Зад. 3 (а) Ще докажем, че Тоест, $\mathcal{L}(N) = Pref(L)$

$$(\forall w \in \Sigma^*)[\hat\delta(s,w) \in F' \Leftrightarrow w \in Pref(L)]$$

Нека $w \in \Sigma^*$.

$(\Rightarrow)$ $\hat\delta(s,w) \in F' \Rightarrow (\exists w' \in \Sigma^*)[\hat\delta(\hat\delta(s,w),w') \in F]$

$\Rightarrow (\exists w' \in \Sigma^*)[\hat\delta(s,ww') \in F]$

$\Rightarrow (\exists w' \in \Sigma^*)[ww' \in L]$

$\Rightarrow w \in Pref(L)$

$(\Leftarrow)$ $w \in Pref(L) \Rightarrow (\exists x \in L)(\exists y \in \Sigma^*)[x = wy]$

$\Rightarrow (\exists y \in \Sigma^*)[wy \in L]$

$\Rightarrow (\exists y \in \Sigma^*)[\hat\delta(s,wy) \in F]$

$\Rightarrow (\exists y \in \Sigma^*)[\hat\delta(\hat\delta(s,w),y) \in F]$

$\Rightarrow \hat\delta(s,w) \in F'$. ∎

(б) Имаме НКА $N = (Q', \Sigma, \Delta, s, F')$, където $s \notin Q$ и

$$Q' = Q \cup \{s\}$$

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \{\delta(q,a)\}, & \text{ако } q \neq s \\ \{\delta(p,a) \mid p \in Q\}, & \text{ако } q = s \end{cases}$$

$$F' = F \cup \{s\}.$$

Ще докажем, че Тоест $\mathcal{L}(N) = Suff(L)$

$$(\forall w \in \Sigma^*)[\hat\Delta(s,w) \cap F' \neq \emptyset \Leftrightarrow w \in Suff(L)]$$

Нека $w \in \Sigma^*$.

$(\Rightarrow)$ Нека $\hat\Delta(s,w) \cap F' \neq \emptyset$. Нека $\underline{w = au}$, за някои $a \in \Sigma$ и $u \in \Sigma^*$. Тогава пътят на w по N изглежда така

$$s \xrightarrow{a}_N \Delta(s,a) \xrightarrow{u}_N \hat\Delta(s,w)$$

По-конкретно ако $q_0 \in \Delta(s,a)$ е такъв, че $\hat{\Delta}(q_0,u) \cap F' \neq \emptyset$ (такова сост. трябва да има, съгласно горното), а q_1 е такова състояние, че $q_1 \in \hat{\Delta}(q_0,u)$ и $q_1 \in F'$, то един детерминистичен път на w по N изглежда така

$$s \xrightarrow{a}_N q_0 \xrightarrow{u}_N q_1 \in F'$$

От дефиницията на Δ при първи аргумент s следва, че $q_0 = \delta(p,a)$ за някое $p \in Q$. За това p знаем, че

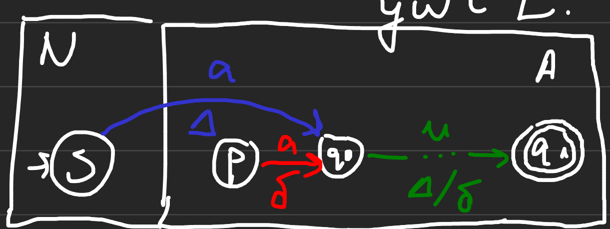
$$(\exists v \in \Sigma^*)[\hat{\delta}(s',v) = p].$$

Тук s' е нач. сост. на вх. автомат

Тогава $\hat{\delta}(s',va) = \delta(\hat{\delta}(s',v),a) = \delta(p,a) = q_0$ за някоя $v \in \Sigma^*$. Нека $y \in \Sigma^*$ е такава. От конструкцията е ясно, че щом $q_0, q_1 \in Q$, то $q_1 \in \hat{\Delta}(q_0,u) \Rightarrow \hat{\delta}(q_0,u) = q_1$, тъй като s е недостижимо състояние, а недетерминистични преходи в N няма, освен от s. И така заключаваме, че $\hat{\delta}(q_0,u) = q_1 \in F'$. Но $q_1 \in Q$ и значи $q_1 \in F$. Общо имаме $\hat{\delta}(s',yw) =$

$$\hat{\delta}(\hat{\delta}(s',y),w) = \hat{\delta}(\delta(p,a),u) = \hat{\delta}(q_0,u) = q_1 \in F.$$

Значи $yw \in L$. Тогава $w \in Suff(L)$.



