$$\boxed{5} \qquad \iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy \qquad \text{onde } R = [a, b] \times [c, d]$$

EXEMPLO 5 Se $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$, então, pela Equação 5,

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} \Big[\operatorname{sen} y\Big]_0^{\pi/2} = 1 \cdot 1 = 1$$

A função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos y$ do Exemplo 5 é positiva em R, assim, a integral representa o volume do sólido que está acima de R e entre o gráfico de f, como mostrado na Figura 6.

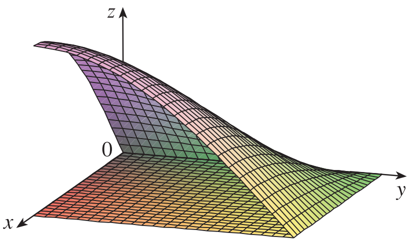


FIGURA 6

15.2 Exercícios

1–2 Determine $\int_0^5 f(x, y)\,dx$ e $\int_0^1 f(x, y)\,dy$.

1. $f(x, y) = 12x^2y^3$

2. $f(x, y) = y + xe^y$

3–14 Calcule a integral iterada.

3. $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)\,dy\,dx$

4. $\int_0^1 \int_1^2 (4x^3 - 9x^2y^2)\,dy\,dx$

5. $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y\,dy\,dx$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\,dx\,dy$

7. $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2\cos x)\,dx\,dy$

8. $\int_0^1 \int_1^2 \dfrac{xe^x}{y}\,dy\,dx$

9. $\int_1^4 \int_1^2 \left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) dy\,dx$

10. $\int_0^1 \int_0^3 e^{x+3y}\,dx\,dy$

11. $\int_0^1 \int_0^1 v(u - v^2)^4\,du\,dv$

12. $\int_0^1 \int_0^1 xy\sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

13. $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\,dr$

14. $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\,ds\,dt$

15–22 Calcule a integral dupla.

15. $\iint_R \operatorname{sen}(x + y)\,dA$, $R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, 0 \leqslant y \leqslant \pi/2\}$

16. $\iint_R (y + xy^{-2})\,dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

17. $\iint_R \dfrac{xy^2}{x^2 + 1}\,dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, -3 \leqslant y \leqslant 3\}$

18. $\iint_R \dfrac{1 + x^2}{1 + y^2}\,dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

19. $\iint_R x \operatorname{sen}(x + y)\,dA$, $\quad R = [0, \pi/6] \times [0, \pi/3]$

20. $\iint_R \dfrac{x}{1 + xy}\,dA$, $\quad R = [0, 1] \times [0, 1]$

21. $\iint_R ye^{-xy}\,dA$, $\quad R = [0, 2] \times [0, 3]$

22. $\iint_R \dfrac{1}{1 + x + y}\,dA$, $\quad R = [1, 3] \times [1, 2]$

23–24 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

23. $\int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)\,dx\,dy$

24. $\int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$

25. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ e acima do retângulo $R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

26. Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do paraboloide hiperbólico $z = 3y^2 - x^2 + 2$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

27. Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico $x^2/4 + y^2/9 + z = 1$ e acima do retângulo $R = [-1, 1] \times [-2, 2]$.

28. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = 1 + e^x \operatorname{sen} y$ e pelos planos $x = \pm 1$, $y = 0$, $y = \pi$ e $z = 0$.

29. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x \sec^2 y$ e pelos planos $z = 0$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = \pi/4$.

30. Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 16 - x^2$ e pelo plano $y = 5$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

31. Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide $z = 2 + x^2 + (y - 2)^2$ e pelos planos $z = 1$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ e $y = 4$.

32. Desenhe o sólido que está entre a superfície $z = 2xy/(x^2 + 1)$ e o plano $z = x + 2y$ e é limitado pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$. A seguir, determine seu volume.

SCA **33.** Utilize um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral $\iint_R x^5 y^3 e^{xy}\, dA$, onde $R = [0, 1] \times [0, 1]$. Em seguida, use o SCA para desenhar o sólido cujo volume é dado pela integral.

SCA **34.** Desenhe o sólido contido entre as superfícies $z = e^{-x^2} \cos(x^2 + y^2)$ e $z = 2 - x^2 - y^2$ para $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Utilize um sistema de computação algébrica para aproximar o volume desse sólido até a quarta casa decimal.

35–36 Determine o valor médio de f sobre o retângulo dado.

35. $f(x, y) = x^2 y$, R possui vértices $(-1, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, 5)$, $(1, 0)$

36. $f(x, y) = e^y \sqrt{x + e^y}$, $\quad R = [0, 4] \times [0, 1]$

37–38 Utilize a simetria para calcular a integral dupla.

37. $\displaystyle\iint_R \frac{xy}{1 + x^4}\, dA$, $\quad R = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

38. $\displaystyle\iint_R (1 + x^2 \operatorname{sen} y + y^2 \operatorname{sen} x)\, dA$, $\quad R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$

SCA **39.** Utilize seu SCA para calcular as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dy\, dx \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3}\, dx\, dy$$

Suas respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique o que acontece.

40. (a) Em que aspectos os teoremas de Fubini e Clairaut são semelhantes?

(b) Se $f(x, y)$ é contínuo em $[a, b] \times [c, d]$ e

$$g(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)\, dt\, ds$$

para $a < x < b$, $c < y < d$, mostre que $g_{xy} = g_{yx} = f(x, y)$.

15.3 Integrais Duplas sobre Regiões Gerais

Para as integrais de funções de uma variável real, a região sobre a qual integramos é sempre um intervalo. Porém, para integrais duplas, queremos integrar a função f não somente sobre retângulos, como também sobre uma região D de forma mais geral, como a ilustrada na Figura 1. Vamos supor que D seja uma região limitada, o que significa que D pode estar contida em uma região retangular R como na Figura 2. Definimos, então, uma nova função F, com domínio R, por

1 $$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \text{ está em } D \\ 0 & \text{se } (x, y) \text{ está em } R \text{ mas não em } D \end{cases}$$

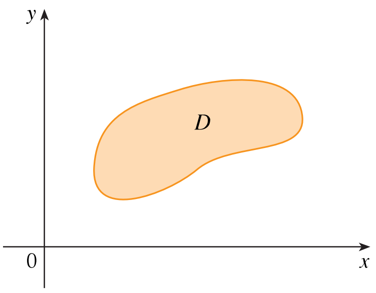


FIGURA 1

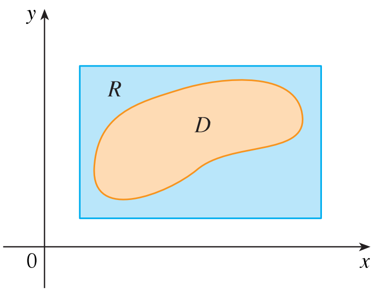


FIGURA 2

Se F for integrável em R, então definimos a **integral dupla de f em D** por

2 $$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R F(x, y)\, dA \qquad \text{onde } F \text{ é dada pela Equação 1}$$

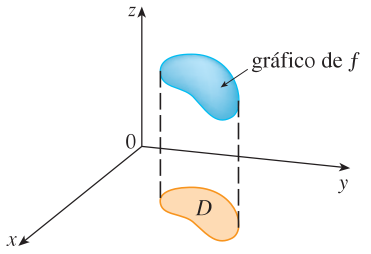


FIGURA 3

A Definição 2 faz sentido porque R é um retângulo e, portanto, $\iint_R F(x, y)\, dA$ já foi definida na Seção 15.1. O procedimento usado é razoável, pois os valores de $F(x, y)$ são 0 quando

A próxima propriedade de integrais diz que, se integrarmos a função constante $f(x, y) = 1$ sobre uma região D, obteremos a área de D:

10
$$\iint_D 1\, dA = A(D)$$

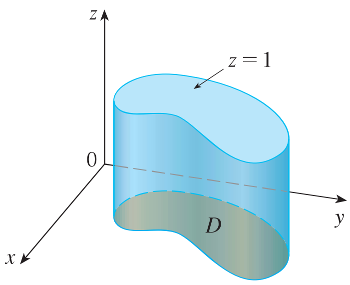


FIGURA 19
Cilindro com base D e altura 1

A Figura 19 ilustra por que a Equação 10 é verdadeira: um cilindro sólido, cuja base é D e a altura é 1, tem volume $A(D) \cdot 1 = A(D)$, mas sabemos que também podemos escrever seu volume como $\iint_D 1\, dA$.

Finalmente, podemos combinar as Propriedades 7, 8 e 10 para demonstrar a seguinte propriedade. (Veja o Exercício 61.)

11 Se $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todo (x, y) em D, então

$$mA(D) \leqslant \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant MA(D)$$

EXEMPLO 6 Utilize a Propriedade 11 para estimar a integral $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2.

SOLUÇÃO Como $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ e $-1 \leqslant \cos y \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \cos y \leqslant 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leqslant e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leqslant e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e$, $M = e$ e $A(D) = \pi(2)^2$ na Propriedade 11, obtemos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA \leqslant 4\pi e$$

15.3 Exercícios

1–6 Calcule a integral iterada.

1. $\displaystyle\int_0^4 \int^{\sqrt{y}} -xy^2\, dx\, dy$
2. $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^2 (x - y)\, dy\, dx$
3. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\, dy\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^2 \int_y^{2y} xy\, dx\, dy$
5. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\, dt\, ds$
6. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^v \sqrt{1 - v^2}\, du\, dv$

7–10 Calcule a integral dupla.

