Упражнение 2

1 Детерминирани крайни автомати

Крайният автомат представлява абстрактна машина снабдена с множество от състояния, азбука и правила за преход между състоянията с буквите от азбуката. Някои от състоянията на автомата са *крайни*, а някои — при *детерминираните крайни автомати*, точно едно — *начални*. Работата на автомата при подадена дума на вход е да прочете думата и в процеса на което, да извърши зададените преходи спрямо снабдените му правила. След прочитането на подадената дума, автоматът има единствена функционалност да върне отговор *да* или *не* на въпроса дали четенето е приключило в крайно състояние.

Дефиниция 1. Детерминиран краен автомат (ДКА) е наредена петорка $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, където
— Q е *крайно* множество от **състояния**,
— Σ е азбука,
— $s \in Q$ е **началното състояние**,
— $F \subseteq Q$ е множеството от **крайни състояния** и
— δ, **функцията на преходите**, е функция от $Q \times \Sigma$ към Q.

Неформално, за една дума $w \in \Sigma^*$ казваме, че автоматът A разпознава w, ако четенето на w по автомата приключи в някое заключително състояние $q \in F$.

За да стигнем до формалната дефиниция на това, какво означава един автомат да разпознава дума w, трябва първо да дефинираме така наречената *разширена функция на преходите* $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$. При аргументи състояние q и дума w, функцията $\hat{\delta}$ връща състоянието, в което ще попаднем, тръгвайки от q и четейки думата w. Дефиницията е с индукция по дължината на w.

База: $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$, за всяко $q \in Q$.

Стъпка: Сега да предположим, че $w = ua$ за някои $u \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$. Тогава

$$\hat{\delta}(q, w) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a).$$

Сега вече формално, казваме, че автоматът A **разпознава** думата w, ако просто $\hat{\delta}(s, w) \in F$.

С $L(A)$ означаваме множеството от всички думи $w \in \Sigma^*$, които A разпознава. Тоест, $L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(s, w) \in F\}$.

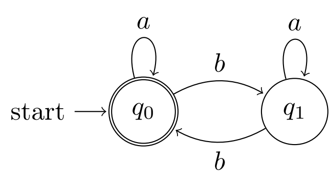
Пример 1. Нека A е детерминираният краен автомат $(Q, \Sigma, \delta, s, F)$, където

$$Q = \{q_0, q_1\},$$
$$\Sigma = \{a, b\},$$
$$s = q_0,$$
$$F = \{q_0\},$$

и δ е функцията, представена чрез следната талбица.

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_1
q_1	b	q_0

Можем да онагледим вида на A чрез следната фигура.



Състоянието q_0, бивайки крайно, е илюстрирано с двойно оградено кръгче.

Вече лесно се вижда, че $L(A) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ има четен брой } b\text{-та}\}$.

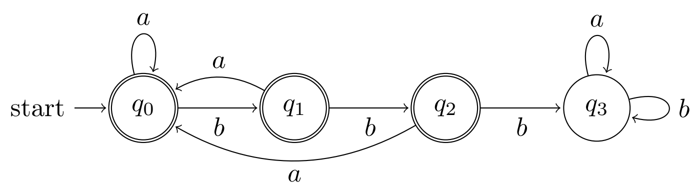
Пример 2. Сега ще построим ДКА A, който разпознава езика $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ не съдържа три последователни } b\text{-та}\}$. Нека $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, където

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$
$$\Sigma = \{a, b\},$$
$$s = q_0,$$
$$F = \{q_0, q_1, q_2\},$$

и δ е функцията, представена чрез следната талбица.

q	σ	$\delta(q, \sigma)$
q_0	a	q_0
q_0	b	q_1
q_1	a	q_0
q_1	b	q_2
q_2	a	q_0
q_2	b	q_3
q_3	a	q_3
q_3	b	q_3

Можем да онагледим вида на A чрез следната фигура.



Можем да мислим за състоянието q_3 като за "мъртво състояние"— влезем ли веднъж в него в процеса на четене, не можем да излезем.

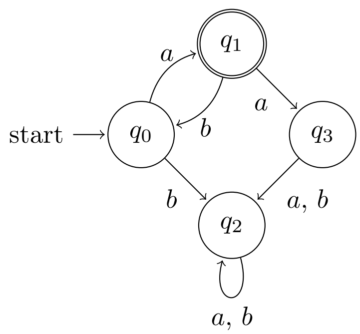
2 Задачи

Задача 1. Нека A е детерминиран краен автомат. Кога е изпълнено, че $\epsilon \in L(A)$? Докажете отговора си.

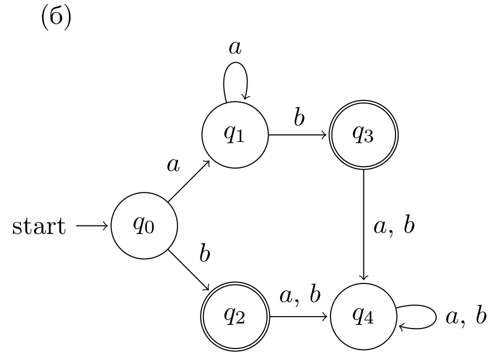
Задача 2. Постройте детерминирани крайни автомати разпознаващи всеки от следните езици.
(а) $\{w \in \{a, b\}^* \mid$ всяко a в w е последвано непосредствено от $b\}$.
(б) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ има $abab$ като поддума$\}$.
(в) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ няма нито aa, нито bb като поддума$\}$.
(г) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ има нечетен брой a-та и четен брой b-та$\}$.
(д) $\{w \in \{a, b\}^* \mid w$ има ab и ba като поддуми$\}$.

