Conjuntos, relaciones y aplicaciones

1. Introducción a la teoría de conjuntos

1.1. Definición: según la definición de Cantor un conjunto es una colección de elementos.

$A = \{a, b, c, d\}$ $\qquad$ $\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, \dots\}$ → nº enteros

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ → nº naturales $\qquad$ $\mathbb{R}$ → nº reales

- Llamamos conjunto vacío y se denota $\emptyset$ al conjunto que no contiene ningún elem.
- Llamamos conjunto de las partes de A y se denota $P(A)$ a todos los subconjuntos de A que se pueden hacer.

→ **Ejemplo:** · $A = \{a, b, c\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \underbrace{\{a\}, \{b\}, \{c\}}_{1}, \underbrace{\{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}}_{2}, \underbrace{\{a,b,c\}}_{3}\}$$

1.2. Pertenencia, cuantificadores y lenguaje matemático

- **Pertenencia:** dado un conjunto $A = \{a, b, c\}$ el elemento a pertenece al conjunto A lo que se denota $a \in A$. El elemento d no pertenece al conjunto A, lo que se denota $d \notin A$.

NOTA: "sea a un núm. real" $a \in \mathbb{R}$

- **Cuantificadores:** son los siguientes:

$\exists\, a \in \mathbb{R}$ → "existe un núm. real a"

$\forall x \in \mathbb{Z}$ → "para todo x perteneciente a los reales"

$/$ → "tal que" $\qquad$ $:$ → "tal que"

$\cap$ → y "intersección"

$\cup$ → o "unión"

$<$ → "menor que" $\qquad$ $\leq$ → "menor o igual que"

$>$ → "mayor que" $\qquad$ $\geq$ → "mayor o igual que"

→ **Ejemplo:** "para todo núm. natural existe un entero tal que la suma de ambos es 0"

$$\forall a \in \mathbb{N}, \exists\, b \in \mathbb{Z} \,/\, a + b = 0$$

- Propuestas del lenguaje matemático:

- $\forall a, b \in I,\ a+b \in P \cap a \cdot b \in I$

⚠ NOTA: I = conjunto de nº impares
P = conjunto de nº pares

"para dos números impares, su suma es par y su multiplicación impar"

- $\forall a \in P \cap \forall b \in I,\ a \cdot b + a \in P$

"para todo un número par y otro impar, si multiplico $a \cdot b$ y sumo a el resultado es par"

- $\forall a, b \in I$ con $a < b$, $\exists c \in P \,/\, a < c, b$

"entre dos números impares no iguales siempre hay al menos un número par"

- $\forall a, b \in I$ con $a < b \cap \forall c \in P \,/\, a < c, b$

"dados dos impares cualesquiera no iguales y dado un número par se cumple que todo número par está comprendido entre dos impares"

- $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \exists c \in I \,/\, a^2 < c < b^2$

- $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \exists c\ \mathbb{N} \,/\, a^2 < c < b^2$

- " para todo número natural hay un número natural mayor "

$$\forall a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N} \,/\, b > a$$

- " para todo número par existe un número impar mayor que él "

$$\forall a = 2K,\ \exists b = 2K+1 \,/\, b > a$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x < x^2 \iff x < 0$ ó $x > 1$

⚠ NOTA: $\iff$ si y solo si
sii si y solo si

2. Relaciones entre conjuntos

- Relación de inclusión: decimos que el conjunto A está incluido en el conjunto B y se denota $A \subseteq B$ si todos los elementos de A están en B.

⚠ NOTA: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Z} \nsubseteq \mathbb{N}$

→ Ejemplo: dados estos conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$, $C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ establecer todas las relaciones de inclusión ó no inclusión entre ellos

- $A \nsubseteq B$ · $B \subseteq C$
- $A \subseteq C$
- $C \nsubseteq A$ · $C \nsubseteq A$

- Dados dos conjuntos A, B se dice que son iguales y se denota $A = B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

↳ Propiedades de la inclusión

1ª $\emptyset \subseteq A$

2ª Reflexiva : $A \subseteq A$

3ª Antisimétrica : $A \subseteq B,\ B \subseteq A \Rightarrow A = B$

4ª Transitiva : $A \subseteq B,\ B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

3. Operaciones con conjuntos:

- Dados dos conjuntos A, B llamamos unión de A con B y se denota $A \cup B$ a todos los elementos que pertenecen a A, a B, ó a ambos

