一种数学方法。

如果消费者偏好某一消费束，那么一定是这种消费束可以使其获得较大程度的满足，或有较高的效用。因此，对于任意两个消费束(x_1, x_2)和(y_1, y_2)

$$(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)\text{，当且仅当 } u(x_1,x_2)>u(y_1,y_2)\text{。}$$

其中$u(x_1,x_2)$和$u(y_1,y_2)$分别为两个消费束的效用函数。因此，可以用效用函数对消费者的偏好进行排序。

二、效用函数的单调变换

效用函数就是按照一定的偏好特征给消费束赋值，使之保持一定的次序。在次序不变的情况下，可以有多种赋值方法。单调变换就是在保持效用次序不变的条件下将一组数字变换成另一组数字的方法。

设u为效用函数，$f(u)$是其单调变换。$f(u)$可取u的所有初等变换方式，比如$f(u) = 3u$, $f(u) = u+17$, $f(u) = u^3$等。对效用函数值的理解应当注意：

（1）效用函数值是对偏好次序的一种数量说明。函数值越大，表明偏好的次序越排在前面。例如：$u = x_1x_2$，当消费束$X = (1,1)$时，u_1=1；当消费束X= (1,2)时，u_2 = 2，由于$u_1 < u_2$。显然消费者将消费束x = (1,2)排在前面。

（2）一个效用函数的单调变换还是一个效用函数，其代表的偏好与原函数代表的偏好相同，也就是说消费者对商品束的排序不发生变化。单调变换是保持偏好不变的情况下，采用不同的数量单位对偏好次序进行描述。因此，效用函数的性质表示偏好的类型，效用函数值的大小表示偏好的次序。比如，对于效用函数$f(u) = u+17$：当 u =1 时$f(u)$ =18；当 u = 2 时，$f(u)$ =19。在原有的效用函数的基础上加上一个 17 并不改变两个效用函数的大小顺序。

因此，在对偏好的描述中效用函数强调的是效用的次序，不同的效用函数值代表不同的效用水平。在偏好具有单调性的情况下，任何一种合理的偏好都能用效用函数表示。

三、用效用函数推出无差异曲线

设效用函数$u(x_1,x_2)=x_1x_2$，无差异曲线就是对于常数k来说，使得$k=x_1x_2$时的所有(x_1,x_2)的集合。根据$x_1=k/x_2$，当

（1）保持k值不变，可画出与之相对应的无差异曲线。

（2）改变k值，可以画出k = 1，2，… n时的多条无差异曲线。

四、不同偏好的效用函数的几何形状

（一）完全替代偏好的效用函数（线性效用函数）

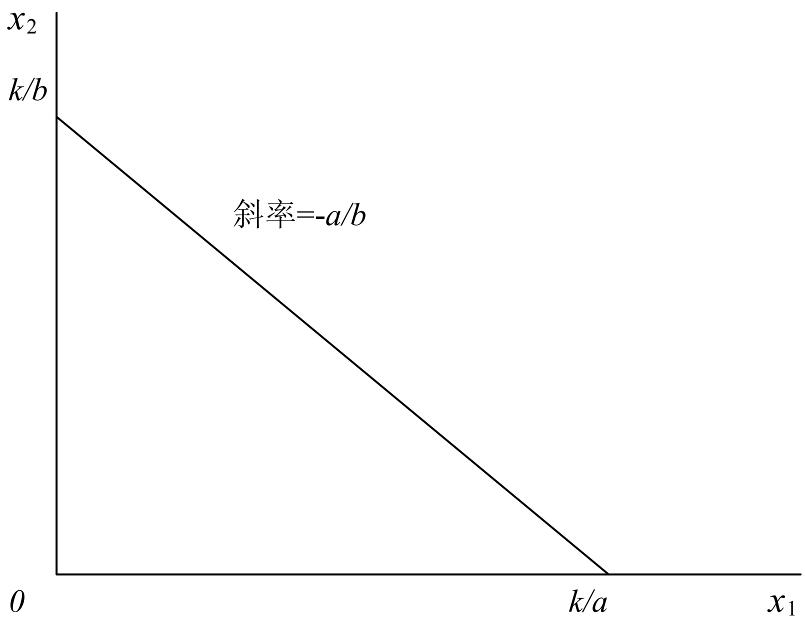
$u(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

设 $k = ax_1 + bx_2$

当$x_1 = 0$, $x_2 = \frac{k}{b}$

当$x_2 = 0$, $x_1 = \frac{k}{a}$

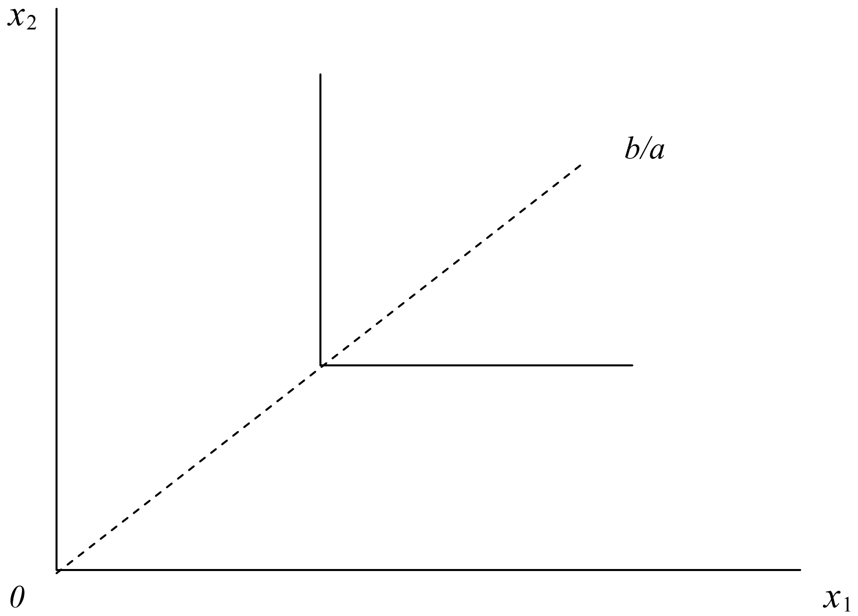
由此可以画出无差异曲线。其斜率为-*a*/*b*，表示两种商品之间的替代比率为一个常数。



（二）完全互补偏好的效用函数（列昂惕夫效用函数）

$u(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$

b/a 表示互补效用函数中两种商品的互补比例。



（三）拟线性偏好效用函数

$u(x_1, x_2) = v(x_1) + x_2$

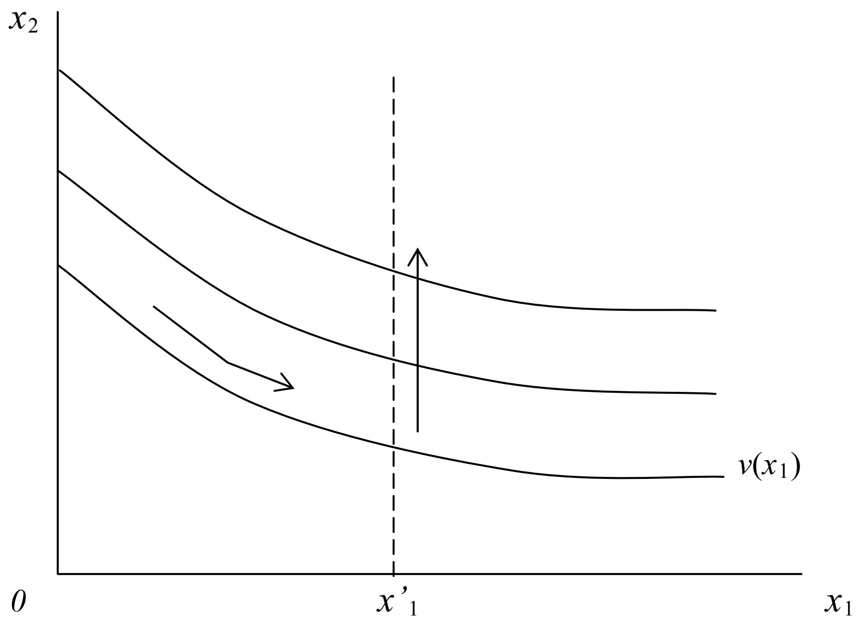
比如 $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + x_2$，$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + x_2$ 都是拟线性效用函数。

从数学性质上看，拟线性效用函数对x_2来说是线性的，但对x_1来说是非线性的。也就是说x_2的变化会引起u（x_1，x_2）的线性变化，因为当x_2变化时，x_1是不变的，所以$v(x_1)$是一个常量。而当x_2不变，x_1变化时，效用函数u（x_1，x_2）的变化取决于函数$v(x_1)$，因为$v(x_1)$是非线性的（在这里指凸性无差异曲线)，因此u（x_1，x_2）的变化也是非线性的。可分别对u（x_1，x_2）求偏导加以证明：

$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = v'(x_1)$, 为一函数，故对$x_1$来说是非线性的；

$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = (x_2)' = 1$，为一常数，所以对$x_2$来说是线性的。

从几何意义上看，拟线性效用函数反映一条无差异曲线$v(x_1)$的垂直移动。其移动距离反映着效用水平k的变化程度，取决于所消费的x_1和x_2的数量。当x_1给定时，x_2的变化使曲线平行移动。当k给定时，x_1的变化表现为曲线上点的移动，增加x_1的消费将非线性地减少x_2的消费。



从经济学含义上看，它反映这样一种经济现象，即消费者在全部收入中将固定的部分用于x_1的消费（比如图中的x'_1），而将剩余的收入都用于x_2的消费。当收入增加

时，消费者并不增加x_1的消费，而将增加的收入全部用于x_2的消费，这样就使效用水平与收入增加同比例的增加。

（四）柯布—道格拉斯偏好的效用函数（柯布—道格拉斯效用函数）

$u(x,x) = x_1^c x_2^d \qquad c > 0, d > 0$

它是性态良好的无差异曲线的标准范例，也是产生形态良好的偏好的最简单的代数表达式。其特征在于总可以通过单调变换使其指数和等于 1，即使之具有一次齐次函数的特点。一次齐次效用函数是说，当你按照一定比例增加x_1和x_2商品的消费时，效用水平也按照同样的比例提高。比如，x_1，x_2 的消费数量增加一倍，效用水平也增加一倍，即“规模效用”不变。

对$u(x_1,x_2) = x_1^c x_2^d$采取升$\dfrac{1}{c+d}$次幂这样一种单调变换形式，有

$$u(x_1,x_2) = x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}$$

定义 $a = \dfrac{c}{c+d}$，就可以把有效函数写成一次齐次形式，即

$$u(x_1,x_2) = x_1^a x_1^{1-a} \text{。}$$

五、边际效用和边际替代率

对于效用函数$u = u(x_1,x_2)$：

（1）边际效用：$\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} = MU_1$，$\dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = MU_2$，表示增加某种商品的消费所带来的效用增量；

（2）边际替代率：$\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} / \dfrac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -\dfrac{MU_1}{MU_2}$

它表示是消费者在效用水平不变条件下所愿意接受的一种交换比率。其几何描述是无差异曲线的斜率，数学描述等于负的 MU 之比的倒数。对效用函数的单调变换不改变效用函数的性质，所以也不会改变边际替代率。

边际替代率的数学推导：

对$u(x_1,x_2)$求全微分并令其等于零（表明效用水平不变），有

$$\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0,$$

移项后可以得到：

$$\frac{dx_1}{dx_2}\left(\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}/\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}\right)=-\frac{MU_1}{MU_2}$$

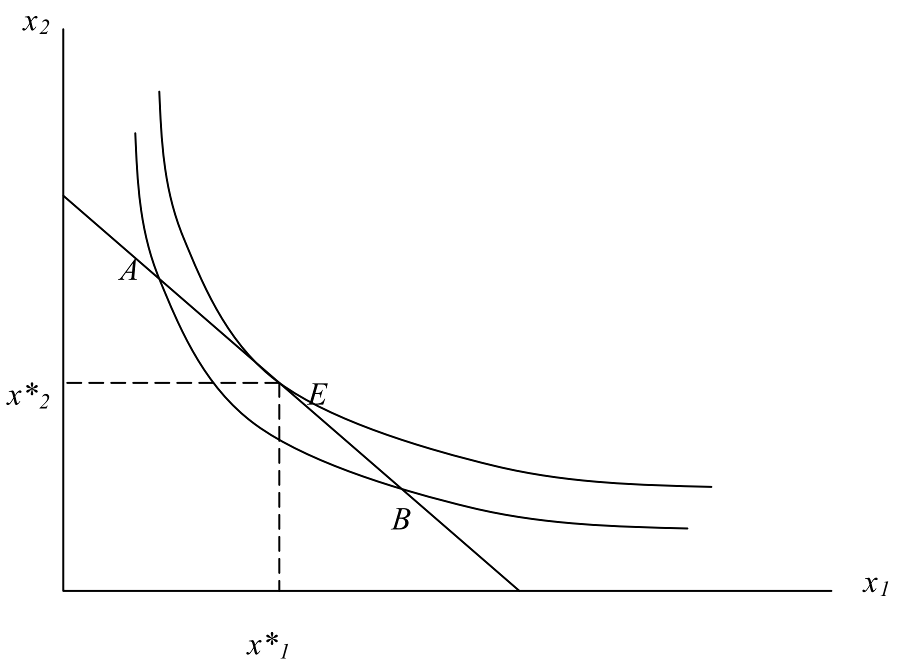
Chapter five: Choice

在分别对消费者偏好和预算约束进行考察之后，本章将二者结合在一起，考察消费者最优选择及其均衡条件。

一、C-D 偏好条件下的消费者均衡及其均衡条件

消费者均衡是指消费者在将全部收入都用于消费的情况下，可以消费的能给其带来最高效用水平的消费束。根据消费者均衡可以求出在一定的预算约束的条件下消费者的最优消费选择。这是消费者均衡的经济学含义。

从几何上看，在二维产品空间和 C-D 偏好（或者性态良好的偏好）的条件下，无差异曲线与预算线的切点就是消费者的均衡点。如图 5-1 所示，图中的 E 点是均衡点。A，B 都不是均衡点，因为在这两点虽然花费了消费者的全部收入，但是并没有达到最高的效用水平。从几何上看，消费者的均衡的条件是边际替代率等于预算线的斜率，即 $\frac{MU_1}{MU_2}=\frac{P_1}{p_2}$。这表明消费者消费两种商品的边际效用之比必须等于商品的价格之比。



从数学上看，确定消费者均衡就是求解下述约束条件极值：

$$
\begin{aligned}
&Max u = u(x_1, x_2) \\
&s.t. p_1 x_1 + p_2 x_2 = m
\end{aligned}
$$

其中效用函数$u = u(x_1, x_2)$为 C-D 效用函数，表明消费者具有性态良好的偏好。求解这一条件极值可以得到(x_1^*, x_2^*)，即为消费者的最优选择。

设反映消费者偏好的效用函数为$u(x_1, x_2) = x_1^C x_2^d$，为了便于计算，可以对其进行初等变换转换为对数的形式，即

$$\ln u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

这时消费者的最优选择的问题可表示为：

$$
\begin{aligned}
&Max u(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2 \\
&s.t. p_1 x_1 + p_2 x_2 = m
\end{aligned}
$$

用数学方法求解这一问题一般有三种方法，即均衡条件求解法、非约束最大化求解法和约束条件极值求解法。

（一） 均衡条件求解法：

根据消费者均衡的条件，边际替代率应当等于商品的价格比率。因此可以先求出边际替代率并令其等于商品的相对价格，于是有：

$$MRS = -\frac{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1, x_2)/\partial x_2} = -\frac{cx_2}{dx_1}，\ 且\ \frac{cx_2}{dx_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

根据预算约束有$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$代入上式，求解出 $x_1^* = \frac{c}{c+d} \frac{m}{p_1}$。代入预算线可以求解出 $x_2^* = \frac{d}{c+d} \frac{m}{p_2}$。$(x_1^*, x_2^*)$即为消费者的最优选择。

（二）非约束最大化求解法：

根据预算约束求出x_2并将其带入目标函数，可以得到一个新的包含约束条件的目标效用函数，即

$$\max_{x_1,x_2} u(x_1,x_2)=c\ln x_1+d\ln(\frac{m}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1)$$

求这一效用函数的一阶导数并令其为零得：

$$\frac{c}{x_1}-d\frac{p_2}{m-p_1x_1}\frac{p_1}{p_2}=0$$

求解可得：$x_1^*=\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1}$， $x_2^*=\frac{d}{c+d}\frac{m}{p_2}$。

（三）约束条件极值求解法

根据目标函数和约束条件建立拉格朗日函数，即

$$L=c\ln x_1+d\ln x_2-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m)$$

分别求关于x_1， x_2和λ的一阶导数条件，得：

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{c}{x_1}-\lambda p_1=0\text{，由此可得 } c=\lambda p_1x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{d}{x_2}-\lambda p_2=0\text{，由此可得} d=\lambda p_2x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=p_1x_1+p_2x_2-m=0$$

因此，$c+d=\lambda(p_1x_1+p_2x_2)=\lambda m$，故$\lambda=\frac{c+d}{m}$。代入上述一阶导数条件，可以求出消费者的最优选择$(x_1^*,x_2^*)$。所的结果与前两种方法的完全相同。

二、几种例外情况

（一）有折点的无差异曲线（列昂惕夫偏好）

无差异曲线与预算线相交，但不穿过。可以有多条预算线与折点相交。这表明对于互补品来说，消费者的最优选择在不同的价格和收入条件下可能是相同的。

（二）边界最优（线性偏好和凸性偏好）

相交于横轴或者纵轴但并不穿过。这表明在给定商品相对价格的条件下，消费者只选择一种商品进行消费。当边际替代率大于预算线的斜率时，最优选择位于横

轴；反之，最优选择处于纵轴。如果边际替代率的斜率等于预算线的斜率，将不存在唯一的最优选择。

（三）多个最优解

当消费者的偏毫不确定时，无差异曲线为一条曲线并可能与预算线有多个切点。在这种情况下，上切点是最优选择，而下切点是非最优选择。

由此可以看出，无差异曲线与预算线相切只是消费者均衡的必要条件，而不是充分条件。充分条件是偏好符合凸性假设。

三、需求函数

需求函数就是在一定价格和收入条件下，消费者愿意并且能够购买的商品数量，可以表示为 $x_1(p_1,p_2,m)$ 和 $x_2(p_1,p_2,m)$。求解消费者均衡实际上就是求解需求函数。上面我们已经介绍 C-D 偏好条件下需求函数的求解方法。下面讨论其它几种偏好条件下需求函数的求解方法。

（一）完全替代品的需求函数

如果两种商品是完全替代的，那么消费者将会购买较便宜的一种；如果两种商品有相同的价格，消费者不会在意购买哪一种。因此完全替代品的需求函数为：

$$x_1=\begin{cases} m/p_1 & \text{当} p_1 < p_2 \text{时} \\ \text{介于 } 0 \text{ 和 } m/p_1 \text{ 之间} & \text{当} p_1 = p_2 \text{时} \\ 0 & \text{当} p_1 > p_2 \text{时} \end{cases}$$

当 $x_1 = m/p_1$ 时，随着价格的提高，在收入一定的条件下需求就会减少。因此完全替代品的需求曲线是向右下方倾斜的，满足需求规律。

（二）完全互补品的需求函数

在互补的比率为 1 时，两种商品的消费数量相同，故两种商品的需求相同，即 $x_1 = x_2 = \dfrac{m}{p_1 + p_2}$。显然，当一种商品的价格给定时，另一种商品的需求随着其价格的提高而下降。因此完全互补品的需求也符合需求定理。

（三）中性品和劣等品的需求函数

消费者将把钱花费在他所喜欢的商品上，而不消费任何中性品和劣等品。因此，如果x_1是喜爱的商品，x_2是中性和劣等品，则$x_1 = m/p_1$，而$x_2 = 0$。

（四）离散商品的需求函数

设x_1是离散商品，消费者的需求表现为：当p_1非常高时，需求$x_1 = 0$，消费者严格偏好零消费；当p_1足够低时，需求$x_1 = 1$，消费者严格偏好消费一件商品。其需求函数可以表示为：

$$（1，\frac{m-p_1}{p_2}）$$

$$即\ x_1 = 1, x_2 = \frac{m-p_1}{p_2} \quad 或者 \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{m}{p_2}。$$

离散商品的需求函数还可以用保留价格来描述。对于离散商品x_1来说，假如当$p_1 = r_1$时，消费者认为消费和不消费无差异，这时的价格r_1就叫做保留价格，即消费者愿意为获得一件商品而支付的最高价格。

（1）离散商品的需求行为可以用一系列保留价格来描述。比如：当价格为r_1时，$x_1 = 1$；当价格为r_2时，$x_1 = 2$；…。

（2）这些保留价格可用效用函数来描述，比如：当r_1时，消费与不消费无差异，故$u(0,m) = u(1,m-r_1)$，据此可求出r_1；当r_2时，消费 1 单位商品与消费 2 单位商品无差异，故有$u(1,m-r_2) = u(2,m-2r_2)$，据此可求出r_2。在r_1时可能消费 1 个单位，在r_2时可能消费 2 个单位。

（3）如果是拟线性效用函数，描述保留价格的公式就会变得更加简单一些。如果$u(x_1,x_2) = v(x_1) + x_2$，且$v(0) = 0$，那么当$r_1$时，消费与不消费无差异，故有

$$v(0) + m = m = v(1) + m - r_1$$
$$r_1 = v(1)$$

当r_2时，消费 1 单位商品与消费 2 单位商品无差异，故有

$$v(1)+m-r_2=v(2)+m-2r_2$$
$$r_2=v(2)-v(1)$$

依次类推，有 $r_3=v(3)-v(2)$

$$r_n=v(n)-v(n-1)$$

因此，保留价格衡量的是增加一单位商品消费的效用增量（边际效用）。在这里 r 是价格，而且 $r_1>r_2>r_3$。随着保留价格的下将消费者愿意消费的商品数量不断增加，故上述公式就是反需求公式。

（五）凹性偏好的需求函数

最优选择永远是边界解，即 $x_1=\frac{m}{p_1}$ 或者 $x_2=\frac{m}{p_2}$。由于消费者偏好极端消费，因此在给定价格的条件下其会选择价格相对低的那种商品消费。

四、C-D 效用函数的一个性质

在 $U(x_1,x_2)=x_1^C x_2^d$ 条件下，消费者在每种商品上花费的货币的数量总是占他收入的一个固定份额，这个份额的大小由 C-D 效用函数中的指数来决定。

证明：消费者在 x_1 上的花费为 p_1x_1，占收入比重为：

$$\frac{p_1x_1}{m}=\frac{p_1}{m}(\frac{c}{c+d}\frac{m}{p_1})=\frac{c}{c+d}$$

同理得证，花费在 x_2 上的比重为 $\frac{d}{c+d}$。

Chapter Six: Demand

本章主要是利用消费者的最优选择进行比较静态分析，并推导出恩格尔曲线和需求曲线。消费者的需求刻画的是在消费者面临一定的价格和收入条件下的的最优消费数量，因此需求函数的一般形式被表述为商品价格和收入的函数，即：

$$x_1=x_1(p_1,p_2,m)$$
$$x_2=x_2(p_1,p_2,m)$$

以此为基础，可以分别考察收入和价格变化对消费者均衡的影响。

一、收入变化与提供曲线和恩格尔曲线

（一）正常品和劣等品

当价格不变时，如果消费者对一种商品的需求随着收入的增减同方向变化，这种商品就是正常品，反之就是劣等品。或者说：

当 $\frac{\Delta x}{\Delta m} > 0$ 时，正常品；当 $\frac{\Delta x}{\Delta m} < 0$ 时，劣等品。

（二）收入提供曲线和恩格尔曲线

收入提供曲线是随着收入 m 变化均衡点的变动轨迹。提供曲线上的任一点表示在不同的收入水平上所需求的商品束。收入提供曲线也叫做收入扩展线。如果两种商品都是正常品，其斜率一定为正。

恩格尔曲线表示的是在所有商品的价格不变时，一种商品的需求如何随着收入水平的变动而变动。用横轴表示 x_1，纵轴表示 m，恩格尔曲线就是 x_1 的最优选择轨迹。

不同的商品具有不同的恩格尔曲线，比如食品和住房。当两条曲线相交时，可以分析在不同的收入水平上消费者对不同商品的需求差异。统计分析表明在比较低的收入水平上，消费者比较多的消费食品，而在比较高的收入水平上，消费者对住房的消费显著增加。

（三）不同偏好条件下的收入提供曲线和恩格尔曲线

1．完全替代

当预算线的斜率小于无差异曲线时，收入提供曲线与横轴重合；如果预算线斜率大于无差异曲线的斜率，收入提供曲线与纵轴重合。

在第一种情况下，恩格尔曲线的函数关系是：$x_1 = m / p_1$；恩格尔曲线的斜率是：$m / x_1 = p_1$。

2．完全互补

当互补比率为 1：1 时，收入提供曲线为经过原点的对角线。

由于在完全互补的情况下两种商品必须同时消费，因此对一种商品的需求取决于两种商品的价格。所以，恩格尔函数可以表示为$x_1 = m/(p_1 + p_2)$；恩格尔曲线的斜率是：$m/x_1 = p_1 + p_2$。

3．柯布-道格拉斯偏好

收入提供曲线为经过原点的一条射线。由于消费者将固定比率的收入用于两种商品的消费，且两种商品的恩格尔函数为：$x_1 = am/p_1, x_2 = (1-a)m/p_2$，因此，恩格尔曲线的斜率是：$m/x_1 = p_1/a$。

4．相似偏好

对于任意两个消费束$(x_1,x_2),(y_1,y_2)$，如果当$(x_1,x_2) \succ (y_1,y_2)$时一定有$(tx_1,tx_2) > (ty_1,ty_2)$，那么这种性质的偏好就称作相似偏好。以上三种偏好都是相似偏好。

对于相似偏好来说，恩格尔曲线的斜率越小，表示需求增长比收入快，那么这种商品就是奢侈品；反之就是必需品。奢侈品和必须品都属于正常品。（从收入了弹性来看，当ε_m>1 时是奢侈品，ε_m< 1 必需品。）

5．拟线性偏好

对于效用函数$u(x_1,x_2) = v(x_1) + x_2$来说，当$m$增加时，对$x_1$的消费数量不变，增加的收入全部用于$x_2$。因此对于$x_1$来说，收入提供曲线为一条垂线，商品$x_1$有“零收入效应”。显然，其恩格尔曲线也是一条垂线。

对于x_2来说，其收入提供曲线是一条水平线，而恩格尔曲线是一条截距和斜率都为正的射线。其截距为：$m - p_1x_1$，斜率为：$(m - p_1x_1)/x_2$。

二、价格变化与需求曲线

（一）普通商品与吉芬商品

对于一种商品来说，如果当价格下降时需求增加，那么这种商品就是普通商品；如果当价格下降时需求减少，这种商品就是吉芬商品。

（二）价格提供曲线与需求曲线

价格提供曲线是当价格变动时消费者最优消费点的均衡轨迹。价格提供曲线的斜率可以为正，也可以为负，取决于需求的价格弹性。

由价格提供曲线可以推导出需求曲线，其一定满足以下性质：①对价格 p 来说是非正的；②对收入 m 来说是非负的；③对 p 和 m 来说是单调和零次齐次的。

（二）收入效应和替代效应

对绝大多数商品来说，需求与价格反方向变化。价格变化对需求的影响通过两种效应，即收入效应和替代效应。价格变化会改变人们的实际收入水平，从而会增加对商品的消费，这种效应就是收入效应；如果不考虑实际收入的变化，价格变化会促使消费者调整消费结构，用比较便宜的商品来提到较为昂贵的商品，这就是替代效应。这两种效应的总和决定需求的变化。替代效应总是为负的，也就是说价格下降总会促使消费者多消费商品。然而收入效应则可以为正或者为负。因此当收入效应为负（即收入增加而需求反而减少）并且绝对值大于替代效应时，即会出现吉芬现象。

在下一章，我们将专门讨论这个问题。

Chapter Seven: 斯卢茨基方程

这一章主要用数学方法对收入效应和替代效应进行讨论。由于在经济学中对替代效应有两种描述方法，因此我们也将对有关的概念作简要的介绍。

一、直接效用函数、间接效用函数和支出函数

（一）直接效用函数

就是由商品的消费量所决定的效用函数。其一般描述为：$u = u(x)$，其中 x 是向

量。在序数效用论中，直接效用函数本身没有经济意义，但是在一定效用值下的消费束 x^*是有意义的。因此，我们只关心直接效用函数值达到最大时的需求。

（二）间接效用函数

根据约束条件下的极值问题，求出最优选择之后，可以将 x^*带回间接效用函数中去，从而得到一个新的效用函数，这个效用函数是价格和收入的函数，我们将这个效用函数称作间接效用函数。一般描述为：$v(p_1, p_2, m)$。间接效用函数是通过求解下述效用最大化问题得到的，即

$$\max u = u(x_1, x_2)$$
$$s.t. p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

