Упражнение 9

1 Контекстно-свободни граматики

Автоматите, които разглеждахме досега бяха **разпознаватели на езици**. *Граматиката*, подобно на регулярния израз е **генератор на езици**. Тя представлява множество от правила и променливи, посредством които строим думи над дадена азбука.

Дефиниция 1. Контекстно-свободна граматика е наредена четворка $G = (V, \Sigma, R, S)$, където
— V е *крайно* множество от **нетерминали(променливи)**,
— Σ е азбука, чиито елементи ще наричаме **терминали**,
— R, **множеството от правилата**, е крайно подмножество на $V \times (\Sigma \cup V)^*$ и
— $S \in V$ е **началната променлива**.

Вместо $(X, y) \in R$ ще пишем $X \to_G y$. За всеки две думи $u, v \in (\Sigma \cup V)^*$ ще пишем $u \Rightarrow_G v$ тогава и само тогава, когато съществуват думи $x, y \in (\Sigma \cup V)^*$ и нетерминал $A \in V$, такива че $u = xAy, v = xv'y$ и $A \to_G v'$. Релацията $\Rightarrow_G^*$ е рефлексивното и транзитивно затваряне на $\Rightarrow_G$. Накрая, **езика генериран от G** е езикът

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}.$$

Един език L наричаме **контекстно-свободен**, ако $L = L(G)$ за някоя контекстно-свободна граматика G. Ако от контекста се подразбира, за коя граматика става въпрос, ще пишем $\to$ вместо $\to_G$ и $\Rightarrow$ вместо $\Rightarrow_G$.

Всяка редица от вида

$$w_0 \Rightarrow_G w_1 \Rightarrow_G ... \Rightarrow_G w_n$$

наричаме **извод** по G на w_n от w_0, за $w_0, ..., w_n \in (\Sigma \cup V)^*$ и $n \in \mathbb{N}$. Дължината на един извод е броя на срещанията на символа $\boxed{\Rightarrow_G}$ в него. Фактът, че съществува извод с дължина n на v от u по G ще записваме $u \Rightarrow_G^n v$.

Пример 1. Да разгледаме контекстно-свободната граматика $G = (V, \Sigma, R, S)$, където $V = S$, $\Sigma = \{a, b\}$ и R се състои от правилата $S \to aSb$ и $S \to \epsilon$. Възможен извод по G е например

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aabb.$$

На първите две стъпки използвахме правилото $S \to aSb$, а на последната използвахме $S \to \epsilon$. Лесно е да се съобрази, че $L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Следователно, някои контекстно-свободни езици не са регулярни.

Пример 2. Следната граматика генерира всички думи от балансирани леви и десни скоби: всяка лява скоба може да се съчетае с уникална дясна скоба след нея, и всяка дясна скоба може да се съчетае с уникална лява скоба преди нея. Нека $G = (V, \Sigma, R, S)$, където

$$V = \{S\},$$
$$\Sigma = \{(,)\},$$
$$R = \{S \to \epsilon,\ S \to SS,\ S \to (S)\}.$$

Два възможни извода по тази граматика са например

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow S(S) \Rightarrow S((S)) \Rightarrow S(()) \Rightarrow (S)(()) \Rightarrow ()(())$$

и

$$S \Rightarrow SS \Rightarrow (S)S \Rightarrow ()S \Rightarrow ()(S) \Rightarrow ()((S)) \Rightarrow ()(()).$$

Значи една и съща дума може да има два различни извода от S по една и съща граматика.

Сега ще покажем, че всички регулярни езици са контекстно-свободни. За целта ще дадем директна конструкция, която по подаден ДКА $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ генерира контекстно-свободна граматика $G = (V, \Sigma, R, S)$, такава че $L(A) = L(G)$. Конструкцията е следната.

$$V = Q,$$
$$S = s,$$
$$R = \{q \to \sigma p \mid \delta(q, \sigma) = p\} \cup \{q \to \epsilon \mid q \in F\}.$$

Има и други начини да покажем, че регулярните езици са подмножество на контекстно-свободните, но тях ще покажем по-нататък.

2 Задачи

Задача 1. Да разгледаме граматиката $G = (V, \Sigma, R, S)$, където

$$V = \{S, A\},$$
$$\Sigma = \{a, b\},$$
$$R = \{S \to AA,\ A \to AAA,\ A \to a,\ A \to bA,\ A \to Ab\}.$$

(а) Кои думи от $L(G)$ могат да се изведът с извод с дължина не повече от четири?
(б) Дайте поне четири различни извода на думата $babbab$.
(в) За всеки $m, n, p > 0$, опишете извод по G на думата $b^m a b^n a b^p$.

