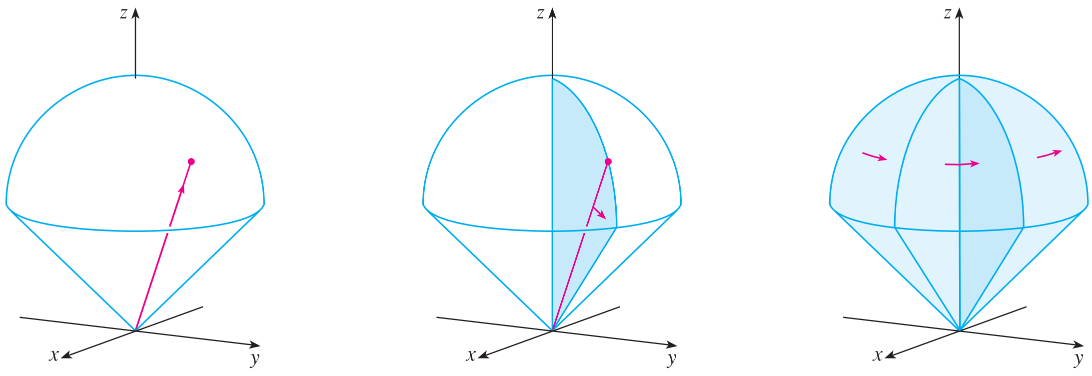


FIGURA 11

ρ varia de 0 a $\cos\phi$, enquanto ϕ e θ são constantes.

ϕ varia de 0 a $\pi/4$, enquanto θ é constante.

θ varia de 0 a 2π.

15.9 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

2. (a) $(2, \pi/2, \pi/2)$ (b) $(4, -\pi/4, \pi/3)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para esféricas.

3. (a) $(0, -2, 0)$ (b) $(-1, 1, -\sqrt{2})$

4. (a) $(1, 0, \sqrt{3})$ (b) $(\sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3})$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\phi = \pi/3$ **6.** $\rho = 3$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $\rho = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

8. $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

9–10 Escreva a equação em coordenadas esféricas.

9. (a) $z^2 = x^2 + y^2$ (b) $x^2 + z^2 = 9$

10. (a) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 = 0$ (b) $x + 2y + 3z = 1$

11–14 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $2 \leqslant \rho \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $1 \leqslant \rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/2$

13. $\rho \leqslant 1, \quad 3\pi/4 \leqslant \phi \leqslant \pi$

14. $\rho \leqslant 2, \quad \rho \leqslant \operatorname{cossec}\phi$

15. Um sólido está cima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Escreva uma descrição do sólido em termos de desigualdades envolvendo coordenadas esféricas.

16. (a) Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas.
(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.

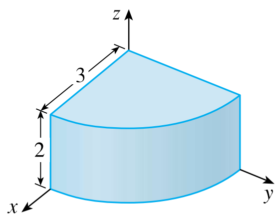
17–18 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

17. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\theta\, d\phi$

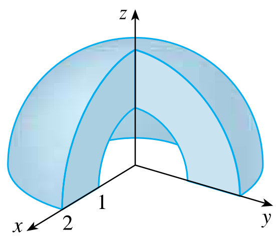
18. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \; d\rho\, d\phi\, d\theta$

19–20 Escreva a integral tripla de uma função contínua arbitrária $f(x, y, z)$ em coordenadas cilíndricas ou esféricas sobre o sólido mostrado.

19.



20.



21–34 Utilize coordenadas esféricas.

21. Calcule $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dV$, onde B é a bola com centro na origem e raio 5.

22. Calcule $\iiint_H (9 - x^2 - y^2)\, dV$, onde H é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

23. Calcule $\iiint_E (x^2 + y^2)\, dV$, onde E está entre as esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

24. Calcule $\iiint_E y^2\, dV$, onde E é o hemisfério sólido $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$, $z \geqslant 0$.

25. Calcule $\iiint_E xe^{x^2+y^2+z^2}\, dV$, onde E é a porção da bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro octante.

26. Calcule $\iiint_E xyz\, dV$, onde E fica entre as esferas $\rho = 2$ e $\rho = 4$ e acima do cone $\phi = \pi/3$.

27. Encontre o volume da parte da bola $\rho \leqslant a$ a que está entre os cones $\phi = \pi/6$ e $\phi = \pi/3$.

28. Encontre a distância média de um ponto em uma bola de raio a a seu centro.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. (a) Determine o volume do sólido que está acima do cone $\phi = \pi/3$ e abaixo da esfera $\rho = 4\cos\phi$.
(b) Encontre o centroide do sólido na parte (a).

30. Determine o volume do sólido que está dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano xy e abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

31. (a) Encontre o centroide do sólido no Exemplo 4.
(b) Encontre o momento de inércia em torno do eixo z para este sólido.

