Упражнение 11

1 Коректност на контекстно-свободни граматики

Продължаваме с доказателство на коректността на к-св. граматика с две променливи.

Пример 1. Ще докажем коректността на следната граматика G, генерираща езика $L = \{a^m b^n \mid m > n\}$:

$$G: \boxed{\begin{array}{l} S \to aA \\ A \to aA \mid aAb \mid \epsilon \end{array}}$$

Отново, твърдението което се опитваме да докажем е следното:

$$(\forall w \in \Sigma^*)[w \in L(G) \iff w \in L].$$

Следната Лема късаеща релацията $\Rightarrow^*$ ще ни бъде нужна.

Лема 1. За всяка дума $w \in (\Sigma \cup V)^*$, ако $S \Rightarrow^* w$, то w е в един от следните четири вида:
(1) S;
(2) $a^m A b^n$, за някои $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$;
(3) $a^m b^n$, за някои $m, n \in \mathbb{N}$ и $m > n$.
Доказателство: Еквивалентно, искаме да покажем, че

$$(\forall n \in \mathbb{N})[(\forall w \in (\Sigma \cup V)^*)[S \Rightarrow^n w \implies w \text{ е в някои от видовете (1)-(3)}]].$$

За целта ще проведем индукция относно n.

База: Ако $n = 0$ и w е такава редица от терминали и нетерминали, че $S \Rightarrow^0 w$, то $w = S$. Следователно, w е от вид (1).

Стъпка: Ако $n > 0$ и w е такава редица от терминали и нетерминали, че $S \Rightarrow^n w$, то съществува извод с дължина n на w от S. Да фиксираме един такъв извод

$$S = w_0 \Rightarrow w_1 \Rightarrow ... \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow w_n = w.$$

От този извод можем в частност да заключим, че $S \Rightarrow^{n-1} w_{n-1}$. Съгласно И.П. това означава, че w_{n-1} е в някои от видовете (1)-(3). Веднага отхвърляме възможността w_{n-1} да е от вид (3), тъй като тя трябва да съдържа нетерминали, съгласно дефиницията на $\Rightarrow$. Значи имаме следните два случая:

1 сл. $w_{n-1} = S$. Тогава единствената възможност е $w_n = aA$, съгласно правилата на G. Следователно w_n е от вид (2), за $m = 1$.
2 сл. $w_{n-1} = a^m A b^n$, за някои $m, n \in \mathbb{N}$, такива че $m > n$. Тук имаме три възможности за това, кое правило ще приложим на следваща стъпка (върху единствения нетерминал в редицата, A).

2.1 сл. $w_n = a^m aAb^n$, тоест приложили сме правилото $\boxed{A \to aA}$. Тогава $w_n = a^{m+1}Ab^n$ е очевидно от вид (2), тъй като $m > n \implies m+1 > n$.

2.2 сл. $w_n = a^m aAbb^n$, тоест приложили сме правилото $\boxed{A \to aAb}$. Тогава $w_n = a^{m+1}Ab^{n+1}$ е очевидно от вид (2), тъй като $m > n \implies m+1 > n+1$.

2.3 сл. $w_n = a^m \epsilon b^n$, тоест приложили сме правилото $\boxed{A \to \epsilon}$. Тогава $w_n = a^m b^n$ е очевидно от вид (3).
С това случаите се изчерпаха и индукцията приключи. Лемата е доказана.

Преминаваме към доказателството на същинското твърдение. Нека $w \in \Sigma^*$.
($\Rightarrow$) Нека $w \in L(G)$. Тогава $S \Rightarrow^* w$ и $w \in \Sigma^*$. Съгласно **Лема 1**, $w = a^m b^n$, за някои $m, n \in \mathbb{N}$, такива че $m > n$. Следователно $w \in L$.
($\Leftarrow$) Обратно, с индукция относно m ще докажем, че

$$(\forall m \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N})[m > n \implies S \Rightarrow^{m+1} a^m b^n]]$$

База: $m = 0$. Тогава със сигурност $m \not> n$. Значи импликацията е тривиално изпълнена.