$(\Leftarrow)$ Обратно, нека $w \in Suff(L)$. Тогава

$$(\exists y \in \Sigma^*)[yw \in L].$$

Нека y_0 е такова. От $y_0 w \in L$ имаме, че

$\hat{\delta}(s', y_0 w) \in F$. Тоест, $\hat{\delta}(\hat{\delta}(s', y_0), w) \in F$. Значи по вх. автомат A имаме следние изч за $y_0 w$

$$s' \xrightarrow{y_0}_A p \xrightarrow{w}_A q_1 \in F,$$

където $p \in Q$ е т.че $\hat{\delta}(s', y_0) = p$, а q_1 такова, че $\hat{\delta}(p, w) = q_1$. Нека $w = au$ за някои $a \in \Sigma$ и $u \in \Sigma^*$. Щом p е достижимо от s', то по деф. на N имаме

$$\hat{\Delta}(s, a) \ni \delta(p, a)$$

Нека означим $\delta(p, a) = q_0$. Тогава

$$\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(\delta(p, a), u) = \\ = \hat{\delta}(q_0, u) = q_1.$$

Прехода на w по A доби вида

$$s' \xrightarrow{y_0}_A p \xrightarrow{a}_A q_0 \xrightarrow{u}_A q_1 \in F$$

От факта, че $q_0, q_1 \in Q$ следва, че $\hat{\delta}(q_0, u) = q_1 \Rightarrow q_1 \in \hat{\Delta}(q_0, u)$.

Но $q_0 \in \Delta(s, a)$ и общо имаме

$$q_1 \in \hat{\Delta}(s, au) = \hat{\Delta}(s, w)$$

Но $q_1 \in F \subset F'$. Значи $q_1 \in F'$. И така $\hat{\Delta}(s, w) \cap F' \neq \emptyset$. ∎

(б) Добавили сме ново начално и крайно съст. $s' \notin Q$. Променили сме ф-ята на преходите и $F' = F \cup \{s'\}$. Ще докажем, че

$$(\forall w \in \Sigma^*)\,[\hat{\Delta}(s', w) \cap F' \neq \emptyset \iff w \in Subseq(L)]$$

Нека $w \in \Sigma^*$.

($\Rightarrow$) Нека $\hat{\Delta}(s', w) \cap F' \neq \emptyset$. Нека $w = a_1 a_2 \dots a_n$, където $a_i \in \Sigma$ за $1 \leq i \leq n$. Тогава има детерминистичен път по N от следния вид

$$s' = q_0 \xrightarrow{a_1}_N q_1 \xrightarrow{a_2}_N q_2 \xrightarrow{a_3}_N \dots \xrightarrow{a_n}_N q_n \in F'$$

Нека $\{(q_{i_j}, q_{i_j+1})\}_{j=1}^{k}$ са двойките съседни по този път състояния, между които няма преход в A, за $1 \leq k \leq n$.

фонт им

Да разгледаме една такава двойка (q_{i_j}, q_{i_j+1}) за някое $j \in \{1, \dots, k\}$.

Знаем, че $q_{i_j+1} \in \Delta(q_{i_j}, a_{i_j+1})$. Тогава q_{i_j+1} е достижимо от q_{i_j} по A. Значи

$$(\exists x \in \Sigma^*)\,[\hat{\delta}(q_{i_j}, x) = q_{i_j+1}].$$

Нека x_j е свидетел за това за всяко $j \in \{1, \dots k\}$. Разглеждаме думата

Нека w_j е следния отрязък от w, за $j \in \{0, \dots, k\}$

$$w_j = \begin{cases} \text{думата прочетена от } s' \text{ до } q_{i_1}, \text{ ако } j = 0 \\ \text{думата прочетена от } q_{i_k} \text{ до } q_n, \text{ ако } j = k \\ \text{думата прочетена от } q_{i_{j-1}} \text{ до } q_{i_j}, \text{ иначе} \end{cases}$$

Да разгледаме следната дума

$x = w_0 x_1 w_1 \dots w_{k-1} x_k w_k$.