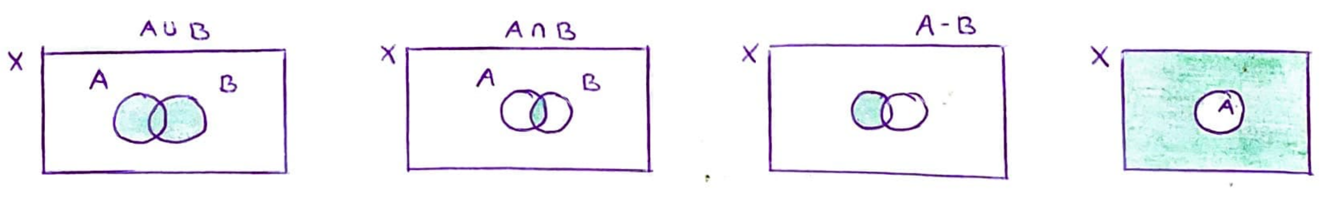
- Dados dos conjuntos A, B llamamos intersección de A con B y se denota $A \cap B$ a todos los elementos que pertenecen a A y a B a la vez.

- Dados dos conjuntos A, B llamamos A menos B y se denota $A - B$ a todos los elementos que pertenecen a A pero no pertenecen a B. $A \cap B^c$

- Dado un conjunto A se llama conjunto complementario de A y se denota A^c a todos los elementos que no pertenecen a A.

Si llamamos X al conjunto de todos los elementos posibles entonces el complementario de A es $X - A$.

3.1. Diagrama de VENN



→ Ejemplo: calcula las siguientes operaciones:

- $A = \{1, 3, 4\}$
- $B = \{3, 5\}$
- $X = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{3\}$

$A - B = \{1, 4\}$

$A^c = \{5, 6\}$

$B^c = \{1, 4, 6\}$

$B - A = \{5\}$

3.2. Propiedades de las operaciones con conjuntos ($A, B, C, X \to A, B, C \subseteq X$)

- **P. asociativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

- **P. conmutativa:** $A \cap B = B \cap A$

  $A \cup B = B \cup A$

- **P. distributiva:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- **Idempotente:** $A \cup A = A$

  $A \cap A = A$

- **Leyes de absorción:** $A \cap (A \cup B) = A$

  $A \cup (A \cap B) = A$

- **Leyes de identidad:** $A \cup \emptyset = A$

  $A \cap X = A$

- **Leyes de dominación:** $A \cap \emptyset = \emptyset$

  $A \cup X = X$

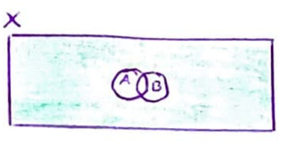
- **Leyes de complemento:** $A \cap A^c = \emptyset$

  $A \cup A^c = X$

- **Ley de involución:** $(A^c)^c = A$

- **Leyes de Morgan:** $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

  $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$



4. Producto cartesiano y relaciones

4.1. Producto cartesiano: el p. cartesiano de dos conjuntos A, B se denota $A \times B$ y es el conjunto de pares (x, y) con $x \in A$ e $y \in B$.

→ **Ejemplo:** dados los conjuntos $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$ definir $A \times B$

$A \times B = \{(1,3), (1,5), (3,3), (3,5), (4,3), (4,5)\}$

↳ producto cartesiano

4.2. Relaciones: dados dos conjuntos A, B una relación R de A en B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. $R \subseteq A \times B$

- Si un par $(a, b) \in R$ se denota $a R b$
- Si un par $(a, b) \notin R$ se denota $a \not R b$

→ Ejemplo: Sean $A = \{1,2,4\}$, $B = \{2,3,5,8\}$, $a R b \iff a+b$ es par

- $A \times B = \{(1,2),(1,3),(1,5),(1,8),(2,2),(2,3),(2,5),(2,8),(4,2),(4,3),(4,5),(4,8)\}$

  - $R = \{(1,3),(1,5),(2,2),(2,8),(4,2),(4,8)\}$

→ Ejemplo: Sean $A = \{2,4,7\}$, $B = \{2,3,5,8\}$, $a R b \iff a < b$

- $A \times B = \{(2,2),(2,3),(2,5),(2,8),(4,2),(4,3),(4,5),(4,8),(7,2),(7,3),(7,5),(7,8)\}$

