Conjuntos, relaciones y aplicaciones

1. Introducción a la teoría de conjuntos

1.1. Definición:
Según la definición de Cantor, un conjunto es una colección de elementos.

$A = \{a, b, c, d\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$ -> nº enteros

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ -> nº naturales

$\mathbb{R}$ -> nº reales

- Llamamos conjunto vacío y se denota $\emptyset$ al conjunto que no contiene ningún elem.
- Llamamos conjunto de las partes de A y se denota $P(A)$ a todos los subconjuntos de A que se pueden hacer.

→ Ejemplo:
- $A = \{a, b, c\}$
- $P(A) = \{\emptyset, \underbrace{\{a\}, \{b\}, \{c\}}_{1}, \underbrace{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}}_{2}, \underbrace{\{a, b, c\}}_{3}\}$

1.2. Pertenencia, cuantificadores y lenguaje matemático

- Pertenencia: dado un conjunto $A = \{a, b, c\}$ el elemento a pertenece al conjunto A, lo que se denota $a \in A$. El elemento d no pertenece al conjunto A, lo que se denota $d \notin A$.

NOTA: "sea a un núm. real" $a \in \mathbb{R}$

- Cuantificadores: son los siguientes:

$\exists a \in \mathbb{R}$ -> "existe un núm. real a"

$\forall x \in \mathbb{Z}$ -> "para todo x perteneciente a los reales"

$/$ -> "tal que" $\quad$ $:$ -> "tal que"

$\cap$ -> y "intersección"

$\cup$ -> o "unión"

$<$ -> "menor que" $\quad$ $\leq$ -> "menor o igual que"

$>$ -> "mayor que" $\quad$ $\geq$ -> "mayor o igual que"

→ Ejemplo: "para todo núm. natural existe un entero tal que la suma de ambos es 0"

- $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{Z} \; / \; a + b = 0$

• Propuestas del lenguaje matemático:

• $\forall a, b \in I,\ a+b \in P \cap a \cdot b \in I$

NOTA: I = conjunto de nº impares
P = conjunto de nº pares

"para dos números impares, su suma es par y su multiplicación impar"

• $\forall a \in P \cap \forall b \in I,\ a \cdot b + a \in P$

"para todo un número par y otro impar, si multiplico $a \cdot b$ y sumo a el resultado es par"

• $\forall a, b \in I$ con $a < b$, $\exists c \in P \,/\, a < c, b$

"entre dos números impares no iguales siempre hay al menos un número par"

• $\forall a, b \in I$ con $a < b \cap \forall c \in P \,/\, a < c, b$

"dados dos impares cualesquiera no iguales y dado un número par se cumple que todo número par está comprendido entre dos impares"

• $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \exists c \in I \,/\, a^2 < c < b^2$

• $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \exists c\ \mathbb{N} \,/\, a^2 < c < b^2$

• "para todo número natural hay un número natural mayor"

$$\forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N} \,/\, b > a$$

• "para todo número par existe un número impar mayor que él"

$$\forall a = 2K,\ \exists b = 2K+1 \,/\, b > a$$

• $\forall x \in \mathbb{R},\ x < x^2 \iff x < 0$ ó $x > 1$

NOTA: $\iff$ si y solo si
sii si y solo si

2. Relaciones entre conjuntos

• Relación de inclusión: decimos que el conjunto A está incluido en el conjunto B y se denota $A \subseteq B$ si todos los elementos de A están en B.

NOTA: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$

→ Ejemplo: dados estos conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$, $C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ establecer todas las relaciones de inclusión ó no inclusión entre ellos

• $A \nsubseteq B$ • $B \subseteq C$

• $A \subseteq C$

• $C \nsubseteq A$ • $C \nsubseteq A$

- Dados dos conjuntos A, B se dice que son iguales y se denota $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

↳ Propiedades de la inclusión

1ª $\emptyset \subseteq A$

2ª Reflexiva : $A \subseteq A$

3ª Antisimétrica : $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$

4ª Transitiva : $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

3. Operaciones con conjuntos:

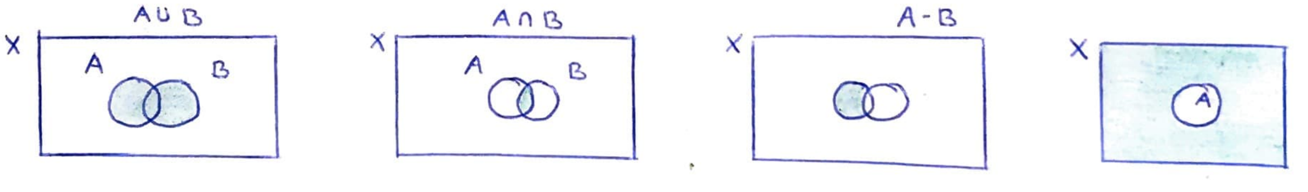
- Dados dos conjuntos A, B llamamos unión de A con B y se denota $A \cup B$ a todos los elementos que pertenecen a A, a B, ó a ambos