由此：（1）求出马歇尔需求函数：$x_i(p_1, p_2, m)$，所有变量都可度量。

（2）将其带回目标函数，可以求出间接效用函数 $v(p_1, p_2, m)$

（三）支出函数

消费者均衡一般是指在一定的预算约束条件下可以给消费者带来最大效用的商品消费数量。实际上，问题也可以反过来提出，即在一定的效用水平上的最小货币支出数量是多少。支出函数衡量的是与一定的效用水平相对应的在消费者均衡条件下的最小货币支出数量。它是与马歇尔需求函数相对应的最小支出函数，是通过求解下述支出最小化问题得到的，即

$$\min p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$s.t. \bar{u} = u(x_1, x_2)$$

由此：（1）求出希克斯需求函数：$x_i(p_1, p_2, \bar{u})$，其中包含不可度量因素。

（2）将其带回目标函数，可以求出支出函数 $e(p_1, p_2, u(x))$

二、用货币度量的直接和间接效用函数

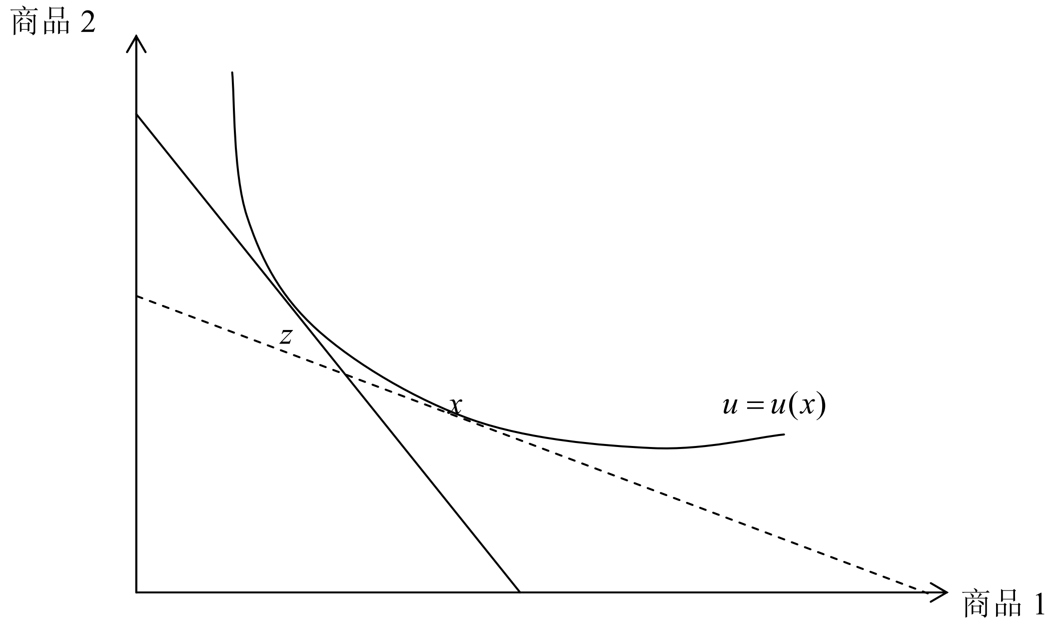
（一）用货币测度的直接效用函数

假定在价格向量 q 条件下与消费束向量 x 相对应存在一个效用水平 $u = u(x)$。现要考察当价格向量为 p 时，要达到 x 所在效用水平需要多少货币数量。这就是货币测度效用函数要研究的问题。这实际上是求达到效用水平 $u(x)$并在价格 p 条件下的最

小支出。用数学形式描述这一问题就是：

$$\min pz$$
$$s.t. u(z) \geq u(x)$$

其中消费束向量 z 是 $u(x)$上与 p 相对应的点，如下图所示：



求解上述问题可得 z，代入目标函数可得到最小支出 $pz = e(p, u(x))$。它表示的就是在价格为 p 时，为达到 $u(x)$而需要的最小货币数量。

由此，可以定义货币测度直接效用函数 $m(p,x)$，其与上述支出函数具有相同的含义，即 $m(p,x) = e(p, u(x))$。货币侧度的效用函数与普通支出函数不同的地方是反映价格变化条件下的最小货币支出。上述公式为衡等式表明定义对任意价格都成立。$m(p,x)$ 又称为“最低收入函数”或“直接补偿函数”。

货币侧度的效用函数具有以下三个特点：

（1） 当 x 不变时，$m(p,x)$就是支出函数，其对于 p 具有单调、齐次性。

（2） 当 p 不变时，其实际上是一个效用函数。因为当价格 p 不变时，较多的 m 就意味着较多的 x，就会产生较多的效用水平。这时就会有一个处于较高位置的无差异曲线与最小支出曲线相切。

（3）货币侧度得效用函数 $m(p,x)$是直接效用函数 $u(x)$的单调变换。因为 $u(x)$是用消费 x 时的效用值来反映效用水平；而 $m(p,x)$是用货币数量反映效用水平，使用的度

量单位不一样。

（二）货币测度的间接效用函数

货币测度的效用函数，也可以用间接效用函数来定义，即

$$\begin{gathered}\min pz \\ s.t. v(p,m') \geq v(q,m)\end{gathered}$$

其中$m/q=x$, $m^{'}/p=z$, 所以间接效用函数与直接效用函数相比反映相同的效用水平，但包含的价格和收入都是可度量因素。

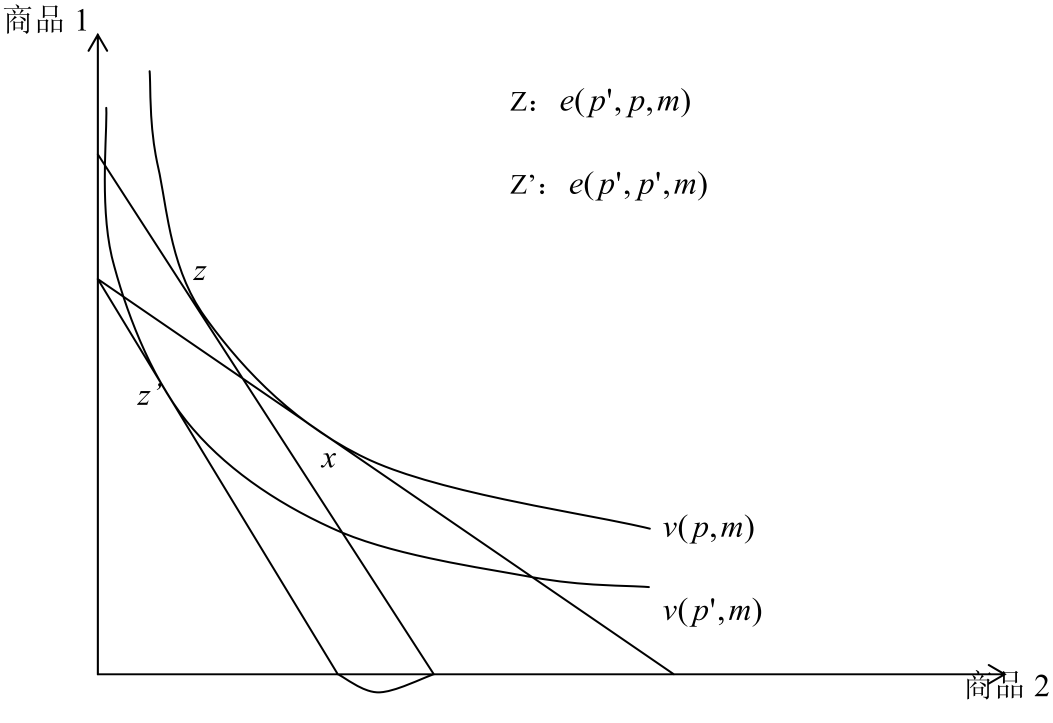
求解上述极值问题，可得支出函数$e(p,v(q,m))$，由此可定义货币测度间接效用函数，即

$$u(p;q,m)= e(p,v(q,m))$$

$u(p;q,m)$的含义是：在价格 p 的条件下，消费者需要多少货币才能够和他在价格 q 和收入 m 所能达到的效用水平相同。货币侧度的间接效用函数与前面的直接效用函数一样具有三个基本特性。

（三）用货币测度的效用函数来度量效用的变化

由于货币侧度的效用函数恒等于支出函数，因此可以用支出函数的差异来描述效用的变化。比如补偿变化$cv=e(p^{'};p,m)-e(p^{'};p^{'},m)$，如图所示。在原价格$p$条件下，预算先与$v(p,m)$相切于x点；在价格变化为$p'$之后，预算先与$v(p,m)$相切于z点；在价格和收入都作调整之后两条曲线相交于z’点。



cv（用商品 1 来衡量）

（四）计算货币度量效用函数的步骤

1、据支出最小化求出支出函数；

2、通过替代或初等变换求出直接或间接效用函数；

3、再将直接或间接效用函数代入支出函数，从而求出货币测度的效用的效用函数。

举例：求解当效用函数为柯布-道格拉斯效用函数 $u = Ax_1^a x_2^b$，预算约束为 $p_1 x + p_2 x_2 = m$ 时的货币侧度的效用函数。

由于货币侧度效用函数就是最小支出函数，因此需要求解下述最小化问题：

$$\min p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$
$$s.t. u = Ax_1^a x_2^{1-a}$$

首先，根据一阶导数条件可求出最小支出函数：

$$e(p_1, p_2, u) = kp_1^a p_2^{1-a} u$$

其次，用 m 代替 $e(p_1, p_2, u)$，$v(p_1, p_2, u)$ 代替 u，可得

$$v(p_1, p_2, u) = m / kp_1^a p_2^{1-a}$$

最后，移项之后可推导出货币度量的效用：

直接函数：$m(p,x) = kp_1^a p_2^{1-a} u(x_1, x_2)$

$$= kp_1^a p_2^{1-a}\ x_1^a x_2^{1-a}$$

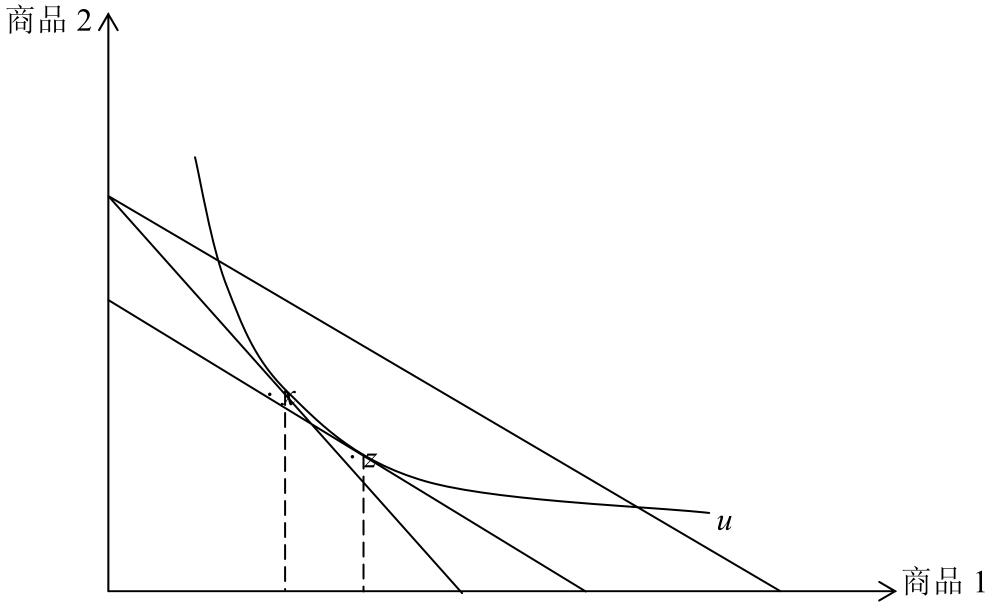
间接函数：$u(p;q,m) = kp_1^a p_2^{1-a} v(q_1, q_2, u)$

$$= p_1^a p_2^{1-a} q_1^{-a} q_2^{a-1} m$$

三、希克斯替代效应和斯勒斯基替代效应

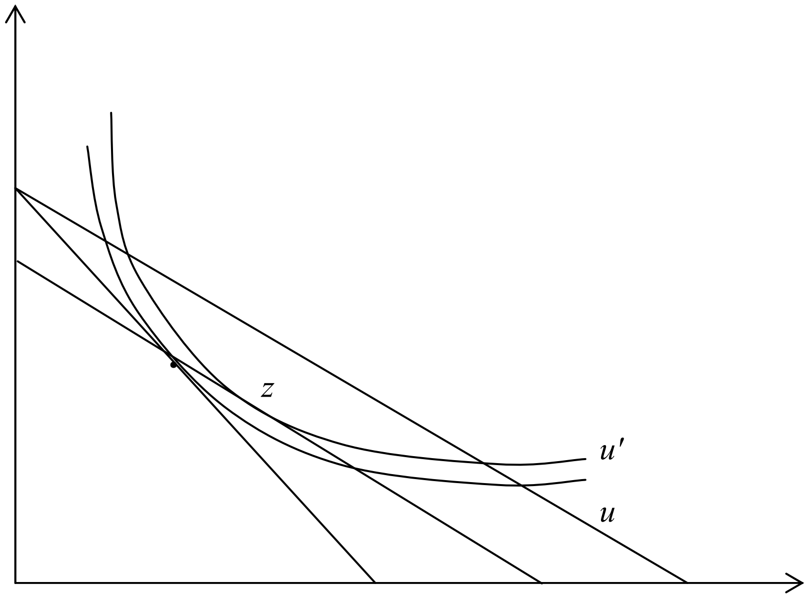
（一）希克斯替代效应

维持原有效用水平不变时的替代效应。由于希克斯替代效应取决于一定的效用水平，因此其包括不可度量因素。



（二）勒茨基替代效应

维持原有的消费束支付的起时的替代效应。在斯勒斯基替代效应条件下，消费者的效用水平是可以变化的。斯勒斯基替代效应是可以度量的。



2．二者之间的相互关系

首先，当价格发生微小变化时，二者是相等的；其次，在保持原有消费束支付得起的条件下，原有效用水平一定能够实现。

四、斯勒茨基方程

（一）斯勒茨基方程要解决的问题

研究斯勒茨基方程主要目的是要解决两个问题：一是将价格变化的总效应分解为两部分，即替代效应和收入效应（见原讲稿）。二是要解决希克斯替代效应（或希克斯需求）的不可度量问题。解决不可不可度量问题也有两种方法：第一种方法是用斯勒斯基替代效应替代希克斯效应；第二种方法是通过马歇尔需求来求希克斯需求，这就是方程要解决的问题。其表明希克斯替代效应（或者希克斯需求）等于马歇尔需求减去收入效应。

（二）斯勒茨基方程的推导——方法一

即根据斯勒斯基需求和希克斯需求的定义，可以直接利用微分方法得出方程的解：

1．根据斯勒斯基需求的定义推导方程

假设原价格为 $(\overline{p_1},\overline{p_2})$ 时的需求为 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，故 $\overline{m}=\overline{p}_1x_1+\overline{p}_2\bar{x}_2$。当新价格为 (p_1,p_2) 时，使得原消费束 $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ 仍然支付得起的需求即为斯勒斯基需求，表示为 $x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)$，这时使得原消费束支付得起的收入为：$m=p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2$。

根据斯勒斯基需求的定义有如下恒等式：

$$x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)\equiv x_1(x_1,x_2,p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2)$$

由于二者的购买力相同，即 $p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2$ 的购买力与 $\overline{p}_1\overline{X}_1+\overline{p}_2\overline{X}_2$ 的购买力相同，所以从购买角度看可以将上式写成：$x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)\equiv x_1(p_1,p_2,\overline{m})$。对其求关于 p_1 的微分可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial p_1}&=\frac{\partial x_1(p_1,p_2,\overline{m})}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1(p_1,p_2,\overline{m})}{\partial m}\cdot\frac{\partial\overline{m}}{\partial p_1}\\&=\frac{\partial x_1(p_1,p_2,\overline{m})}{\partial p_1}+\frac{\partial x_1(p_1,p_2,\overline{m})}{\partial m}\cdot\bar{x}_1\end{aligned}$$

移项后得到：$\dfrac{\partial x_1(p_1,p_2,\overline{m})}{\partial p_1}=\dfrac{\partial x_1^s(p_1,p_2,\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial p_1}-\dfrac{\partial x_1(p_1,p_2,\overline{m})}{\partial m}\cdot\bar{x}_1$

总效应　　替代效应　　收入效应

（马歇尔需求）（斯勒茨基需求）

2．根据希克斯需求定义推导方程：

希克斯需求是指在新价格条件下，维持原有效用水平不变时的需求。由于效用

最大化和支出最小化之间的对偶性，它一定等于在新价格下维持原效用水平不变的最小支出时需求，因此有恒等式：

$$X_1^h(P_1,P_2,\bar{u}) \equiv X_1(P_1,P_2,m)$$

其中，m 是维持原效用水平的最小支出，它可以通过求支出最小化来得到，即 $m = e(P_1,P_2,\bar{u})$。求上式的关于 p_1 的一阶导数得：

$$\frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\cdot\frac{\partial \bar{m}}{\partial p_1}$$
$$= \frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1} + \frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\cdot\bar{x}_1$$

移项后可以得到：

$$\frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial p_1} = \frac{\partial x_1^h(p_1,p_2,\bar{u})}{\partial p_1} - \frac{\partial x_1(p_1,p_2,m)}{\partial m}\cdot\bar{x}_1$$

马歇尔需求　　希克斯需求　　收入效应

（三）斯勒茨基方程的推导——方法二

即利用效用最大化的一阶导数条件来求解斯勒斯基方程。

首先，跟据效用最大化问题

$$\begin{cases}\max\limits_{x_1,x_2} \quad u(x_1,x_2) \\ s.t. \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m\end{cases}$$

设拉格朗日函数 $L = u(x_1,x_2) - \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$，并求其一阶导数条件，得：

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = \frac{\partial u(X_1,X_2)}{\partial X_1} - \lambda P_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

其次，对一阶导数求全微分，即考察在满足一阶导数的前提下，所有变量得变化可能对均衡的影响。

$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial^2 x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} - P_1 d\lambda - \lambda dP_1 = 0$$
$$\frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial^2 x_2} - P_2 d\lambda - \lambda dP_2 = 0$$
$$dm - dp_1x_1 - p_1dx_1 - dp_2x_2 - p_2dx_2 = 0$$

令：$u_{11}=\dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial^2 x_1},u_{22}=\dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial^2 x_2},u_{12}=\dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2},u_{21}=\dfrac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2\partial x_1}$，整理后可以得到：

$$\begin{aligned}
&u_{11}dx_1+u_{12}dx_2-p_1 d\lambda=\lambda dp_1\\
&u_{21}dx_1+u_{22}dx_2-p_2 d\lambda=\lambda dp_2\\
&-p_1dx_1-p_2dx_2 \qquad\quad =-dm+dp_1x_1+dp_2x_2
\end{aligned}$$

方程组中有三个未知数：$dx_1,dx_2,d\lambda$，将等式右边看作常数，这样可以考察价格变化时，x_1,x_2的变化。

再次，利用克莱姆法则求解dx_1和dx_2：设

$$D=\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & -p_1\\ u_{21} & u_{22} & -p_2\\ -p_1 & -p_2 & 0\end{vmatrix}$$

即加边海赛矩阵（或系数矩阵和替代矩阵）。分别将前面等式右边的常数项替代各列系数矩阵中的向量，并用第一列展开，得

$$D_1=\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & p_1u_{12} & -p_1\\ \lambda dp_2 & p_2u_{21} & -p_2\\ -dm+dp_1x_1+dp_2x_2 & -p_2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\lambda D_{11}dp_1+\lambda D_{21}dp_2+D_{31}(-dm+dp_1x_1+dp_2x_2)$$

其中，$D_{11}=\begin{vmatrix} u_{21} & -p_2\\ -p_2 & 0\end{vmatrix}$，$D_{21}=\begin{vmatrix} u_{12} & -p_1\\ -p_2 & 0\end{vmatrix}$，$D_{31}=\begin{vmatrix} u_{12}-p_1\\ u_{21}-p_2\end{vmatrix}$， $D_{31}=\begin{vmatrix} u_{12}-P_1\\ u_{21}-P_2\end{vmatrix}$分别为第 i 行第一列代数余子式。

$$D_2=\begin{vmatrix} u_{11} & \lambda dp_1 & -p_1\\ u_{21} & \lambda dp_2 & -p_2\\ -p_1 & -dm+dp_1x_1+dp_2x_2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\lambda D_{12}dp_1+\lambda D_{22}dp_2+D_{32}(-dm+dp_1x_1+dp_2x_2)$$

其中，$D_{12}=\begin{vmatrix} u_{21} & -p_2\\ -p_1 & 0\end{vmatrix}$，$D_{22}=\begin{vmatrix} u_{11} & -p_1\\ -p_1 & 0\end{vmatrix}$，$D_{32}=\begin{vmatrix} u_{11} & -p_1\\ u_{21} & -p_2\end{vmatrix}$分别为 i 行第二列代数于子式。

根据克莱姆法则：
$$dX_1=\frac{D_1}{D}=\frac{1}{D}(\lambda D_{11}dP_1+\lambda D_{21}dP_2+D_{31}(-dm+dP_1X_1+dP_2X_2))$$
$$dX_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{D}(\lambda D_{21}dP_1+\lambda D_{22}dP_2+D_{32}(-dm+dP_1X_1+dP_2X_2))$$

（1）由于m是给定的，故dm=0。假定P_1变化而P_2不变，有dP_2=0。对$dx_1=\frac{D_1}{D}$两边除以dp_1，得：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda D_{11}}{D}+\frac{D_{31}}{D}x_1$$

（2）假定价格p_1, p_2不变化，而m变化，对$dx_1=\frac{D_1}{D}$两边除以dm得：

$$\frac{\partial x_1}{\partial m}=\frac{D_{31}}{D}$$

其表示的是x_1相对于收入m的变化率，或者说每增加或减少一元钱所带来的需求x_1的变化。带入上式得：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda D_{11}}{D}+\frac{\partial x_1}{\partial m}x_1$$

（3）在希克斯替代效应条件下，效用水平不变，故$du=u_1dx_1+u_2dx_2=0$，即$\frac{u_1}{u_2}=-\frac{dx_2}{dx_1}$。根据消费者均衡条件$\frac{u_1}{u_2}=\frac{p_1}{p_2}$，所以有：$\frac{P_1}{P_2}=-\frac{dX_2}{dX_1}$，即$P_1dX_1+P_2dX_2=0$。又根据二阶导数的最后一个方程，当$P_1dX_1+P_2dX_2=0$时，$-dm+dP_1X_1+dP_2X_2=0$。因此，假定$p_2$不变，$u$为常数时：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=\frac{\lambda D_{11}dp_1+\lambda D_{21}dp_2+D_{31}(-dm+dp_1x_1+dp_2x_2)}{D}$$

由于$\lambda D_{21}dP_2=0, -dm+dP_1X_1+dP_2X_2=0$，故$\frac{\partial X_1}{\partial P_1}=\frac{\lambda D_{11}}{D}$。所以，$\frac{\lambda D_{11}}{D}$就是维持原效用水平不变的替代效应。由此可得：

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1}=(\frac{\partial x_1}{\partial p_1})_{u=常数}-(\frac{\partial x_1}{\partial m})_{p=常数}x_1$$

马歇尔需求=希克斯需求+收入效应

Chapter Eight: Reveled Preference

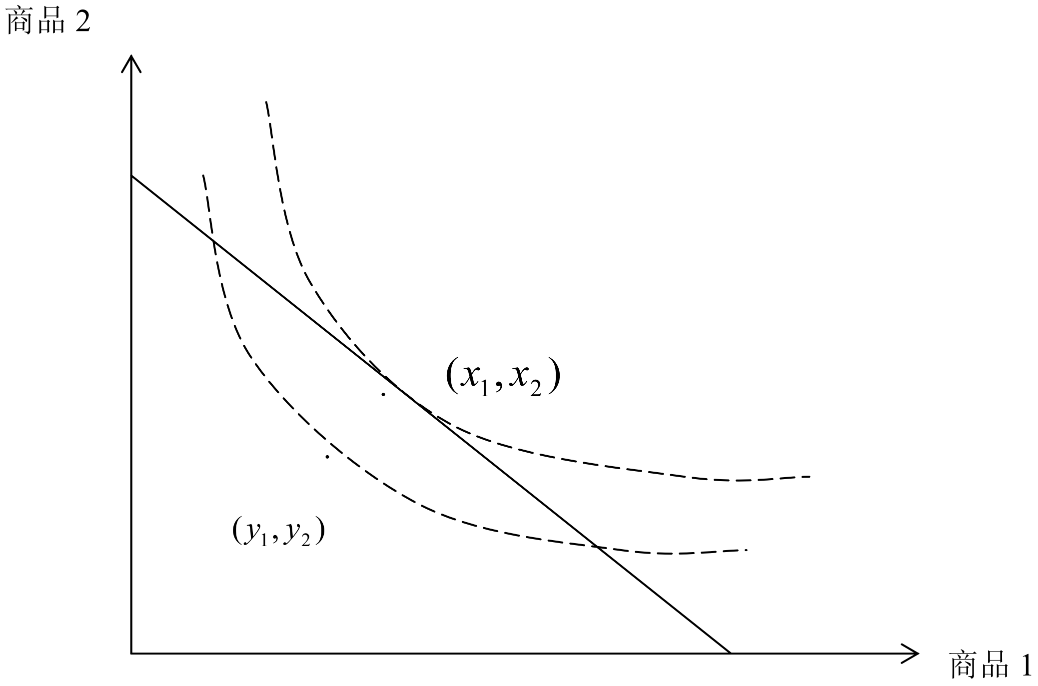
本章主要研究如何从需求信息得到偏好信息。偏好是不能直接观察到的，只能通过观察人们的消费行为来发现他们的偏好。这就是显示偏好的含义。显示偏好是从需求信息中的表现出来的偏好。

一、显示偏好的概念

为了简化分析，我们假定：（1）所有消费者的偏好都是严格凸性的，因此对于一个预算线来说都有并且只有一个最优消费束。（2）所有消费者的偏好都是稳定的，因此给定预算约束只有一个最优选择。偏好的稳定性假设在短期内是合理。

（一）直接显示偏好

假定存在两个商品消费束(x_1,x_2)和(y_1,y_2)，其中(x_1,x_2)处于预算线上，(y_1,y_2)处于预算线的下方并为预算集合中的一点。从图 8-1 中可以看出，根据单调性假设，在给定价格和收入的条件下，消费束(y_1,y_2)显示出比消费束(x_1,x_2)要差一些，虽然它也可能被选择。



用代数形式表示，当(p_1,p_2,m)时，两个消费束的预算线约束条件为：

$$p_1x_1+p_2x_2=m$$
$$p_1y_1+p_2y_2\le m$$

所以有 $p_1x_1+p_2x_2\ge p_1y_1+p_2y$

其经济学含义是说，如果在(y_1,y_2)支付得起的条件下，消费者没有选择(y_1,y_2)而选择了(x_1,x_2)，那么一定意味着(x_1,x_2)比(y_1,y_2)更受偏好。如果这一条件满足，我们

就说商品束(x_1,x_2)是商品束(y_1,y_2)的直接显示偏好，即$(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)$。

实际消费数据是可以观察的，而偏好是不可观察的。显示偏好就是要用可观察数据揭示其背后隐含的偏好，用实际消费行为模式推导出导致这一消费的偏好模式。

（二）间接显示偏好

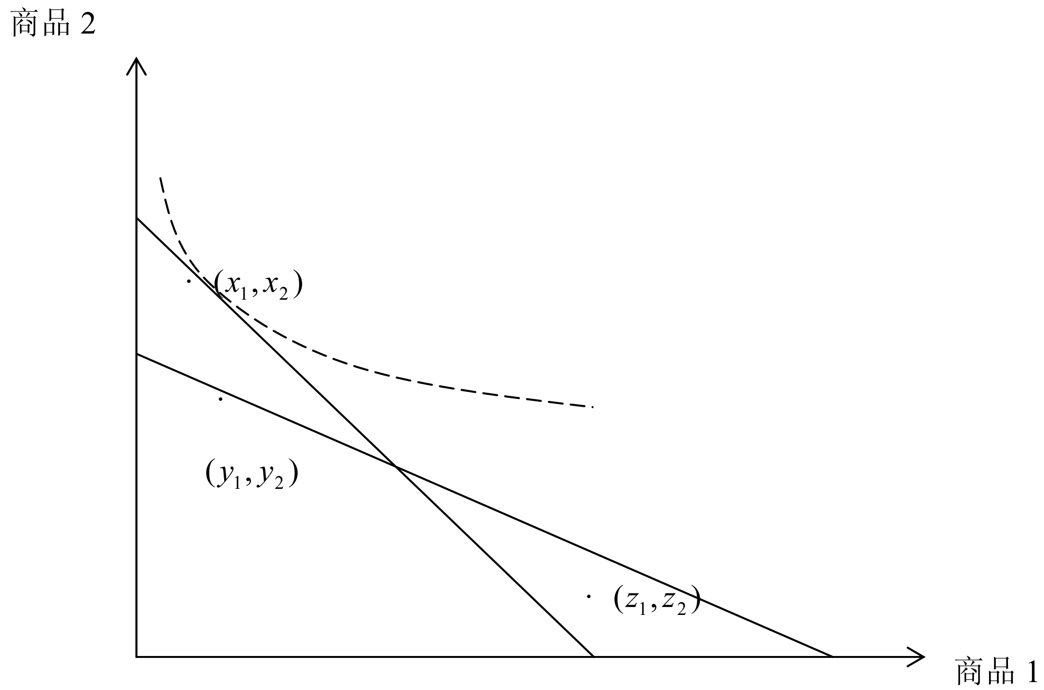
在给定商品价格和收入的条件下可以揭示任意两个消费束的直接显示偏好。但是由于在不同的价格条件下消费者的实际消费选择是不一样的，这样就产生间接显示偏好问题。

假定存在三个实际消费束(x_1,x_2)、(y_1,y_2)和(z_1,z_2)，如果给定价格(p_1,p_2)在(y_1,y_2)支付得起的条件下消费者选择了(x_1,x_2)，即$p_1x_1+p_2x_2\geq p_1y_1+p_2y$；给定价格$(q_1,q_2)$在$(z_1,z_2)$支付得起的条件下消费者选择了$(y_1,y_2)$，即$q_1y_1+q_2y_2\geq q_1z_1+q_2z_2$，那我们就说$(x_1,x_2)$是$(z_1,z_2)$的间接显示偏好。

用代数形式表示，如果$p_1x_1+p_2x_2\geq p_1y_1+p_2y$，则$(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)$，

如果$q_1y_1+q_2y_2\geq q_1z_1+q_2z_2$，则$(y_1,y_2)\succ(z_1,z_2)$，

那么根据传递性原理，一定有$(x_1,x_2)\succ(z_1,z_2)$。在这种情况下我们就说(x_1,x_2)是(z_1,z_2) 的间接显示偏好。



从图中可以看出，由于在给定(p_1,p_2)时，选择了(x_1,x_2)而没选择(y_1,y_2)；在(q_1,q_2)下，选择了(y_1,y_2)而没有选择(z_1,z_2)。因此，在(p,x)和(q,z)之间，最优选

择将是(x_1,x_2)而不是(z_1,z_2)。

（三）显示偏好

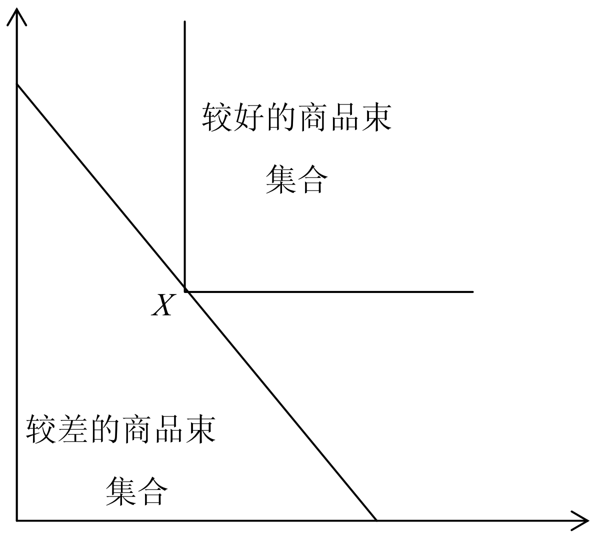
如果一个商品束是另一些商品束的直接或者间接显示偏好，那么我们就说这个商品数是另一个商品束的显示偏好。如(x_1,x_2)是上图阴影中所有商品束的直接或间接显示偏好。也就是说，过(x_1,x_2)点的反映消费者偏好的无差异曲线，不论是什么形状，必定位于阴影区之上。

（四）显示偏好原理

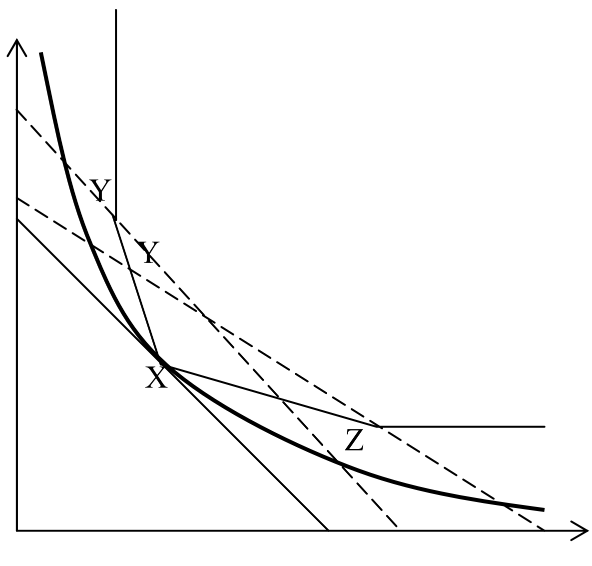
通过以上分析可以看出，如果(x_1,x_2)先于(y_1,y_2)被选择(需求行为)，那么对(x_1,x_2)的偏好就一定超过对(y_1,y_2)的偏好，即$(x_1,x_2)\succ(y_1,y_2)$。这一原理描述了由显示偏好到偏好的推理。显示偏好是说在(x_1,x_2)，(y_1,y_2)都能被购买的情况下，选择的是(x_1,x_2)而不是(y_1,y_2),这是从对消费行为的观察中得来的。偏好则是说消费者把(x_1,x_2)在次序上排在(y_1,y_2)的前面。这样我们就从需求信息得到的偏好信息。

二、恢复偏好

即利用观察数据和显示偏好原理推导出反映消费者偏好的无差异曲线。假定消费者的偏好具有单调性和凸性，消费束 *Y*，*Z* 是在不同的价格条件下 *X* 的显示偏好商品束。这样我们就可以找出 *X* 的显示偏好集合（如下图所示）。如果观察数据足够的多，我们就可以找出所有较差的消费束和较好的消费束的集合。无差异曲线将处于两个集合的中间。



单调性



加上凸性

三、显示偏好公理

理性偏好都符合效用最大化原则，即总是选择最好的商品束。但消费者的行为可能是非理性的。这时就无法用显示偏好原理得出反映良好偏好的无差异曲线，即使得到也没有任何意义。这样我们就需要将不符合效用最大化原则的那些观察数据找出来并剔除掉，以保证显示的偏好是理性的。这就是公理要解决的问题。

（一）显示偏好弱公理

对于一个理性消费者来说，如果(x_1,x_2)是(y_1,y_2)的直接显示偏好，且(x_1,x_2)和(y_1,y_2)不同，那么(y_1,y_2)就不可能是(x_1,x_2)的直接显示偏好。即

只要 $p_1x_1+p_2x_2 \geq p_1y_1+p_2y$

就不可能有 $q_1x_1+q_2x_2 \geq q_1y_1+q_2y_2$。

这就是说在价格p时选择x,就不可能在q时选择y，即在任何价格水平下，偏好不可逆转。换句话说，在购买(x_1,x_2)时有能力购买(y_1,y_2)；那么在购买(y_1,y_2)时(x_1,x_2)就一定是无力购买的商品束。显示偏好弱公理是最优行为的必要条件。

对显示偏好弱定理的解释：

假定存在两个消费束(x_1,x_2)和(y_1,y_2)，消费者在实际选择时面临两种情况：一种情况是两个商品束都支付得起，这时如何选择；另一种情况是有一个商品束支付不起。弱偏好定理考虑了这两种情况，如果你是寻求效用最大化的消费者，在都支付得起时，一定选择最好或者愿意支付更多货币的消费束；如果你偏好的消费束支付不起，就只有购买另一个商品束。因此，如果消费者选择的不是偏好的那个商品束，就一定意味着所偏好的商品束在当前价格条件下是支付不起的。

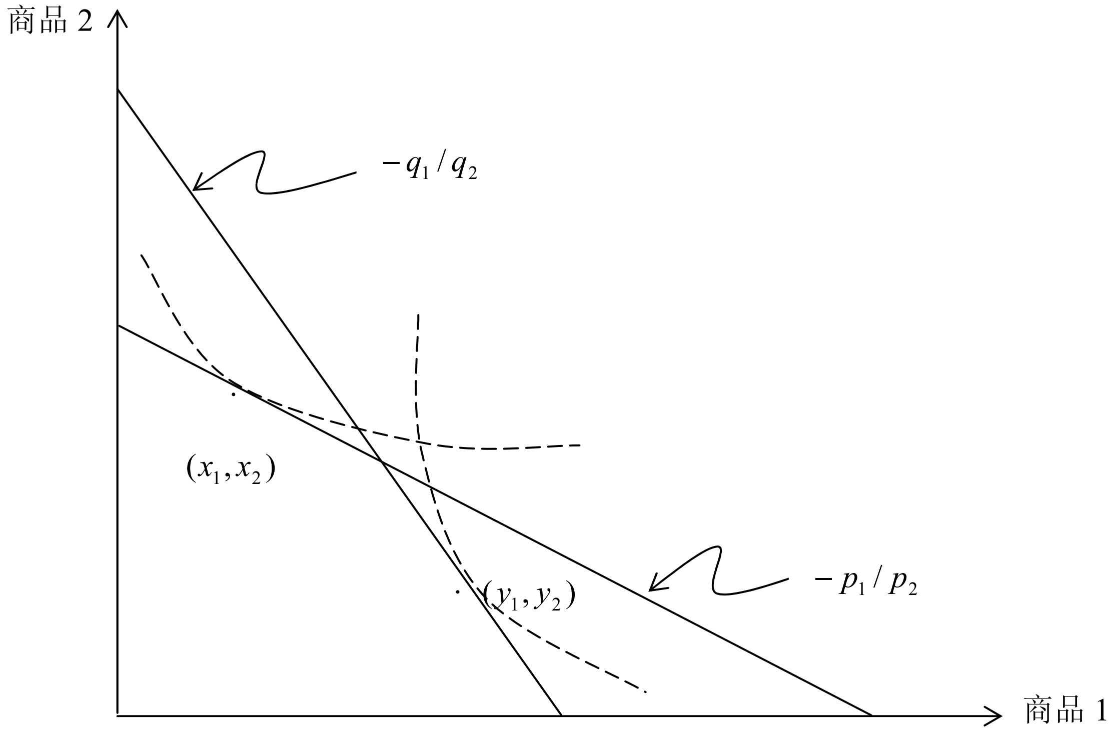
举例 1：不符合显示偏好弱公理的情况

如果 $p_1x_1+p_2x_2 \geq p_1y_1+p_2y_2$

同时又有 $q_1x_1+q_2x_2 \geq q_1y_1+q_2y_2$

这时过两个消费束的两条差异曲线相交而不是平行，从而无法找到一条代表消

费者偏好的无差异曲线。如下图所示。



举例 2：符合显示偏好弱公理的情况

选择(x_1,x_2)时，(y_1,y_2)支付不起，即 $p_1x_1+p_2x_2 \le p_1y_1+p_2y$ ；

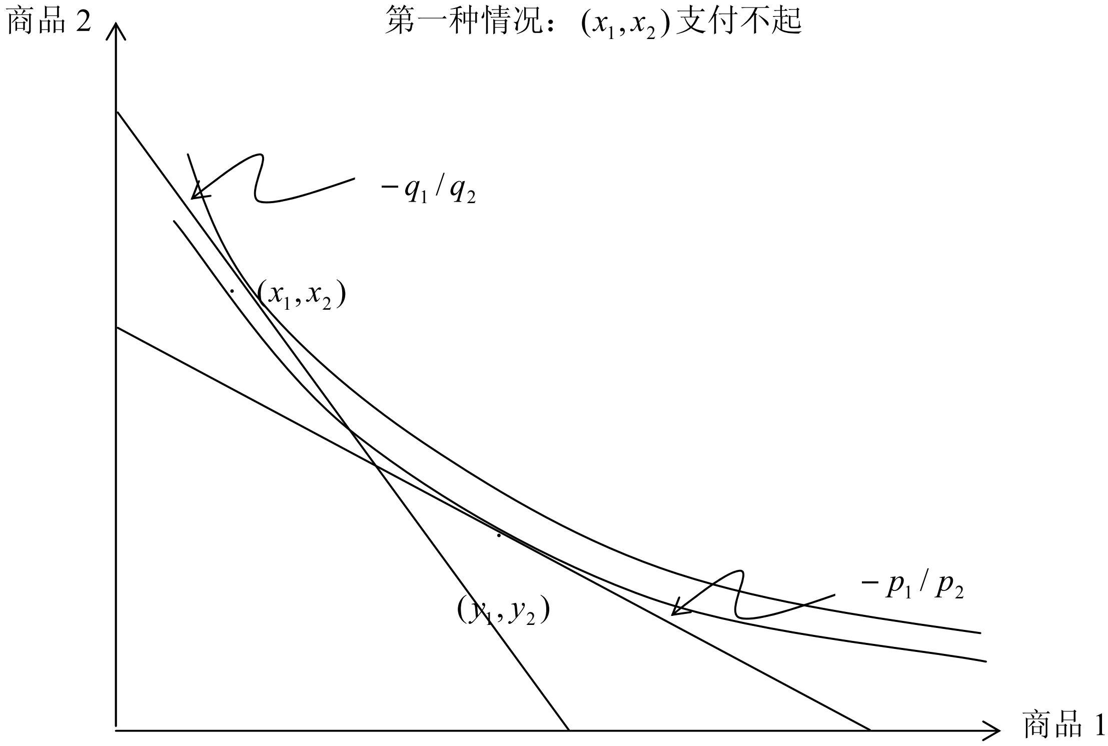
选择(y_1,y_2)时，(x_1,x_2)支付不起，即$q_1x_1+q_2x_2 \ge q_1y_1+q_2y_2$。

从下图可以看出：

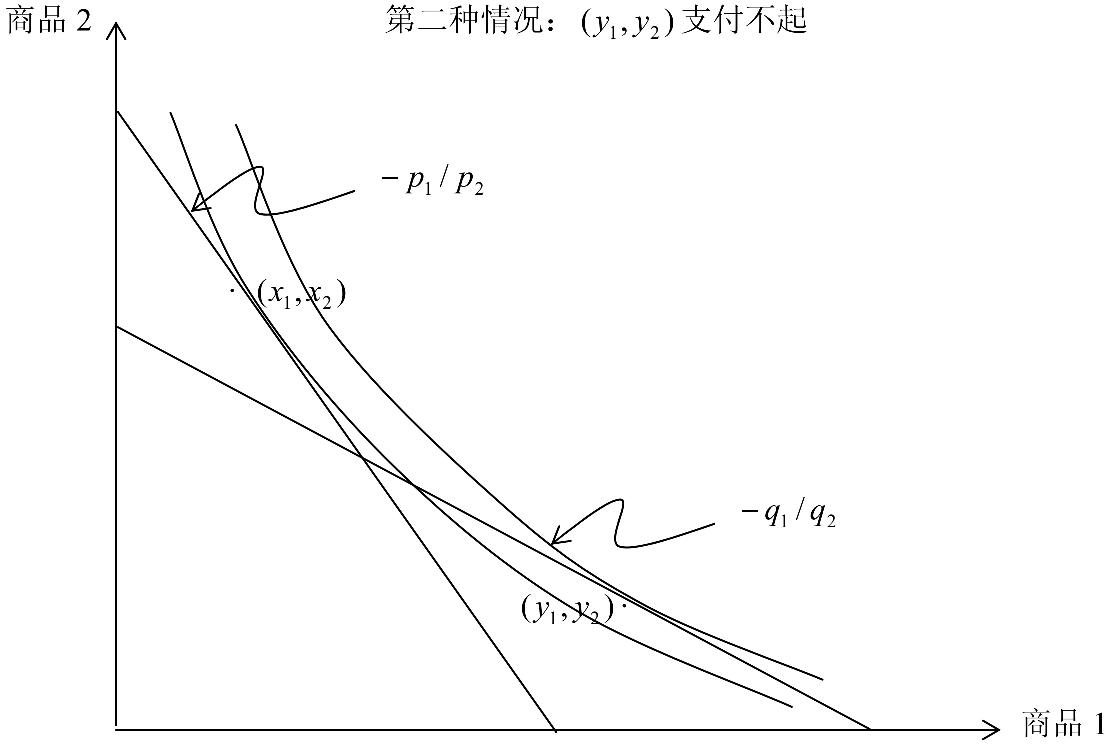
（1）如果消费者选择了(x_1,x_2)，与之相适应的无差异曲线位于与(y_1,y_2)相适应的无差异曲线的上方。因此对消费者来说，他偏好(x_1,x_2)而不偏好(y_1,y_2)。

（2）在支付不起的条件下，消费者只能选择(y_1,y_2),从而必然处在一条代表较低偏好的无差异曲线上。这时两条无差异曲线所表示偏好仍然是相同的，即如有可能的话消费者仍然选择(x_1,x_2)。

第一种情况：(x_1,x_2) 支付不起



第二种情况：(y_1,y_2) 支付不起



（二）显示偏好的弱公理合理的检验：

利用行列式和公理的定义可以找出不符合最大化行为的消费束。据显示偏好弱公理（WARP），在任何价格水平下，偏好是不可逆转的。

1．给定不同的价格和消费束，据行列式可计算出支出的行列式，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4^* & 6 \\ 4^* & 5 & 6 \\ 3* & 3^* & 4 \end{vmatrix}$$

2．对角线（5，5，4）表示实际支出，其它项表示可能支出，即如果按照不同的价格购买同一组商品，或按同一价格购买不同组的商品可能需要的支出。

3．标出在同一价格水平上，消费者可以支付得起但没有选择的商品束和支出。表中代星号的就是这样的消费束。(因此*号表示不被偏好的消费束）

4．从计算结果可以看出，当价格为（1，2）时，消费者选择了第一组商品束（1，2)，即第一组消费束是第二组消费束的显示偏好；但当价格为（2，1）时，消费者选择了第二组消费束（2，1)，即第二组消费束又是第一组消费束的显示偏好。这显然违背了显示偏好弱公理。由于在第二组价格下消费者可以减少它的消费支出，仅而选择第二组消费数，虽然他不是一个理性消费者。

举一个符合弱偏好定理的例子：

设$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$，则$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

乘积矩阵中对角线上的各项反映实际消费，即 $p_1x_1 + p_2x_2和q_1y_1 + q_2y_2$。在价格 $(p_1, p)_2$ 下，消费者选择 (x_1, x_2) 是因为 $p_1x_1 + p_2x_2 \le p_1y_1 + p_2y$,即 (y_1, y_2) 是支付不起的；在价格 (q_1, q_2) 下，消费者选择 (y_1, y_2) 是因为 $q_1x_1 + q_2x_2 \ge q_1y_1 + q_2y_2$,即 (x_1, x_2) 是支付不起的。以上两种情况都满足弱偏好定理。

四、显示偏好强公理

（一）显示偏好强公理的定义

如果 (x_1, x_2) 是 (y_1, y_2) 的直接或间接显示偏好，且 (y_1, y_2) 与 (x_1, x_2) 不同，则 (y_1, y_2) 就不可能是 (x_1, x_2) 的直接或间接显示偏好。

弱公理是用直接显示偏好定义的，而强公理则把该定义扩展到间接显示偏好的情况。即如果一个消费束是另一个消费束的间接显示偏好，那么就不可能对另一消费束来说同时是这一消费束的间接显示偏好。强公理包含了弱公理的内容。

对于一个最大化消费者来说，如果其偏好是可以传递的，那么由其消费行为表现出来的显示偏好也是可传递的。因此强公理是最优化行为的充分条件。这也就是说如果观察到的消费行为是最优化行为，那么其显示偏好就一定满足强公理；反过来说，如果被观察到的选择满足显示偏好强公理，我们总是能够找到可能造成被观察到的选择的性状良好的偏好。

（二）显示偏好强公理的检验

方法一：找出所有的间接显示偏好，看是原有违反的情况。

首先，表中星号表示直接偏好；如当价格为 1 时，20>10*，表示商品束 1 是 2 的直接显示偏好；当价格为 2 时，20>15*，表示商品束 1 是 2 的直接显示偏好。

其次，根据上述直接显示偏好找出间接显示偏好。因为 20>10*，20>15*，所以 20>15*。表示在价格为 1 时，商品束 1 是商品束 3 的间接显示偏好。

方法二：考查第 t 行 S 列和第 S 行 t 列上是否都有星号。如果有一个没有星号就是符合强公理；如果都有星号就违背了强公理，因为它们表示二者互为直接或间接显示偏好。

Chapter Nine：购买和销售

在此之前，我们没有考虑消费者的禀赋和收入的来源。本章就要研究在消费者出售初始禀赋获得收入而后进行消费的情况的最优选择问题。

一、　总需求和净需求

初始禀赋：(ω_1,ω_2)，即自己拥有的资源

总需求：(x_1,x_2)，即实际的消费数量

净需求：$(x_1-\omega_1,x_2-\omega_2)$，实际消费与初始禀赋的差额。

当净需求为正时，为净购买者或消费者；当净需求为负时，为净销售者或供给者。

二、 预算约束

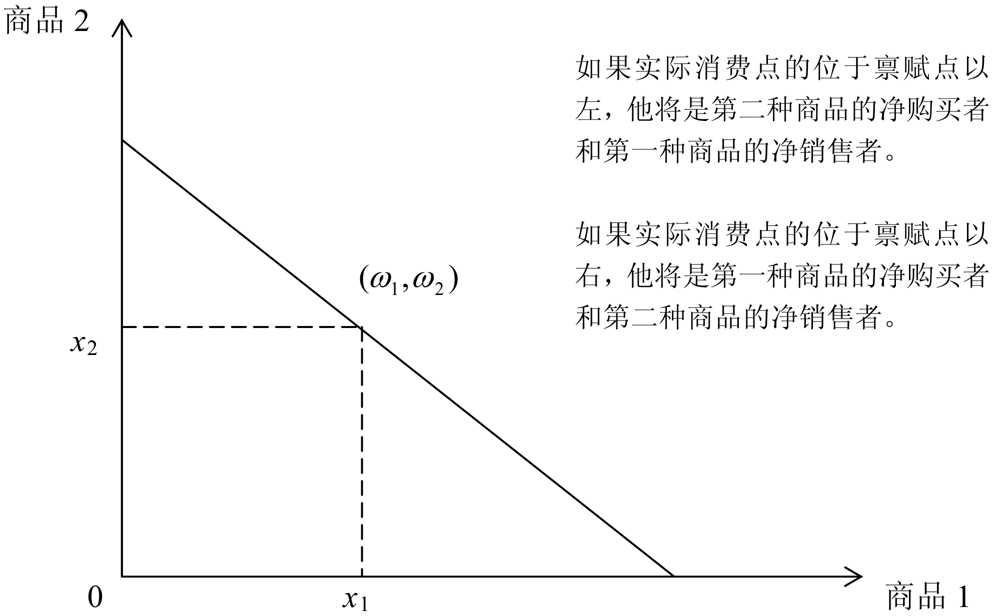
在给定价格条件下，消费值一定等于禀赋值，即

$$p_1x_1 + p_2x_2 = m = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$$

用净需求表示

$$p_1(x_1 - \omega_1) + p_2(x_2 - \omega_2) = 0$$

其几何形状是经过(ω_1, ω_2)点，斜率为$-\dfrac{p_1}{p_2}$的一条直线。



如果实际消费点的位于禀赋点以左，他将是第二种商品的净购买者和第一种商品的净销售者。

如果实际消费点的位于禀赋点以右，他将是第一种商品的净购买者和第二种商品的净销售者。

（一）预算线的移动：

1．当价格给定，禀赋发生变化时，预算线平行移动。

如果 $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 > p_1\omega_1' + p_2\omega_2'$ ，预算线向内移动；

如果 $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 < p_1\omega_1' + p_2\omega_2'$ ，预算线向外移动；

2．当赋数量不变，价格发生变化时，预算线围绕禀赋点转动。

如果 p_1 相对下降，预算线会变得较平缓；

如果 p_1 相对上升，预算线会变得较陡峭。

（二）价格变动的福利影响

在收入取决于要素拥有量的条件下，价格变动会对收入产生双重新影响。从要素禀赋方面来看，p_1 下降会减少收入，从而减少消费；从消费的方面来看，p_1 下降

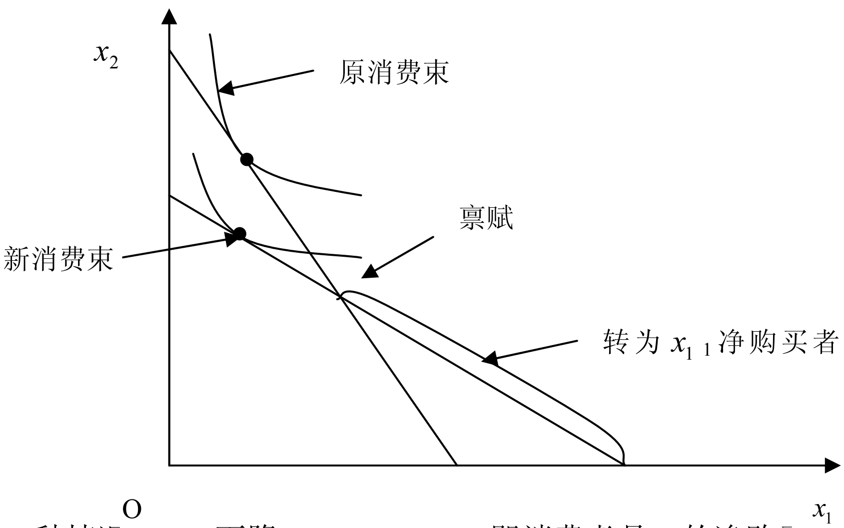
又会使实际收入增加，从而增加对 x_1 的消费。其净福利影响取决于价格变动方向以及消费者是否改变其净需求。

第一种情况： p_1 下降， $x_1-\omega_1<0$ ，即消费者是 x_1 的净销售者

p_1 下降，使得预算线变得较为平缓。

如果他继续充当 x_1 的净销售者，其消费束将位于禀赋点以左的新预算线上，所有这些选择都要比原消费束差，也就是说他必然要遭受福利损失。

如果转变为 x_1 的净购买者，新的消费点将位于禀赋点以右的新预算线上，无法判断其福利是好还是坏。

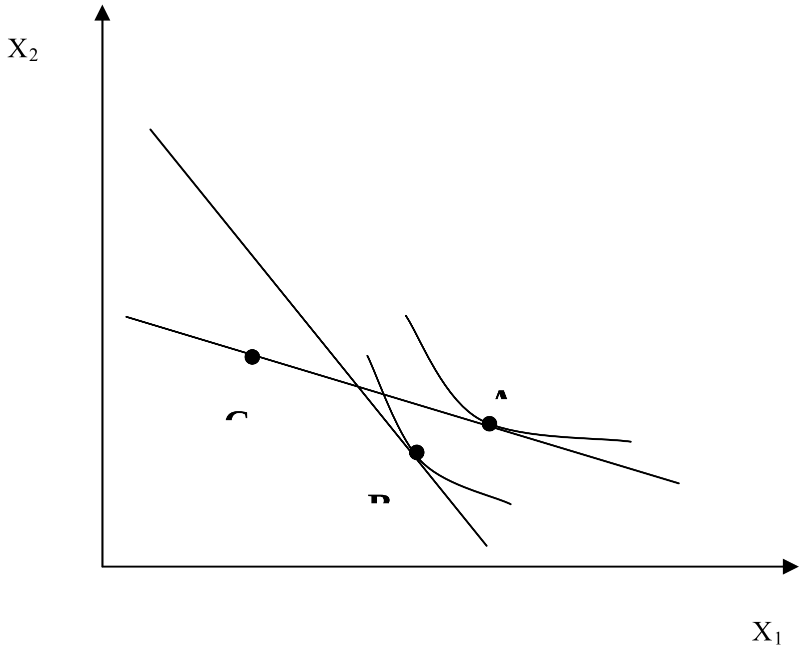


第二种情况： p_1 下降， $x_1-\omega_1>0$ ，即消费者是 x_1 的净购买者

p_1 下降，使得预算线变得较为平缓。

原消费点处于禀赋点右边，继续充当 x_1 的净购买者可以提高福利水平。如果转变为 x_1 的净销售者，其福利一定会遭受损失。因为这种情况下，他将在禀赋点以左的预算线上进行消费，与原来的预算线相比，这些都不是他的显示偏好。

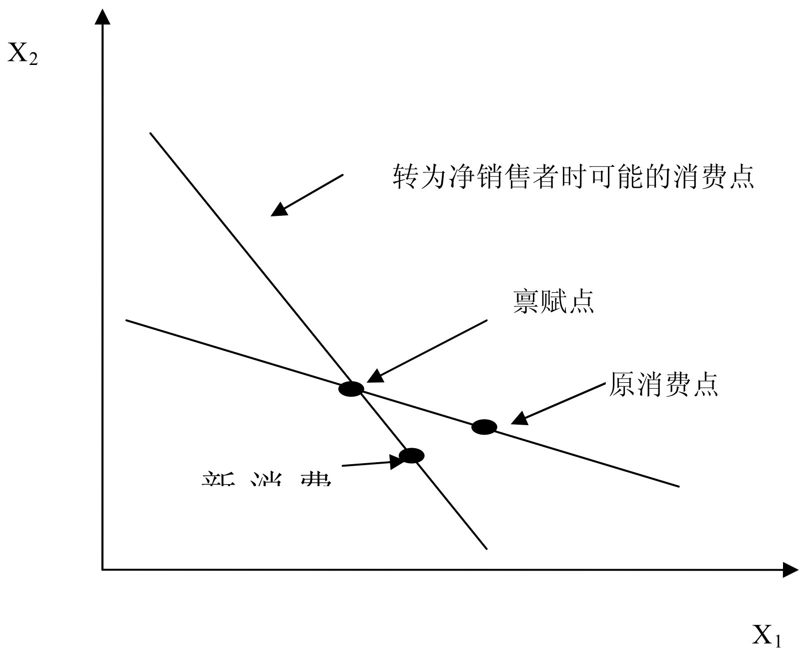
这可以用间接显示偏好证明，即 A 是 B 的直接显示偏好，B 是 C 的直接显示偏好，因此，A 是 C 的间接显示偏好，所以 A 点比 C 点好。所以，当 x_1 的价格下降时，消费者由原来在 B 点消费转向 A 点消费，可以获得福利水平的提高，消费者决不会转变为 x_1 的净销售者。



第三种情况：p_1上升，$x_1-\omega_1>0$，即消费者是x_1的净消费者

p_1上升，使得预算线变得较为陡峭。

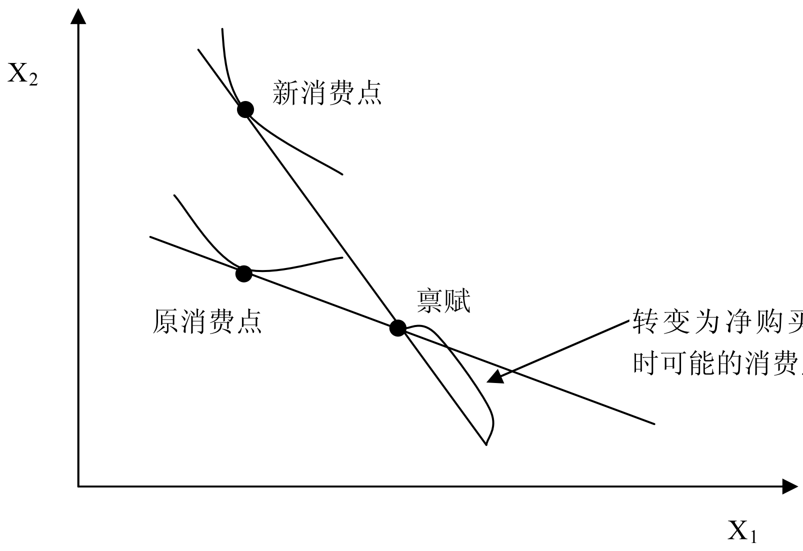
原消费点位于禀赋点以右，继续充当购买者会遭受福利损失；转而变为净销售者其福利水平变化不确定。



第四种情况：p_1上升，$X_1-\omega_1<0$，即消费者是x_1的净销售者

p_1上升，使得预算线变得较为陡峭。

继续充当净销售者会增加福利，转为净购买者会遭受福利损失。



汇总以上分析可以得出：

	p_1上升	p_1下降
$X_1-\omega_1<0$，x_1的净销售者	福利增加	福利损失
$X_1-\omega_1>0$，x_1的净购买者	福利损失	福利增加

因此，一般说来当价格上升时，如果他是净销售者，他会继续销售该商品而不会转变为净购买者。当价格下降时，如果他是净购买者，他会继续购买而不会转变为净销售者。

三、　价格提供曲线和需求曲线

考察在资源禀赋不变而价格发生变化的情况下消费者均衡变动的轨迹。

（一）价格提供曲线

如果假定消费者的初始状态是即不购买也不销售，那么价格提供曲线一定通过初始禀赋点。在价格变化的条件下其可能向左上方或右下方移动。

对于x_1而言，p_1下降，如果是净购买者，提供曲线处于禀赋点以右；

p_1下降，如果是净供给者，提供曲线处于禀赋点以左。

对于x_2而言，当价格p_2下降时，方向正好相反

正如上面所述，只有这样才能获得净福利的增加。

（二）需求曲线

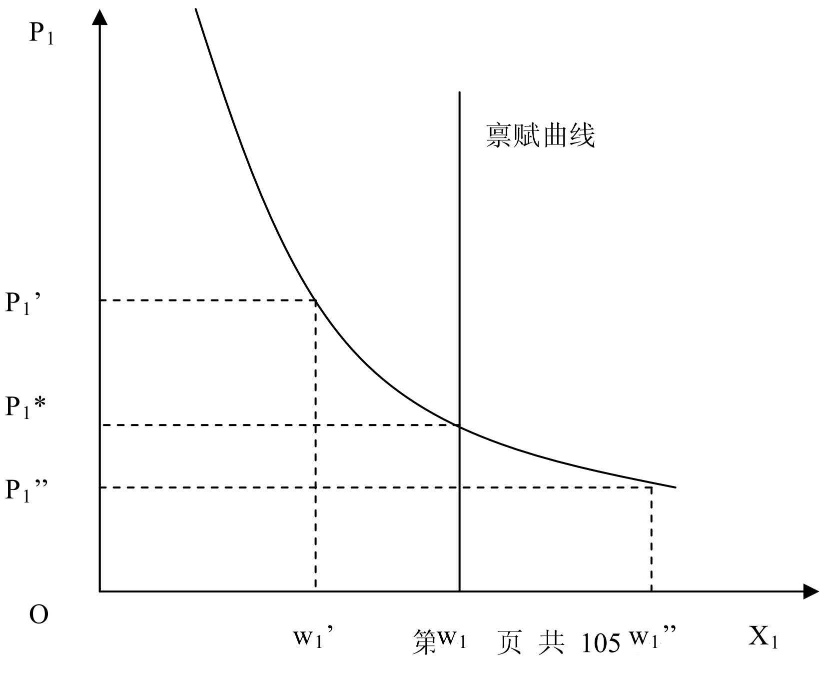
根据价格提供曲线可以求出需求曲线，包括总需求和净需求。

1．总需求$x(p_1, p_2)$

它反映消费者的实际消费数量。等于禀赋加上净需求：即

$$x_1(p_1, p_2) = \omega_1 + d_1(p_1, p_2)$$

当x_1的价格p_1下降时，消费者会通过出售另一种商品x_2来增加对x_1商品的购买或消费。因此，总需求曲线是随着价格的变化而向右下方倾斜的。



当 $p_1 = p_1^*, x_1 = \omega_1$，即不购买也不销售；

当 $p_1 > p_1^*, x_1 < \omega_1$，出售 x_1；

当 $p_1 < p_1^*, x_1 > \omega_1$，购买 x_1；（出售另一种商品）

2．净需求 $d(p_1, p_2)$

净需求等于总需求和要素禀赋的差额，即

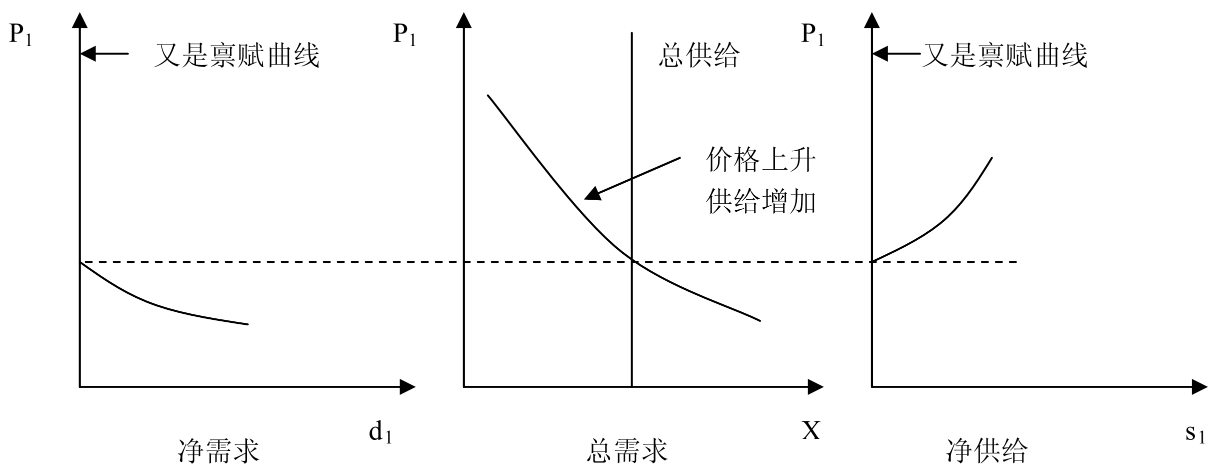
$$d_1(p_1, p_2) = x_1(p_1, p_2) - \omega_1$$

当净需求为正时，需求量随着价格的上升而减少，随着价格的下降而增加。因此，净需求曲线也向右下方倾斜。当净需求为负时，它成为商品的净销售者，销售数量或净供给随价格同方向变化。因此，

净需求函数为：$d_1(p_1, p_2)\begin{cases} x_1(p_1, p_2) - \omega_1 & \text{如果差额为正} \\ 0 & \text{如果差额不为正（可定义为供给函数）} \end{cases}$

净供给函数为：$s_1(p_1, p_2)\begin{cases} \omega_1 - x_1(p_1, p_2) & \text{如果差额为正} \\ 0 & \text{如果差额不为正（可定义为需求函数）} \end{cases}$

因此，净需求曲线是 $p_1 < p_1^*$ 那部分总需求曲线，而净供给曲线是 $p_1 > p_1^*$ 时那部分总需求曲线。禀赋就是总供给，因此，禀赋曲线就是总供给曲线，三者的关系如下：



四、 修正的斯勒茨基方程

上一章讨论斯勒斯基方程时，是假定货币收入不变，考察价格变化对需求的影响。引入禀赋因素以后，价格变化会引起货币收入发生变化，因此必须对方程进行修正：

1. 两种收入效应

普通收入效应：在货币收入不变时，由于价格变动引起的实际收入的变化。引入禀赋因素以后，这种效应仍然存在。

禀赋收入效应：价格变动对禀赋价值或货币收入的影响而产生的效应。

2. 总需求的变动

必须考虑两种收入效应，因此：

需求的总变动 = 替代效应 + 普通收入效应 + 禀赋收入效应

3．禀赋收入效应的分解

其可以分解为两个因素：首先是价格变化引起货币收入变化；其次是货币收入变化引起商品消费量的变化。公式表达就是：

禀赋的收入效应等于收入变动时的需求变动乘以价格变动时的收入效应，用公式表示就是：

$$\text{禀赋的收入效应} = \frac{\Delta x^m}{\Delta m} \times \frac{\Delta m}{\Delta p}$$

在禀赋不变时，价格变化会使收入同方向变动，因此，$\frac{\Delta m}{\Delta p} = \omega$，如果是 p_1 的价格发生变化，禀赋的收入效应 = $\frac{\Delta x_1}{\Delta m} w_1$。将禀赋收入代入斯勒斯基方程，有：

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} x_1 + \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} \omega_1 = \frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} + (\omega_1 - x_1) \frac{\Delta x_1^m}{\Delta m}$$

假定 x_1 是正常商品，则 $\frac{\Delta x_1^m}{\Delta m} > 0$；因为替代效应为负，所以 $\frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} < 0$。二者的净影响取决于 $(\omega_1 - x_1)$ 的符号，有两种情况：

（1）如果是净需求者：$(\omega_1 - x_1) < 0$，$\frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} < 0$，即 p_1 下降对 x_1 的需求就增加，满足需求定理。

（2）如果是净供给者：$(\omega_1 - X_1) > 0$，$\frac{\Delta x_1^s}{\Delta p_1} < 0$ 的符号是不确定的，它可能增加需求，也可能减少需求。

五、 劳动供给

劳动是一种禀赋，只要劳动就可以获得收入并进行商品消费，但必须付出放弃闲暇的代价。劳动供给决策实际上就是如何在商品消费和闲暇之间进行的抉择。我们可以利用上述模型考察商品价格和劳动价格（工资率）变化对消费者商品消费和闲暇消费的影响。

（一）劳动供给模型

设：C 为商品消费，P 为商品价格，L 为实际劳动供给，w 为工资率，M 为非劳动收入（$M = P\overline{C}$）。需要研究的问题是在给定价格（P, w）和禀赋（$\overline{C},\overline{R}$）（即非劳动收入和全部劳动时间）的条件下，消费者如何选择物质商品和闲暇消费（C, R）。

根据给定的条件，消费者的预算约束为：

$$PC = M + wL$$

即消费的价值等于收入的价值。移项后得到：

$$PC - wL = M$$

令 $\overline{C} = M / P$ 为非劳动收入可以实现的商品消费；$\overline{R} = \overline{L}$ 为全部闲暇或最大劳动供给；$R = \overline{L} - L = \overline{R} - L$ 为实际闲暇消费。上述预算线可以变成：

$$PC + w(\overline{L} - L) = M + w\overline{L} = P\overline{C} + W\overline{R}$$

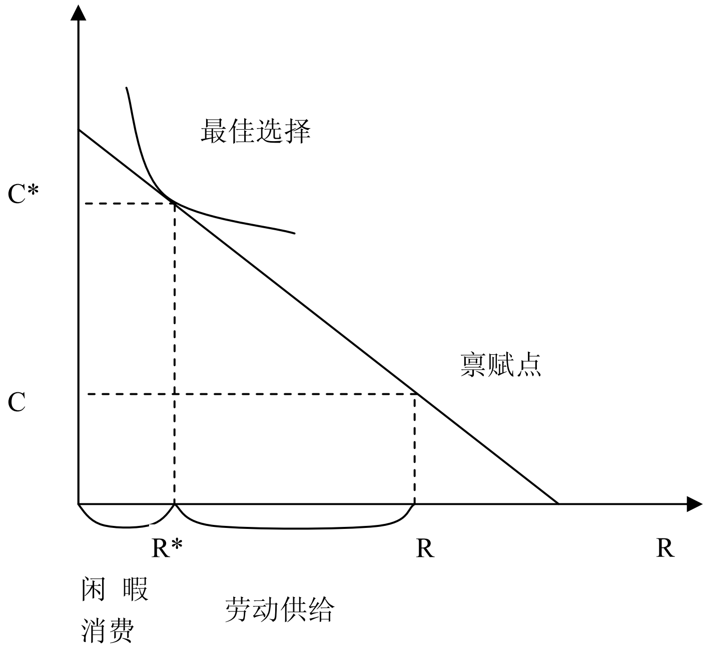
即

$$PC + wR = P\overline{C} + W\overline{R}$$

从上述预算约束条件可以看出，消费的两种商品是物质商品和闲暇（C, R）；禀赋是非劳动收入禀赋和全部劳动时间禀赋（$\overline{C},\overline{R}$）。w 即是闲暇的价格（或机会成本），

又是劳动的报酬

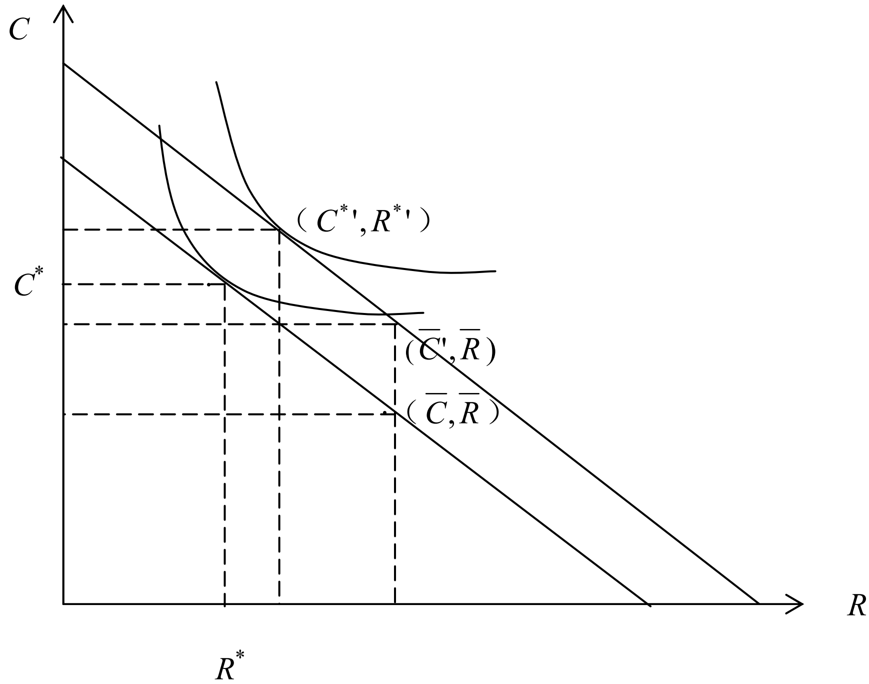
预算线通过禀赋点（$\overline{C},\overline{R}$），其斜率为-$w/P$,，最优选择为$(C^*,R^*)$，如图所示：



（二）劳动供给的比较静态分析

1．w 和 p 都不发生变化，但货币收入发生变化。

比如 M 增加，这意味着 $\overline{C}$ 收入禀赋的增加，初始禀赋点向上移动，最佳消费点变为（$C^*{'},R^*{'}$）。如下图所示：



从图中可以看出，对闲暇和商品的消费都增加，表明商品和闲暇都是正常商品。闲暇和商品消费都增加是因为消费者不愿将多余的货币收入都用于闲暇消费或商品购买，而愿意用于增加二者的消费。

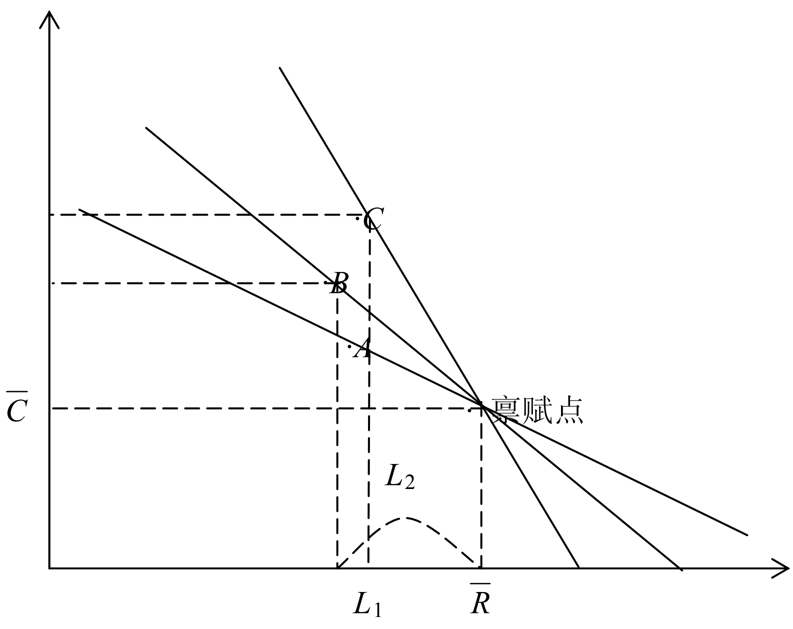
2．其他因素不变，工资率发生变化（假定 w↑）

由于工资率既是闲暇消费的价格，又是劳动禀赋的报酬，因此工资率上升是增加闲暇的消费，还是减少闲暇的消费而增加劳动的供给，取决于劳动禀赋收入效应的大小。可以使用包含禀赋收入效应的斯勒斯基方程进行分析。劳动供给的斯勒茨基方程为：

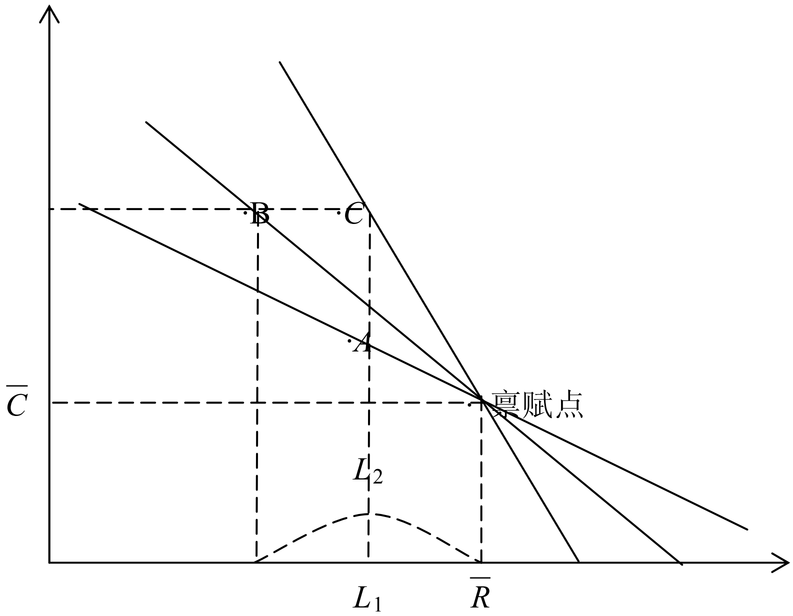
$$\frac{\Delta R}{\Delta w}=\frac{\Delta R^{s}}{\Delta w}+(\overline{R}-R)\frac{\Delta R^{m}}{\Delta w}$$

首先，由于闲暇是一种正常商品，因此 $\frac{\Delta R^{m}}{\Delta w}>0$，即收入增加以后人们总是要更多地享受闲暇的好处。但是替代效应总是负的，w 上升总会使消费者用商品消费束来替代闲暇消费。

因此，$\frac{\Delta R}{\Delta w}$ 可能大于零，也可能小于零。如果认为工资增加以后应多工作，这时替代效应就应该大于收入效应，从而 $\frac{\Delta R}{\Delta w}<0$；如果认为工资率上升，提供了更多的闲暇消费机会，那么收入效应就会大于替代效应，从而使 $\frac{\Delta R}{\Delta w}>0$。在这种情况下工资的上升就会使劳动供给减少，从而形成向后弯曲的劳动供给曲线。如下图所示。

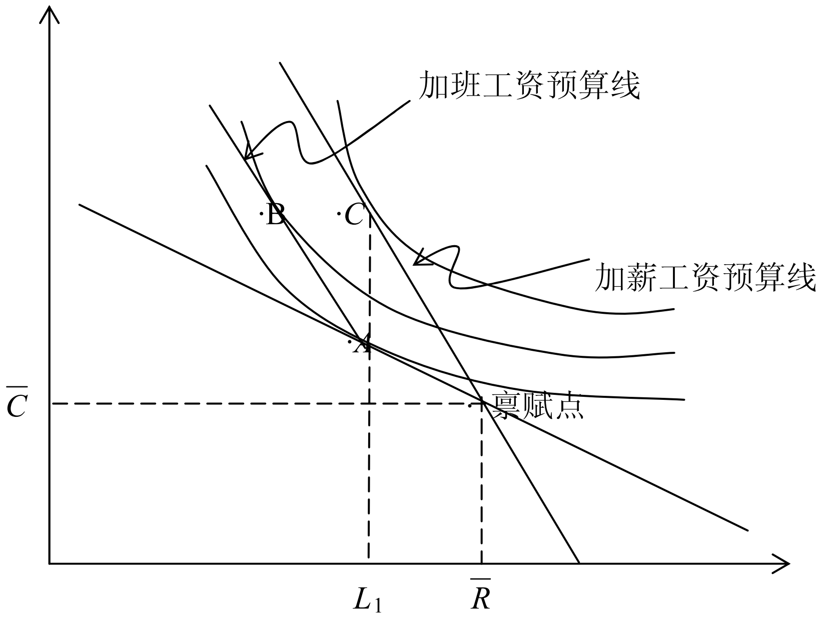


在工资率提高使得闲暇增加的情况下，对商品的消费可以是增加的，也可以是不变的。如下图所示。



（三）加班与劳动供给

加班需要支付较高的工资，必定增加劳动的供给。而直接增加工资（加薪）未必能增加劳动的供给。这是因为加薪会产生替代效应和收入效应两种效应；而加班工资只会引起替代效应。(用劳动来替代闲暇，不增加劳动就无法获得加班工资)。如图所示。



Chapter Ten 跨期选择

本章主要研究当前消费还是未来消费的选择问题。讲四个问题：（1）跨时期选择与预算约束；（2）均衡及福利影响；（3）跨时期选择中的斯勒茨基方程；（4）实际利率的计算。

一、 预算约束

定义（C_1,C_2）为每一时期的消费量；（m_1,m_2）每一时期的货币收入；（ω_1,ω_2）为每一时期的禀赋。在每一时期中，消费者出售禀赋获取收益，然后进行消费。消费者货币收入仍然等于禀赋的价值，即：

两种禀赋：$\begin{cases}\omega_1=(\omega_1^1,\omega_1^2)\\ \omega_2=(\omega_2^1,\omega_2^2)\\ m_1=P_1\omega_1^1+P_2\omega_1^2\\ m_2=P_2\omega_2^1+P_2\omega_2^2\end{cases}$　　一种禀赋：$\begin{cases}\omega_1=(\omega_1^1,0)\\ \omega_2=(0,\omega_2^2)\\ m_1=P_1\omega_1\\ m_2=P_2\omega_2\end{cases}$

假设消费者只拥有一种禀赋，而且价格为(P_1,P_2)时，其预算约束可以表示为：

$$P_1C_1+P_2C_2=P_1\omega_1+P_2\omega_2$$

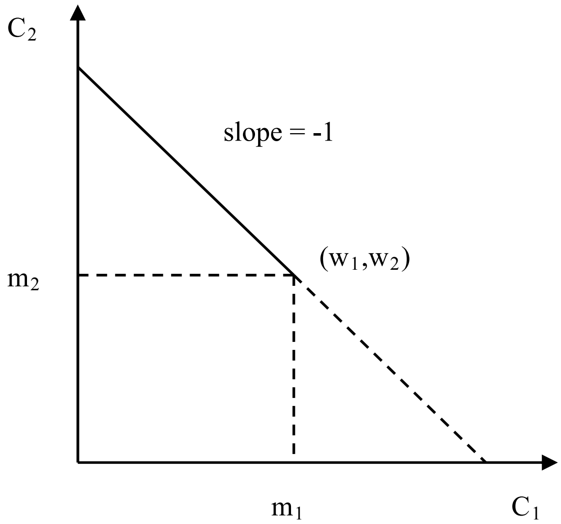
现假设商品的价格不发生变化，即$P_1=P_2$。这样就可以消去价格因素，这时预算约束条件简化为：

$$C_1+C_2=m_1+m_2$$

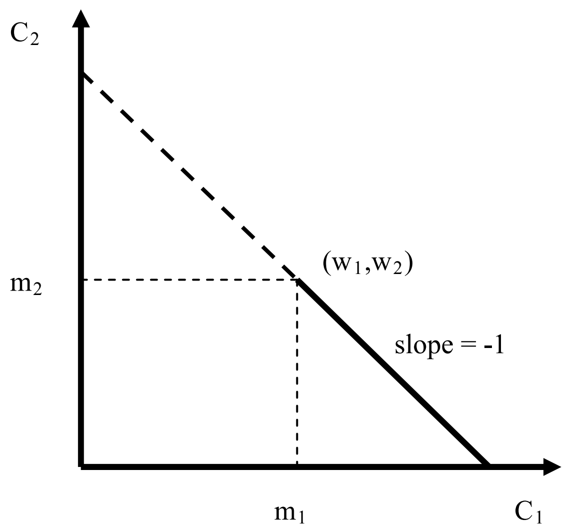
其表示消费者在两期的消费量取决于其在两期中所拥有的货币量。我们要研究的问题就是如何将收入在两个时期中进行分配和进行消费的问题。

当消费者的现期消费大于现期收入时，就需要借款；而当消费者的现期消费小于现其收入时其就会储蓄。当然，如果现期的消费等于现期收入，消费者即不会借款也不会储蓄。在借款和储蓄的条件下还会有利息。考虑这些情况，预算线可以表示如下：

1. 如果只能储蓄，不能借款而且储蓄没有利息，这时消费者的最优选择将处于禀赋点的左边。预算线如下：



2. 如果只能借款，不能储蓄，但借款也不需要支付利息，这时消费者的最优选择将处于禀赋点的右边。预算线如下：



3. 假定消费者是一个储蓄者，即 $m_1 > C_1$，而且利息率为 r。这时他的现期消费将小于现期收入；未来消费等于未来收入 m_2 加上储蓄额 $m_1 - C_1$ 再加上储蓄利息

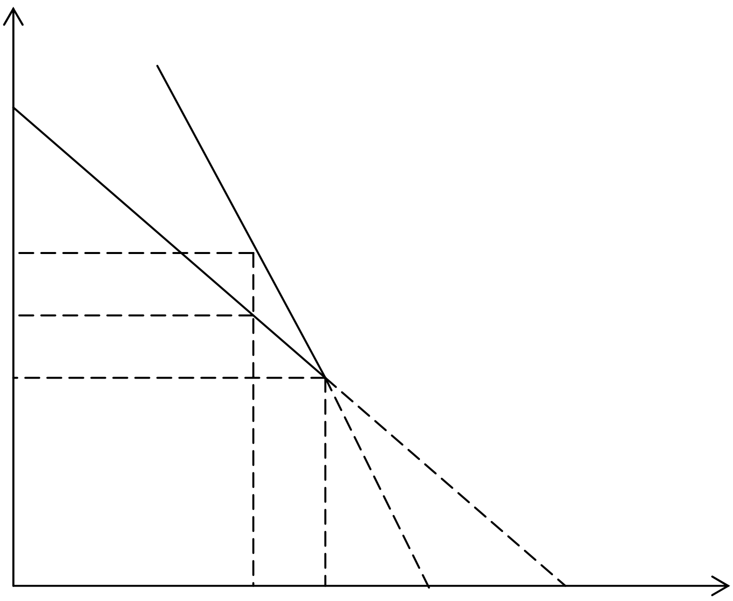
$r(m_1-C_1)$，即

$$C_2=m_2+(m_1-C_1)+r(m_1-C_1)=m_2+(1+r)(m_1-C_1)\text{。}$$

这时其预算约束为：

$$\begin{aligned}C_1+C_2&=[m_1-(m_1-C_1)]+[m_2+(1+r)(m_1-C_1)]\\&=m_1+m_2+r(m_1-C_1)\end{aligned}$$

可以看出存款的利息收入表现为总收入的增加额。从预算线上表示就是预算线围绕着禀赋的顺时针转动。表明如果储蓄的话，消费者在未来可以消费更多的商品。如下图所示：



4. 假定消费者是一个借款者，即（$m_1<C_1$），而且利率为 r。这时他的现期消费大于现期收入；未来消费等于未来收入减去借款额再减去借款利息。即：

$$C_2=m_2-(C_1-m_1)-r(C_1-m_1)=m_2-(1+r)(C_1-m_1)$$

这时其预算约束为：

$$\begin{aligned}C_1+C_2&=[m_1+(C_1-m_1)]+[m_2-(1+r)(C_1-m_1)\\&=m_1+m_2-(1+r)(C_1-m_1)\end{aligned}$$

因此，在借款的条件下，借款利息构成总收入的一个净减少额。从预算线上表示就是预算线围绕着禀赋的逆时针转动。表明如果借款的话，消费者在未来可以消费与不借款相比更少的商品。如下图所示：（略）

5．用现值和未来值的形式表示的预算

根据$C_1+C_2=m_1+m_2-r(C_1-m_1)$，移项后可以得到预算约束的未来值形式：

$$(1+r)C_1+C_2=(1+r)m_1+m_2$$

其表示现在节省的钱用于未来消费可以消费多少。对上式的两边同除以（1+r）可以得到预算约束的现值形式：

$$C_1+\frac{1}{1+r}C_2=m_1+\frac{1}{1+r}m_2$$

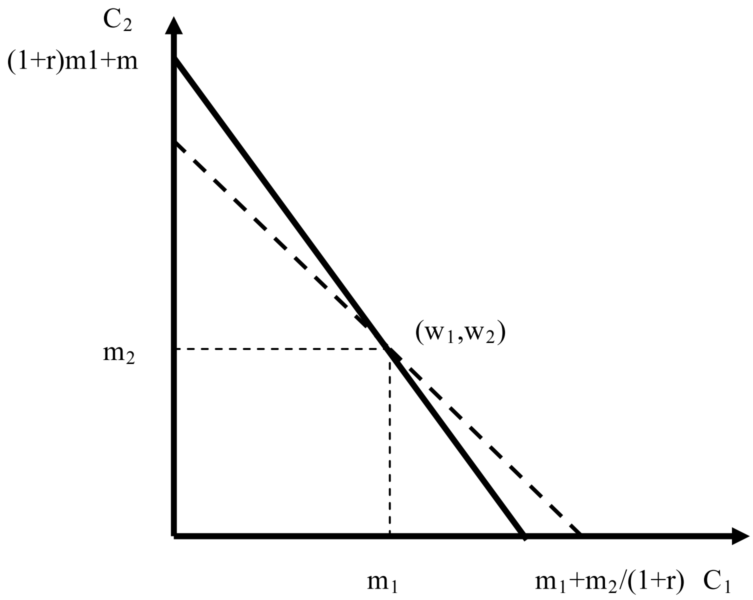
其表示将来的收入用于现在消费可以消费多少。

以上两个预算约束的斜率是一样的，都是-(1+r)。所不同的是一个用消费和收入的未来价值表示，一个用消费和收入的现在价值表示。也可以把它们看作是用货币的相对价格表示的预算约束，其中P_1=(1+r)，P_2=1。在第一个公式中是用P_2作为度量单位来衡量P_1的价格，因此相对价格$p_1/p_2=1+r$；第二个公式中是使用P_1作为度量单位来衡量P_2的价格，因此相对价格$p_2/p_1=\frac{1}{1+r}$。

由于现期决策需要使用现值来度量，因此在消费者的跨期选择中一般使用现值形式的预算约束。

6．既可以储蓄又可以借款，而且存在利率情况下的预算线

这时的预算线没有虚线部分，也就是说无论消费者作为借款者还是储蓄者都具有最优选择点。我们用纵轴表示现期消费为零即消费者将全部收入都用于未来消费时可以消费的数量，即$C_2=(1+r)m_1+m_2$；用横轴表示将全部收入都用于现期消费时可以消费的数量，即$C_1=m_1+m_2/1+r$。显然预算线为一条过禀赋点而且斜率为-(1+r)的一条直线。如下图所示：



二、消费者的偏好和均衡

（一）消费者的偏好

1．完全替代偏好

边际替代率为-1，这时消费者并不在乎是现在消费还是消费。

2．完全互补偏好

边际替代率为零，消费者不愿意用现期消费来替代未来消费或者相反。

3．凸性偏好

边际替代率递减，有两层涵义：一是愿意用一部分现期消费来替代未来消费或者相反；而是消费者每个时期都有一个“平均”的消费量，而不愿意现在消费很多而未来没有消费或者相反。我们实际关注的就是这种理性消费者的最优选择问题，因为在完全替代和完全互补偏好情况下，现期消费和未来消费之间的选择对消费者是没有意义的。

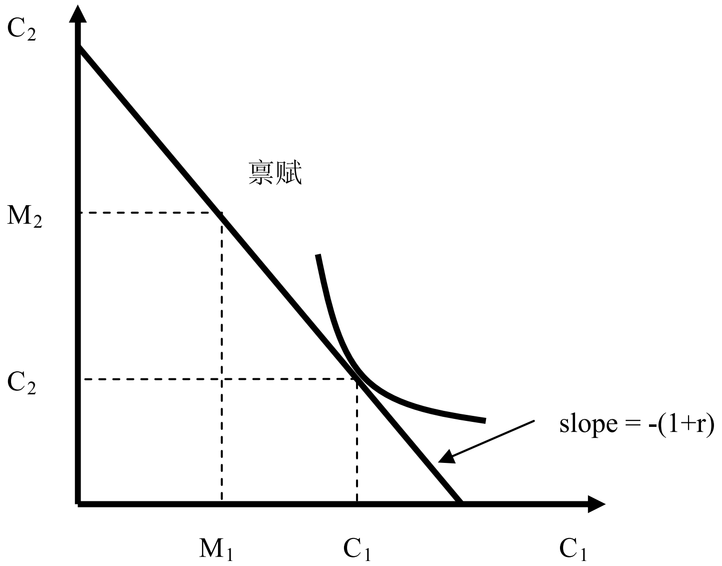
（二）消费者的均衡

在凸性偏好下，与预算约束相适应必然有跨时期的最优选择，我们面临的问题就是求解以下效用最大化问题，即

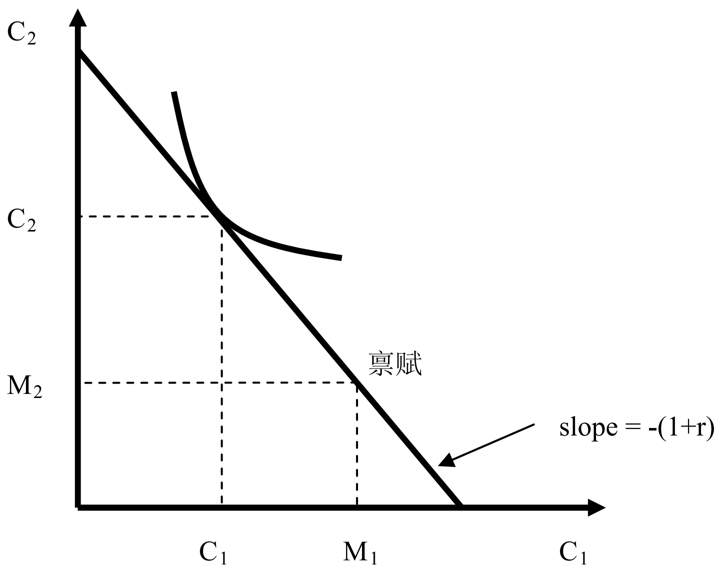
$$\begin{cases} \max \quad u(C_1, C_2) \\ s.t. \quad (1+r)C_1 + C_2 = (1+r)m_1 + m_2 \end{cases}$$

在给定两期收入和利率 $m_1;m_2;r$ 的条件下，可以求出最优选择 C_1^* 和 C_2^*。最优选择具有两种情况，一是作为借款者；二是作为贷款者。

第一种情况：$C_1 > m_1$，消费者是一个借款者。



第二种情况：$C_1 < M_1$，消费者是一个借款者。



三、利率变化及其对消费者福利的影响

（一）利率变化将改变预算线的斜率：

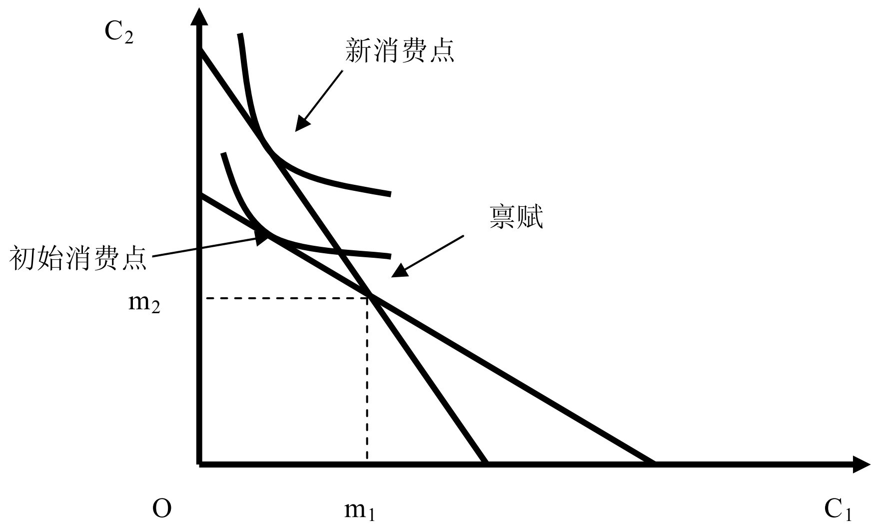
$r\uparrow,(1+r)\uparrow$，预算线斜率提高，围绕禀赋点转动，更加陡峭

$r\downarrow,(1+r)\downarrow$，预算线斜率下降，围绕禀赋点转动，更加平缓

预算线上每一点的消费组合(C_1,C_2)都是禀赋可以支付的起的。

（二）利率变化的福利影响（有四种情况）

1．在利率上升时，如果他是一个贷款者，继续充当贷款者会提高消费者的福利。如下图所示：

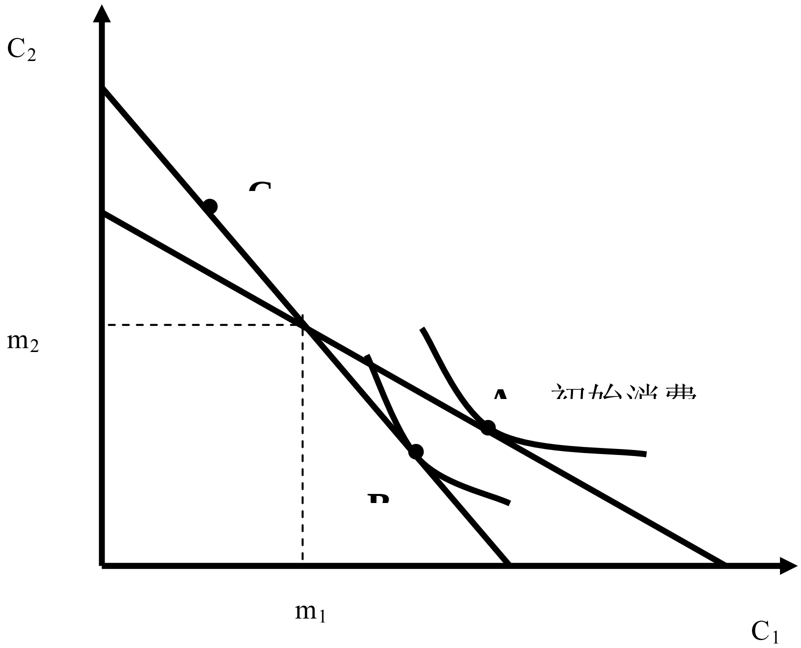


$r\uparrow$，slope↑=-(1+r)，新的消费点处于较高的位置。

一定会继续充当贷款者，这可以用显示性偏好原理来解释：如果消费者最初在禀赋点以左消费，那么说明这个消费点是禀赋点以右点的显示性偏好，因为以右的点是可以支付的起的。由于初始消费点是禀赋点以右点的直接显示偏好，因此它一定会在禀赋点以左进行消费。

3．在利率上升时，如果他是一个借款者，继续充当借款者会使他的情况变坏，即遭受福利损失。如下图：

4．



A 是 B 的直接显示偏好，1）在 A 和 B 都能够支付的起的情况下，消费者选择 A 而不是选择 B；2）当消费者选择 B 时，A 一定是支付不起的。3）但消费者转为贷款者时，福利水平不能确定。

3．借款者在利率下降时仍然充当借款者福利水平提高。（图略）

4．贷款者在利率下降时仍然充当贷款者福利损失。（图略）

结论：（1）如果是一个贷款者，利率上升以后它仍然是一个贷款者；如果是一个借款者，当利率下降时他仍然会是一个借款者。这种情况下福利水平会提高；（2）利率下降可能会使贷款者变为借款者，利率上升可能会使借款者变为贷款者，这时的福利水平变化不能用显示偏好来说明。

（三）跨期选择与斯勒茨基方程

用该方程来分析利率变化对当期消费的影响。（假设r↑），提高了利率就如同提高了当期消费的价格，价格变化的影响为:

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta P_1}=\frac{\Delta C_1^s}{\Delta P_1}+(m_1-C_1)\frac{\Delta C_1^m}{\Delta m}$$

当期消费的增减取决于m_1-C_1的符号：

m_1-C_1〉0：贷款者，不确定

m_1-C_1〈0：借款者，消费减少，r↑促使他减少借贷，减少消费。

（四）利率变化对均衡点位置的影响（可以不讲）

一种观点认为可以处于原均衡点的左方或者右方，这取决于变化后替代效应和收入效应，哪一个的影响作用比较大？

另一种观点认为新的均衡点一定处于原均衡点以左，其基本观点是：根据消费者均衡条件一定有：

$$\begin{cases}\max\limits_{C_1,C_2} u(C_1,C_2)\\ s.t. C_1+C_2=m_1+m_2+r(m_1-C_1)\end{cases}$$

$$(1+r)=\frac{\partial u(C_1,C_2)/\partial C_1}{\partial u(C_1,C_2)/\partial C_2}(=\frac{u_1}{u_2})$$

当r↑时，为了满足均衡条件就要求u_1↑或者u_2↓，或者u_1相对于u_2上升。根据MU递减的规律，要使得MU上升或者下降就必须相应地增加或减少对商品的消费。由此可以判断均衡点的位置。因此可以得到以下结论：

（1）当r↑时，为了满足均衡条件，u_1↑，对C_1的消费就意味着减少，所以新均衡点处于原均衡点以左；

（2）当r↑时，如果u_2↓就意味着C_2消费的增加，新均衡点处于原均衡点左右不确定；

（3）当r↑时，u_1↑的幅度比u_2↑的幅度更多，新的均衡点不确定；

（4）当r↑时，u_1↓的幅度小于u_2↓的幅度，新的均衡点仍然不确定；

由以上分析可以看出：

1、只有当$\overline{u_2}$时，r↑才会使得新均衡点处于原均衡点以左，这只是一种可能的情况，而不是必然的情况。因为当利率变化时，人们不仅要调整现期消费，而且同时要调整未来消费。

2、根据r变化的福利分析，当r↑时，如果一个储蓄者，他仍然会继续充当储蓄

者，但是他会增加储蓄还是减少储蓄要取决于r变化后的收入效应。其中有一种选择：减少一些储蓄，在保证未来消费增加的情况下增加一些当期消费。这样u_1和u_2都会下降，但只要保证u_1下降比u_2小就能够满足均衡条件。

3、在跨期选择中，u_1和u_2实际表示的是“货币的边际效用”即当r变化使得收入发生变化时，每增加或减少一元钱的边际效用。如果在两个时期中的货币总量(m_1+m_2)相同，而且$r(C_1-m_1)$不足以影响你的收入水平时，u_1和u_2不一定表现出递减的性质。在这种情况下，将不存在跨期选择的问题。比如谁会因为银行利息率上升一个百分点而改变跨期选择呢？老百姓可能不会；食利阶层会。

四、通货膨胀条件下的跨期选择

放弃价格不变的假设。这时的基本问题是确定一个实际利率以抵消价格变化的影响。也就是说消费者在根据r确定自己的现期消费和未来消费时，一定要将价格因素剔除出去。实际利率如何计算？

首先，设当期价格$P_1=1$，未来价格为P_2，

未来时期预算约束为P_2C_2=第二期可以花费的货币量

第二期可以花费的货币量为：$P_2m_2+(1+r)(m_1-C_1)$

故有：$P_2C_2=P_2m_2+(1+r)(m_1-C_1)$

$$C_2=m_2+\frac{1+r}{P_2}(m_1-C_1)$$

由此可以看出C_2不仅取决于r，还取决于价格P_2。

其次，设通货膨胀率为π

$P_2=(1+\pi)P_1=1+\pi$（因为$P_1=1$）

$$C_2=m_2+\frac{1+r}{1+\pi}(m_1-C_1)$$

最后，设实际利率为 ρ（即剔除通货膨胀以后的利率），则有

$(1+\rho)(1+\pi)=1+r$

即实际价格乘以通货膨胀率应当等于名义价格，移项后得到：

$$1+\rho=\frac{1+r}{1+\pi}$$
$$\rho=\frac{1+r}{1+\pi}-1=\frac{r-\pi}{1+\pi}$$

利率需要能够弥补通货膨胀率，才是实际利率。如果 π 比较小的话，就可以近似地得到实际利率：$\rho=r-\pi$，即实际利率等于名义利率减去通货膨胀率。

Chapter 12　不确定性

本章考察不确定条件下消费者的消费选择，即不同状态下的消费。主要讲述四个问题：即不确定条件下的预算约束、不确定条件下消费者的偏好、消费者均衡和对待风险的态度。

一、不确定条件下的预算线

（一）两个基本假设

首先，假定不确定条件下一般只有两种状态（或两种可能性）。比如中彩和不中彩，发生损失和不发生损失，股票价格上升或者股票价格下降。消费者最优选择的实质表现为对两种状态条件下商品消费数量的选择，但其表现为在一定概率条件下对两种状态所做的选择。比在保险的例子中，发生损失和不发生损失是两种不同的状态，消费者面对的选择问题是，在一定概率条件下是投保还是不投保。

其次，假定不确定条件下的消费选择是一种货币选择。由于获得一定的货币就可以购买一定量的商品，因此可以将商品消费选择问题转化为货币选择问题。比如在抽彩的例子中，中奖和不中奖就是两种状态，在一定概率的情况下购买彩券和不购买彩券的消费是多少实际上就取决于在两种状态下消费者拥有的货币数量。因此，消费者的选择实际上是一种货币选择。

（二）不确定条件下的预算线——以保险为例。

假定消费者拥有 35,000 美元，其中 10000 美元为风险资产；消费者面临两种状

态即好的（good）和不好的（bad），在这两种状态条件下消费者所拥有的货币数量分别为C_g和C_b；消费者的初始禀赋为如果不保险在两种状态条件下会拥有多少货币数量，即$\omega=(\omega_g,\omega_b)=$（35,000 美元，25,000 美元）。设 r 为保险费率；γ 为风险发生的概率；k 为投保金额，k=10,000 美元；

消费者投保的目的是为了通过放弃好的状态下的消费来获得坏的状态下的补偿。假定保险费率按照风险发生的概率来确定，为 0.01，可以计算出在两种状态条件下消费者拥有的货币数量。

在发生损失的条件下消费者将拥有的货币或财富数量（概率为 0.01）：

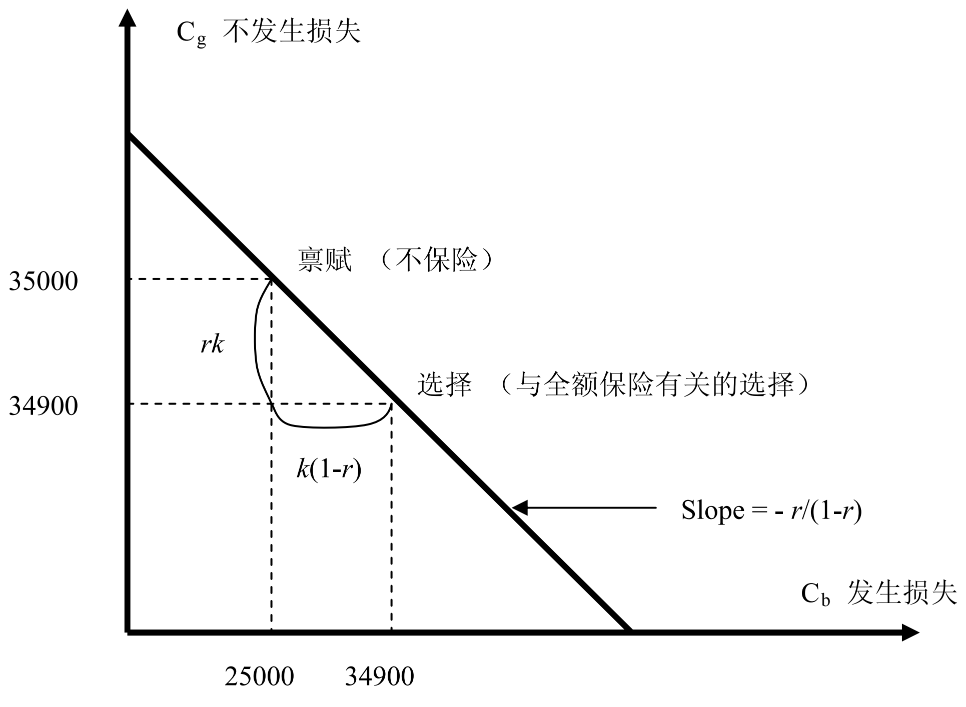
25,000 美元 $+k-rk=25{,}000+$（1-r）k

$=25{,}000+10{,}000-100=34{,}900$

在不发生损失的条件下消费者将拥有货币财富：（概率为 0.99）

35,000 美元 $-rk=35{,}000-100=34{,}900$ 美元

因此，在对 10,000 元进行全额保险的情况下，无论是发生还是不发生损失，他都将拥有 34,900 美元的财富。他的最优消费或者货币选择就是$(c_g^*,c_b^*)=$（34,900，34,900）。如下图所示：



预算线的斜率=$\frac{\Delta c_g}{\Delta c_b}=-\frac{rk}{(1-r)k}=-\frac{r}{1-r}$

二、不确定条件下的偏好

（一）消费者的偏好与概率有关

对于不同状态下货币收入的偏好不仅取决于这些货币收入的大小，而且取决于不同状态发生的概率；或者说偏好不仅取决于消费水平，而且取决于这些消费可能发生的概率。如果一个抽彩的获奖概率很高的话，与不购买彩券时的可能消费相比，消费者一定更加偏好购买奖券时的消费。

（二）不同状态下的消费偏好可以用预期效用函数来描述

设c_1和c_2为不同状态下的消费（由货币收入表示）π_1和π_2为两种状态发生的概率，预期效用函数就可以表示为：$u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)$，即用概率加权计算的两种状态的平均效用。

1.以线性偏好为基础的预期效用函数

$u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)=\pi_1c_1+\pi_2c_2$

2．以柯布-道格拉斯偏好为基础的预期效用函数

$u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)=c_1^{\pi}c_2^{1-\pi}$，单调变换后：

$\ln u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)=\pi\ln c_1+(1-\pi)\ln c_2$

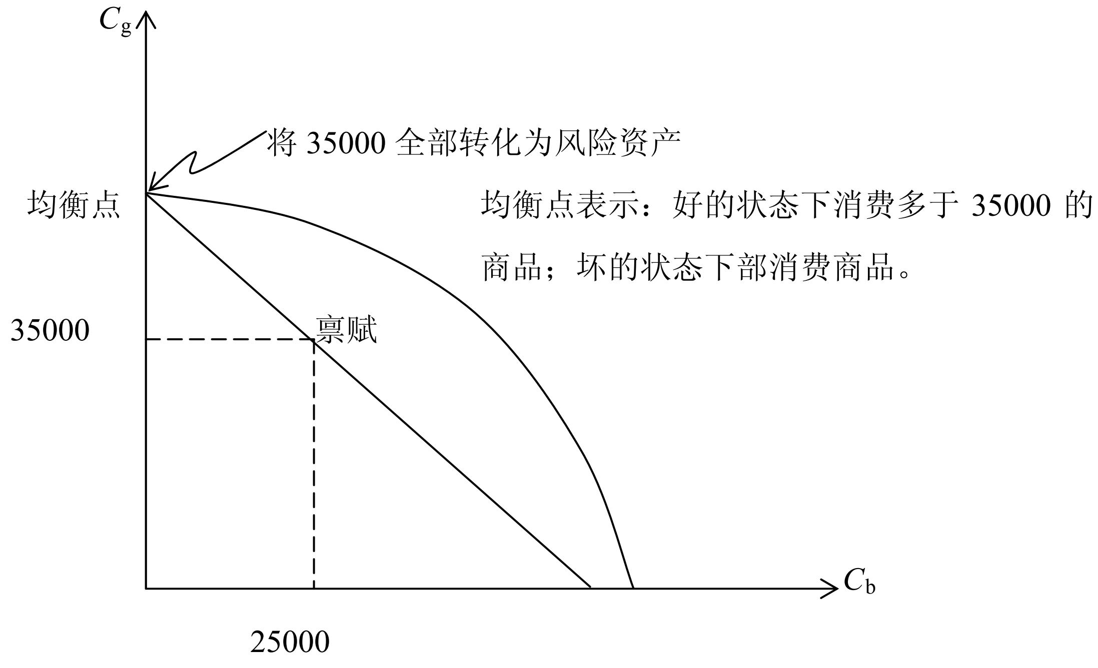
三、不确定条件下的消费者均衡

在不确定的条件下，消费者均衡仍然由反映消费者偏好的无差异曲线与预算线

相切或相交点来决定，在这一点上消费者的边际替代率等于价格比率。这与确定条件下的消费者均衡的选择是一样的。当然，均衡将取决于偏好的性状，如果是凸性偏好的就有内在解，而如果是凹性偏好的则具有边界解。

（一）凹性偏好条件下的均衡

在凹性偏好条件下，无差异曲线凹向原点，表示消费者偏好极端消费。在保险的例子中表明：（1）消费者宁愿冒发生损失而得不到任何补偿的风险而选择不发生损失时的消费。（2）或者消费者不仅不投保，而且将其全部货币都转化为风险资产。在这种条件下，如果不发生损失将拥有更多的货币，如果发生损失则丧失所有货币。(如下图所示)