  - $R = \{(2,3),(2,5),(2,8),(4,5),(4,8),(7,8)\}$

→ Ejemplo: Sean $A = \{7,9,15\}$, $B = \{2,3,5,8\}$, $a R b \iff a$ es múltiplo de B

- $A \times B = \{(7,2),(7,3),(7,5),(7,8),(9,2),(9,3),(9,5),(9,8),(15,2),(15,3),(15,5),(15,8)\}$

  - $R = \{(9,3),(15,3),(15,5)\}$

4.3. Relaciones de equivalencia

Una relación R se dice de equivalencia si verifica las sig. propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A \quad a R a$
- Simétrica: $a R b \to b R a$
- Transitiva: si $a R b$, $b R c \to a R c$

↳ Ejemplo: sea $A = \{1,2,3,4\}$, señala las relaciones que sean de equivalencia

a) $R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}$

→ Me falta el elem. $(2,2)$

No es una relación de equivalencia porq no cumple la propiedad reflexiva

b) $R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3),(3,4),(4,4)\}$ → No relación de equivalencia

- Reflexiva → se cumple
- Simétrica → $1R2$ y $2R1$ $\quad$ $3R4$ pero $4 \not R 3$

c) $R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(3,3),(2,4),(4,4),(4,2)\}$

- Reflexiva → se cumple

- Simétrica -> 1R2 y 2R1 ; 2R4 y 4R2 -> se cumple
- Transitiva 1R2 y 2R4 => $1 \not R 4$ -> no se cumple

d) $R_4 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (2,3), (3,3), (3,2), (4,4)\}$

- Reflexiva -> se cumple
- Simétrica 1R2 y 2R1; 2R3 y 3R2 -> se cumple
- Transitiva 1R2 y 2R3 => $1 \not R 3$ -> no se cumple

e) $R_5 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (2,3), (3,3), (3,2), (4,4), (1,3), (3,1)\}$

- Reflexiva -> se cumple
- Simétrica 1R2 y 2R1 ; 2R3 y 3R2 ; 1R3 y 3R1
- Transitiva 1R2 y 2R3 -> 1R3
  2R1 y 1R3 -> 2R3

4.4. Relaciones de orden:

- Dada una relación R en un conjunto A se dice que es una relación de orden si verifica las sig. propiedades:

- Reflexiva: $\forall a \in A$ -> aRa
- Antisimétrica: si aRb y bRa -> a = b
- Transitiva: si aRb y bRc -> aRc

↳ Ejemplo: sea $A = \{1,2,3,4\}$, señala las relaciones de orden:

a) $R_1 = \{(1,1), (1,2), (3,3), (4,4)\}$

- Reflexiva: $2 \not R 2$ -> no se cumple

b) $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

- Reflexiva -> se cumple
- Antisimétrica -> 1R2 y $2 \not R 1$; 1R3 y $3 \not R 1$; 3R4 y $4 \not R 3$ se cumple
- Transitiva: 1R3 y 3R4 pero $1 \not R 4$ -> no se cumple

c) $R_3 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

- Reflexiva -> se cumple
- Antisimétrica -> 1R2 y $2 \not R 1$; 3R4 y $4 \not R 3$
- Transitiva: 1R2

d) $R_4 = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,1), (2,3), (3,3), (4,4)\}$

- Reflexiva -> se cumple
- Antisimétrica: 1R2 y 2R1 no se cumple

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2)$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)}{3} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$$

→ Ejemplo: comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el ppio de inducción

$P(n) = 1\cdot1! + 2\cdot2! + \dots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$ → Se verifica el ppio de inducción y por tanto la proposición es cierta

1: $P(1) = 1$

2: $\underbrace{1\cdot1! + 2\cdot2! + \dots + n\cdot n!}_{} + (n+1)\cdot(n+1)! = \boxed{(n+2)! - 1}$

$$(n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)!$$

$$(n+1)! \cdot (1+n+1) - 1$$

$$(n+1)! \cdot (n+2) - 1 = \boxed{(n+2)! - 1}$$

→ Ejemplo: comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el ppio de inducción

$P(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ → Se verifica el ppio de inducción y por tanto la proposición es cierta

1: $P(1) = 1^3 = \left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$

2: $\underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{} + (n+1)^3 = \boxed{\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2}$

$$\left[\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$

$$\frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2\cdot(n+1)^2 + 4\cdot(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \boxed{\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2}$$