32. Seja H um hemisfério sólido de raio a cuja densidade em qualquer ponto é proporcional à distância ao centro da base.
(a) Determine a massa de H.
(b) Determine o centro de massa de H.
(c) Determine o momento de inércia de H em relação a seu eixo.

33. (a) Determine o centroide do hemisfério sólido homogêneo de raio a.
(b) Determine o momento de inércia do sólido da parte (a) em relação a um diâmetro de sua base.

34. Determine a massa e o centro de massa do hemisfério sólido de raio a se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância da base.

35–38 Dentre as coordenadas cilíndricas ou esféricas, utilize a que lhe parecer mais apropriada.

35. Determine o volume e o centroide do sólido E que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

36. Determine o volume da menor cunha esférica cortada de uma esfera de raio a por dois planos que se interceptam ao longo de um diâmetro com um ângulo de $\pi/6$.

SCA **37.** Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E está acima do paraboloide $z = x^2 + y^2$ e abaixo do plano $z = 2y$. Utilize a Tabela de Integrais (veja as Páginas de Referência 6–11) ou um sistema de computação algébrica para calcular a integral.

SCA **38.** (a) Determine o volume limitado pelo toro $\rho = \operatorname{sen}\phi$.
(b) Utilize um computador para desenhar o toro.

39–41 Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas.

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy\,dz\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3)\,dz\,dx\,dy$

41. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4^2-x^2}}^{\sqrt{4^2-x^2}} \int_{-\sqrt{4^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dz\,dx\,dy$

---

42. Um modelo para a densidade δ da atmosfera terrestre próxima à superfície é

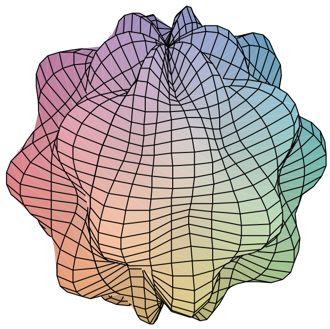
$$\delta = 619{,}09 - 0{,}000097\rho$$

onde ρ (a distância do centro da Terra) é medido em metros e δ é medido em quilogramas por metro cúbico. Se tomarmos a superfície da Terra como uma esfera com raio de 6 370 km, então, este modelo é razoável para $6\,370 \times 10^6 \leqslant \rho \leqslant 6\,375 \times 10^6$. Use este modelo para estimar a massa da atmosfera entre o solo e uma altitude de 5 km.

43. Use uma ferramenta gráfica para desenhar um silo que consista em um cilindro de raio 3 e altura 10 com um hemisfério no topo.

44. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas com as coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como a seguir. Tomamos a origem como o centro da Terra e o eixo z passando pelo polo norte. O eixo x positivo passa pelo ponto onde o meridiano principal (o meridiano por Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Então a latitude de P é $\alpha = 90° - \phi°$ e a longitude é $\beta = 360° - \theta°$. Encontre a distância sobre um círculo máximo de Los Angeles (lat. 34,06º N, long. 118,25º W) a Montreal (lat. 45,50º N, long. 73,60º W). Tome o raio da Terra como 6 370 km. (Um *círculo máximo* é o círculo de intersecção de uma esfera com um plano que passe pelo centro da esfera.)

SCA **45.** As superfícies $\rho = 1 + \frac{1}{5}\operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\phi$ têm sido usadas para modelar tumores. A "esfera rugosa" com $m = 6$ e $n = 5$ está mostrada. Utilize um sistema de computação algébrica para determinar seu volume.



46. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz = 2\pi$$

(A integral imprópria tripla é definida como o limite da integral tripla sobre uma esfera sólida quando o raio da esfera aumenta indefinidamente.)

47. (a) Utilize coordenadas cilíndricas para mostrar que o volume do sólido limitado por cima pela esfera $r^2 + z^2 = a^2$ e por baixo pelo cone $z = r\cot\phi_0$ (ou $\phi = \phi_0$), onde $0 < \phi_0 < \pi/2$, é

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\phi_0)$$

(b) Deduza que o volume da cunha esférica dada por $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, $\phi_1 \leqslant \phi \leqslant \phi_2$ é

$$\Delta V = \frac{\rho_2^3 - \rho_1^3}{3}(\cos\phi_1 - \cos\phi_2)(\theta_2 - \theta_1)$$

(c) Utilize o Teorema do Valor Médio para mostrar que o volume da parte (b) pode ser escrito como

$$\Delta V = \tilde{\rho}^2 \operatorname{sen}\tilde{\phi}\,\Delta\rho\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

onde $\tilde{\rho}$ está entre ρ_1 e ρ_2, $\tilde{\phi}$ está entre ϕ_1 e ϕ_2, $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ e $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

Visto que $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, temos sen $\phi \geqslant 0$. Portanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = |-\rho^2 \operatorname{sen} \phi| = \rho^2 \operatorname{sen} \phi$$

e a Fórmula 13 nos dá

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dV = \iiint_S f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\, \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

que é equivalente à Fórmula 15.9.3.

