Foi-nos dado que $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$. Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos, portanto, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ junto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm³ no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa.

14.4 Exercícios

1–6 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 3y^2 - 2x^2 + x, \quad (2, -1, -3)$

2. $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7, \quad (2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}, \quad (1, 1, 1)$

4. $z = xe^{xy}, \quad (2, 0, 2)$

5. $z = x \operatorname{sen}(x+y), \quad (-1, 1, 0)$

6. $z = \ln(x - 2y), \quad (3, 1, 0)$

7–8 Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2, \quad (1, 1, 5)$

8. $z = \operatorname{arctg}(xy^2), \quad (1, 1, \pi/4)$

SCA **9–10** Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x-y)}{1 + x^2 + y^2}, \quad (1, 1, 0) \qquad (1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right), \quad (1, 1, 3e^{-0,1})$

11–16 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

11. $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5), \quad (2, 3)$

12. $f(x, y) = x^3y^4, \quad (1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x+y}, \quad (2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy} \cos y, \quad (\pi, 0)$

16. $f(x, y) = y + \operatorname{sen}(x/y), \quad (0, 3)$

17–18 Verifique a aproximação linear em (0, 0).

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Dado que f é uma função diferenciável $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$ e $f_y(2, 5) = -1$, use uma aproximação linear para estimar $f(2{,}2;\ 4{,}9)$.

20. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$ em (1, 1) e use-a para aproximar o número $f(1{,}02;\ 0{,}97)$. Ilustre, traçando o gráfico de f e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em (3, 2, 6) e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

22. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela. Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 ºC e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 ºC e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1. Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a −15 ºC e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a −17 ºC e a velocidade do vento for de 55 km/h.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)	$T \backslash v$	20	30	40	50	60	70
	−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
	−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
	−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
	−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

25–30 Determine a diferencial da função.

25. $z = e^{-2x} \cos 2\pi t$

26. $u = \sqrt{x^2 + 3y^2}$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \lambda$

30. $L = xze^{-y^2-z^2}$

31. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1{,}05, 2{,}1)$, compare os valores de Δz e dz.

32. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

33. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

34. Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

35. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

36. O índice de sensação térmica é modelado pela função

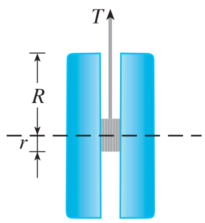
$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (em ºC) e v, a velocidade do vento (em km/h). A velocidade do vento é medida como 26 km/h, com uma possibilidade de erro de ± 2 km/h, e a temperatura é medida como -11 ºC, com a possibilidade de erro de ± 1 ºC. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no valor calculado de W em decorrência dos erros de medida em T e v.

37. A tensão T no cordel do ioiô na figura é

$$T = \frac{mgR}{2r^2 + R^2}$$

onde m é a massa do ioiô e g é a aceleração pela gravidade. Utilize as diferenciais para estimar a variação na tensão se R aumentar de 3 cm para 3,1 cm e r aumentar de 0,7 cm para 0,8 cm. A tensão aumenta ou decresce?



38. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura decresce de 310 K para 305 K.

39. Se R é a resistência equivalente de três resistores conectados em paralelo, com resistências R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências são medidas em ohms como $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

40. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

41. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por $S = 72{,}09w^{0{,}425}\,h^{0{,}725}$, onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de w e h forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

42. Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2, 1, 3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t,\ 1 - t^2,\ 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2,\ 2u^3 - 1,\ 2u + 1 \rangle$$

ambas estão em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

43–44 Mostre que a função é diferenciável achando valores de ε_1 e ε_2 que satisfaçam à Definição 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demonstre que se f é uma função de duas variáveis diferenciáveis em (a, b), então f é contínua em (a, b).
Dica: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

foi representada em um gráfico na Figura 4. Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Dica*: Utilize o resultado do Exercício 45.]
(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

Mas, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x) = 1$ e $\dfrac{\partial}{\partial x}(y) = 0$

portanto, essa equação se torna

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Se $\partial F/\partial z \neq 0$, resolvemos para $\partial z/\partial x$ e obtemos a primeira fórmula das Equações 7. A fórmula para $\partial z/\partial y$ é obtida de uma maneira semelhante.

7

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}}$$

Novamente, uma versão do **Teorema da Função Implícita** estipula condições sob as quais nossa suposição é válida: se F é definida dentro de uma esfera contendo (a, b, c), onde $F(a, b, c) = 0$, $F_z(a, b, c) \neq 0$ e F_x, F_y e F_z são contínuas dentro da esfera, então a equação $F(x, y, z) = 0$ define z como uma função de x e y perto do ponto (a, b, c), e as derivadas parciais dessa função são dadas por $\boxed{7}$.