→ Ejemplo: comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el ppio de inducción

$P(n) = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ → Se verifica el ppio de inducción y por tanto la proposición es cierta

1: $P(1) = \frac{1}{1\cdot3} = \left[\frac{1}{2\cdot1+1}\right]$

5. $\boxed{\text{Principio de inducción}}$

- Sea $P(n)$ una proposición que depende de n siendo $n \in \mathbb{N}$ supongamos que:

1: $P(1)$ es cierto

2: $\forall n \geq 1$, si $P(n)$ es cierto $\Rightarrow P(n+1)$ también lo es

- Entonces podemos decir que $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$

→ Ejemplo: comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el principio de inducción:

$P(n) = 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ → Se verifica el ppio de inducción por tanto la proposición es cierta

1: $P(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

2: $\underbrace{1+2+3+\dots+n} + n+1 = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

$\frac{n\cdot(n+1)}{2} + n+1$

$\frac{n\cdot(n+1)+2(n+1)}{2} = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

→ Ejemplo: comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el principio de inducción

$P(n) = 1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ → Se verifica el ppio de inducción y por tanto la proposición es cierta

1: $P(1) = 1 = 1^2$

2: $\underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)} + (2n+1) = \boxed{(n+1)^2}$

$n^2 + 2n+1$

$n^2+2n+1 = \boxed{(n+1)^2}$

→ Ejemplo: comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el principio de inducción

$P(n): 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)(n+2)}{3}$ → Se verifica el ppio de inducción por tanto la proposición es cierta

1: $P(1) = 2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(1+2)}{3}$

2: $\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1)} + (n+1)\cdot(n+2) = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}}$

$\underline{2^{\circ}}$ $\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\boxed{\frac{n+1}{2n+3}}$

$$\frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & 3 & 1 \\ -1 & & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$=\frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=\boxed{\frac{n+1}{2n+3}}$$

→ **Ejemplo:** comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el ppio de inducción

$P(n)$: $2+4+\dots+2n=n(n+1)$

→ Se verifica el ppio de inducción y por tanto la proposición es cierta

1° $P(1)=2=1(1+1)$; $2=2$

2° $\underbrace{2+4+\dots+2n}+(2n+2)=\boxed{(n+1)(n+2)}$

$$n(n+1)+(2n+2)$$

$$n(n+1)+2(n+1)$$

$$\boxed{(n+1)(n+2)}$$

→ **Ejemplo:** comprobar si la sig. proposición es cierta utilizando para ello el ppio de inducción

$P(n)$: $2^2+4^2+\dots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

→ Se verifica el ppio de inducción y por tanto la proposición es cierta

1° $P(1)=2^2=\frac{2\cdot 1(1+1)(2\cdot 1+1)}{3}$; $4=4$

2° $\underbrace{2^2+4^2+\dots(2n)^2}+(2n+2)^2=\boxed{\frac{(2n+2)(n+2)(2n+3)}{3}}$

$$\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+(2n+2)^2$$

$$\frac{2n(n+1)(2n+1)3(2n+2)^2}{3}=\frac{2n(n+1)(2n+1)+3\cdot 4(n+1)^2}{3}=\frac{2(n+1)\overbrace{[n(2n+1)+6(n+1)]}^{*\ 2n^2+n+6n+6=2n^2+7n+6}}{3}=$$

$$=\boxed{\frac{(2n+2)(n+2)(2n+3)}{3}}$$

NOTA. $(2n+2^2)=[2(n+1)]^2=4(n+1)^2$

$$* \quad \begin{array}{c|ccc} & 2 & 7 & 6 \\ -2 & & -4 & -6 \\ \hline & 2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$

6. Aplicaciones

- Sean A, B conjuntos, una aplicación f de A en B es una correspondencia en la que a cada elemento de A le corresponde un y solo un elemento de B y se denota $f: A \to B$ $\quad a \to f(a) = b$

- Al conjunto de A se le denomina dominio de f. Si $f(a) = b$ decimos que b es la imagen de a.