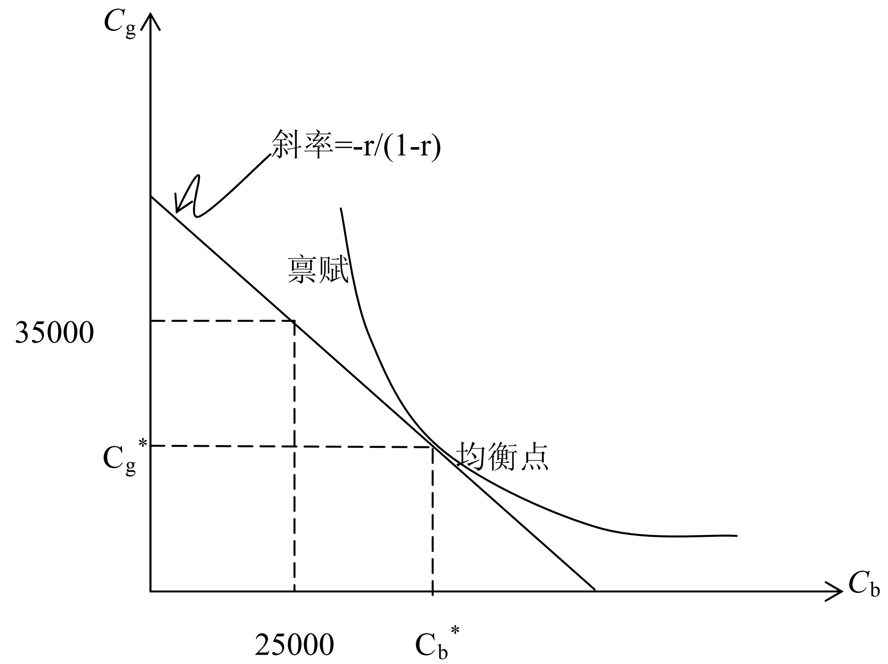


（二）凸性偏好条件下的均衡

凸性无差异曲线表示消费者宁愿在两种状态之间保持一种平均消费，而不愿在一种状态下消费很多，而在另一种状态中消费很少。假定反映消费者偏好的预期效用函数为$u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)=\pi_1 c_1+(1-\pi_1)c_2$，则消费者的均衡条件必然满足：

$$\frac{(1-\pi_1)\Delta u(c_2)/\Delta c_2}{\pi_1 \Delta u(c_1)/\Delta c_1}=\frac{r}{1-r}$$

即边际替代率等于预算线的斜率，它表示消费者宁愿按照一个$\frac{r}{1-r}$的比率选择两种状态的消费。在不发生损失的状态下放弃 $r = 0.01$ 财富可保证在发生损失的状态下有 $1 - r = 0.99$ 的消费。如下图所示。



四、预期效用函数

研究不确定性问题，我们经常使用一种特殊形式的效用函数，即预期效用函数。设：$u(c_1)$为c_1消费时的效用；$u(c_2)$为c_2消费时的效用；π_1和π_2为两种消费可能发生的概率。预期效用函数可表示为：

$$u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)=\pi_1 u(c_1)+\pi_2 u(c_2)$$

预期效用函数具有以下几个特点：

（1）预期效用函数可以通过对普通效用函数的单调变换而获得。比如对柯布道格拉斯效用函数进行对数变换，可得到 $\ln u(c_1,c_2,\pi_1,\pi_2)=\pi_1 \ln c_1+\pi_2 \ln c_2$，它就具有预期效用的性质。

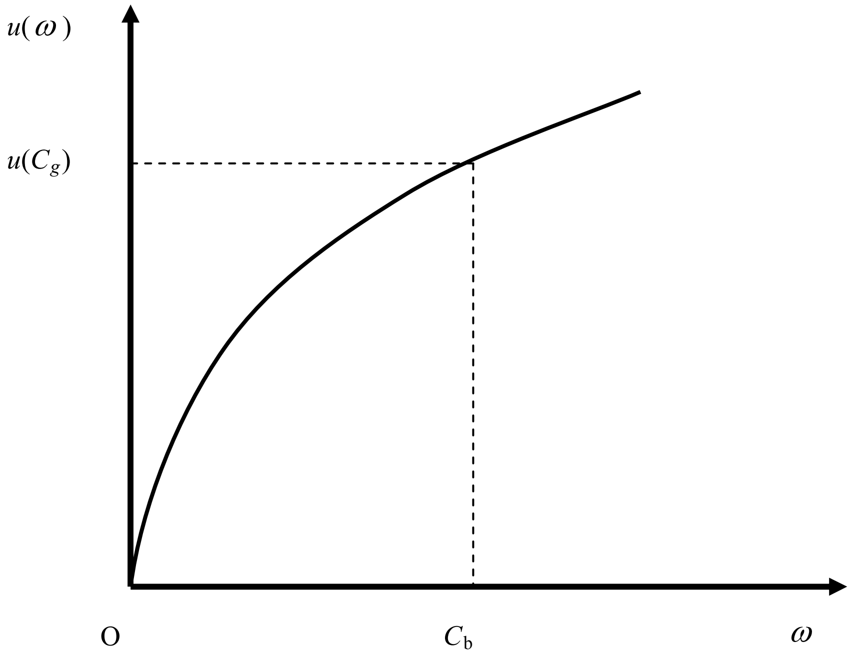
（2）预期效用函数的正仿射变换仍然保持预期效用函数的性质，即预期效用函

数“唯一适于仿射变换”。由于正仿射变换（在原效用函数上乘以一个正数再加上一个常数）是一种特殊形式的单调变换，因此表示相同的偏好。

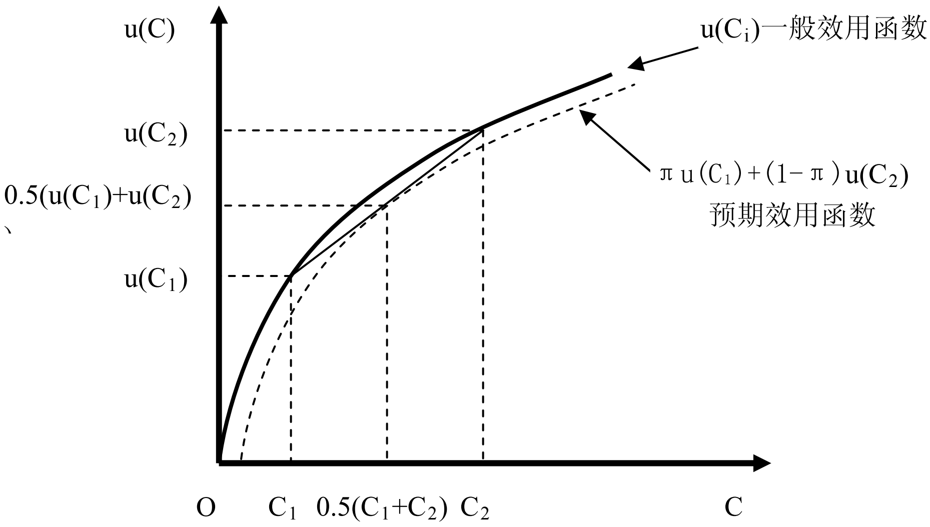
（3）预期效用函数表示的是用概率作为权数计算的两个消费水平(c_1,c_2)的加权平均数，因此表示的是一种平均效用。可加性是预期效用函数的基本特征，其建立在“独立性公理”之上。预期效用函数的这种可加性符合不确定性情况下选择的独立性假设，即每种状态中的消费是相互独立的，当进行一种消费时，另一种消费是不可能发生的。比如在获奖条件下的消费在没获奖状态下是无法消费的。因此，消费者必须同时考虑两种状态下的可能消费，并使平均效用达到最大。这样我们就必须用两种状态下的平均效用表示消费者从事不确定消费（保险、抽彩）时的效用水平。

（ 4 ）期效用函数与一般效用函数之间的关系

$u(c_i)$是一般效用函数，它表示当财富为一定时，消费一定量的商品可以带来的效用。它是一个单调连续函数，可凸可凹。下图所示为凸函数。



预期效用函数是根据一般效用函数计算的，是以概率为权数计算的两个一般效用函数的平均值，即$\pi_1 u(c_1)$+（1-π_1）$u(c_2)$。因此，$u(c_i)$的性质（凹凸性）决定着预期效用函数的性质。当$u(c_i)$是凸函数时，预期效用函数也是凸性的。当$u(c_i)$是凹函数时，预期效用函数也是凹的。如下图所示：



五、消费者对待风险的态度

已知一般效用函数，通过计算预期效用函数和预期值的效用函数，并比较二者的大小，可以判断消费者对待风险的态度，即风险厌恶，风险偏好和风险中性。在此以抽彩为例，不同的抽彩代表着不同的风险，因此可以用来分析不确定条件下的选择。

（一）风险厌恶：

消费者面对一次抽彩：他拥有 10 元财富，购买彩券需花 5 元；奖金是 10 元。获奖和不获奖的概率各是$\frac{1}{2}$。

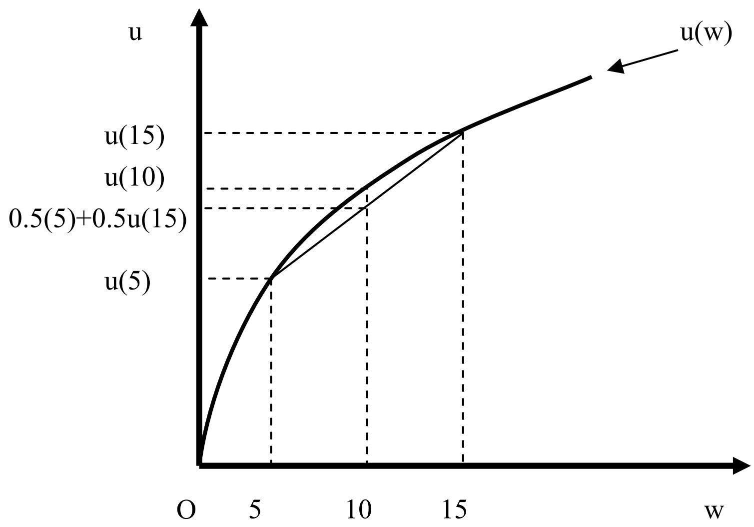
假定获奖时的效用是 $u(15)$，不获奖的效用是 $u(5)$，则预期效用为：$\frac{1}{2}u(15)+\frac{1}{2}u(5)$，其表示在两种状态下的平均效用水平；获奖和不获奖两种状态下财富的平均值是：$\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(15)$，而平均值（预期值）的效用是：$u(\frac{1}{2}(5)+\frac{1}{2}(15))$。

如果消费者认为抽彩预期值的效用大于抽彩的预期效用,即满足条件：

$$u[\frac{1}{2}(\omega_1)+\frac{1}{2}(\omega_2)]>\frac{1}{2}u(\omega_1)+\frac{1}{2}u(\omega_2)$$

我们就说他是风险厌恶者。这时消费者偏好的是抽彩的预期值而不是抽彩本身，消费者比较注重财富而对博彩本身缺乏乐趣，或者认为博彩的乐趣不能代替财富的拥

有数量。风险厌恶者效用函数曲线一定凹向横轴。如下图所示：

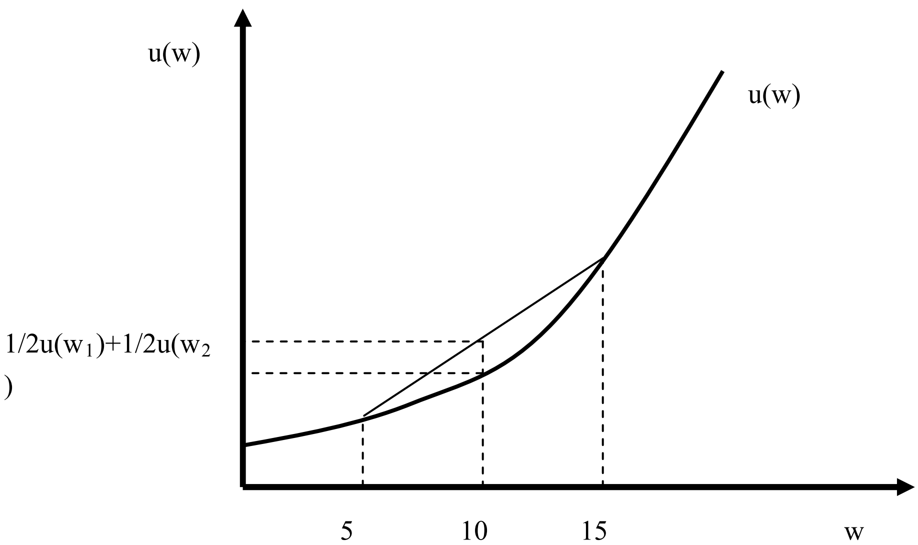


（二）风险爱好

如果消费者认为抽彩的预期效用大于抽彩预期值的效用,即满足条件：

$$u[\frac{1}{2}(\omega_1)+\frac{1}{2}(\omega_2)]<\frac{1}{2}u(\omega_1)+\frac{1}{2}u(\omega_2)$$

我们就说他是风险爱好者。这时消费者偏好的是抽彩本身，他认为获奖时可以多消费商品，即使不获奖也可以享受博彩的刺激。风险爱好者的效用函数曲线一定凸向横轴。如下图所示。

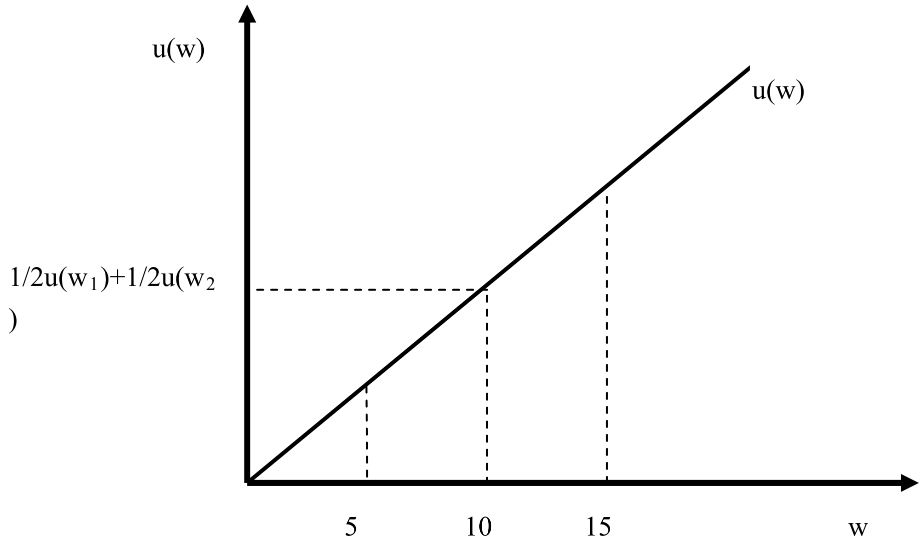


由以上分析可以看出，一个凸性的预期效用函数表明消费者偏好风险，而一个凹性的预期效用函数表明消费者厌恶风险；

（三）风险中性

如果预期效用函数是线性的，则表明消费都对风险持中性态度。这时，预期值的效用等于预期效用，即

$$u[\frac{1}{2}(\omega_1)+\frac{1}{2}(\omega_2)]=\frac{1}{2}u(\omega_1)+\frac{1}{2}u(\omega_2)$$



举例：保险需求

我们可以利用不确定条件下的消费者选择模型来分析保险需求，即求解保险金额 k。因为在保险问题中消费者决策的核心是对多少财产进行保险，即全额保险还是部分保险。

首先，消费者根据以下均衡条件做出选择：

$$\text{MRS}=-\frac{-\pi\Delta u(c_2)/\Delta c_2}{(1-\pi)\Delta u(c_1)/\Delta c_1}=-\frac{r}{1-r}$$

其次，从保险公司来看，要根据风险发生的概率来确定自己的保险金收费比率，使其预期利润为零，即保费正好支付其成本（以完全竞争为假设）。当预期利润为零时，有：

$$p = rk - (\pi k + (1-\pi)0) = rk - \pi k = 0$$

其中π为风险发生的概率；rk为保险费收入；πk为发生损失的赔偿费用；$(1-\pi)0$——不发生损失不赔偿。这意味着$r=\pi$（保险率等于风险发生的概率）。

用π代替r，并把π消去，消费者的均衡条件变为：

$$\frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1} = \frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2}$$

这是当保险费率等于风险发生的概率时，或者保险公司没有利润时的消费者均衡条件。其中$\frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1}$为损失发生时一元钱的边际效用；$\frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2}$为损失不发生时一元钱的边际效用。其表明货币的边际效用一定相等。

再次，假定消费者是厌恶风险的，则其预期效用呈凹性。因此在任何一种状态下，当货币收入增加时，货币的边际效用就下降。由于c_1和c_2分别表示两种状态下消费者的货币数量，因此

$$当 c_1 > c_2 时，有 \frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1} < \frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2}$$

$$当 c_1 < c_2 时，有 \frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1} > \frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2}$$

因此，当$\frac{\Delta u(c_1)}{\Delta c_1} = \frac{\Delta u(c_2)}{\Delta c_2}$时，一定是$c_1 = c_2$，即在两种状态下持有的货币量相同。

最后，根据例子中的数据，不发生损失时的货币财富$c_1 =$ 35,000-rk；发生损失时的货币财富c_2=25,000+k-rk。所以，当 $c_1 = c_2$时有：

$$35{,}000 - rk = 25{,}000 + k - rk \qquad 即\ k = 10{,}000（求解的结果）$$

这表明，在“公平”保险的前提下（即保险公司按$r=\pi$的比率收费），厌恶风险的消费者将会选择全额保险，即对可能发生损失的 10,000 元财产全额保险。

Chapter 14 消费者剩余

消费者剩余是根据需求行为估计效用的一种方法。可以用消费者剩余考察价格变化对消费者福利的影响。主要是考察消费者剩余的度量问题，主要介绍两种方法：一种是用效用量的变化来度量；一种是用货币支出数量的变化来度量。

一、 保留价格

保留价格就是消费者为获取一件商品所愿意支付的最高价格，或者使消费者消费或不消费刚好无差异的那个价格。

以离散商品为例，当价格为r_1时，消费者愿意购买一单位商品（但也可以不购买）；当价格为r_2时，消费者愿意再购买一件商品（但也可以不再购买）。消费者在保留价格上之所以可购买也可不购买是因为这时购买和不购买给他的效用是一样的，或者说无差异。

因此保留价格可以用效用函数来描述。假定反映消费者偏好得效用函数为拟线性效用函数$u(x_1,x_2)=v(x_1)+x_2$，（因为拟线性效用下x_1不受收入水平变化的影响，故不存在收入效应），收入为m。

当保留价格为r_1时，

$$v(0)+m = v(1) + (m - r_1) \text{ ，所以 } r_1 = v(1)$$

当保留价格为r_2时，

$$v(1)+ (\mathrm{m}- r_2)= v(2)+ (\mathrm{m}-2\, r_2)\text{, 所以 } r_2 = v(2) - v(1)$$

依次类推，可以得到：$r_n = v(n) - v(n\text{-}1)$

这表明，诱使消费者多消费一件商品时的保留价格实际上就是消费者从多消费一件商品中所获得的效用增量。因此，给定消费前后的效用水平就可以确定保留价格。

二、保留价格和需求

保留价格和商品的市场价格p之间存在密切的关系，即$r_n \geq p \geq r_{n+1}$。也就是给定价格 p，我们就能找到它在保留价格表中的位置（或处于何种保留价格水平上），从而确定需求数量。而且，当$r_n \geq p \geq r_{n+1}$时，消费者选择消费 n 件商品，因为这时的最大支付意愿r_n大于实际支付的价格p，因此会有剩余。

证明：$r_n \geq p \geq r_{n+1}$

假定当价格为 p 时，消费者做出消费 6 单位的选择，对理性消费者来说这一定满足条件：$v(6) + m - 6p \geq v(x) + m - px$，表示消费$(6, m\text{-}6p)$的效用至少与其它消费束$(x, m\text{-}px)$一样大。这个不等式一定对以下两种情况成立：

（1） $x = 5$，

$$v(6)+m-6p \geq v(5)+m-5p$$

$$v(6)-v(5) = r_6 \geq p$$

（2）$x = 7$，即

$$v(6)+m-6p \geq v(7)+m-7p$$

$$p \geq v(7)-v(6)= r_7$$

所以有：$r_6 \geq p \geq r_7$

一般地：$r_n \geq p \geq r_{n+1}$

所以，已知效用就可以确定保留价格，在给定商品价格 p 时，就可以确定商品的消费数量。由于边际效用是递减的，所以诱使消费者多消费者一件商品所需的效用增量或保留价格也是趋于下降的。

三、总消费者剩余和净消费者剩余

根据上述保留价格与效用和商品价格之间的关系，如果已知需求（它以反需求函数或者商品价格的形式出现），就可以反推出在该消费数量上的效用。这一效用量可以用来反映消费者的福利。这可以有两种衡量方法，即总消费者剩余和净消费者剩余。

（一）总消费者剩余

总消费者剩余只考虑效用量，不考虑支出和收入。仍用离散商品的形式做分析。总消费者剩余等于每一单位商品消费上保留价格的总和。证明：

由于已知：$r_1 = v(1) - v(0)$

$$r_2 = v(2) - v(1)$$

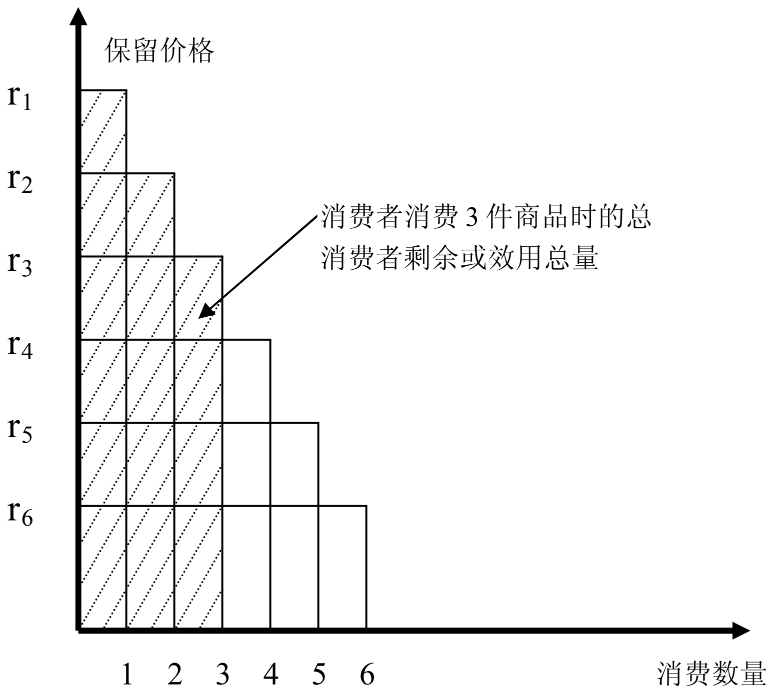
$$r_3 = v(3) - v(2)$$

两边求和得：$r_1 + r_2 + r_3 = v(3) - v(0)$。

由于 $v(0) = 0$，所以 $v(3) = r_1 + r_2 + r_3$

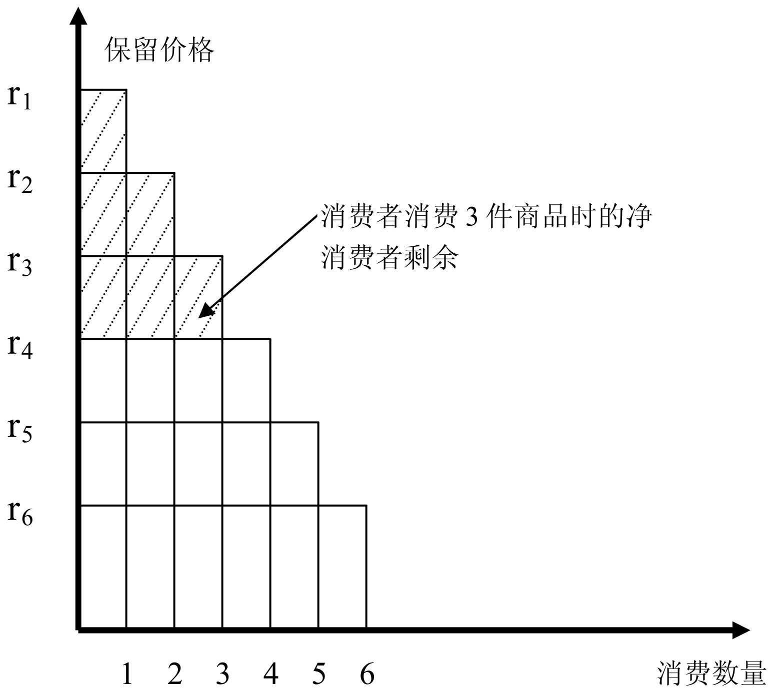
这样就根据保留价格求出了消费 3 件商品时的效用总量。总消费者剩余或者总效用就是诱使消费者消费每一件商品的保留价格之和。

几何描述：



（二）净消费者剩余

它等于总消费剩余减去实际的消费支出，因此它不仅要考虑效用量，而且还要考虑支出和收入。设 p 为商品的市场价格，m 为消费者的全部收入。消费 n 件商品时的总剩余或者效用为：$v(n) = \sum_{i=1}^{n} r_i$；消费 n 件商品时的总支出为：pn；净消费者剩余为：$v(n) + m - pn$。 其中 $m - pn$ 为用于其它商品的支出。几何描述：



（三）消费者剩余的其它解释（指净剩余）

1. 保留价格与实际支付价格之间的差额。

消费第一件商品时的剩余是 r_1-p

消费第二件商品时的剩余是 r_2-p

消费第 n 件商品时的剩余是 r_n-p

全部消费者剩余就是：

$CS = r_1 - p + r_2 - p + \ldots + r_n - p = r_1 + r_2 + \ldots + r_n - np = v(n) - np$

2．使消费者放弃对某种商品的全部消费而必须补偿给它的那个货币数量。

设 R 为放弃 n 商品消费所需补偿的货币，pn 为消费 n 商品所支付的货币， 放弃消费的效用应等于消费时的效用，故

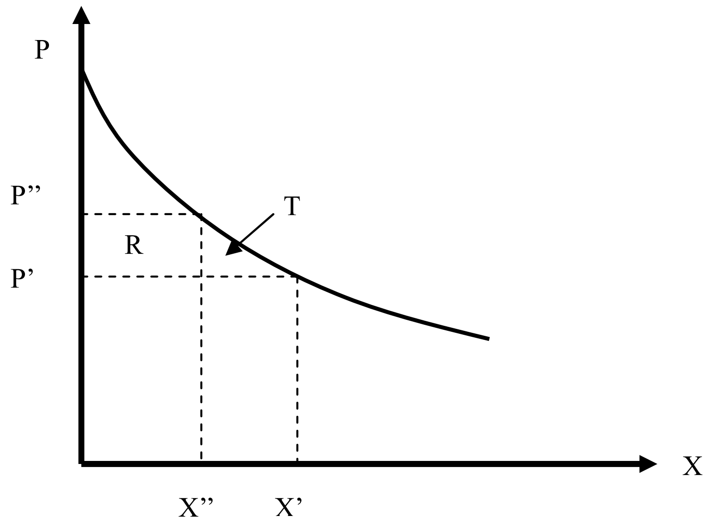
$$v(0) + m + R = v(n) + m - pn$$

$$R = v(n) - pn$$

（四）消费者剩余的近似表示

如果需求是连续的而不是离散的，总消费者剩余就可以近似地表述为需求曲线以下的面积。而净消费者剩余就可以表示为需求曲线以下，价格曲线以上的面积部分。

当价格变化时，净消费者剩余将发生变化。比如价格由 $p^{'}$ 上升为 $p^{''}$，福利损失为阴影部分。其中 R 表示由于价格上升所多花费的货币数量；T 衡量的是由于消费减少而损失掉的那部分商品的价值。它是一个近似值。



四、补偿变化和等价变化

前面所使用的消费者剩余的概念是通过衡量“效用函数”来考察消费者的福利变化。这里我们利用前面介绍过的货币侧度的效用函数来描述一个更加精确的消费者剩余的测度方法。

（一）货币测度的效用和效用函数

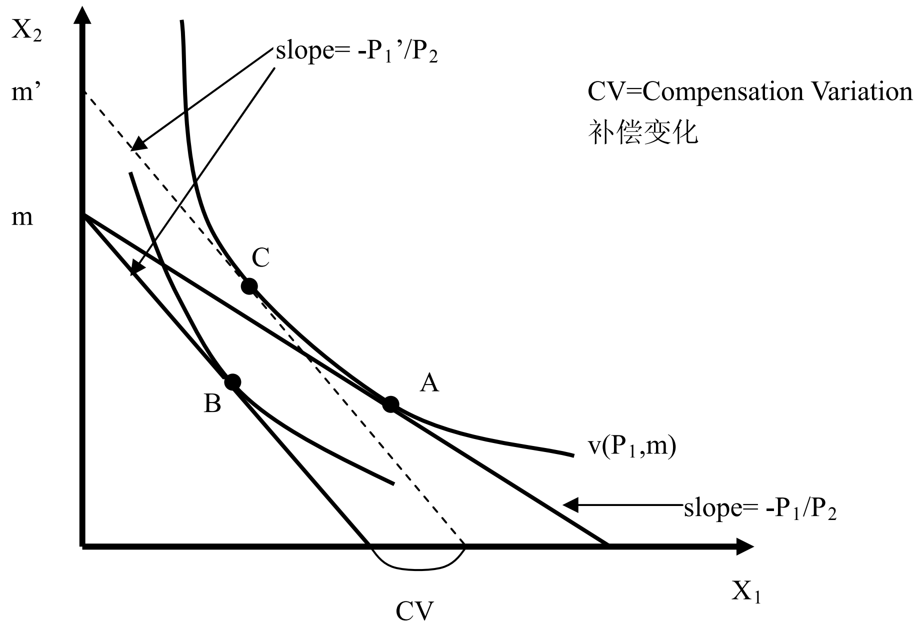
当消费者改变消费结构和消费数量时，其效用必然发生变化。由于效用的变化表现在商品消费数量或货币支出的变化上，因此我们可以用货币支出数量的变化来测度效用的变化。这种用货币单位度量的效用就是货币测度的效用。

