Упражнение 4

1 Затвореност относно регулярните операции

В това упражнение целим да покажем, че класът на *автоматните* езици е затворен относно някои от операциите, които въведохме върху езици — *обединение, конкатенация* и *звезда на Клини.*

Дефиниция 1. Казваме, че един език L е **автоматен**, ако съществува ДКА A, такъв че $L(A) = L$.

Теорема 1. Класът на автоматните езици е затворен относно операциите
(а) *обединение*;
(б) *конкатенация*;
(в) *звезда на Клини*;

Доказателството на горната теорема би се състояло в това да се предложат конструкции, които по подадени два детерминирани автомата A_1 и A_2 или единствен ДКА A строят нови детерминирани автомати, разпознаващи съответно езиците $L(A_1) \cup L(A_2)$, $L(A_1) \circ L(A_2)$ и $L(A)^*$, след което да се докаже коректността на предложените конструкции. Ние ще се ограничим само до това да предложим конструкции.

(а) *Обединение.* Нека $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$ са детерминирани крайни автомати. Ще конструираме нов НКА N, такъв че $L(N) = L(A_1) \cup L(A_2)$. Идеята е да добавим ново начално състояние, което недетерминистично да извършва всички преходи, които s_1 и s_2 извършват, ефективно опитвайки се да *познаем* дали входната дума принадлежи на $L(A_1)$ или на $L(A_2)$.

Формално, ако Б.О.О. допуснем, че $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, то N дефинираме както следва: $N = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$, където $s \notin Q_1 \cup Q_2$,

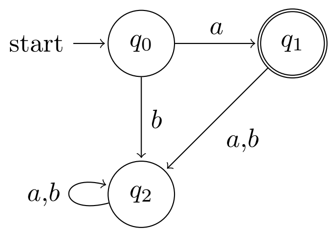
$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\},$$

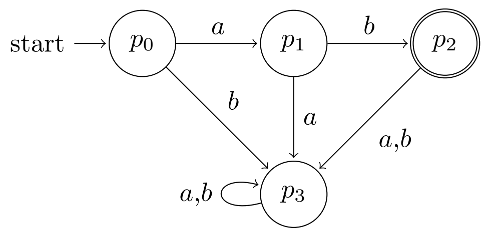
$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\}, & \text{ако } s_1 \in F_1 \text{ или } s_2 \in F_2, \\ F_1 \cup F_2, & \text{иначе }, \end{cases}$$

а Δ дефинираме по следния начин

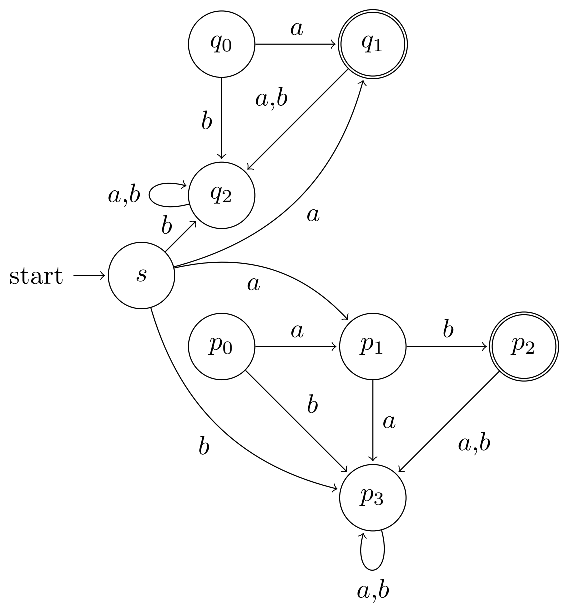
$$\Delta(q, a) = \begin{cases} \{\delta_1(q, a)\}, & \text{ако } q \in Q_1, \\ \{\delta_2(q, a)\}, & \text{ако } q \in Q_2, \\ \{\delta_1(q, a)\} \cup \{\delta_2(q, a)\}, & \text{ако } q = s. \end{cases}$$

Пример 1. Ще построим НКА за езика $\{a\} \cup \{ab\}$ използвайки горната конструкция върху следните два автомата за езиците $\{a\}$ и $\{ab\}$ съответно.





Резултатния НКА е следният.



(б) *Конкатенация.* Отново, нека $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$, са детерминирани крайни автомати. Конструираме НКА N такъв че $L(N) = L(A_1) \circ L(A_2)$. Идеята този път е N да симулира A_1 докато стигне до някое негово крайно състояние, след което да направи недетерминистичен "скок" към A_2 чрез имитация на преходите на s_2 със следващата прочетена буква.

Формално, ако Б.О.О. допуснем, че $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, то N дефинираме както следва: $N = (Q, \Sigma, \Delta, s_1, F)$,

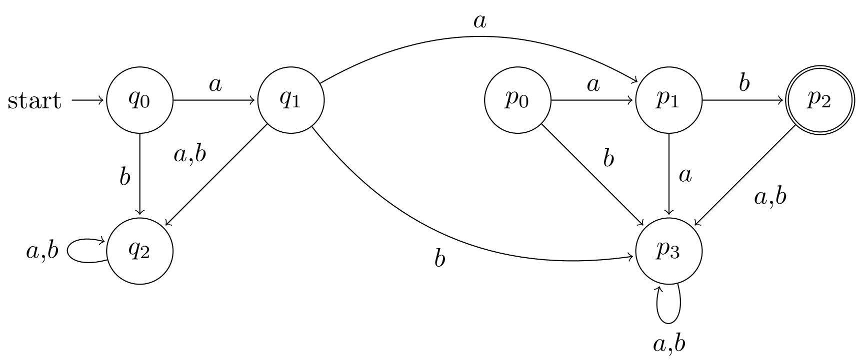
$$Q = Q_1 \cup Q_2$$

$$F = \begin{cases} F_1 \cup F_2, & \text{ако } s_2 \in F_2, \\ F_2, & \text{иначе }, \end{cases}$$

а Δ дефинираме по следния начин

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q_1 \setminus F_1, \\ \{\delta_1(q,a)\} \cup \{\delta_2(s_2,a)\}, & \text{ако } q \in F_1, \\ \{\delta_2(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q_2. \end{cases}$$

Пример 2. Ще построим НКА за езика $\{a\} \circ \{ab\}$ използвайки горната конструкция върху автоматите от **Пример 1**.



(в) *Звезда на Клини.* Нека $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ е ДКА. Ще конструираме НКА N, такъв че $L(N) = L(A)^*$. Естествената идея би била да конкатенираме A към самия себе си без да създаваме копие и да направим началното състояние крайно, ако вече не е такова. Този подход обаче е грешен, защото може да вкара нови думи в езика в случаите, в които A има преходи обратно към началното състояние. За да получим автомат за $L(A)^*$ трябва да добавим ново начално и заключително състояние, което да имитира преходите на оригиналното начално състояние вместо да правим оригиналното начално състояние крайно.

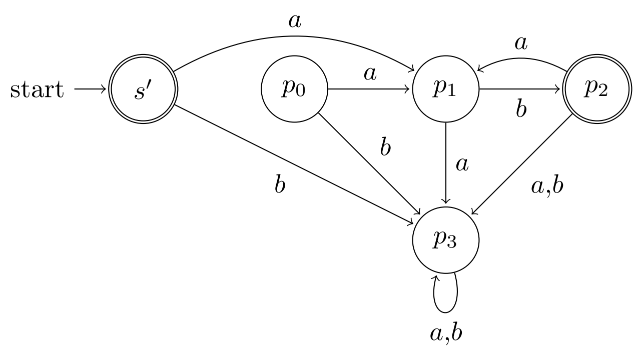
Формално N дефинираме както следва: $N = (Q', \Sigma, \Delta, s', F')$,

$$s' \notin Q$$
$$Q' = Q \cup \{s'\}$$
$$F' = F \cup \{s'\},$$

а Δ дефинираме по следния начин

$$\Delta(q,a) = \begin{cases} \{\delta(q,a)\}, & \text{ако } q \in Q \setminus F_1, \\ \{\delta(s,a)\} \cup \{\delta(q,a)\}, & \text{ако } q \in F_1, \\ \{\delta(s,a)\}, & \text{ако } q = s'. \end{cases}$$

Пример 3. Ще построим НКА за езика $\{ab\}^*$ използвайки горната конструкция върху автомата за $\{ab\}$ от **Пример 1**.



Разбира се, предложените конструкции строят недетерминирани автомати, а нашата цел беше да построим детерминирани такива, за да покажем затвореността на класа на автоматните езици. Както показахме на миналото упражнение, резултатните недетерминирани автомати винаги могат да се детерминират като последна стъпка в предложените конструкции.

2 Задачи

Задача 1. Дайте *директни* конструкции за затвореността относно следните две операции.
(а) *Допълнение.*
(б) *Сечение.*

Забележка. Директни ще рече да не използвате, че сечението може да се представи чрез допълнение и обединение.

Задача 2. Използвайки конструкциите от **Теорема 1**, постройте недетерминирани крайни автомати разпознаващи следните езици.
(а) $\{a\}^* \circ (\{ab\} \cup \{ba\} \cup \{\epsilon\}) \circ \{b\}^*$
(б) $(\{a\} \cup \{b\})^* \circ (\{\epsilon\} \cup \{c\})$
(в) $(\{a\}^* \cup \{b\}^*) \circ \{c\}$

Забележка. В **Задача 2** можете неформално да приложите конструкциите върху недетерминирани автомати, вместо да започнете от детерминирани такива и да детерминирате на всяка стъпка. Ако човек е схванал конструкциите за детерминирани автомати, не би трябвало да се затрудни да ги прилага и за недетерминирани такива, въпреки липсата на формално изложение.

Задача 3. Нека $L \subseteq \Sigma^*$. Дефинираме следните езици.

1. $Pref(L) = \{w \in \Sigma^* \mid x = wy$ за някои $x \in L, y \in \Sigma^*\}$ (множеството от **префиксите** на L).
2. $Suff(L) = \{w \in \Sigma^* \mid x = yw$ за някои $x \in L, y \in \Sigma^*\}$ (множеството от **суфиксите** на L).
3. $Subseq(L) = \{w_1 w_2 ... w_k \mid k \in \mathbb{N}, w_i \in \Sigma^*$ за $i = 1, ..., k$, и има дума $x = x_0 w_1 x_1 w_2 x_2 ... w_k x_k \in L\}$. (множеството от **подредиците** на L).
4. $Max(L) = \{w \in L \mid$ ако $x \neq \epsilon$, то $wx \notin L\}$.
5. $L^{rev} = \{w^{rev} \mid w \in L\}$.

Покажете че ако L е автоматен, то всеки от следните езици също е автоматен.
(а) $Pref(L)$
(б) $Suff(L)$
(в) $Subseq(L)$
(г) $Max(L)$
(д) L^{rev}

Задача 4. За два езика L_1 и L_2 над азбука Σ, дефинираме *частното* на L_1 по отношение L_2 да бъде езикът

$$L_1/L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid wx \in L_1 \text{ за някое } x \in L_2\}.$$

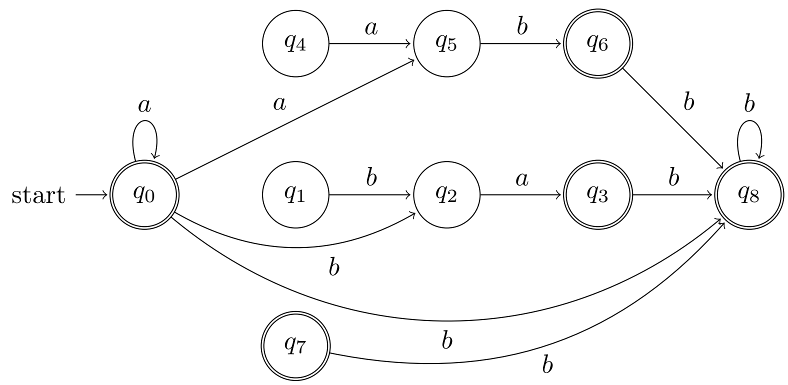
Докажете, че ако L_1 е автоматен, то L_1/L_2 е автоматен език.