EXEMPLO 9 Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

SOLUÇÃO Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$. Então, das Equações 7, temos

A solução do Exemplo 9 deve ser comparada com a do Exemplo 4 na Seção 14.3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

14.5 Exercícios

1–6 Use a Regra da Cadeia para achar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = e^t$

2. $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = 1/t$

3. $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$,, $x = \ln t$, $y = \cos t$

4. $z = \operatorname{tg}^{-1}(y/x)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{tg} t$

7–12 Use a Regra da Cadeia para achar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3$, $x = s\cos t$, $y = s \operatorname{sen} t$

8. $z = \operatorname{arcsen}(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$

9. $z = \operatorname{sen}\theta \cos\phi$, $\theta = st^2$, $\phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}$, $x = s/t$, $y = t/s$

11. $z = e^r \cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \operatorname{tg}(u/v)$, $u = 2s + 3t$, $v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$x = g(t)$	$y = h(t)$
$g(3) = 2$	$h(3) = 7$
$g'(3) = 5$	$h'(3) = -4,$
$f_x(2, 7) = 6$	$f_y(2, 7) = -8$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u e v são diferenciáveis, e

$u(1, 0) = 2$	$v(1, 0) = 3$
$u_s(1, 0) = -2$	$v_s(1, 0) = 5$
$u_t(1, 0) = 6$	$v_t(1, 0) = 4$
$F_u(2, 3) = -1$	$F_v(2, 3) = 10$

Encontre $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \text{sen } v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21–26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$, $s = x + y \,\text{sen}\, t$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$

23. $w = xy + yz + zx$, $x = r\cos\theta$, $y = r \,\text{sen}\,\theta$, $z = r\theta$;

$\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ quando $r = 2$, $\theta = \pi/2$

24. $P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, $u = xe^y$, $v = ye^x$, $w = e^{xy}$;

$\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial P}{\partial y}$ quando $x = 0$, $y = 2$

25. $N = \dfrac{p + q}{p + r}$, $p = u + vw$, $q = v + uw$, $r = w + uv$;

$\dfrac{\partial N}{\partial u}, \dfrac{\partial N}{\partial v}, \dfrac{\partial N}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 3$, $w = 4$

26. $u = xe^{ty}$, $x = \alpha^2\beta$, $y = \beta^2\gamma$, $t = \gamma^2\alpha$;

$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}, \dfrac{\partial u}{\partial \beta}, \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}$ quando $\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$

27–30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $y\cos x = x^2 + y^2$

28. $\cos(xy) = 1 + \text{sen } y$

29. $\text{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

30. $e^y \,\text{sen}\, x = x + xy$

31–34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

32. $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

33. $e^z = xyz$

34. $yz + x\ln y = z^2$

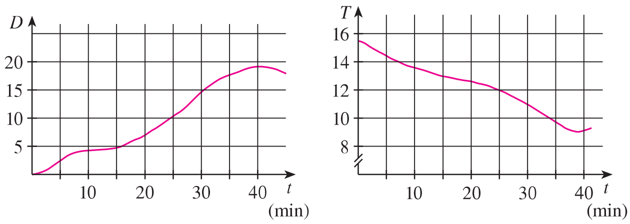
35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção de trigo W em um determinado ano depende da temperatura média T e do volume anual das chuvas R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas, e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?



38. O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura está decrescendo em uma taxa de 6,5 cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em um determinado momento, as dimensões são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w estão aumentando em uma taxa de 2 m/s enquanto h está decrescendo em uma taxa de 3 m/s. Nesse instante, encontre as taxas em que as seguintes quantidades estão variando.
(a) O volume
(b) A área da superfície
(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de 0,15 K/s. Use a equação no Exemplo 2 para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320 K.

42. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor de toda essa produção em milhões de dólares) como uma função Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47\, L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Suponha que quando $L = 30$ e $K = 8$, a força de trabalho esteja decrescendo em uma taxa de 2.000 horas trabalhadas por ano e o capital esteja aumentando em uma taxa de \$ 500.000 por ano. Encontre a taxa de variação da produção.

43. Um lado de um triângulo está aumentando em uma taxa de 3cm/s e um segundo lado está decrescendo em uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

44. Se um som com frequência f_s for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade v_s e um observador estiver se movendo com velocidade v_o ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right)f_s$$

onde c é a velocidade do som, cerca de 332m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um dado momento, você esteja em um trem que se move a 34 m/s e acelera a 1,2 m/s^2. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s^2, e toca seu apito, com frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45–48 Suponha que todas as funções dadas sejam diferenciáveis.

45. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49–54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Dica*: Seja $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\text{sen}\,t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Uma função f é chamada **homogênea de n-ésimo grau** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo t, onde n é um inteiro positivo e f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

(a) Verifique se $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.

(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Dica*: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

56. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n - 1)f(x, y)$$

57. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como funções das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

59. A Equação 6 é uma fórmula para a derivada dy/dx de uma função definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, sendo que F é diferenciável e $F_y \neq 0$. Comprove que se F tem derivadas contínuas de segunda ordem, então uma fórmula para a segunda derivada de y é

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$