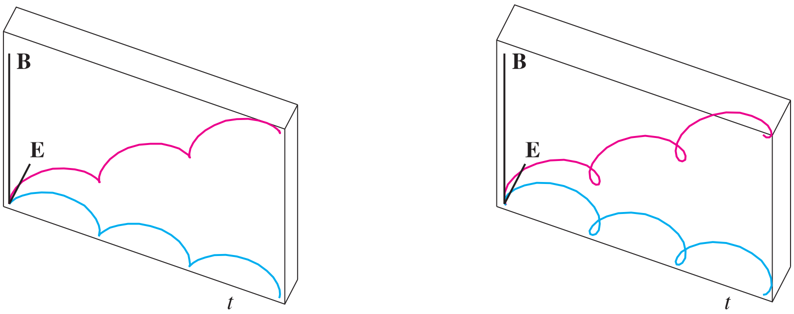


(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$ (b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2} \operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2} \cos t, t \rangle$

FIGURA 12
Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

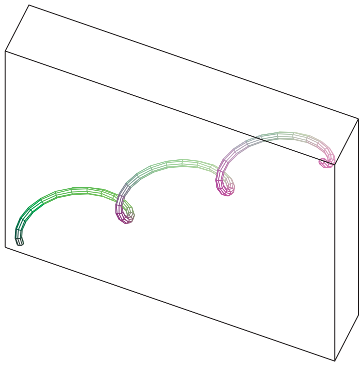


FIGURA 13

Para mais detalhes sobre a física envolvida e animações das trajetórias das partículas, consulte os seguintes sites:

- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

13.1 Exercícios

1–2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{4 - t^2}, e^{-3t}, \ln(t + 1) \rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t - 2}{t + 2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9 - t^2)\,\mathbf{k}$

3–6 Calcule os limites.

3. $\displaystyle\lim_{t \to 0} \left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \frac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k} \right)$

4. $\displaystyle\lim_{t \to 1} \left(\frac{t^2 - t}{t - 1}\,\mathbf{i} + \sqrt{t + 8}\,\mathbf{j} + \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\ln t}\,\mathbf{k} \right)$

5. $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \left\langle \frac{1 + t^2}{1 - t^2}, \operatorname{tg}^{-1} t, \frac{1 - e^{-2t}}{t} \right\rangle$

6. $\displaystyle\lim_{t \to \infty} \left\langle te^{-t}, \frac{t^3 + t}{2t^3 - 1}, t \operatorname{sen} \frac{1}{t} \right\rangle$

7–14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro t cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t \rangle$
8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$
9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2 - t, 2t \rangle$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, t, \cos \pi t \rangle$
11. $\mathbf{r}(t) = \langle 1, \cos t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$
12. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

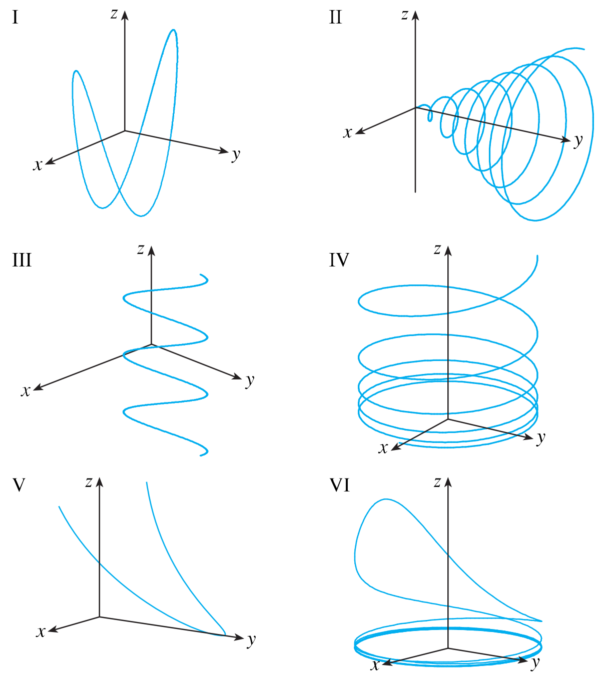
15–16 Desenhe as projeções da curva nos três planos coordenados. Use essas projeções para ajudá-lo a esboçar a curva.

15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \operatorname{sen} t, 2 \cos t \rangle$
16. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$

17–20 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

17. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$
18. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$
19. $P(0, -1, 1)$, $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$
20. $P(a, b, c)$, $Q(u, v, w)$

21–26 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I–VI). Justifique sua escolha.