→ **Ejemplo:** $\cdot f(x) = x^3$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

→ **Ejemplo:** $\cdot f(x) = \dfrac{3x+1}{x-3}$

$f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$

$\mathbb{R} - \{3\} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

- Dos aplicaciones se pueden componer, su composición se denota $f \circ g$ y se lee "g compuesto de f". Para calcular hallamos $f(g(x))$

→ **Ejemplo:** Dadas las sig. funciones hallar "$f \circ g$" y "$g \circ f$"

$\cdot f(x) = \operatorname{sen} x$

$\cdot g(x) = \sqrt{x+5}$

$(g \circ f)(x) = g(f(\bar{x})) = \sqrt{\operatorname{sen} x + 5}$

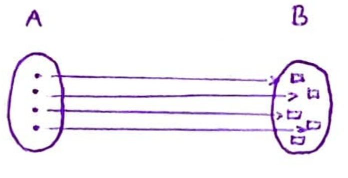
$(f \circ g)(x) = f(g(\bar{x})) = \operatorname{sen}(\sqrt{x+5})$

- **Aplicación inyectiva**

- Dada una aplicación $f: A \to B$ se dice que f es inyectiva si dados dos elementos distintos de a sus imágenes lo son distintas, es decir, si

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

De otra forma si $f(a_1) = f(a_2)$ entonces $a_1 = a_2$.



INYECTIVA

→ **Ejemplo:** $\cdot y = x^3 - 5$

$f(a) = f(b)$

$a^3 - 5 = b^3 - 5$ → esta aplicación es inyectiva

$a^3 = b^3$

$a = b$

→ Ejemplo: $\cdot\ y = x^2 - 5$

$f(a) = f(b)$

$a^2 - 5 = b^2 - 5$ → esta aplicación no es inyectiva

$a^2 = b^2$

$a = \pm b$

→ Ejemplo. $\cdot\ f(x) = 2x+1$

$f(a) = f(b)$

$2a+1 = 2b+1$ → esta aplicación es inyectiva

$2a = 2b$

$a = b$

→ Ejemplo: $\cdot\ f(x) = x^2 - x + 2$

$f(a) = f(b)$

$a^2 - a + 2 = b^2 - b + 2$; $a^2 - b^2 = a - b$ → esta aplicación no es inyectiva

$(a+b)(a-b) = (a-b)$

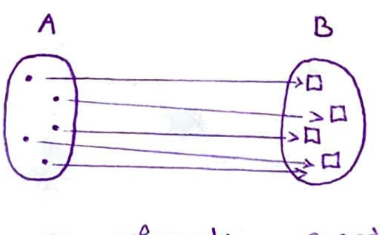
$a + b = 1$

$a = 1 - b$

$$\left.\begin{array}{l} b = 8 \\ a = -7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(8) = 64 - 8 + 2 = 58 \\ f(-7) = 49 + 7 + 2 = 58 \end{array}$$

- Aplicación sobreyectiva

· Dada una aplicación $f: A \to B$ se dice que es sobreyectiva o suprayectiva si todo elemento de B es imagen de algún elemento de A.

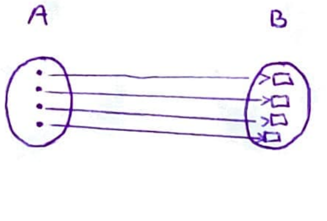


SOBREYECTIVA

· En general una aplicación es sobreyectiva cuando su imagen coincide con el espacio de llegada.

- Aplicación biyectiva

· Una aplicación es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.



BIYECTIVA

NOTA: Cuando una función es inyectiva podemos calcular su inversa que denotamos como f^{-1}. Esta función inversa nos da el valor del espacio de partida correspondiente al valor del espacio de llegada.

- **Ejercicio**: dados los siguientes conjuntos, calcula:

$U = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$C = \{2, 3, 6, 12\}$

$D = \{2, 4, 8\}$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11\}$

b) $A \cap C = \{3\}$

c) $(A \cup B) \cap C^c = \{1, 5, 7, 9, 11\}$

$\hookrightarrow C^c = \{1, 5, 7, 9, 11\}$

d) $A - B = A \cap B^c = \{1, 9\}$

e) $C - D = C \cap D^c = \{3, 6, 12\}$

f) $(B - D) \cup (D - B) = (B \cap D^c) \cup (D \cap B^c) = \{3, 4, 5, 7, 8, 11\}$

$(B \cap D^c) \rightarrow \{3, 5, 7, 11\}$ $(D \cap B^c) \rightarrow \{4, 8\}$

- **Ejercicio**: dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos si la siguiente relación es de orden:

- $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (1,2), (1,3), (1,4), (2,3)\}$

  - Reflexiva: se cumple
  - Antisimétrica: $1R2$ y $2 \not R 1$, $1R3$ y $3 \not R 1$, $1R4$ y $4 \not R 1$, $2R3$ y $3 \not R 2$ -> se cumple
  - Transitiva: $1R2$ y $2R3$ -> $1R3$ se cumple

- **Ejercicio**: dado el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ definimos si la sig. relación es de equivalencia:

- $R = \{(1,1), (2,2), (1,2), (2,1), (3,3), (3,4), (4,3), (4,4)\}$

  - Reflexiva: se cumple
  - Simétrica: $1R2$ y $2R1$, $3R4$ y $4R3$ -> se cumple
  - Transitiva: se cumple

• Ejercicio: si U es el conjunto universal y A, B, C son subconjuntos, calcula las siguientes operaciones:

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 4, 7, 10\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{2, 4, 6, 8\}$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

b) $A - B = A \cap B^c = \{7, 10\}$

c) $A^c = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}$

d) $U^c = \{\emptyset\}$

e) $B \cap U = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

f) $B^c \cap (C - A) = B^c \cap (C \cap A^c) = \{6, 8\}$

g) $(A \cup B)^c \cup C = \{6, 8, 9, 2, 4\}$

h) $B \cap C = \{2, 4\}$

i) $A \cup \emptyset = \{1, 4, 7, 10\}$

j) $A \cap (B \cup C) = \{1, 4\}$

k) $(A \cap B) \cup C = \{1, 4, 2, 6, 8\}$

l) $(A \cap B) - C = (A \cap B) \cap C^c = \{1\}$

m) $(A \cup B) - (C - B) = (A \cup B) \cap (C - B)^c = (A \cup B) \cap (C \cap B^c)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

↳ $C \cap B^c = \{6, 8\}$

↳ $(C \cap B^c)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$

↳ $(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 10\}$

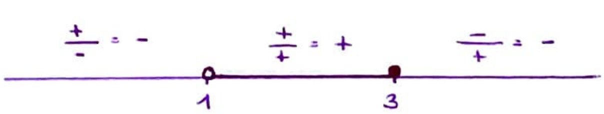
• Ejercicio: sean A y B subconjuntos, expresa dichos conjuntos mediante intervalos y calcula la unión, la intersección y la diferencia. Calcula además sus complementarios:

$A = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; \frac{x+1}{x-1} \geq 2 \}$ y $B = \{ x \in \mathbb{R} \;/\; x^2 + 4x + 3 < 0 \}$

• $\frac{x+1}{x-1} \geq 2 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x+1-2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-x+3}{x-1} \geq 0$

$-x+3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



• $A : x \in (1, 3]$

↳ xq está el 3 incluido

• $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -3 \end{cases}$$

no se incluyen xq hacen 0 el polinomio

• $B = x \in (-3, -1)$

<u>AUB</u>: $x \in (-3, -1) \cup (1, 3]$

<u>A∩B</u>: $\{\emptyset\}$

<u>A − B</u>: $A: x \in (1, 3]$

<u>B − A</u>: $B: x \in (-3, -1)$

<u>A^c</u>: $x \in (-\infty, 1] \cup (3, +\infty) = x \in \mathbb{R} - (1, 3]$

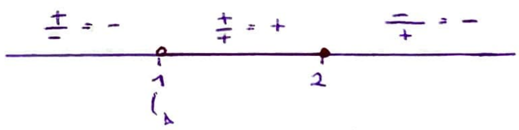
<u>B^c</u>: $x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty) = x \in \mathbb{R} - (-3, -1)$

• <u>Ejercicio</u>: <u>A</u> $= \{ x \in \mathbb{R} / \frac{1}{x-1} \geq 1 \}$ y <u>B</u> $= \{ x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x + 3 \geq 0 \}$

• $\frac{1}{x-1} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1-(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2-x}{x-1} \geq 0$

$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



• $A: x \in (1, 2]$

no me vale porq anula el denominador

• $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

• $B = x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

<u>AUB</u>: $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty) = \mathbb{R} - (2, 3)$

<u>A∩B</u> $= \{\emptyset\}$

<u>A − B</u> $= A$

<u>B − A</u> $= B$

⚠ $\boxed{\text{NOTA}}$: el ppio de inducción y este tipo de ej. son importantes