7. $\displaystyle\iint_D y^2\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant y \leqslant 1, -y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$
8. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x^5 + 1}\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x^2\}$
9. $\displaystyle\iint_D x\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \operatorname{sen} x\}$
10. $\displaystyle\iint_D x^3\, dA, \quad D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln x\}$

11. Desenhe um exemplo de uma região que seja
    (a) do tipo I, mas não do tipo II
    (b) do tipo II, mas não do tipo I
12. Desenhe um exemplo de uma região que seja
    (a) tanto do tipo I quanto do tipo II
    (b) nem do tipo I nem do tipo II

13–14 Expresse D como a região do tipo I e também como uma região do tipo II. Em seguida, calcule a integral dupla de duas maneiras.

13. $\displaystyle\iint_D x\, dA$, D é limitada pelas retas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$
14. $\displaystyle\iint_D xy\, dA$, D é limitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 3x$

15–16 Defina as integrais iteradas para ambas as ordens de integração. Então, calcule a integral dupla usando a ordem mais fácil e explique por que ela é mais fácil.

15. $\displaystyle\iint_D y\, dA$, D é limitada por $y = x - 2$, $x = y^2$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

16. $\displaystyle\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$, D é limitada por $y = x$, $y = 4$, $x = 0$

17–22 Calcule a integral dupla.

17. $\displaystyle\iint_D x \cos y\, dA$, D é limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$

18. $\displaystyle\iint_D (x^2 + 2y)\, dA$, D é limitada por $y = x$, $y = x^3$, $x \geqslant 0$

19. $\displaystyle\iint_D y^2\, dA$, D é a região triangular com vértices (0, 1), (1, 2), (4, 1)

20. $\displaystyle\iint_D xy^2\, dA$, D é limitada por $x = 0$ e $x = \sqrt{1 - y^2}$

21. $\displaystyle\iint_D (2x - y)\, dA$, D é limitada pelo círculo de centro na origem e raio 2

22. $\displaystyle\iint_D 2xy\, dA$, D é a região triangular com vértices (0, 0), (1, 2) e (0, 3)

23–32 Determine o volume do sólido dado.

23. Abaixo do plano $x - 2y + z = 1$ e acima da região limitada por $x + y = 1$ e $x^2 + y = 1$

24. Abaixo da superfície $z = 2x + y^2$ e acima da região limitada por $x = y^2$ e $x = y^3$

25. Abaixo da superfície $z = xy$ e acima do triângulo e vértices (1, 1), (4, 1) e (1, 2)

26. Limitado pelo paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e pelos planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$

27. Limitado pelos planos coordenados e pelo plano $3x + 2y + z = 6$

28. Limitado pelos planos $z = x$, $y = x$, $x + y = 2$ e $z = 0$

29. Limitado pelos cilindros $z = x^2$, $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $y = 4$

30. Limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

31. Limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ no primeiro octante

32. Limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$

33. Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para estimar a coordenada x dos pontos de intersecção da curva $y = x^4$ e $y = 3x - x^2$. Se D é a região limitada por essas curvas, estime $\iint_D x\, dA$.

34. Encontre o volume aproximado do sólido no primeiro octante limitado pelos planos $y = x$, $z = 0$ e $z = x$ e pelo cilindro $y = \cos x$. (Utilize uma ferramenta gráfica para estimar os pontos de intersecção.)

35–36 Determine o volume do sólido por subtração de dois volumes.

35. O sólido limitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2$, $y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2$, $2x + 2y - z + 10 = 0$

36. O sólido limitado pelo paraboloide cilíndrico $y = x^2$ e pelos planos $z = 3y$, $z = 2 + y$

37–38 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

37. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dy\, dx$ **38.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1 - x)\, dy\, dx$

39–42 Use um sistema de computação algébrica para determinar o volume exato do sólido.

SCA **39.** Abaixo da superfície $z = x^2y^4 + xy^2$ e acima da região limitada pelas curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ para $x \geqslant 0$

40. Entre os paraboloides $z = 2x^2 + y^2$ e $z = 8 - x^2 - 2y^2$ e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

41. Limitado por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z = 0$

42. Limitado por $z = x^2 + y^2$ e $z = 2y$

43–48 Esboce a região de integração e mude a ordem de integração.

43. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y f(x, y)\, dy\, dx$ **44.** $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x, y)\, dy\, dx$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y)\, dy\, dx$ **46.** $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-2}} f(x, y)\, dx\, dy$

47. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y)\, dy\, dx$ **48.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arctg} x}^{\pi/4} f(x, y)\, dy\, dx$

49–54 Calcule a integral trocando a ordem de integração.