货币测度的效用函数是在价格由 p_1 变化为 $p_1^{'}$ 时，为维持原价格条件下的效用水平所需要的最低支出。其可表示为：$u(p_1^{'}, p_2, m) = e(p_1^{'}, v(p_1, m))$ 。由于这种效用函数只包含可观测变量 p 和 m，所以有许多便利应用。

$e(p_1^{'}, v(p_1, m))$ 为支出函数，其表示当价格由 p_1 变化为 $p_1^{'}$ 时，为了维持价格变化前的效用水平不变而需要支出的最小的货币数量。

（二）补偿变化（Compensation Variation）

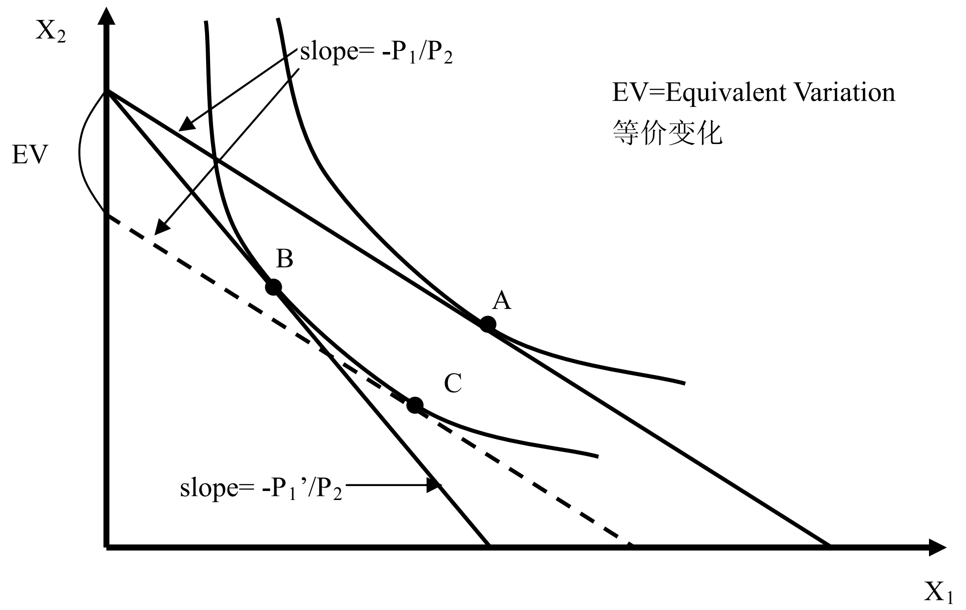
它衡量的是在价格变化以后，要使消费者维持以前的效用水平而需要做出的货币补偿数量。比如价格 p_1 上升为 $p_1^{'}$，但 p_2 价格不变，其在几何表现为预算线的移动距离。图中，C 点表示价格变化并得到货币补偿后的最佳消费点。



（三）等价变化（Equivalent Variation）

它衡量的是要使消费者维持价格变化以后的效用水平而必须从消费者那里取走的货币数量。这种收入变化与价格变化是等价的，因为这种收入的变化恰好就是价格提高后使消费者失去的那部分货币。

其可用下图描述：原消费点为A，当价格P_1上升时，新的消费点为B，如果保持新的效用水平不变，在原价格水平上的均衡点为C。图中的EV即等价变化。

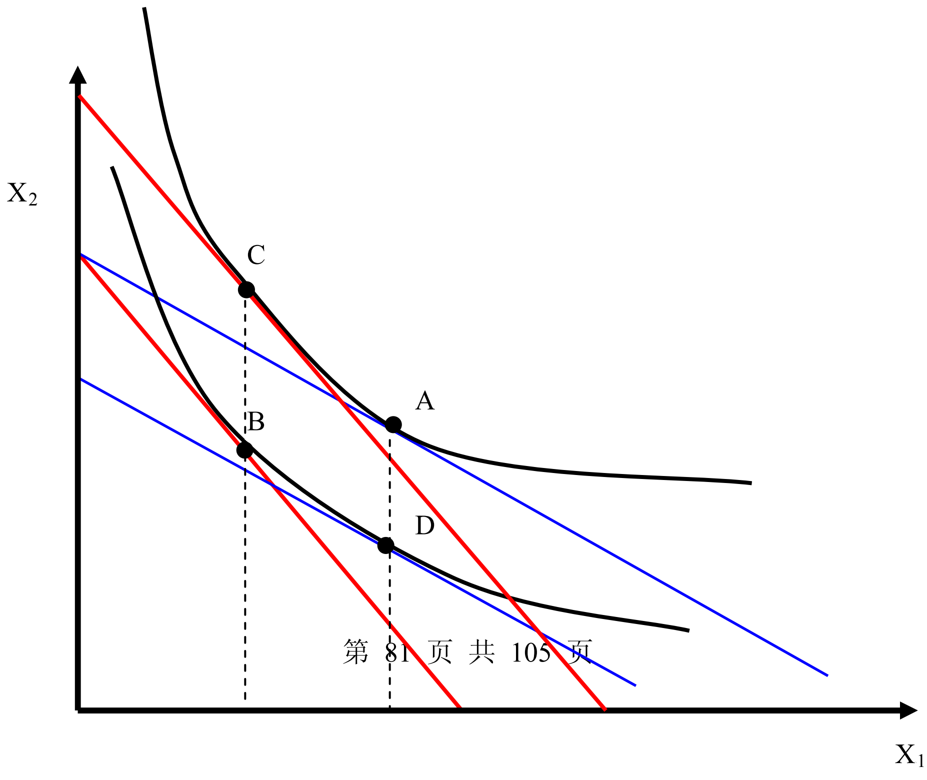


（四）拟线性效用函数的补偿变化和等价变化

1．在拟线性效用条件下，CV 和 EV 是相同的。

从几何上说，由于两条无差异曲线是垂直平行移动的，两线间的距离相等，因此无论是按照变化后的价格，还是用变化前的价格来衡量效用的变化，都表现为相同的两条平行的预算线之间的距离。

如下图所示。价格变化前，最佳消费点为 A，价格变化后，最佳消费点为 B。由 B 到 C 的移动是 CV，由 A 到 D 的移动是 EV。



代数法证明：$EV=CV$

假定价格由 p_1 变为 p_1'， p_1 的变化将改变 $x_1=x_1(p_1)$， $x_1'=x_1'(p_1')$ 的消费量。价格变化前的效用函数是：$u=v(x_1)+m-p_1x_1$；价格变化后的效用函数是：$u=v(x_1')+m-p_1'x_1'$

令 C 为补偿变化，这是在价格变动后为维持原有的效用水平而必须补偿给消费者的那个货币数量。加上这一货币数量的价格变化后的效用函数一定等于价格变化前的效用函数，即

$$v(x_1')+m+\mathrm{C}-p_1'x_1'=v(x_1)+m-p_1x_1$$

求解 C，得

$$C=v(x_1)-v(x_1')+p_1'x_1'-p_1x_1=[v(x_1)-p_1x_1]-[v(x_1')-p_1'x_1']$$

令 E 为等价变化，这是价格变化前为保持价格变动后的效用水平而可以从消费者那里取走的那个货币数量。减去这一货币数量的价格变化的效用函数一定等于价格变化后的效用函数，即

$$v(x_1')+m-p_1'x_1'=v(x_1)+m-E-p_1x_1$$

求解 E，得

$$E=v(x_1)-v(x_1')+p_1'x_1'-p_1x_1=[v(x_1)-p_1x_1]-[v(x_1')-p_1'x_1']$$

由此可以看出：C = V = 净消费者剩余的变化。

2．在拟线性效用函数下，消费者剩余就是反需求函数的积分。

拟线性效用函数常被用于福利经济学，因为它有一个简单的需求结构，即需求只取决于价格，其收入效用为零。根据拟线性效用函数确定消费者的最大化问题：

$$\max\ v(x)+y$$
$$s.t.\quad px+y=m$$

将 $y=m-px$ 代入目标函数，得

$$\max\ v(x)+m-px$$

求 x 的一阶导数，得： $v'(x)=p$

这意味着反需求函数 $p(x)$等于边际效用，即 $p(x)=v'(x)$。据此，可以求出当价格为 $p(x)$时，消费者消费 x 商品时的效用：

$$v(x)=v(x)-v(0)$$

$$=\int_0^x v'(x)dx=\int_0^x p(x)dx=\int_0^x p(t)dt$$

这一积分恰好表示的是需求曲线 $p(x)$以下的面积，即总消费者剩余。净消费者剩余的积分表示为：

$$u(x)=v(x)+m-px$$

$$=\int_0^x p(t)dt+m-px$$

Chapter 17: 技术

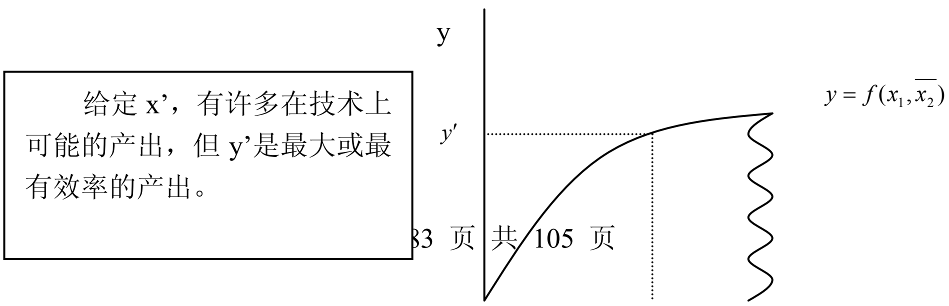
企业的目的是寻求利润最大化，但是面临三个约束：一是技术约束，二是经济约束，三是市场约束。本章考察技术约束问题，即某一种生产计划在技术上是否可行。

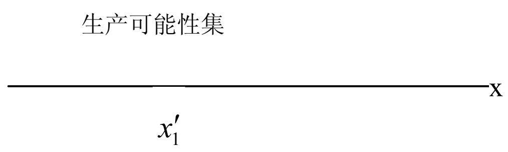
一、 技术约束的描述方法

主要有两种方法：一种是在一定要素投入的条件下考察生产的可能性，即一定量投入可以生产多少产出；另一种方法是在产出水平一定的条件下，考察对要素投入的需求，即一定量的产出可以用多少要素投入来生产。由此可以定义两个集合，即生产可能性集合与投入要求集合。

（一）生产可能性集合

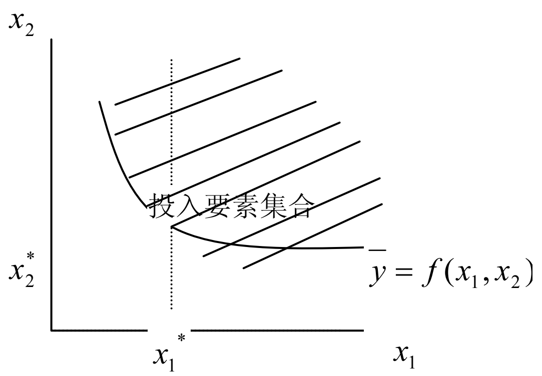
表示在一定投入的条件下，所有在技术上可行的产出量集合。如果可变投入只有一种，就表示在所有投入量水平上可能的产出量的集合。这一集合的边界，即各种投入水平上的最大产出的集合或在技术上最有效率的产出的集合。





（二）投入要求集合

即生产一定量的产出技术上要求的要素投入的集合。在有两种要素投入的情况下，可以用等产量线以上的区域来表示。等产量是这一集合的边界，表示技术上可行的生产一定产出的最少要素投入的集合。因此，它表示的也是最有效率的生产可能性集合。



阴影区域表示较多的投入也可以生产产出 y。

（三）生产函数

上述两个集合的边界都可以用生产函数来表示，因此一个生产函数往往被定义为转换函数（$T:R^n \to R, T(y)=g-f(x_1,x_2)=0$），即在技术上最有效率的投入与产出之间的对应关系。比如生产可能性集合的边界可表示为 $y=f(x_1,\overline{x_2})$；而投入要求集边界可表示为 $\overline{y}=f(x_1,x_2)$。

二、技术的特征

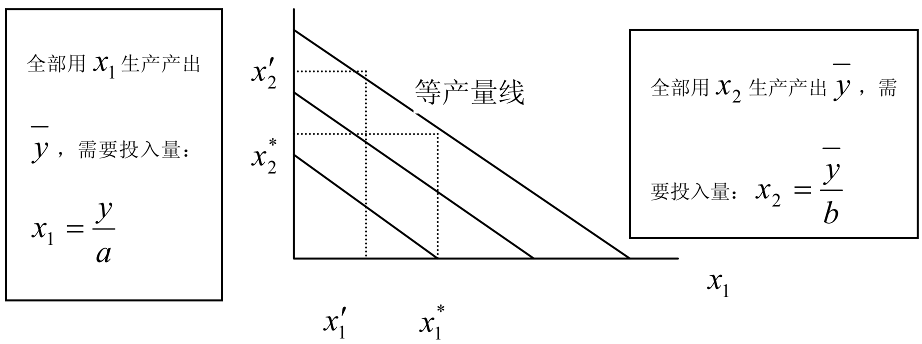
技术的特征是指不同的要素投入之间是否具有可替代性，或者说为了生产一定的产出，各种投入之间可以保持何种比例。这时不同的技术将表现为不同形状的等产量线。一共有三种：

（一）线性技术

其由具有常数技术系数的生产函数来描述。所谓常数技术系数就是说在线性技术中，两种投入要素可以互相替代但保持固定比例。

表示等产量线的生产函数 $\overline{y} = f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

等产量线是向右下方倾斜的直线，$slope = -\frac{a}{b}$

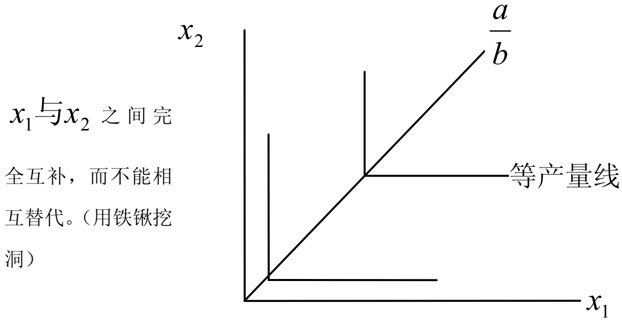


（二）列昂惕夫技术

其由具有固定技术系数的生产函数来描述。在这种技术中，两种要素不可互相替代，而且保持一定的互补比例。

表示等产量线的生产函数 $\overline{y} = f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$

等产量线是“L”形的曲线。



（三）柯布-道格拉斯技术（凸性技术）

由具有可变技术系数的柯布-道格拉斯生产函数来描述。在这种技术中两种投入要素不仅可以互相替代，而且替代比率不断发生变化。

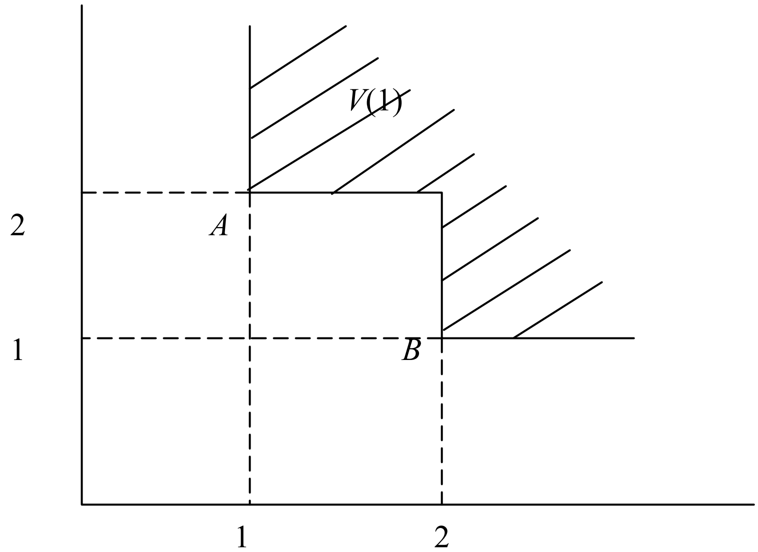
表示等产量线的生产函数 $\overline{y} = Ax_1^a x_2^{1-a}$

这一技术的等差量线凸向原点，并且具有两个基本特征；

1．单调性

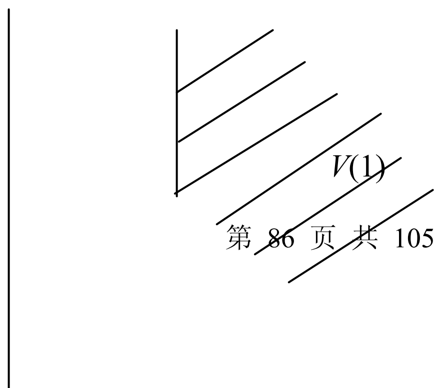
表示一定的产量总可以用较多的投入来生产；或一定的投入总可以生产出较少的产出。用投入要求集表示就是前面图中的阴影部分。如果投入是不费成本的，你可以自由处理那些多余投入，有时又叫自由处置特征。

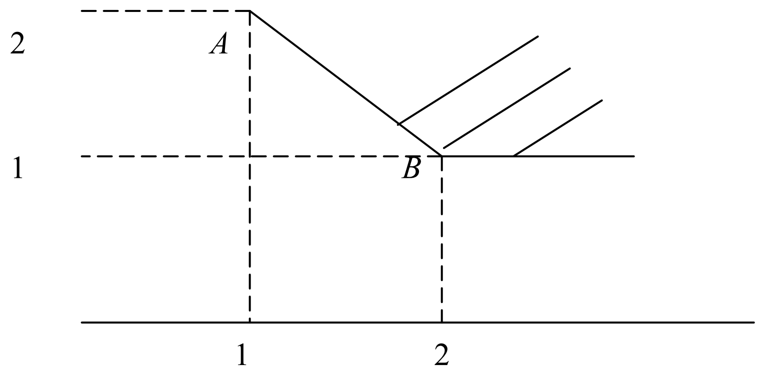
假如生产某单位产量可以有两种方法：（1，-1，-2），（1，-2，-1），在具有单调性的条件下，投入要求集可以用几何描述为：



2．凸性

表示如果有两种技术可以生产一定产量，那么这一产量一定能够同时用两种生产技术来生产。用前面的例子，如果一单位产量可以用（-1，-2）和（-2，-1）分别生产出来，那么其平均投入$\left\{ \frac{1}{2}[(-1)+(-2)], \frac{1}{2}[(-2)+(-1)] \right\} = \left\{ -1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2} \right\}$也一定能生产单位产出数量。这时的投入要求集合为 A、B 点连线以上的部分。如下图所示：





当一定产量可以有无数多的技术束生产时，上述等产量线将近似的为一条平滑的凸向原点的曲线。显然在上述的三种技术中，只有柯布-道格拉斯技术符合这两个特点的要求。

三、边际技术替代率和规模报酬

柯布-道格拉斯技术或生产函数不仅满足连续性和凸性的要求，而且还符合古典理论对生产函数的两个基本假设：即（1）边际产量递减；（2）规模报酬不变。

（一）边际产量递减

对于生产函数 $y = f(x_1, \overline{x_2})$，一般假定 $f_1' > 0, f_1'' < 0$，即边际产量大于零，但趋于递减。这种假定保证生产处于合理的阶段。边际产量递减对绝大多数产业是适用的。它可以保证有内在解。

边际产量递减假定或规律可以用边际技术替代律来描述。他为等产量线上某一点切线的斜率。

$$MRTS = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\frac{MP_1}{MP_2}$$

数学证明：

对生产函数 $y = f(x_1, x_2)$ 求全微分并令它等于零（产量不变），得

$$dy = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{f(x_1, x_2)/\partial x_1}{f(x_1, x_2)/\partial x_2} = -\frac{MP_1}{MP_2}$$

（二）规模报酬（有两种描述方法）

规模报酬研究当投入成倍增加（生产规模扩大）时，产出是否也保持相同的变化

比例。如果产量与要素投入量等比例变化即为报酬不变；如果以较小的比例变化即为报酬递减；如果以较大的比例变化则为报酬递增。规模报酬可以用齐次函数来描述。

1．设生产函数 $y = f(x_1, x_2)$ 为齐次函数，则有

$$f(kx_1, kx_2) = k^t f(x_1, x_2), t > 0$$

当 t=1 时，即一次齐次生产函数，$f(kx_1, kx_2) = kf(x_1, x_2)$，规模报酬不变；

当 t>1 时，即高次齐次生产函数，$f(kx_1, kx_2) < kf(x_1, x_2)$，规模报酬递增；

当 t<1 时，$f(kx_1, kx_2) > kf(x_1, x_2)$，规模报酬递减；

特别地，当 t=0，即零次齐次时，$f(kx_1, kx_2) = f(x_1, x_2)$，产出数量不变。

2．用规模弹性来描述规模报酬

给出规模弹性表达式，并求 t=1 时的数值，即

$$e(x) = \frac{dy(t)}{y(t)} / \frac{dt}{t}\bigg|_{t=1}$$

注意：我们必须求出这一表达式在 t=1 时的值，来计算点 x 处的替代弹性。随着 e(x)大于、等于、小于 1，我们说该技术表现出规模报酬的局部递增、不变、或递减。

举例：规模报酬和柯布道格拉斯技术

假定 $y = x_1^a x_2^b$。那么 $f(tx_1, tx_2) = (tx_1)^a (tx_2)^b = t^{a+b} x_1^a x_2^b = t^{a+b} f(x_1, x_2)$。因此当且仅当，$a + b$ =1 时，$f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$。类似地，$a + b > 1$ 意味着规模报酬递增，$a + b < 1$ 意味着规模报酬递减。

事实上，柯布道格拉斯技术的规模弹性就是 $a + b$。我们运用定义

$$\frac{d(tx_1)^a (tx_2)^b}{dt} = \frac{dt^{a+b} x_1^a x_2^b}{dt} = (a+b) t^{a+b-1} x_1^a x_2^b \text{。}$$

在 t=1 时，计算导数的值并除以 $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ 就得到这一结果。

3．规模报酬不变的一次齐次生产函数具有很多便利的特点。

设生产函数 $y=f(K,L)$ 为一次齐次生产函数，则

$$y=Lf(k,1)=Lf(k), k={K}/{L}$$

$$\frac{dy}{dL}=f(k)+Lf'(k)\cdot\frac{d(\frac{K}{L})}{dL}=f(k)+Lf'(k)\cdot(-\frac{K}{L^2})=f(k)-kf'(k)$$

$$\frac{dy}{dK}=L\cdot f'(k)\cdot\frac{1}{L}=f'(k)$$

欧拉定理的证明：

$$\begin{aligned} y&=L\cdot\frac{dy}{dL}+K\cdot\frac{dy}{dK} \\ &=L[f(k)-kf'(k)]+K(f'(k)) \\ &=Lf(k)-Kf'(k)+Kf'(k) \\ &=Lf(k)=y \end{aligned}$$

四、齐次技术和位拟技术

如果对所有 t > 0，$f(tx)=t^k f(x)$，那么函数 $f(x)$就是 k 次齐次的。从上面的分析中可以看出，一次齐次函数具有规模报酬不变的性质。

位拟函数是一个一次齐次函数的单调变换。可以把单调变换看成是以不同的单位来度量产出的一种方法。

一次齐次函数是说产出与投入同比例增加；而位拟函数则是说虽然产出与投入不等比例的变化，但较多的投入总是可以生产出较多的产出。在等产量线随投入水平变动而变动这一点上二者是一致的。因此，生产函数的单调变化并不改变生产函数的性质。

五、不变替代弹性生产函数（CES 生产函数）

$$y=[a_1x_1^{\rho}+a_2x_2^{\rho}]^{1/\rho}, a_1+a_2=1$$

这一生产函数的替代弹性为常数，而且根据 ρ 值的不同其可以转化为线性，柯布—道格拉斯和列昂惕夫生产函数。

（一）具有不变的替代弹性

替代弹性可以定义为边际技术替代率每发生百分之一的变动所引起的要素比例的变动的百分比。用公式表示，即

$$\sigma = \frac{d(x_2/x_1)}{dTRS} \cdot \frac{TRS}{x_2/x_1}$$

$$= \frac{d\ln(x_2/x_1)}{d\ln|TRS|} \qquad \text{（推导见高级教程 P14-15）}$$

对于 CES 来说，由于其

$$TRS = -(\frac{x_1}{x_2})^{\rho-1}$$

$$\frac{x_2}{x_1} = |TRS|^{\frac{1}{1-\rho}}$$

取对数可以得到：

$$\ln\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{1-\rho}\ln|TRS|$$

运用对数微分定义：

$$\sigma = \frac{d\ln(x_2/x_1)}{d\ln|TRS|} = \frac{1}{1-\rho}$$

（二）其包含了三种技术（当 ρ 取不同值时）

当 ρ=1 时，$\sigma = \frac{1}{1-\rho} \to \infty$，趋于完全具有替代弹性，因此是线性生产函数：

$$y = a_1x_1 + a_2x_2$$

当 ρ=-∞时，$\sigma = \frac{1}{1-\rho} \to 0$，趋于完全无替代弹性，因此是列昂惕夫生产函数：

$$y = \min(a_1x_1, a_2x_2)$$

当 ρ=0 时，$\sigma = \frac{1}{1-\rho} = 1$，具有单一替代弹性，因此是柯布—道格拉斯生产函数：

$$y = x_1^{a_1}x_2^{a_2}$$

Chapter 20　成本曲线

一般说来，成本是要素价格和产出之间的函数，但是在本章我们假设要素价格不发生变化，考察产量与成本之间的关系，又称成本习性。分别考察短期成本函数和长期成本函数。

一、短期成本函数

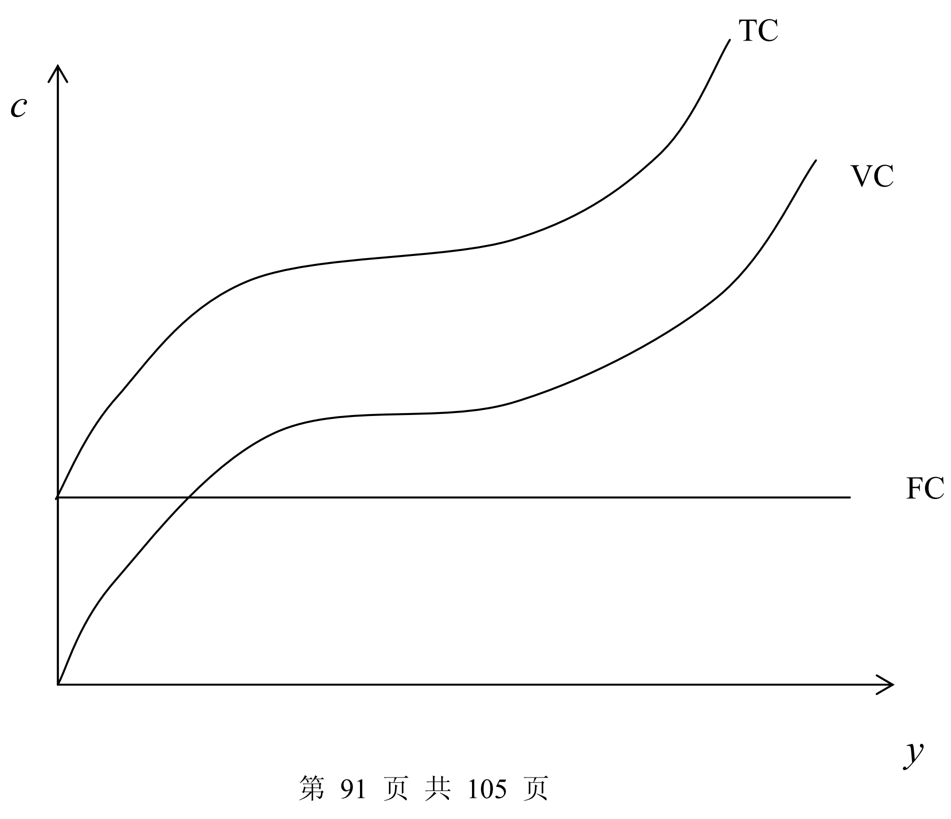
在短期内厂商面临固定成本的限制，只能够根据利润做大化或者成本最小化的要求通过调整可变要素来调整产量。分别考察总成本曲线、平均成本曲线和边际成本曲线。在要素价格不变的条件下，成本函数 $c(\overline{w_1},\overline{w_2},y)$ 可以表示为产量的函数，即 $c = c(y)$。

1．总成本曲线

成本与产量之间具有对偶性。因此，当要素投入和产量为零时总成本为零，故总成本曲线通过原点。在最初阶段，当固定投入未得到充分利用时，随着可变要素和产量的增加生产效率不断提高，所以边际成本 MC 不断下降。而当产量使固定投入超负荷运转时，边际成本趋于上升。所以，总成本曲线的形状为先递减，而后递增。总成本有固定成本和可变成本两部分构成，即