Задача 3. За всеки от дадените по-долу автомати посочете езиците, които разпознават.

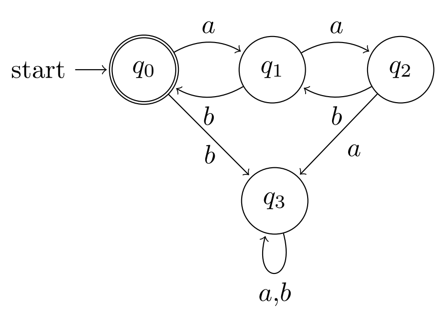
(а)



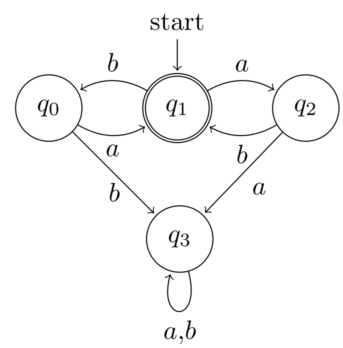
(б)



(в)



(г)



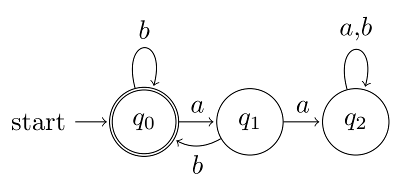
Задача 4. Докажете, че за произволни думи w_1 и w_2 и произволно състояние q, $\hat{\delta}(q, w_1 w_2) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w_1), w_2)$.

3 Решения

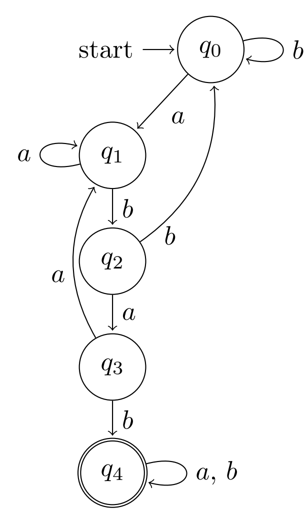
Задача 1. Нека s е началното състояние на A, а F — множеството от крайните му състояния. Твърдим, че $\epsilon \in L(A) \iff s \in F$.
Имаме $\epsilon \in L(A) \iff$
$\hat{\delta}(s, \epsilon) \in F \iff$
$s \in F$.

Задача 2.

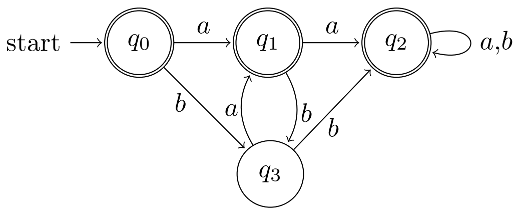
(а)



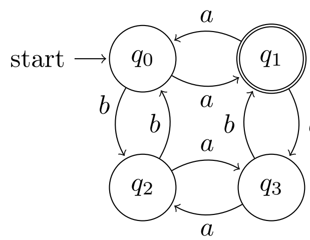
(б)



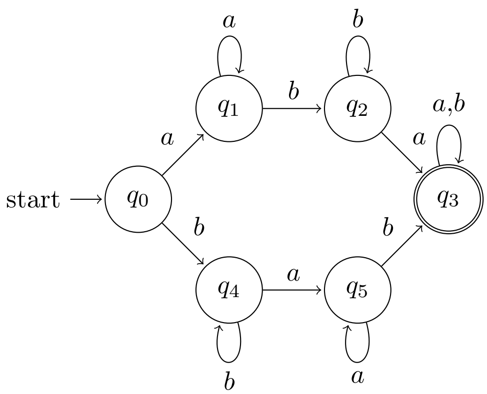
(в)



(г)



(д)



Задача 3. (а) $a \circ \{ba\}^*$
(б) $\{a\}^* \circ \{b\}$
(в) $(\{a\} \circ \{ab\}^* \circ \{b\})^*$
(г) $(\{ab\}^* \circ \{ba\}^*)^*$.

Задача 4. Ще докажем твърдението с индукция по $|w_2|$.
База: Ако $w_2 = \epsilon$, то $\hat{\delta}(q, w_1w_2) = \hat{\delta}(q, w_1) = \hat{\delta}\left(\hat{\delta}(q, w_1), \epsilon\right) = \hat{\delta}\left(\hat{\delta}(q, w_1), w_2\right)$.
Стъпка: Ако $w_2 = ua$ за някои $u \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$, то

$\hat{\delta}(q, w_1w_2) =$

$\hat{\delta}(q, w_1ua) =$

$\delta\left(\hat{\delta}(q, w_1u), a\right) \overset{\text{И.П}}{=}$

$\delta\left(\hat{\delta}\left(\hat{\delta}(q, w_1), u\right), a\right) \overset{\text{деф.}\hat{\delta}}{=}$

$\hat{\delta}\left(\hat{\delta}(q, w_1), ua\right) =$

$\hat{\delta}(\hat{\delta}(q, w_1), w_2)$.