É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

21. $x = t\cos t, \quad y = t, \quad z = t \operatorname{sen} t, \quad t \geqslant 0$

22. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 1/(1 + t^2)$

23. $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2$

24. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \cos 2t$

25. $x = \cos 8t, \quad y = \operatorname{sen} 8t, \quad z = e^{0,8t}, \quad t \geqslant 0$

26. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t, \quad z = t$

27. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

28. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

29. Em quais pontos a curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\,\mathbf{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

30. Em quais pontos a hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

31–35 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

31. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\rangle$

33. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t\operatorname{sen} t, t\cos t\rangle$

34. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t\rangle$

35. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 2t, \cos 3t, \cos 4t\rangle$

36. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \cos 4t$. Explique sua forma representando por gráficos suas projeções para os três planos coordenados.

37. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = (1 + \cos 16t)\cos t$$
$$y = (1 + \cos 16t)\operatorname{sen} t$$
$$z = 1 + \cos 16t.$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

38. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

39. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos (1, 4, 0) e (9, −8, 28), mas não passa pelo ponto (4, 7, −6).

40–44 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

40. O cilindro de $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

41. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

42. O paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

43. A hipérbole $z = x^2 - y^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$

44. O semielipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$, $y \geqslant 0$, e o cilindro $x^2 + z^2 = 1$

45. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

46. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $y = x^2$ e a metade superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

47. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Será que um míssil atingiu seu alvo em movimento? Vão se colidir duas aeronaves?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2\rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6\rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

48. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t\rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

49. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t) + \lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t\to a} c\mathbf{u}(t) = c\lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\cdot\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t\to a}[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)] = \lim_{t\to a}\mathbf{u}(t)\times\lim_{t\to a}\mathbf{v}(t)$

50. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t)\cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t)\operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano xy tem coordenadas polares $r = 2 + \cos 1{,}5t$ e $\theta = t$, de forma que r varia entre 1 e 3. Mostre então que z tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre $r = 1$ e $r = 3$.

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando `tubeplot` do Maple ou o `curvetube` ou comando Tube no Mathematica.)

51. Mostre que $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

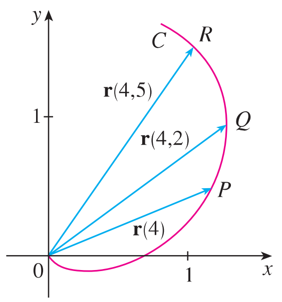
$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.
(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.
(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.
(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em (1, 1) e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3–8
(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.
(b) Encontre $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1 \rangle, \quad t = -1$
4. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^3 \rangle, \quad t = 1$
5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/4$
6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}, \quad t = 0$
7. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j}, \quad t = 0$
8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/6$

9–16 Determine a derivada da função vetorial.
9. $\mathbf{r}(t) = \langle t \operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t \rangle$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2 \rangle$
11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1+t}\mathbf{i} + \dfrac{t}{1+t}\mathbf{j} + \dfrac{t^2}{1+t}\mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$
14. $\mathbf{r}(t) = at\cos 3t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c\cos^3 t\,\mathbf{k}$
15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\,\mathbf{c}$
16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17–20 Determine o vetor tangente unitário $\mathrm{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro dado t.
17. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{-t}, 2\operatorname{arctg} t, 2e^t \rangle, \quad t = 0$
18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + 3t, t^2 + 1, 3t + 4 \rangle, \quad t = 1$
19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$
20. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^2 t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j} + \operatorname{tg}^2 t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.
22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, encontre $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23–26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.
23. $x = 1 + 2\sqrt{t}, \quad y = t^3 - t, \quad z = t^3 + t; \quad (3, 0, 2)$
24. $x = e^t, \quad y = te^t, \quad z = te^{t^2}; \quad (1, 0, 0)$
25. $x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\operatorname{sen} t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$
26. $x = \sqrt{t^2 + 3}; \quad y = \ln(t^2 + 3); \quad z = t; \quad (2, \ln 4, 1)$

27. Encontre uma equação para a reta tangente à curva de intersecção dos cilindros $x^2 + y^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 20$ no ponto (3, 4, 2).
28. Encontre o ponto na curva de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos t, 2\operatorname{sen} t, e^t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, em que a reta tangente é paralela ao plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