15.10 Exercícios

1–6 Determine o jacobiano da transformação.

1. $x = 5u - v, \quad y = u + 3v$

2. $x = uv, \quad y = u/v$

3. $x = e^{-r} \operatorname{sen} \theta, \quad y = e^r \cos \theta$

4. $x = e^{s+t}, \quad y = e^{s-t}$

5. $x = u/v, \quad y = v/w, \quad z = w/u$

6. $x = v + w^2, \quad y = w + u^2, \quad z = u + v^2$

7–10 Determine a imagem do conjunto S sob a transformação dada.

7. $S = \{(u, v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 3,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\}$;
$x = 2u + 3v, \ y = u - v$

8. S é o quadrado limitado pelas retas $u = 0, u = 1, v = 0, v = 1$; $x = v, \ y = u(1 + v^2)$

9. S é a região triangular com vértices (0, 0), (1, 1), (0, 1); $x = u^2$, $y = v$

10. S é o disco dado por $u^2 + v^2 \leqslant 1$; $x = au, \ y = bv$

11–14 Uma região R no plano xy é dada. Determine equações para a transformação T que mapeia uma região retangular S no plano uv sobre R, onde os lados de S são paralelos aos eixos u e v.

11. R é limitado por $y = 2x - 1, y = 2x + 1, y = 1 - x, y = 3 - x$

12. R é o paralelogramo com vértices (0, 0), (4, 3), (2, 4), (−2, 1)

13. R está entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$ no primeiro quadrante

14. R é ligado pelas hipérboles $y = 1/x$, $y = 4/x$ e pelas retas $y = x$, $y = 4x$ no primeiro quadrante

15–20 Utilize a transformação dada para calcular a integral.

15. $\iint_R (x - 3y)\, dA$, onde R á a região triangular com vértices (0, 0), (2, 1) e (1, 2); $x = 2u + v, \ y = u + 2v$

16. $\iint_R (4x + 8y)\, dA$, onde R é o paralelogramo com vértices (−1, 3), (1, −3), (3, −1) e (1, 5); $x = \frac{1}{4}(u - v), \ y = \frac{1}{4}(v - 3u)$

17. $\iint_R x^2\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$; $x = 2u, \ y = 3v$

18. $\iint_R (x^2 - xy + y^2)\, dA$, onde R é a região limitada pela elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$; $x = \sqrt{2}\, u - \sqrt{2/3}\, v, \ \ y = \sqrt{2}\, u + \sqrt{2/3}\, v$

19. $\iint_R xy\, dA$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas retas $y = x$ e $y = 3x$ e as hipérboles $xy = 1$, $xy = 3$; $x = u/v, \ y = v$

20. $\iint_R y^2\, dA$, onde R é a região limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$; $u = xy, \ v = xy^2$. Ilustre utilizando uma calculadora gráfica ou um computador para traçar R.

21. (a) Calcule $\iiint_E dV$, onde E é o sólido limitado pelo elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. Utilize a transformação $x = au$, $y = bv, \ z = cw$.
(b) A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com $a = b = 6\,378$ km e $c = 6\,356$ km. Use o item (a) para estimar o volume da Terra.
(c) Se o sólido do item (a) tiver densidade constante k, encontre seu momento de inércia em relação ao eixo z.

22. Um problema importante na termodinâmica é determinar o trabalho realizado por um motor de Carnot ideal. Um ciclo consiste na expansão alternada e compressão de gás em um pistão. O trabalho realizado pelo motor é igual à área da região R limitada por duas curvas isotérmicas $xy = a$, $xy = b$ e duas curvas adiabáticas $xy^{1,4} = c$, $xy^{1,4} = d$, onde $0 < a < b$ e $0 < c < d$. Calcule o trabalho realizado determinando a área de R.

23–27 Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada.

23. $\displaystyle\iint_R \frac{x - 2y}{3x - y}\, dA$, onde R é o paralelogramo limitado pelas retas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$ e $3x - y = 8$

24. $\iint_R (x + y)e^{x^2 - y^2}\, dA$, onde R é o retângulo limitado pelas retas $x - y = 0$, $x - y = 2$, $x + y = 0$ e $x + y = 3$

25. $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y - x}{y + x}\right) dA$, onde R á a região trapezoidal com vértices (1, 0), (2, 0), (0, 2) e (0, 1)

26. $\iint_R \operatorname{sen}(9x^2 + 4y^2)\, dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$

27. $\iint_R e^{x+y}\, dA$, onde R é dada pela inequação $|x| + |y| \leqslant 1$

28. Seja f uma função contínua em [0, 1] e seja R a região triangular com vértices (0, 0), (1, 0) e (0, 1). Mostre que

$$\iint_R f(x + y)\, dA = \int_0^1 u f(u)\, du$$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com   É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador