Combinatoria

1. Cardinal de un conjunto y ppios de conteo

Dado un conjunto A, llamamos cardinal de A y se denota $|A|$ al número de elementos que componen ese conjunto.

↳ Propiedades básicas:

1º $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2º Principio del producto: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \dots \times |A_n|$

↳ Ejemplo: ¿Cuántas matrículas ≠ podemos hacer sabiendo que tenemos cuatro cifras del 0 al 9 y tres letras elegidas entre todas las consonantes menos ñ, q?

$\underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{10.000} \times \underbrace{20 \times 20 \times 20}_{20^3} = 80.000.000$ matrículas ≠ podríamos hacer con esas combinaciones

3º Dados dos conjuntos A y B si la aplicación $f: A \to B$ es $\boxed{\text{inyectiva}}$ entonces $|A| \leq |B|$

4º Dados dos conjuntos A y B si la aplicación $f: A \to B$ es $\boxed{\text{sobreyectiva}}$ entonces $|A| \geq |B|$

5º Dados dos conjuntos A y B si la aplicación $f: A \to B$ es $\boxed{\text{biyectiva}}$ entonces $|A| = |B|$

• Principio de Dirichlet o del palomar:

Si $|A| > |B|$ entonces la aplicación $f: A \to B$ es no inyectiva.

2. Permutaciones, variaciones y combinaciones:

• ¿Importa el orden?
- Sí → ¿Intervienen todos los elementos?
  - Sí → PERMUTACIONES
  - No → VARIACIONES
- No → COMBINACIONES

2.1. Permutaciones

· Si tenemos n elementos y queremos saber de cuantas formas distintas los podemos colocar / ordenar importando el orden tendremos permutaciones de n elementos. Si los elementos no se pueden repetir tendremos $\boxed{P_n = n!}$ ordenaciones distintas.

→ Ejemplo: ¿De cuántas formas podemos colocar las letras ABC sin q se repitan?

$P_3 = 3! = 6$

ABC CAB
BAC BCA
ACB CBA

→ Ejemplo: ¿Cuantas palabras ≠ podemos formar con las letras de la palabra CIELO?

$P_5 = 5! = 120$

→ Ejemplo: ¿Y si me preguntan cuantas palabras pero puede haber repetición?

Se trataría entonces de permutaciones con repetición y tendrían que especificarnos cuantas veces se repite cada elemento.

$$\boxed{P_n^R = \frac{n!}{K_1!\ K_2!\ \dots\ K_n!}}$$

n° veces se repite el 1° elemento

↳ n° veces se repite el 2° elemento

$$P_4^R = \frac{4!}{2!\ 1!\ 1!} = 12$$

2.2. Variaciones

· Si tenemos n elementos y queremos saber cuantas ordenaciones distintas podemos hacer con m de ellos importando el orden tendremos variaciones de n elementos tomados de m en m.

$$\boxed{V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

→ Ejemplo: En una clase se han presentado a delegado y subdelegado 7 alumnos. ¿De cuantas formas podemos ordenarlos si seleccionamos 1 como delegado y otro como subdelegado?

$$V_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = 42$$ ordenaciones ≠ ↗ de delegado ↘ de subdelegado

2.3. Variaciones con repetición:

· Cuando queremos calcular el nº de ordenaciones distintas que se pueden realizar con n elementos de los que escogemos, importando el orden y los elementos pueden repetirse decimos que trabajamos con variaciones con repetición.

$$\boxed{VR_n^m = n^m}$$

→ Ejemplo: Para la contraseña de usuario nos piden 5 elementos que pueden ser dígitos (0-9) ó letras distinguiendo entre mayúsculas y minúsculas. ¿Cuántas contraseñas diferentes se podrían crear?

. Elementos: $10 \text{ (números)} + \underset{\text{May.}}{27} + \underset{\text{min.}}{27} \text{ (letras)} = 64$

· Son variaciones con repeticiones de los 64 elementos.

$$\cdot\ VR_{64}^5 = 64^5 = 1073741824 \text{ posibilidades}$$

· ¿Y si no distinguimos entre mayúsculas y minúsculas?

. Elementos: $10 \text{ (números)} + 27 \text{ (letras)} = 37$

$$\cdot\ VR_{37}^5 = 37^5 = 69343957 \text{ posibilidades}$$

2.4. Combinaciones

· En este caso lo que calculamos es el nº de ordenaciones distintas que se pueden organizar de los que escogemos m elementos de tal forma que el orden no importa.

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{m}}$$

→ Ejemplo: Una clase de 20 alumnos queremos seleccionar 6 para un proyecto de investigación. ¿Cuántas formas distintas podemos hacer la selección?

· No importa el orden y no usan todos los elementos

$$\cdot\ C_{20}^6 = \frac{20!}{6!\,(20-6)!} = \binom{20}{6} = 38760$$

→ Ejemplo: Un entrenador de fútbol sala tiene 3 porteros y 10 jugadores de campo. ¿Cuántos equipos titulares diferentes puede formar si tiene que haber 1 portero y 4 jugadores de campo?

- Porteros = $C_3^1 = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = 3$
- Jugadores = $C_{10}^4 \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$

$\left.\right\}$ $3 \cdot 210 = 630$ equipos titulares ≠

2.5. Combinaciones con repetición:

- Si los elementos pueden repetirse son combinaciones con repetición.

$$\boxed{CR_n^m = \binom{n+m-1}{m}}$$

→ Ejemplo: En el poker con 5 dados. ¿Cuántas jugadas ≠ hay?

- En c/u de los dados hay 6 posibilidades. As, K, J, R, N, Q
- Tenemos jugadas con repetición:

$$CR_6^5 = \binom{6+5-1}{5} = 252 \text{ jugadas} \neq$$

- Ejercicio: La contraseña de acceso a la cuenta e-mail está formada por 10 caracteres, 6 primeros son dígitos del 1 al 9 y los 4 últimos vocales. ¿Cuántas contraseñas ≠ se pueden formar?

$VR_9^6 = 9^6 = 531441$
$VR_5^4 = 5^4 = 625$

$\left.\right\}$ $9^6 \cdot 5^4 = 332450625$ ordenaciones

- Ejercicio: Un descifrador de claves. Una agencia de investigación necesita descubrir un código de 7 números y 5 letras. ¿Cuántas claves debe analizar el descifrador?

Nº = $VR_{10}^7 = 10^7$
Letras = $VR_{27}^5 = 27^5$

$\left.\right\}$ $10^7 \cdot 27^5 = 1'4348907 \cdot 10^{14}$ claves posibles

- Ejercicio: ¿Cuántas ordenaciones ≠ podemos hacer con las letras ABCDEFG sin repetición?

$$P_7 = 7! = 5040$$

¿Cuántas ordenaciones ≠ se pueden hacer si debe contener la cadena 'ABC'?

$\underbrace{ABC}DEFG$ ABC se trata como una única letra 'X'

XDEFG
DXEFG
DEXFG
DEFXG
DFFGX

$\left.\right\}$ $P_5 = 5! = 120$ combinaciones

¿Cuántas ordenaciones con 'BA' y 'GF'? $\underbrace{BA}_{1}, \underbrace{GF}_{2}, \underset{3}{D}\underset{4}{E}\underset{5}{G} \Rightarrow P_5 = 5! = 120$