Стъпка: $m > 0$. Нека $m = m_1 > 0$. Искаме да покажем следното:

$$(\forall n \in \mathbb{N})[m_1 > n \implies S \Rightarrow^{m_1+1} a^{m_1} b^n]$$

За целта ще проведем индукция по n.

База: $n = 0$. Съгласно И.П. на външната индукция, $S \Rightarrow^{m_1-1+1} a^{m_1-1}b^0$. Тоест $S \Rightarrow^{m_1} a^{m_1-1}$. Следователно $aA \Rightarrow^{m_1-1} a^{m_1-1}$. От тук имаме, че $aaA \Rightarrow^{m_1-1} aa^{m_1-1}$. Тоест $aaA \Rightarrow^{m_1-1} a^{m_1}$. От друга страна $S \Rightarrow aA$ и $aA \Rightarrow aaA$. Общо имаме $S \Rightarrow^{m_1-1+2} a^m$. Тоест $S \Rightarrow^{m_1+1} a^{m_1}$.

Стъпка: $n > 0$. Нека $m_1 > n$. Тогава $m_1 - 1 > n - 1$. По И.П. на външната индукция имаме, че $S \Rightarrow^{m_1-1+1} a^{m_1-1}b^{n-1}$. Тоест $S \Rightarrow^{m-1} a^{m_1-1}b^{n-1}$. Тогава $aA \Rightarrow^{m_1-1} a^{m_1-1}b^{n-1}$. Следователно $aaAb \Rightarrow^{m_1-1} aa^{m_1-1}b^{n-1}b$. Тоест $aaAb \Rightarrow^{m_1-1} a^{m_1}b^n$. От друга страна $S \Rightarrow aA$ и $aA \Rightarrow aaAb$. Общо имаме, че $S \Rightarrow^{m_1-1+2} a^{m_1}b^n$. Тоест $S \Rightarrow^{m_1+1} a^{m_1}b^n$, което искахме да покажем.

2 Задачи

Задача 1. Докажете коректността на следната регулярна граматика, генерираща езика $\mathscr{L}(a^\star b)$:

$$G\colon \boxed{\begin{array}{l} S \to aS \mid A \\ A \to b \end{array}}$$

Задача 2. Докажете коректността на следната регулярна граматика, генерираща езика $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ има четен брой a-та$\}$:

$$G\colon \boxed{\begin{array}{l} S \to bS \mid aA \mid \epsilon \\ A \to bA \mid aS \end{array}}$$

Задача 3. Докажете коректността на следната граматика, генерираща езика $\mathscr{L}(aa^\star bb^\star)$:

$$G\colon \boxed{\begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aA \mid a \\ B \to bB \mid b. \end{array}}$$

Задача 4. Докажете коректността на следната граматика, генерираща езика $L = \{a^n b^m a^k \mid n + k = m\}$:

$$G\colon \boxed{\begin{array}{l} S \to AB \\ A \to aAb \mid \epsilon \\ B \to bBa \mid \epsilon \end{array}}$$

3 Решения

Задача 1. Възможните видове на редиците, генерирани от G са:
(1) $a^n S$;
(2) $a^n A$;
(3) $a^n b$.

Задача 2. Възможните видове на редиците, генерирани от G са:
(1) $(b^n a b^k a)^m b^l a b^s A$;
(2) $(b^n a b^k a)^m b^l S$;

(3) $(b^n a b^k a)^m b^l$.

Задача 3. Езикът по дефиниция е конкатенация на $\mathscr{L}(aa^\star)$ и $\mathscr{L}(bb^\star)$. Ако използваме конструкцията за конкатенация, е достатъчно да покажем, че граматиката G_1 : $\boxed{S_1 \to aS_1 \mid a}$ генерира $\mathscr{L}(aa^\star)$ и аналогично, че граматиката G_2 : $\boxed{S_2 \to bS_2 \mid b}$ генерира $\mathscr{L}(bb^\star)$.

Задача 4. Езикът може да се представи като конкатенация на $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ако използваме конструкцията за конкатенация, е достатъчно да покажем, че граматиката G_1 : $\boxed{S_1 \to aS_1 b \mid \epsilon}$ генерира $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и аналогично, че граматиката G_2 : $\boxed{S_2 \to bS_2 a \mid \epsilon}$ генерира $\{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.