数值计算报告03

张楚明 18342125 软工四班

1. **题目描述**

用中间点法对常微分方程进行求解

1. **方法分析**

1.借鉴其他解常微分方程的方法:

①:欧拉方法

设[a,b]为求解良态初值问题的区间. 将区间[a,b]划分为M个等距子区间,并选择网格点

, k = 0, 1, ……, M,

值h称为步长.然后在上近似求解

设连续,利用泰勒定理将y(t)在处展开,对每个值t, 存在一个和t之间的值, 使得

将和代入上式可得的表示:

如果步长h足够小,则可以忽略二次项,得到

重复该过程可得点序列

其中k = 0, 1, …, M-1;

精度分析:

全局误差:

局部误差:

最终全局误差:

②休恩方法

[a, b]上的初值问题:

用微积分基本定理,在[]上对积分得:

其中的不定积分为待求函数y(t). 对y()求解上述方程, 结果为

然后可用数值积分方法逼近上式的定积分,如果采用步长为h=的梯形公式,则结果为

将欧拉方 代入上式得:

重复该过程可得序列

精度分析:

全局误差:

局部误差:

最终全局误差:

2.由上述欧拉方法和休恩方法类推可得:

中间点法的递推序列如下:

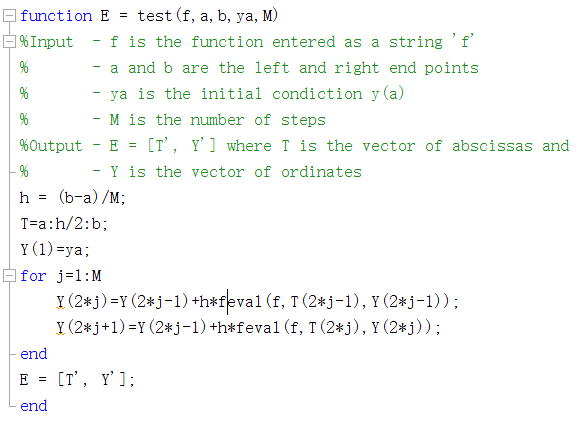
精度分析:

全局误差:

局部误差:

最终全局误差:

3.MatLab函数实现中间点法



1. **例题演示**

用中间点法求解区间[0,3]上的初值问题

比较h = 1, h = , h = , h = 的解,

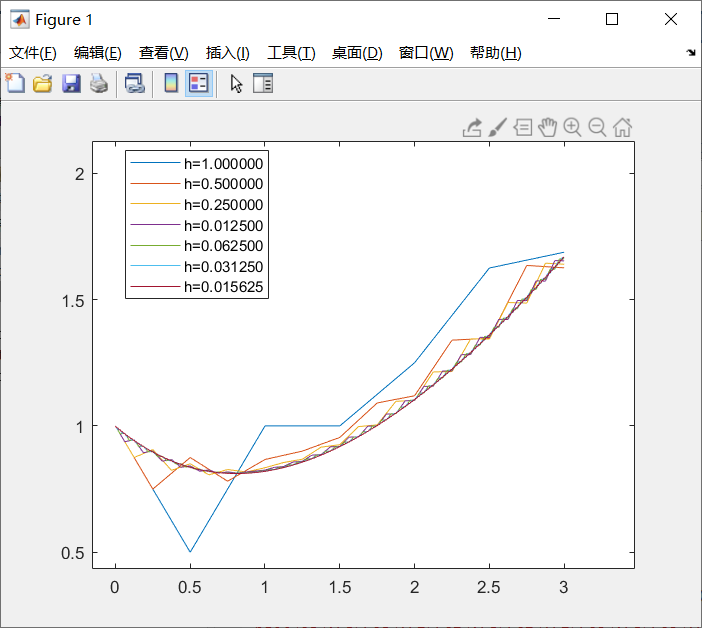
当步长为h=0.25时, 计算为

重复该迭代过程, 直到最后一步:

不同步长的中间点法比较表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | | | |  |
| h=1 | h=0.5 | h=0.25 | h=0.125 |
| 0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| 0.125 |  |  | 0.875000 | 0.945313 | 0.943239 |
| 0.25 |  | 0.750000 | 0.906250 | 0.901154 | 0.897491 |
| 0.375 |  |  | 0.824219 | 0.866906 | 0.862087 |
| 0.50 | 0.500000 | 0.875000 | 0.850098 | 0.841990 | 0.836402 |
| 0.75 |  | 0.781250 | 0.827430 | 0.817994 | 0.811868 |
| 1.00 | 1.000000 | 0.867188 | 0.834587 | 0.825168 | 0.819592 |
| 1.50 | 1.000000 | 0.954590 | 0.925677 | 0.919240 | 0.917100 |
| 2.00 | 1.250000 | 1.119354 | 1.101324 | 1.100411 | 1.103638 |
| 2.50 | 1.625000 | 1.346975 | 1.344044 | 1.349993 | 1.359514 |
| 3.00 | 1.687500 | 1.625667 | 1.639965 | 1.653307 | 1.669390 |

图片对比



步长与最终误差的关系表

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 步长h | 步数M | y(3)的近似值 | 全局误差 | O(h)≈0.128h |
| 1.000000 | 3 | 1.687500 | -0.018110 | 0.128 |
| 0.500000 | 6 | 1.625667 | 0.043723 | 0.064 |
| 0.250000 | 12 | 1.639965 | 0.029425 | 0.032 |
| 0.125000 | 24 | 1.653307 | 0.016083 | 0.016 |
| 0.062500 | 48 | 1.661059 | 0.008331 | 0.008 |
| 0.031250 | 96 | 1.665159 | 0.004231 | 0.004 |
| 0.015625 | 192 | 1.667259 | 0.002131 | 0.002 |

1. **参考文献**

Numerical Methods Using MATLAB Fourth Edition (By John H. Mathews and Kurtis D. Fink)