- Dados dos conjuntos A, B llamamos intersección de A con B y se denota $A \cap B$ a todos los elementos que pertenecen a A y a B a la vez.

- Dados dos conjuntos A, B llamamos A menos B y se denota $A - B$ a todos los elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B. $A \cap B^c$

- Dado un conjunto A se llama conjunto complementario de A y se denota A^c a todos los elementos que no pertenecen a A.
Si llamamos X al conjunto de todos los elementos posibles entonces el complementario de A es $X - A$.

3.1. Diagrama de VENN



→ Ejemplo: calcula las siguientes operaciones:

- $A = \{1, 3, 4\}$
- $B = \{3, 5\}$
- $X = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3\}$

$A - B = \{1, 4\}$

$A^c = \{5, 6\}$

$B^c = \{1, 4, 6\}$

$B - A = \{5\}$

3.2. Propiedades de las operaciones con conjuntos $(A, B, C, X \to A, B, C \subseteq X)$

- **P. asociativa**: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- **P. conmutativa**: $A \cap B = B \cap A$

  $A \cup B = B \cup A$

- **P. distributiva**: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- **Idempotente**: $A \cup A = A$

  $A \cap A = A$

- **Leyes de absorción**: $A \cap (A \cup B) = A$

  $A \cup (A \cap B) = A$

- **Leyes de identidad**: $A \cup \emptyset = A$

  $A \cap X = A$

- **Leyes de dominación**: $A \cap \emptyset = \emptyset$

  $A \cup X = X$

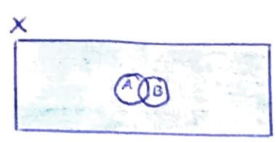
- **Leyes de complemento**: $A \cap A^c = \emptyset$

  $A \cup A^c = X$

- **Ley de involución**: $(A^c)^c = A$

- **Leyes de Morgan**: $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$



4. Producto cartesiano y relaciones

4.1. Producto cartesiano

Producto cartesiano: el p. cartesiano de dos conjuntos A, B se denota $A \times B$ y es el conjunto de pares (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$.

→ **Ejemplo**: dados los conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$ definir $A \times B$

$A \times B = \{(1,3), (1,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$

↳ producto cartesiano

4.2. Relaciones: dados dos conjuntos A, B una relación R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. $R \subseteq A \times B$

- Si un par $(a, b) \in R$ se denota $a R b$
- Si un par $(a, b) \notin R$ se denota $a \not R b$

→ **Ejemplo:** Sean $A = \{1,2,4\}$, $B = \{2,3,5,8\}$, $a R b \iff a + b$ es par

- $A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,8),(2,2),(2,3),(2,5),(2,8),(4,2),(4,3),(4,5),(4,8)\}$

$\cdot R = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,8),(4,2),(4,8)\}$

→ **Ejemplo:** Sean $A = \{2,4,7\}$, $B = \{2,3,5,8\}$, $a R b \iff a < b$

- $A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,5),(2,8),(4,2),(4,3),(4,5),(4,8),(7,2),(7,3),(7,5),(7,8)\}$

$\cdot R = \{(2,3),(2,5),(2,8),(4,5),(4,8),(7,8)\}$

→ **Ejemplo:** Sean $A = \{7,9,15\}$, $B = \{2,3,5,8\}$, $a R b \iff a$ es múltiplo de B

- $A \times B = \{(7,2),(7,3),(7,5),(7,8),(9,2),(9,3),(9,5),(9,8),(15,2),(15,3),(15,5),(15,8)\}$

$\cdot R = \{(9,3),(15,3),(15,5)\}$

4.3. Relaciones de equivalencia

Una relación R se dice de equivalencia si verifica las sig. propiedades:

- **Reflexiva:** $\forall a \in A \quad a R a$
- **Simétrica:** $a R b \rightarrow b R a$
- **Transitiva:** si $a R b$, $b R c \rightarrow a R c$