Декартови конструкции

• ДСД, че $\{w \mid ww \in L\}$ е регулярен за L - регулярен език със свидетел $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$

<u>Решение:</u> Конструкцията е следната:

Нека $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$ и $q_1 = s$.

- $Q' = Q^n$
- $s' = (q_1, \dots, q_n)$
- $\delta'((q_{i_1}, \dots, q_{i_n}), \sigma) = (\delta(q_{i_1}, \sigma), \dots, \delta(q_{i_n}, \sigma))$
- $F' = \{(q_{i_1}, \dots, q_{i_n}) \mid q_{i_{i_1}} \in F\}$

// Идеята е да пуснем автомата от всяко едно
// състояние едновременно. Ако $s = q_1$ стигне до
// състояние q_{i_1}, а q_{i_1} на свой ред до състояние
// $q_{i_{i_1}} \in F$, то $\hat{\delta}(s, \alpha\alpha) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(s, w), w) =$
// $= \hat{\delta}(q_{i_1}, w) = q_{i_{i_1}} \in F$
//
// и значи $ww \in L(A)$

<u>Тв.</u> $\hat{\delta}'(s', w) \in F' \iff ww \in L(A)$

($\Rightarrow$) Нека $\hat{\delta}'(s', w) \in F'$. Тоест $\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), w) \in F'$. Нека $\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), w) = (q_{i_1}, \dots, q_{i_n})$. Тогава, съгласно избора ни за F', $q_{i_{i_1}} \in F$. Сега ще покажем, че

$$q_{i_1} = \hat{\delta}(q_1, w) \quad \text{и} \quad q_{i_{i_1}} = \hat{\delta}(q_{i_1}, w).$$

Това ще сторим наведнъж чрез следната Лема.

Лема: За всяко $k = 1, \dots, n$ и всяка $w \in \Sigma^*$

$$\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), w) = (q_{i_1}, \dots, q_{i_n}) \Rightarrow \hat{\delta}(q_k, w) = q_{i_k}.$$

Д-во: Нека $k \in \{1, \dots, n\}$. Ще проведем индукция по $|w|$.

База: $w = \varepsilon$. Нека $\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), \varepsilon) = (q_{i_1}, \dots, q_{i_n})$. Тогава $(q_1, \dots, q_n) = (q_{i_1}, \dots, q_{i_n})$. В частност $q_k = q_{i_k}$. Следователно

$$\hat{\delta}(q_k, \varepsilon) = q_{i_k}.$$

Стъпка: Нека $w = ua$ за някои $u \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$. Предполагаме, че

$$\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), u) = (q_{i_1}, \dots, q_{i_n}) \Rightarrow \hat{\delta}(q_k, u) = q_{i_k}.$$

Нека $\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), u) = (q_{i_1}, \dots, q_{i_n})$.

Имаме $\delta'(\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), u), a) = \delta'((q_{i_1}, \dots, q_{i_n}), a) =$

$$\overset{\text{def. } \delta'}{=} (\delta(q_{i_1}, a), \dots, \delta(q_{i_n}, a)) \overset{\text{и.п.}}{=}$$

$$= (\delta(q_{i_1}, a), \dots, \delta(\hat{\delta}(q_k, u), a), \dots, \delta(q_{i_n}, a)) \overset{w=ua}{=}$$

$$= (\delta(q_{i_1}, a), \dots, \underbrace{\hat{\delta}(q_k, w)}_{\checkmark}, \dots, \delta(q_{i_n}, a)),$$

което искахме да покажем.

Сега имаме, че $\hat{\delta}(q_1, ww) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_1, w), w) =$
$= \hat{\delta}(q_{i_1}, w) = q_{i_{i_1}}$. Но както вече показахме,

$q_{i_1} \in F$ и значи $ww \in L(A)$.

$(\Leftarrow)$ Обратно, нека $ww \in L(A)$. Тогава
$\hat{\delta}(s, ww) \in F$. Тоест $\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_1, w), w) \in F$.
Нека $\hat{\delta}(q_j, w) = q_{i_j}$, за всяко $j = 1, \dots, n$. Значи
$\hat{\delta}(q_{i_1}, w) \in F$, т.е. $q_{i_{i_1}} \in F$.
Съгласно <u>Лема</u>-та от предишната посока,

$$\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), w) = (\hat{\delta}(q_1, w), \dots, \hat{\delta}(q_{i_1}, w), \dots, \hat{\delta}(q_n, w)) =$$
$$= (q_{i_1}, \dots, q_{i_{i_1}}, \dots, q_{i_n})$$
. Съгласно деф. на F',

$(q_{i_1}, \dots, q_{i_{i_1}}, \dots, q_{i_n}) \in F'$. Тоест

$\hat{\delta}'((q_1, \dots, q_n), w) \in F'$. ∎