SCA **29–31** Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.
29. $x = t, \; y = e^{-t}, \; z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$
30. $x = 2\cos t, \; y = 2\operatorname{sen} t, \; z = 4\cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$
31. $x = t\cos t, \; y = t, \; z = t\operatorname{sen} t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

32. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2\operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t \rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.
33. As curvas de $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t \rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.
34. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$ se cruzam? Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

35–40 Calcule a integral.
35. $\displaystyle\int_0^2 (t\,\mathbf{i} - t^3\,\mathbf{j} + 3t^5\,\mathbf{k})\,dt$
36. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}\,\mathbf{j} + \frac{2t}{1+t^2}\,\mathbf{k} \right) dt$
37. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (3\operatorname{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\operatorname{sen} t\cos t\,\mathbf{k})\,dt$
38. $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t-1}\,\mathbf{j} + t\operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}\right) dt$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

39. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

40. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

41. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

42. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

43. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

45. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

46. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

47. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \operatorname{sen} t \rangle$, utilize a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

48. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções de vetor no Exercício 47, utilize a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

49. Determine $f'(2)$, onde $f(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{u}(2) = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\mathbf{u}'(2) = \langle 3, 0, 4 \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

50. Se $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções de vetor no Exercício 49, encontre $\mathbf{r}'(2)$.

51. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

52. Determine uma expressão para $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

53. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Dica*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

54. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

55. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

56. Mostre que o vetor tangente a uma curva definida por uma função vetorial $\mathbf{r}(t)$ aponta no mesmo sentido da curva com t aumentando. [*Dica:* Consulte a Figura 1 e considere os casos $h > 0$ e $h < 0$ separadamente.]

13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, como o limite do comprimento das poligonais inscritas e, para o caso no qual f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula

$$\boxed{1} \qquad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$, $a \leqslant t \leqslant b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva é percorrida exatamente uma vez à medida que t cresce, a partir de a para b, é possível mostrar que

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \end{aligned}}$$

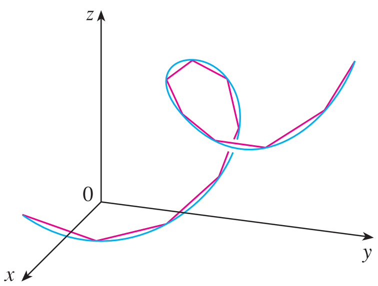


FIGURA 1
O comprimento de uma curva espacial é o limite dos comprimentos das poligonais inscritas.

Observe que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ podem ser escritos de forma mais compacta

$$\boxed{3} \qquad \boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt}$$

porque, para curvas planas $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j}$,

$$|\mathbf{r}'(t)| = |f'(t)\,\mathbf{i} + g'(t)\,\mathbf{j}| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}$$

e para as curvas espaciais $\mathbf{r}(t) = f(t)\,\mathbf{i} + g(t)\,\mathbf{j} + h(t)\,\mathbf{k}$,

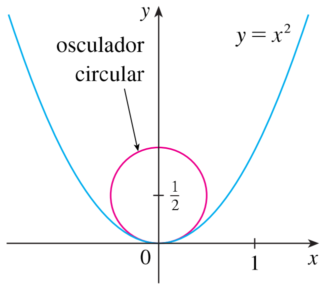


FIGURA 9

TEC *Visual 13.3C* mostra como o círculo osculador muda conforme um ponto se move ao longo de uma curva.

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

Resumimos aqui as fórmulas para os vetores tangente unitário, normal unitário e binormal e para a curvatura.

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

13.3 Exercícios

1–6 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos t, 3 \operatorname{sen} t\rangle, \quad -5 \leqslant t \leqslant 5$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle 2t, t^2, \frac{1}{3}t^3\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\,t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7–9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{t}, t, t^2 \right\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^{-t}, te^{-t}\rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 3$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \operatorname{sen} 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

11. Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ com o plano $x + y + z = 2$.

13–14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t}\operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 4t$, $z = 3\cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t. Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17–20
(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.
(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 3\cos t, 3 \operatorname{sen} t\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t\cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t\rangle, \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2}\,t, e^t, e^{-t} \right\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \frac{1}{2}t^2, t^2\rangle$

21–23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 4\cos t\,\mathbf{k}$

24. Encontre a curvatura da curva $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, t\rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 5t$ e calcule a curvatura no ponto $(1, 0, 0)$.

27–29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

27. $y = x^4$ **28.** $y = \operatorname{tg} x$ **29.** $y = xe^x$

30–31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com