Ясно е, че $x \in L(A)$ заради следния път по A

$$s \xrightarrow{w_0}_A q_{i_1} \xrightarrow{x_1}_A q_{i_1+1} \xrightarrow{w_1}_A q_{i_2} \xrightarrow{x_2}_A \dots \xrightarrow{w_{k-1}}_A q_{i_k} \xrightarrow{x_k}_A q_{i_k+1} \xrightarrow{w_k}_A q_n \in F'$$

Заб. Тук сме с допускането, че $w \neq \varepsilon$. Ако $w = \varepsilon$, то очевидно $w \in Subseq(L)$.

Щом $w \neq \varepsilon$, то $q_n \neq s'$, защото конструкцията не добавя преходи към s'. Значи действително $q_n \in F' \setminus \{s'\} = F$.

Сега вече е напълно ясно, че $w \in Subseq(L)$ т.к. $w = w_0 \dots w_k$ и $x = w_0 x_1 w_2 \dots w_{k-1} x_k w_k \in L$!

($\Leftarrow$) Обратно, нека $w \in Subseq(L)$. Тогава $w = w_0 \dots w_k$ за някои $w_1, \dots, w_k \in \Sigma^*$, $k \in \mathbb{N}$ и $x = w_0 x_1 w_1 \dots w_{k-1} x_k w_k \in L$.

Щом $x \in L$, то имаме следния път по A

$$s \xrightarrow{w_0}_A q_{i_1} \xrightarrow{x_1}_A q_{i_1+1} \xrightarrow{w_1}_A q_{i_2} \xrightarrow{x_2}_A \dots \xrightarrow{w_{k-1}}_A q_{i_k} \xrightarrow{x_k}_A q_{i_k+1} \xrightarrow{w_k}_A q_n, \; q_n \in F$$

Първо да разгледаме прехода $s \xrightarrow{w_0}_A q_{i_1}$.
Ясно е, че същият преход може да се извърши и започвайки от s' в N, защото s' наследява директните преходи на s по конструкция за N.

Сега да разгледаме преходите от вида

$q_{i_j} \xrightarrow{x_j}_A q_{i_j+1}$. Нека с p_j означим

първото състояние по пътя, съответстващ

на прехода $q_{i_j+1} \xrightarrow{w_j}_A q_{i_{j+1}}$. Тогава, ако $w_j = a_j w_j'$ за

някои $w_j' \in \Sigma^*$ и $a_j \in \Sigma$, то по A имаме пътя

$$q_{i_j+1} \xrightarrow{a_j}_A p_j \xrightarrow{w_j'}_A q_{i_{j+1}}$$

От факта, че q_{i_j+1} е достижимо от q_{i_j} и

$\delta(q_{i_j+1}, a_j) = p_j$ следва, че

$$p_j \in \Delta(q_{i_j}, a_j).$$

по конструкция за N. Значи в N имаме директния преход

$$q_{i_j} \xrightarrow{a_j}_N p_j$$

за всяко $j \in \{1, \dots, n\}$.

Всичко казано дотук ни позволява да заключим съществуването на следния път по N

$$s' \xrightarrow{w_0}_N q_{i_1} \xrightarrow{a_1}_N \underbrace{p_1 \xrightarrow{w_1'}_N q_{i_2}} \xrightarrow{a_2}_N \dots \xrightarrow{w_{k-1}'}_N q_{i_k} \xrightarrow{a_k}_N \underbrace{p_k \xrightarrow{w_k'}_N q_n} \in F'$$

Вътрешен за A $\Rightarrow$ насл. от N

И така, съществуването на този път ни дава, че

$$q_n \in \hat{\Delta}(s', w_0 a_1 w_1' a_2 \dots w_{k-1}' a_k w_k'),$$

тоест

$$q_n \in \hat{\Delta}(s', w_0 w_1 w_2 \dots w_k),$$

тоест

$$q_n \in \hat{\Delta}(s', w).$$

Но $q_n \in F \subset F'$ и значи

$$\hat{\Delta}(s', w) \cap F' \neq \emptyset. \qquad \blacksquare$$