49. $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\, dx\, dy$ **50.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy$

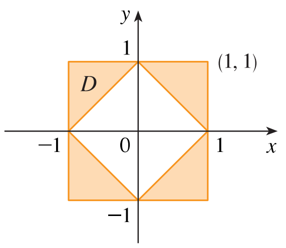
51. $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1}\, dy\, dx$ **52.** $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y}\, dy\, dx$

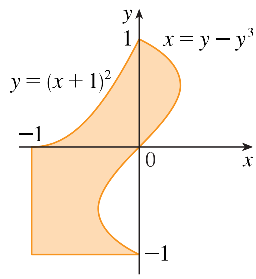
53. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$

54. $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$

55–56 Expresse D como a união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule a integral.

55. $\displaystyle\iint_D x^2\, dA$ **52.** $\displaystyle\iint_D y\, dA$





57–58 Use a Propriedade 8 para estimar o valor da integral.

57. $\displaystyle\iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA$, Q é o quarto de círculo com centro na origem e raio $\frac{1}{2}$ no primeiro quadrante

58. $\displaystyle\iint_T \operatorname{sen}^4(x + y)\, dA$, T é o triângulo limitado pelas retas $y = 0$, $y = 2x$ e $x = 1$

59–60 Encontre o valor médio de f na região D

59. $f(x, y) = xy$, D é o triângulo com vértices, (0, 0), (1, 0) e (1, 3)

60. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$, D é limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $x = 1$

61. Demonstre a Propriedade 11.

62. No cálculo de uma integral dupla sobre uma região D, obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$$

Esboce a região D e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.

63–67 Use a geometria ou simetria, ou ambas, para calcular a integral dupla.

63. $\iint_D (x+2)\,dA,\quad D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{9-x^2}\}$

64. $\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dA$, D é o disco com centro na origem e raio R

65. $\iint_D (2x + 3y)\,dA$, D é o retângulo $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$

66. $\iint_D (2 + x^2y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\,dA,\quad D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant |y| \leqslant 1\}$

67. $\iint_D (ax^3 + by^3 + \sqrt{a^2 - x^2})\,dA,\quad D = [-a, a] \times [-b, b]$

SCA **68.** Desenhe o sólido limitado pelo plano $x + y + z = 1$ e pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e determine seu volume exato. (Utilize seu SCA para fazer esse desenho, para achar as equações dos limites da região de integração e para calcular a integral dupla.)

15.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares

Suponha que queiramos calcular a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$, onde R é uma das regiões mostradas na Figura 1. Em qualquer dos casos, a descrição de R é complicada em coordenadas retangulares, mas a descrição de R fica mais fácil utilizando-se coordenadas polares.

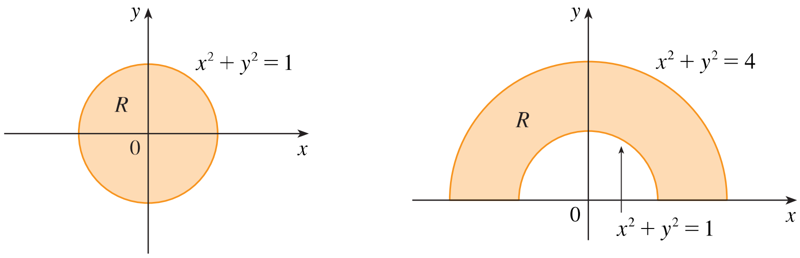


FIGURA 1 (a) $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ (b) $R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$

Lembre-se, a partir da Figura 2, de que as coordenadas polares (r, θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x, y) pelas equações

$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r \operatorname{sen}\theta}$$

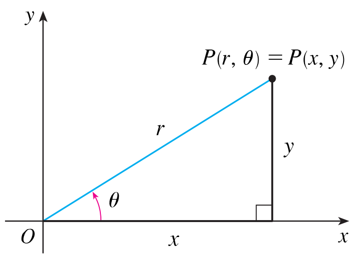


FIGURA 2

(Veja a Seção 10.3.)

As regiões da Figura 1 são casos especiais de um **retângulo polar**

$$R = \{(r, \theta) \mid a \leqslant r \leqslant b, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$$

que é apresentado na Figura 3. Para calcularmos a integral dupla $\iint_R f(x, y)\,dA$, onde R é um retângulo polar, dividimos o intervalo $[a, b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ de larguras iguais $\Delta r = (b-a)/m$ e dividimos o intervalo $[\alpha, \beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$ de larguras iguais $\Delta\theta = (\beta - \alpha)/n$. Então, os círculos $r = r_i$ e os raios $\theta = \theta_j$ dividem o retângulo polar R nos retângulos polares menores R_{ij} mostrados na Figura 4.