3 Решения

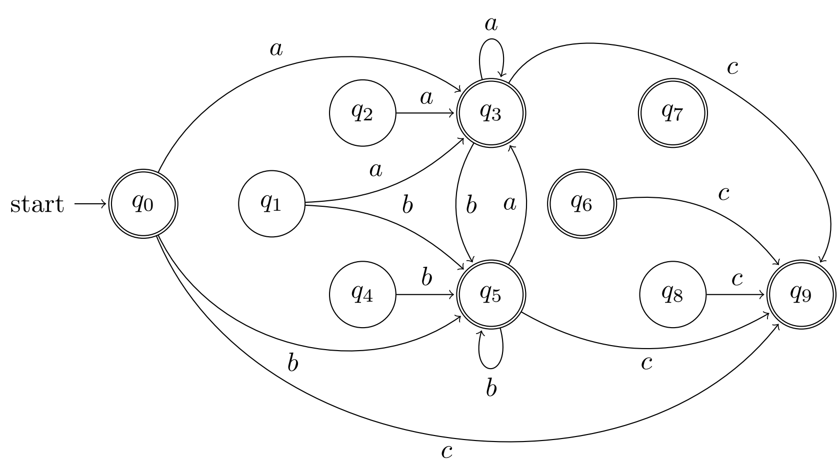
Задача 1.(а) Достатъчно е да обърнем крайността на всяко състояние. Тоест $F' = Q \backslash F$. Тук обаче е ключово да отбележим, че входният автомат трябва да бъде детерминиран.
(б) Нека $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, s_1, F_1)$ и $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, s_2, F_2)$. Предлагаме НКА $N = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Delta, (s_1, s_2), F_1 \times F_2)$, където Δ е дефинирана както следва.

$$\Delta((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$$

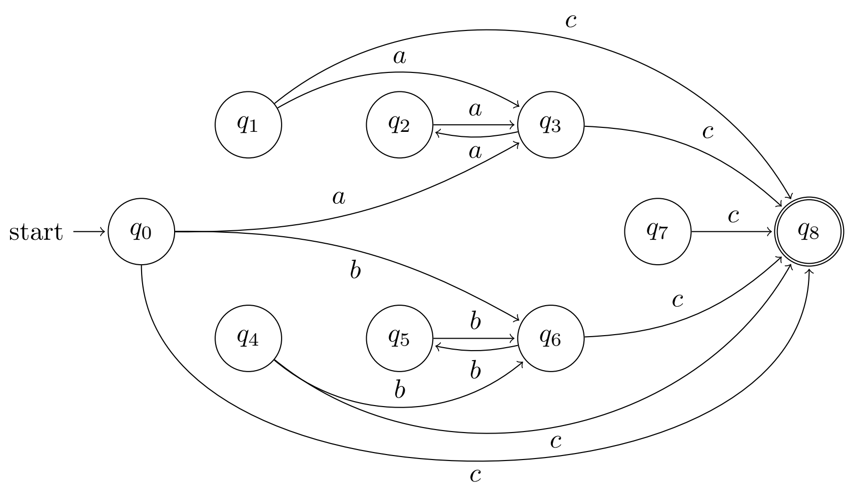
Задача 2. (а)


start
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
q_6
q_7
q_8
a
a
a
a
b
b
b
b
b
b
b
b

(б)


start
q_0
q_1
q_2
q_3
q_4
q_5
q_6
q_7
q_8
q_9
a
a
a
a
a
b
b
b
b
b
c
c
c
c
c

(в)



Задача 3. (а) Просто променяме множеството от крайните състояния по следния начин:

$$F' = \{q \in Q \mid (\exists w \in \Sigma^*)[\hat{\delta}(q,w) \in F]\}.$$

(б) Едно състояние $q \in Q$ ще наричаме *достижимо от* s, ако съществува дума $w \in \Sigma^*$, такава че $\hat{\delta}(s,w) = q$. Нека $\mathbb{Q}$ е множеството от всички достижими от s състояния на входния автомат (този, разпознаващ L). Добавяме ново начално състояние $s \notin Q$. Добавяме s към F. Ясно е как работи Δ върху състояния, които не са s. Нека $a \in \Sigma$. Имаме

$$\Delta(s,a) = \{\delta(q,a) \mid q \in \mathbb{Q}\}.$$

(в) Нека $Q = \{q_1, ..., q_n\}$. За $i = 1, ..., n$ нека Q_i е множеството от достижимите от q_i състояния. Нека $a \in \Sigma$. Тогава

$$\Delta(q_i, a) = \bigcup_{q \in Q_i} \{\delta(q,a)\}$$

(г) Променяме множеството от крайните състояния по следния начин:

$$F' = \{q \in F \mid (\forall w \in \Sigma^+)[\hat{\delta}(q,w) \notin F]\}.$$

(д) Първо обръщаме преходите на автомата:

$$\Delta(q,a) = \{p \in Q \mid \delta(p,a) = q\}.$$

След това добавяме ново начално състояние $s \notin Q$, което е крайно тстк началното състояние на входния автомат е крайно. Към Δ добавяме преходите

$$\Delta(s,a) = \bigcup_{q \in F} \Delta(q,a),$$

за всяко $a \in \Sigma$.