Задача 2. Да разгледаме граматиката $G = (V, \Sigma, R, S)$, където

$$V = \{S, A\},$$
$$\Sigma = \{a, b\},$$
$$R = \{S \to aAa,\ S \to bAb,\ S \to \epsilon,\ A \to SS\}.$$

Дайте извод на думата $baabbb$ по G.

Задача 3. Дайте контекстно-свободни граматики за всеки от следните езици.
(а) $\{w\#w^{rev} \mid w \in \{a,b\}^*\}$
(б) $\{ww^{rev} \mid w \in \{a,b\}^*\}$
(в) $\{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^{rev}\}$

Задача 4. Да фиксираме азбука $\Sigma = \{a, b, \boldsymbol{(}, \boldsymbol{)}, \boldsymbol{+}, \boldsymbol{\star}, \boldsymbol{\epsilon}, \varnothing\}$. Дайте контекстно-свободна граматика, която генерира всички думи над Σ^*, които са регулярни изрази над $\{a, b\}$.

Задача 5. Дайте контекстно-свободни граматики за всеки от следните езици.
(а) $\{a^m b^n \mid m \geq n\}$
(б) $\{a^m b^n c^p d^q \mid m + n = p + q\}$
(в) $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ броят на b-тата в w е равен на два пъти броя на a-тата$\}$
(г) $\{uawb \mid u, w \in \{a,b\}^* \ \&\ |u| = |w|\}$
(д) $\{w_1\#w_2\#...\#w_k\#\#w_j^{rev} \mid k \geq 1 \ \&\ 1 \leq j \leq k \ \&\ w_i \in \{a,b\}^+$ за $i = 1, ..., k\}$
(е) $\{a^m b^n \mid m \leq 2n\}$

3 Решения

Задача 1. (а) aa, baa, aba, aab;
(б) 1. $S \Rightarrow AA \Rightarrow bAA \Rightarrow bAbA \Rightarrow bAbbA \Rightarrow bAbbAb \Rightarrow babbAb \Rightarrow babbab$;
2. $S \Rightarrow AA \Rightarrow AbA \Rightarrow AbAb \Rightarrow bAbAb \Rightarrow bAbbAb \Rightarrow babbAb \Rightarrow babbab$;
3. $S \Rightarrow AA \Rightarrow bAA \Rightarrow bAAb \Rightarrow bAbAb \Rightarrow bAbbAb \Rightarrow babbAb \Rightarrow babbab$;
4. $S \Rightarrow AA \Rightarrow AbA \Rightarrow AbbA \Rightarrow bAbbA \Rightarrow bAbbAb \Rightarrow babbAb \Rightarrow babbab$.
(в) $S \Rightarrow AA \underbrace{\Rightarrow bAA \Rightarrow bbAA \Rightarrow ... \Rightarrow}_{m \text{ пъти}} b^m AA \Rightarrow \underbrace{b^m AbA \Rightarrow b^m AbbA \Rightarrow ... \Rightarrow}_{n \text{ пъти}}$
$b^m Ab^n A \Rightarrow b^m ab^n A \Rightarrow \underbrace{b^m ab^n Ab \Rightarrow b^m ab^n Abb \Rightarrow ... \Rightarrow}_{p \text{ пъти}} b^m ab^n Ab^p \Rightarrow b^m ab^n ab^p$.

Задача 2. $S \Rightarrow bAb \Rightarrow bSSb \Rightarrow baAaSb \Rightarrow baAabAbb \Rightarrow baabAbb \Rightarrow baabbb$.

Задача 3. (a) $S \to aSa \mid bSb \mid \#$;
(б) $S \to aSa \mid bSb \mid \epsilon$;
(в) $S \to aSa \mid bSb \mid a \mid b \mid \epsilon$.

Задача 4. $S \to a \mid b \mid \oslash \mid \boldsymbol{\epsilon} \mid \mathbf{(}SS\mathbf{)} \mid \mathbf{(}S \mathbf{+} S\mathbf{)} \mid S^{\star}$.

Задача 5.(a) $S \to aS \mid aSb \mid \epsilon$;

(б) $S \to aSd \mid A \mid B \mid \epsilon$
$A \to aAc \mid C \mid \epsilon$
$B \to bBd \mid C \mid \epsilon$
$C \to bCc \mid \epsilon$;

(в) $S \to aSbSbS \mid bSaSbS \mid bSbSaS \mid \epsilon$;

(г) $S \to Ab$
$A \to aAb \mid bAa \mid aAa \mid bAb \mid a$;

(д) $S \to AB \mid B$
$B \to aBa \mid bBb \mid a\#A\#a \mid b\#A\#b \mid a\#\#a \mid b\#\#b$
$A \to aA \mid bA \mid AA \mid a\# \mid b\#$;

(e) $S \to aSbb \mid Sb \mid \epsilon$;