$TC = FC+VC$

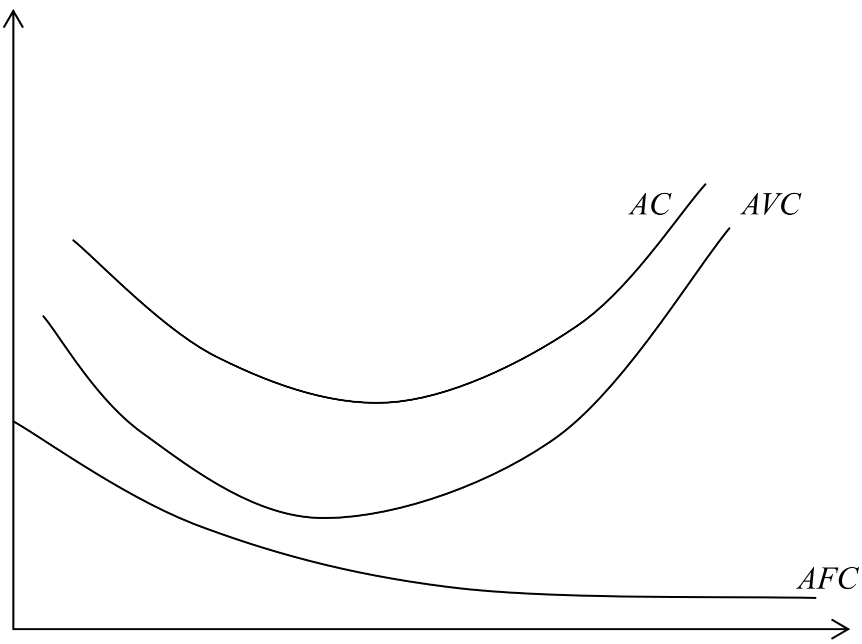
其中，$TC = c(y)$是总成本，FC 是固定成本，$VC = c_v(y)$ 是全部可变成本。



2. 平均成本

过原点做射线与总成本和平均成本曲线相交，交点的斜率就是在一定产量下的平均总成本 AC 和平均可变成本 $AVC(y)$。平均可变成本位于平均总成本之下，两条直线之间的距离就是平均固定成本 $AFC(y)$。平均总成本可以用总成本曲线推导出来。其形状为“U”型。

$$AC = \frac{c(y)}{y} = \frac{c_V(y)}{y} + \frac{FC}{y} = AVC(y) + AFC(y)$$



3. 边际成本

过总成本曲线上的每一点作切线，其斜率就是对应的产出水平上的边际成本。边际成本曲线也呈现“U”型（图略）。另外，对于成本函数 $c(y) = c_v(y) + FC$ 来说，当 y 变化时，FC 是不变的。因此 MC 可以用总成本函数来表示，也可以用可变成本函数来表示。

$$MC = \frac{\Delta c(y)}{\Delta y} = \frac{dc(y)}{dy} = \frac{c(y+\Delta y) - c(y)}{\Delta y}$$

$$MC = \frac{\Delta c_v(y)}{\Delta y} = \frac{dc_v(y)}{dy} = \frac{c_v(y+\Delta y) - c_v(y)}{\Delta y}$$

4. 平均成本曲线与边际成本曲线的相互关系

在厂商的最优决策中，平均成本和边际成本之间的相互关系非常重要。在边际产量递减的技术条件下，边际成本曲线与平均总成本曲线和平均可变成本曲线的最低点相交。也就是说与平均成本等于边际成本时的产量相比，在产量较低时平均成本递减，在产量较高时平均成本递增。对此可以用数学方法来证明。

如果 AC 是下降的，那么其一阶导数必然小于零，即

$$\frac{d(\frac{c(y)}{y})}{dy}=\frac{\frac{dc(y)}{dy}y-c(y)}{y^2}<0$$

两边同乘y,得$\frac{dc(y)}{dy}-\frac{c(y)}{y}<0$

即$MC<AC$

如果 AC 是上升的，则其一阶导数大于零，同方法可得

$\frac{dc(y)}{dy}-\frac{c(y)}{y}>0$，即

$MC>AC$

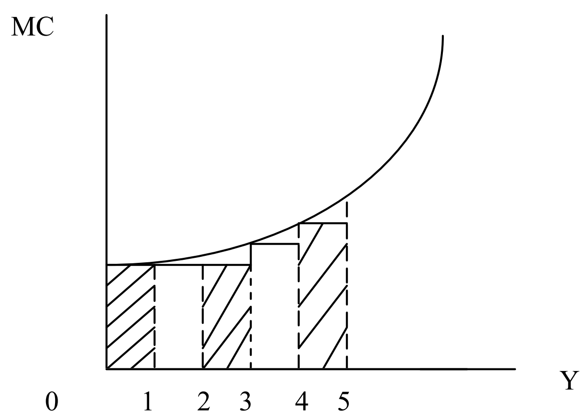
如果 AC 处于最低点，则其一阶导数为零，这时

$\frac{dc(y)}{dy}-\frac{c(y)}{y}=0$，即

$MC=AC$

5. 对边际成本的其他解释

由于边际成本表示的每增加一个单位的产量的可变成本的增量，所以边际成本曲线以下的面积表示每增加一单位产量的可变成本的总和。



$$
\begin{aligned}
C_V(y) &= (c(1)-c(0)) + (c(2)-c(1)) + \cdots + (c(6)-c(5)) \\
&= \frac{c(1)-c(0)}{\Delta y}\Delta y + \cdots + \frac{c(6)-c(5)}{\Delta y}\Delta y \\
&= MC(1)\Delta y + \cdots + MC(6)\Delta y
\end{aligned}
$$

因为$\Delta y = 1$，所以

$C_v(y) = MC(1) + MC(2) + \cdots + MC(6)$

6、两个工厂的边际成本曲线

使二者的边际成本相等，即求下述最小化问题的一阶导数，由此可以求出使成本最小的两个工厂的最佳产量。

$$
\begin{cases}
\min\limits_{y_1, y_2} c_1(y_1) + c_2(y_2) \\
s.t. y_1 + y_2 = y
\end{cases}
$$

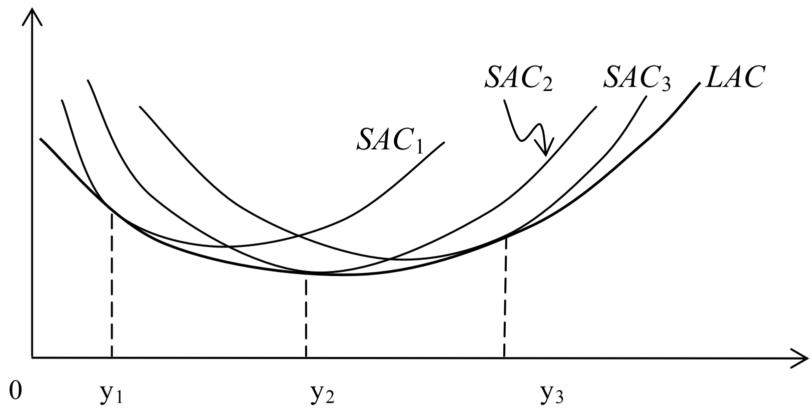
二、长期成本曲线

在这里需要重点理解的是长期成本曲线与短期成本曲线之间的相互关系。分别证明以下两个结论：(1) 厂商的长期平均成本曲线是短期平均成本曲线的包络曲线。(2) 长期边际成本曲线是与在不同的产出水平上最优生产规模相对应的短期边际成本曲线的连线。

1．厂商的长期平均成本曲线是短期平均成本曲线的包络曲线

由于在长期内所有成本都是可变的，所以没有不变成本。在短期内厂商选择合理的产量，而在长期中厂商不仅要选择合理的产量，而且还可以选择最佳的生产规模来生产这一产量。现在假定厂商在长期内有三种生产规模可供选择，分别由三条短期平均成本来表示。远离纵轴的平均成本曲线表示较大的生产规模。

从图中可以看出，较小的产量在长期内选择较小的生产规模比较合理；而较大的产量在长期内选择较大的生产规模比较合理。当存在无数多个生产规模可供选择时，长期平均成本曲线就是与任何生产规模相适应的最低平均成本曲线（或者最佳生产规模）的包络曲线。



上述结论也可以用代数方法来证明：

设$k(y)$为与产量y相适应的最优的工厂规模，对于某个产量y^*来说，$k^* = k(y^*)$。由于在长期内厂商可以调整生产规模，它至少可以使一定产量y下的长期平均成本c（y）与在同一产量下具有最佳生产规模时的成本一样的低，即

$c(y) \le c_s(y,k^*) = c_s(y,k(y^*)) \to$ 短期内生产y^*的最佳规模

因此，当$y = y^*$时，有

$c(y^*) = c_s(y^*,k^*)$

即在长期中生产y^*的最低成本就是在短期内按照生产y^*的最佳生产规模生产的成本。上述两式对于AC也是成立的，即两边同除y，得：

$$\begin{cases} AC(y) \le AC_S(y,k^*) \\ AC(y^*) = AC_S(y^*,k^*) \end{cases}$$

这表明AC_S处于AC之上并在$y = y^*$时与AC相切。如果与n种产量相适应有n个最优生产规模，那么就一定会有AC与AC_S的几个相切点，这些切点的连线就是LAC。

2．长期边际成本曲线是与在不同的产出水平上最优生产规模相对应的短期边际

成本曲线的连线。这表明，在任意产量 y^* 上，与最优生产规模 k^* 相适应，$LMC=SMC$。

对此数学证明如下：

根据 $LMC=SMC$ 有 $c(y)=c_s(y,k(y))$，求 $c(y)=c_s(y,k(y))$ 得一阶导数条件可得：

$$\frac{dc(y)}{dy}=\frac{\partial c_s(y,k)}{\partial y}+\frac{\partial c_s(y,k)}{\partial k}\frac{\partial k(y)}{\partial y}$$

上式中等号左边的一项为规模不变时的 MC，第二项为调整生产规模时的 MC。

当$y=y^*,k=k^*=k(y^*)$时，$\frac{\partial c_s(y^*,k^*)}{\partial k}=0$ 因为这是使 k^* 成为在产量 y^* 时成本最小化的工厂规模的必要的一阶条件。所以有：

$$\frac{dc(y^*)}{dy}=\frac{\partial c_s(y^*,k^*)}{\partial y}$$

Chapter 24 垄断条件下的要素市场

本章考察垄断厂商对要素的需求问题，分买方垄断和卖方垄断两种情况来进行分析。

一、卖方垄断

指在产品市场上是垄断厂商，但在要素市场上是完全竞争者这样一种情况。

最佳要素需求量是依据以下条件：

要素的边际收益（MRP）= 要素的边际成本(W)

1．要素的边际收益

设 $y=f(x)$, $p(y)$ 为反需求函数，要素的总收益和边际收益就分别等于：

$$R(x)=p(y)\cdot y=p(f(x))\cdot f(x)$$

$$\begin{aligned} MRP &= p(y)f'(x)+p'(y)f'(x)f(x) \\ &=[p(y)+p'(y)f(x)]f'(x) \\ &=p(y)[1+\frac{1}{\varepsilon}]MP_x \end{aligned}$$

由于需求曲线向右下方倾斜，需求的价格弹性为负，所以要素的边际产品收益

$MRP = p(y)(1-\frac{1}{|\varepsilon|})MP_x$。

当$|\varepsilon| \to \infty$时，$MRP = p \cdot MP_x$，即要素的边际收益等于要素的边际产值，这与完全竞争条件下的情况相同。因此，只要$|\varepsilon|$不是具有完全弹性，那么就有：

$$MRP = \frac{dR(x)}{dx} = p(y)(1-\frac{1}{|\varepsilon|})MP_x \le p \cdot MP_x$$

即要素的边际收益 MRP 曲线位于要素的边际产值 $p \cdot MP_x$ 曲线的下方。而且根据边际产量递减规律可知，两条曲线都向右下方倾斜。

2．要素的边际成本

由于在要素市场上保持完全自由竞争，因此要素的边际成本就等于要素的价格。设要素价格为 w,并且$c(y) = wx$，则有$\frac{dc(y)}{dx} = w$,即$MC = w$。这表明要素的边际成本等于要素价格。

3．最佳要素选择

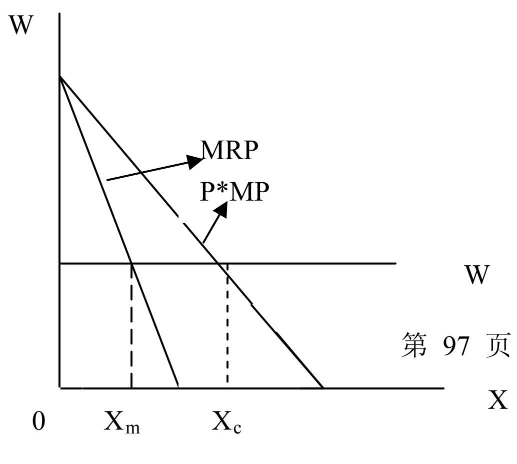
在垄断条件下，垄断厂商的利润最大化问题为：

$$\max \pi = p(f(x))f(x) - wx$$

求其一阶导数条件，可以得到：

$$p(y)(1+\frac{1}{|\varepsilon|})f'(x) = w$$

即要素的边际收益等于要素的价格。这意味着垄断条件下的要素需求小于完全竞争条件下的要素需求。



二、买方垄断

指在产品市场上是完全竞争，但在要素市场上是垄断。这时垄断厂商的决策依据仍然是使要素的边际收益等于要素的边际成本。

设生产函数 $y = f(x)$，产品价格 p，成本函数 $c = c(y) = w(x) \cdot x$。其中 $w(x)$ 既是要素价格，又是要素的反供给函数。垄断厂商可以通过对要素的需求来影响要素的价格。

而且 $w(x)$ 是增函数，表明垄断厂商对 x 的需求越多，要素的供给厂商就越会提高价格；反之亦然。因此，垄断厂商可以调整对 x 需求，使 $w(x)$ 处于理想水平。这时垄断厂商的利润函数最大化问题是：

$$\max_x \pi = pf(x) - w(x) \cdot x$$

求其一阶导数条件，可以得到：

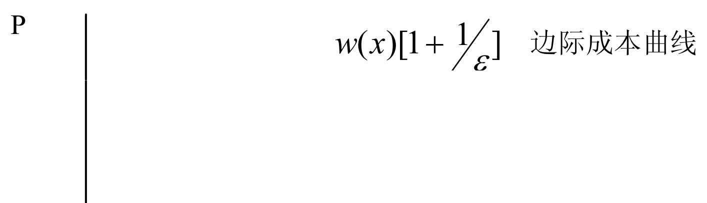
$$\frac{d\pi}{dx} = pf'(x) - w(x) - w'(x)x = 0$$

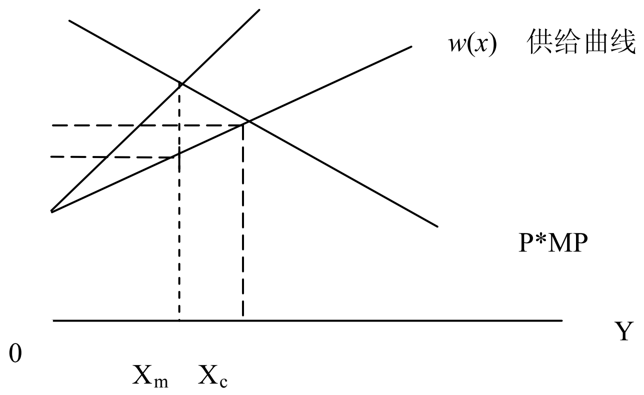
$$pf'(x) = w(x)[1 + \frac{1}{\varepsilon}]$$

等式的左边为要素的边际产值，等式的右边为要素的边际成本，因此利润最大化的一阶导数条件仍然是 $P*MR = MC$，但是取决于供给弹性。

因为 ε 为要素供给弹性，其大于零，因此 $w(x)[1 + 1/\varepsilon] > w$。这表明垄断条件下的要素的边际成本 $w(x)[1 + 1/\varepsilon]$ 大于完全竞争条件下要素的边际成本 w，即 $w(x)[1 + 1/\varepsilon]$ 曲线位于 w 曲线之上。

垄断厂商根据上述一阶导数条件，确定要素需求量，然后对应要素的供给函数，可以找出相应的价格价格。





三、上游垄断和下游垄断

这是指一家垄断厂商生产的产品被另一家垄断厂商用作生产要素这种情况。上游垄断的是生产要素，下游垄断的是产品。

假定上游垄断厂商按不变的边际成本 c 生产 x 产量，并按价格 k 出售给下游厂商；下游厂商按生产函数 $y = f(x)$ 生产 y 产品，面临的市场需求是 p(y)，并假定 $p(y) = a\text{-}by$（线性需求）。为简化起见，假定 $y = x$，下游厂商的成本就是 ky。

1．下游企业的利润最大化问题：

$$\max_y p(y)y - ky = (a - by)y - ky$$

由一阶导数条件可以得到：

$$a - 2by = k，即 \quad y = \frac{a-k}{2b}$$

$$因为 y = x，所以 x = \frac{a-k}{2b}$$

2．上游企业的利润最大化问题

对上游企业来说，就是要根据下游厂商的要素需求选择使利润最大化的 x 产出水平。因为下游企业的需求就是上游厂商面对的需求，因此根据 $x = \frac{a-k}{2b}$ 可以得到自己所面临的反需求函数 $k = a - 2bx$。这样上游企业就可以按照下游企业的实际需要确定自己的产出。

$$总收益 = kx = (a-2bx)x = ax - 2bx^2$$

$$边际收益 = a - 4bx$$

令边际收益等于边际成本，有

$$a - 4bx = c$$

$$x = \frac{a-c}{4b}$$

因为$y = x$,所以

$$y = x = \frac{a-c}{4b}$$

3．上下游企业合并问题

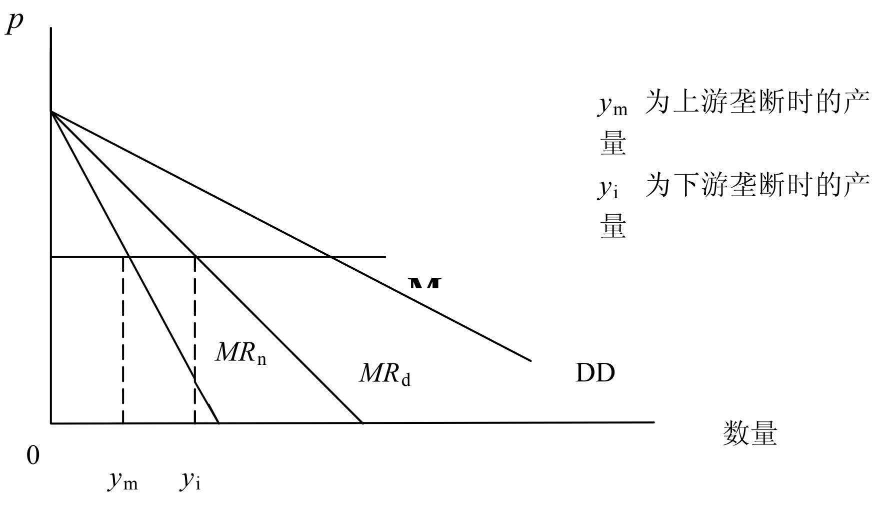
假设上游和下游厂商合并成一家厂商，其面临的反需求函数是 $p = a\text{-}by$ 和不变的边际成本 c。当 $MR = MC$ 时有

$$a - 2by = c,即y = \frac{a-c}{2b}$$

一体化厂商的产量是非一体化垄断厂商产量的两倍。

几何描述：

下游垄断企业面临的最终需求曲线是DD，其边际收益曲线是MR_d；上游垄断企业面临的需求曲线就是下游企业的边际收益曲线MR_d，其自身的边际收益曲线是MR_n。其斜率是DD曲线的四倍。



上下游垄断会产生双重加成定价，而上下游一体化则可以使价格下降，从而使总

的产量和利润都提高。

Chapter 24 垄断条件下的要素市场

本章考察垄断厂商对要素的需求问题，分买方垄断和卖方垄断两种情况来进行分析。

一、卖方垄断

指在产品市场上是垄断厂商，但在要素市场上是完全竞争者这样一种情况。

最佳要素需求量是依据以下条件：

要素的边际收益（MRP）＝ 要素的边际成本(W)

2．要素的边际收益

设 $y=f(x)$， $p(y)$ 为反需求函数，要素的总收益和边际收益就分别等于：

$$R(x)=p(y)\cdot y=p(f(x))\cdot f(x)$$

$$\begin{aligned} MRP &= p(y)f'(x)+p'(y)f'(x)f(x) \\ &= [p(y)+p'(y)f(x)]f'(x) \\ &= p(y)[1+\frac{1}{\varepsilon}]MP_x \end{aligned}$$

由于需求曲线向右下方倾斜，需求的价格弹性为负，所以要素的边际产品收益 $MRP=p(y)(1-\frac{1}{|\varepsilon|})MP_x$。

当 $|\varepsilon|\to\infty$ 时，$MRP=p\cdot MP_x$，即要素的边际收益等于要素的边际产值，这与完全竞争条件下的情况相同。因此，只要 $|\varepsilon|$ 不是具有完全弹性，那么就有：

$$MRP=\frac{dR(x)}{dx}=p(y)(1-\frac{1}{|\varepsilon|})MP_x\le p\cdot MP_x$$

即要素的边际收益 MRP 曲线位于要素的边际产值 $p\cdot MP_x$ 曲线的下方。而且根据边际产量递减规律可知，两条曲线都向右下方倾斜。

2．要素的边际成本

由于在要素市场上保持完全自由竞争，因此要素的边际成本就等于要素的价格。

设要素价格为 w,并且 $c(y)=wx$，则有 $\frac{dc(y)}{dx}=w$,即 $MC=w$。这表明要素的边际成本等于要素价格。

4．最佳要素选择

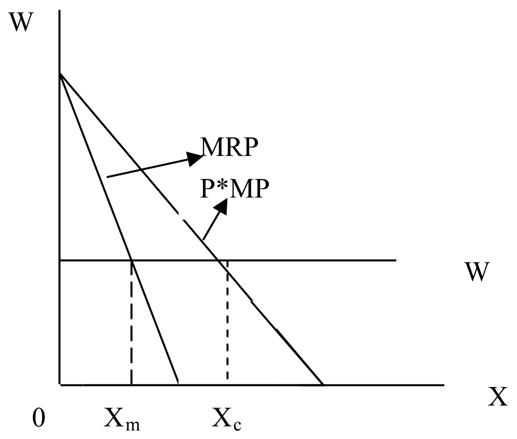
在垄断条件下，垄断厂商的利润最大化问题为：

$$\max\pi=p(f(x))f(x)-wx$$

求其一阶导数条件，可以得到：

$$p(y)(1+\frac{1}{|\varepsilon|})f'(x)=w$$

即要素的边际收益等于要素的价格。这意味着垄断条件下的要素需求小于完全竞争条件下的要素需求。



二、买方垄断

指在产品市场上是完全竞争，但在要素市场上是垄断。这时垄断厂商的决策依据仍然是使要素的边际收益等于要素的边际成本。

设生产函数 $y=f(x)$，产品价格 p，成本函数 $c=c(y)=w(x)\cdot x$。其中 $w(x)$ 既是要素价格，又是要素的反供给函数。垄断厂商可以通过对要素的需求来影响要素的价格。

而且 $w(x)$ 是增函数，表明垄断厂商对 x 的需求越多，要素的供给厂商就越会提高

价格；反之亦然。因此，垄断厂商可以调整对 x 需求，使 $w(x)$ 处于理想水平。这时垄断厂商的利润函数最大化问题是：

$$\max_x \pi = pf(x) - w(x)\cdot x$$

求其一阶导数条件，可以得到：

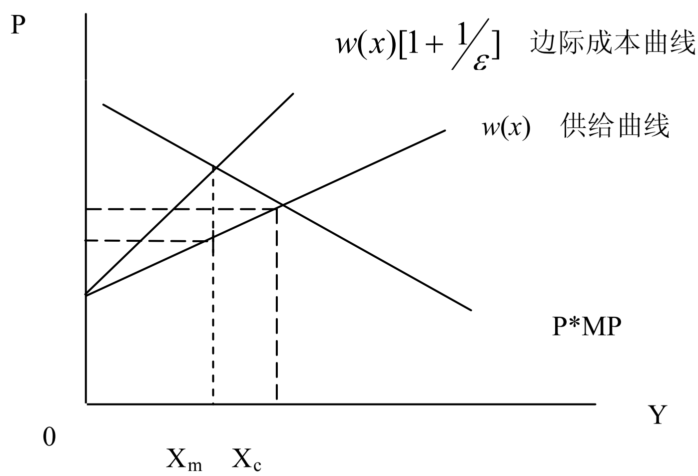
$$\frac{d\pi}{dx} = pf'(x) - w(x) - w'(x)x = 0$$

$$pf'(x) = w(x)[1+\frac{1}{\varepsilon}]$$

等式的左边为要素的边际产值，等式的右边为要素的边际成本，因此利润最大化的一阶导数条件仍然是 $P*MR = MC$，但是取决于供给弹性。

因为 ε 为要素供给弹性，其大于零，因此 $w(x)[1+1/\varepsilon] > w$。这表明垄断条件下的要素的边际成本 $w(x)[1+1/\varepsilon]$ 大于完全竞争条件下要素的边际成本 w，即 $w(x)[1+1/\varepsilon]$ 曲线位于 w 曲线之上。

垄断厂商根据上述一阶导数条件，确定要素需求量，然后对应要素的供给函数，可以找出相应的价格价格。



三、上游垄断和下游垄断

这是指一家垄断厂商生产的产品被另一家垄断厂商用作生产要素这种情况。上

游垄断的是生产要素，下游垄断的是产品。

假定上游垄断厂商按不变的边际成本 c 生产 x 产量，并按价格 k 出售给下游厂商；下游厂商按生产函数 $y=f(x)$ 生产 y 产品，面临的市场需求是 $p(y)$，并假定 $p(y)=a\text{-}by$（线性需求）。为简化起见，假定 $y=x$，下游厂商的成本就是 ky。

1．下游企业的利润最大化问题：

$$\max_{y} p(y)y-ky=(a-by)y-ky$$

由一阶导数条件可以得到：

$$a-2by=k,\ \text{即}\quad y=\frac{a-k}{2b}$$

$$\text{因为}y=x,\ \text{所以}x=\frac{a-k}{2b}$$

2．上游企业的利润最大化问题

对上游企业来说，就是要根据下游厂商的要素需求选择使利润最大化的 x 产出水平。因为下游企业的需求就是上游厂商面对的需求，因此根据 $x=\dfrac{a-k}{2b}$ 可以得到自己所面临的反需求函数 $k=a-2bx$。这样上游企业就可以按照下游企业的实际需要确定自己的产出。

$$\text{总收益}=kx=(a-2bx)x=ax-2bx^2$$

$$\text{边际收益}=a-4bx$$

令边际收益等于边际成本，有

$$a-4bx=c$$

$$x=\frac{a-c}{4b}$$

$$\text{因为}y=x,\text{所以}$$

$$y=x=\frac{a-c}{4b}$$

3．上下游企业合并问题

假设上游和下游厂商合并成一家厂商，其面临的反需求函数是 $p=a\text{-}by$ 和不变的

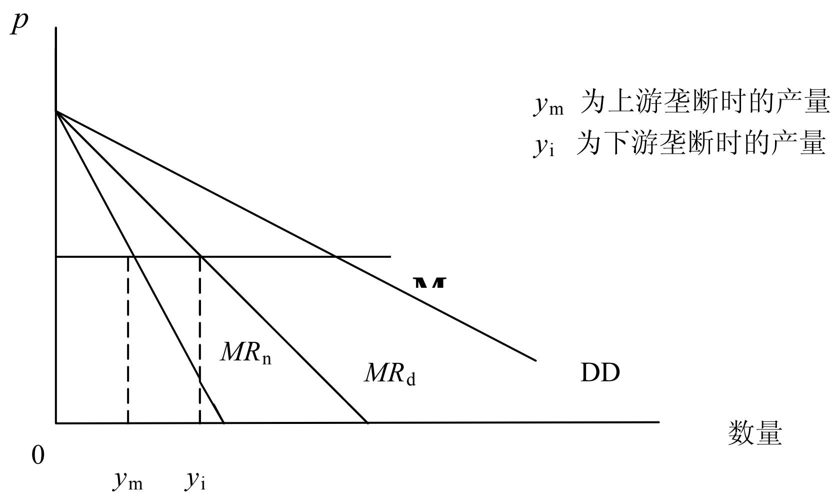
边际成本 c。当 $MR = MC$ 时有

$$a - 2by = c, \text{即} y = \frac{a - c}{2b}$$

一体化厂商的产量是非一体化垄断厂商产量的两倍。

几何描述：

下游垄断企业面临的最终需求曲线是DD，其边际收益曲线是MR_{d}；上游垄断企业面临的需求曲线就是下游企业的边际收益曲线MR_{d}，其自身的边际收益曲线是MR_{n}。其斜率是DD曲线的四倍。



上下游垄断会产生双重加成定价，而上下游一体化则可以使价格下降，从而使总的产量和利润都提高。