EJERCICIOS PROPUESTOS UNIDAD 6. ÁLGEBRA LINEAL.

1. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & a \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & y & y & y \\ x & y & z & z \\ x & y & z & t \end{vmatrix}$

2. Dadas las matrices $A, B \in M_{4x5}(\mathbb{R})$, $C \in M_{5x2}$,$D \in M_{4x2}$,$E \in M_{5x2}$,$F \in M_{5x4}$. Determina cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y haya, en su caso, el orden de la matriz del resultado:

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}, \mathrm{A} \cdot \mathrm{C},\ \mathrm{M}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{A}, \mathrm{A} \cdot \mathrm{C} + \mathrm{D}, \mathrm{A} \cdot \mathrm{E} + \mathrm{B}, \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} + \mathrm{B}, \mathrm{E} \cdot (\mathrm{A} + \mathrm{B}),$
$\mathrm{E} \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathrm{C}), \mathrm{E}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{C}, (\mathrm{A}^{\mathrm{t}} + \mathrm{F}) \cdot \mathrm{B}, \mathrm{B}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{A}$

3. Dadas las matrices A,B$\in M_n(\mathbb{R})$, razonar si las siguientes identidades notables son ciertas:

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A \cdot B$ $(A+B) \cdot (A-B) = A^2 - B^2$

4. Halla el rango de las siguientes matrices en función del parámetro “a”:

$A = \begin{pmatrix} a & a+3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 3 & -1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+t \\ 5 & 10+3t \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3t+3 \end{pmatrix}$

a) Calcular el rango de la matriz A según los valores del parámetro “t”

b) Estudia el sistema $A \cdot X = B$ según los valores de “

6. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ a & -3 & a \\ a-1 & -3 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ determina el valor o los valores de “a” para los que:

a) $B^t \cdot (A + A^t) \cdot B = 6$

b) El sistema $A \cdot X = B$ no tiene solución.

c) $A = A^{-1}$

7. Discute el siguiente sistema y resuélvelo para m=0.

$$\left.\begin{array}{r} x + my \qquad\qquad = 1 \\ -2x - (m-1)y + z = -1 \\ x + (2m-1)y + (m+2)z = 2 + 2m \end{array}\right\}$$

8. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & a & 2 & 2-a \\ -1 & 2 & a & a-2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se pide:

a) Rango de A en función del parámetro “a”.

b) Para a=0, halla la inversa de la matriz $A \cdot B$, es decir, $(A \cdot B)^{-1}$

9. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:
   a) Valores de “m” para los que la matriz A es inversible.
   b) Para m=0, calcula $A \cdot B \ \ y \ \ A^{-1} \cdot B$
   c) Calcular $B \cdot B^t \ \ y \ \ B^t \cdot B$

10. Estudia en función de los valores del parámetro “a” y resuelve el sistema cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + 2z = 1 \\ ax + y + z = 2 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 4 \end{array}\right\}$$

11. Estudia la dependencia o independencia lineal de los siguientes conjuntos de vectores. ¿Cuáles de ellos son una base de $\mathbb{R}^4$?
   a) (1,-1,2,2), (-2,-1,3,4), (7,-1,0,2)
   b) (1,1,-2,3), (2,-1,0,4), (5,-1,0,0), (1,0,1,0)
   c) (0,-1,3,2), (2,7,-3,4), (5,1,2,-2), (8,9,3,4), (6,3,2,4)

12. Halla una base y la dimensión de los siguientes subespacios:
   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, y - z = 0 \ \}$
   b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / y - z = 0 \ \}$
   c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - \ y - z = 0 \ \}$
   d) $D = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x - \ y - z = 0 \ \}$

13. Hallar el valor o los valores del parámetro “a” para los que los siguientes conjuntos de vectores son base de $\mathbb{R}^3$:
   a) $\{(a, 3,2), (-1,0, -1), (2,3,1)\}$
   b) $\{(2a, -1, a), (2,0, -1), (0. -2,0)\}$

14. Hallar la matriz de cambio de base de $B \ a \ B'$, siendo:

$$B = \{(1,1,1), (2, -1,3), (3,0,4)\} \quad y \quad B' = \{(1, -1,0), (0,1,3), (2,0,1)\}$$

15. En los siguientes apartados, halla una base y la dimensión de A y de B, además de los subespacios $A \cup B \ \ y \ A \cap B$. Comenta en cada uno de los casos si A y B son suma directa.
   a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - \ 2z = 0 \ \}$ $\quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - \ y = 0 \ \}$
   b) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - \ y - z = 0 \ \}$
   c) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} 2x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{matrix}\right\}$ $\quad B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x - 3y = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}\right\}$

16. Halla el núcleo y su dimensión, así como la dimensión de la imagen de las siguientes aplicaciones lineales. Indica también si son inyectivas, suprayectivas y/o biyectivas.
   a) $f(x, y, z) = (x - y, x - z, 0)$
   b) $f(x, y, z) = (x - y, x - z)$

c) $f(x,y,z) = (x - y + z, y, x)$
d) $f(x,y) = (x, y, x + y)$

17. Dada la aplicación lineal $f(x,y,z) = (x + y - z, 2x + y)$
   a) Halla la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas.
   b) Halla la matriz asociada a f respecto a las bases:
   $B = \{(1,2,0), (0,1,0), (0,2,1)\} \quad y \quad B' = \{(1,1), (0,-1)\}$

18. Dadas las aplicaciones $f(x,y) = (x - 3y, 2x)$ y $g(a,b) = (a + 2b, -a + b, 2b)$, se pide:
   a) Halla el núcleo y su dimensión, y la dimensión de la imagen de f.
   b) Halla la aplicación $f \circ g$ con la forma clásica y con operaciones con matrices.