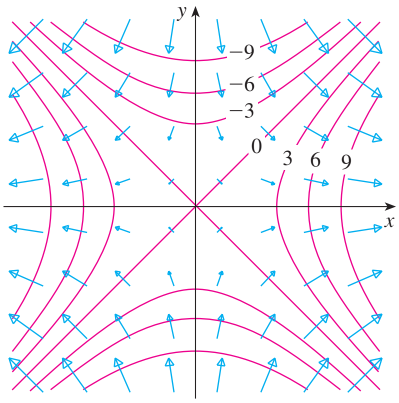
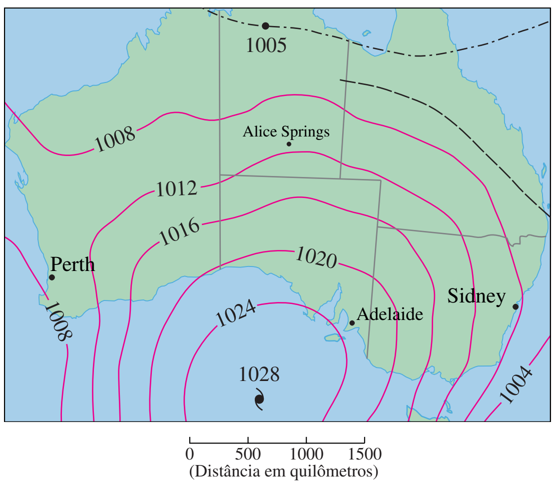


FIGURA 13

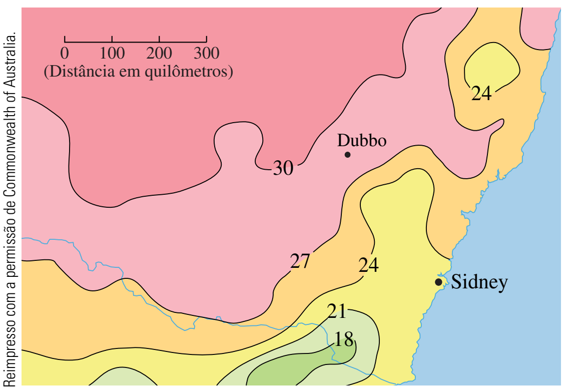
14.6 Exercícios

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascais (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quais são as unidades da derivada direcional?



Baseado em dados de Bureau of Meteorology, Commonwealth of Australia.

2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em ºC). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



Reimpresso com a permissão de Commonwealth of Australia.

3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4–6 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

4. $f(x, y) = x^3y^4 - x^4y^3$, $(1, 1)$, $\theta = \pi/6$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = e^x \cos y$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/4$

7–10
(a) Determine o gradiente de f.
(b) Calcule o gradiente no ponto P.
(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $P(-6, 4)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i} - \mathbf{j})$

8. $f(x, y) = y^2/x$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \sqrt{5}\,\mathbf{j})$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle$

11–17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$, $(0, \pi/3)$, $\mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

12. $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

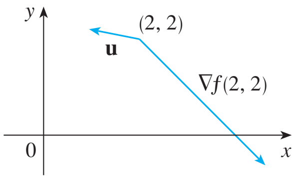
14. $g(r, s) = \operatorname{tg}^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t)$, $(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ em $P(1, -1, 3)$ na direção de $Q(2, 4, 5)$.

21–26 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = 4y\sqrt{x}$, $(4, 1)$

22. $f(s, t) = te^{st}$, $(0, 2)$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(p, q, r) = \operatorname{arctg}(pqr)$, $(1, 2, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Utilize o resultado do item (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4 y - x^2 y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, onde x, y, e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 120º.
(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.
(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

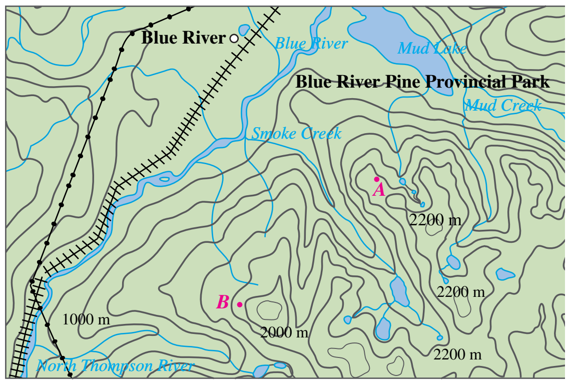
onde T é medido em ºC e x, y, z em metros.
(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.
(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?
(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?
(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1\,000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas $(60, 40, 966)$. O eixo x positivo aponta para o leste e o eixo y positivo aponta para o norte.
(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

36. Um mapa topográfico de Blue River Pine Provincial Park em British Columbia é mostrado. Desenhe as curvas da descida mais íngreme do ponto A (descendo até o Mud Lake) e do ponto B.

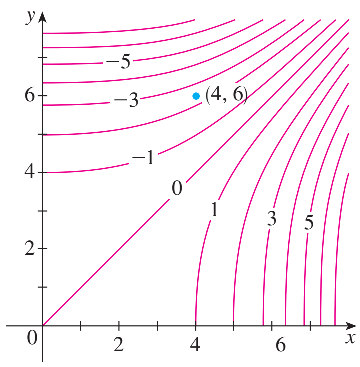


37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções diferenciáveis de x e y e que a, b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39. A **segunda derivada direcional** de $f(x, y)$ é

$$D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) = D_{\mathbf{u}}[D_{\mathbf{u}} f(x, y)]$$

Se $f(x, y) = x^3 + 5x^2y + y^3$ e $\mathbf{u} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$, calcule $D_{\mathbf{u}}^2 f(2, 1)$.

40. (a) Se $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ é uma unidade vetorial e f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas, mostre que

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx} a^2 + 2f_{xy} ab + f_{yy} b^2$$

(b) Determine a derivada direcional de $f(x, y) = xe^{2y}$ na direção de $\mathbf{v} = \langle 4, 6 \rangle$.

41–46 Encontre uma equação (a) do plano tangente e (b) da reta normal à superfície dada no ponto especificado.

41. $[2(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$

42. $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$

43. $xyz^2 = 6$, $(3, 2, 1)$

44. $xy + yz + zx = 5$, $(1, 2, 1)$

45. $x + y + z = e^{xyz}$, $(0, 0, 1)$

46. $x^4 + y^4 + z^4 = 2x^2y^2z^2$, $(1, 1, 1)$

47–48 Utilize um computador para traçar o gráfico da superfície, do plano tangente e da reta normal na mesma tela. Escolha o domínio com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

47. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

48. $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

49. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

50. Se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, encontre o vetor gradiente $\nabla g(1, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ no ponto $(1, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

51. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

52. Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 51.

53. Mostre que a equação do plano tangente ao paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

54. Em qual ponto do paraboloide $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$?

55. Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

56. Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

57. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

58. Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

59. Onde a reta normal à parábola $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 2)$ intercepta o paraboloide uma segunda vez?

60. Em quais pontos a reta normal que passa pelo ponto $(1, 2, 1)$ no elipsoide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 102$?

61. Mostre que a soma das intersecções x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.

62. Mostre que as pirâmides cortadas do primeiro octante por qualquer plano tangente à superfície $xyz = 1$ em pontos do primeiro octante têm o mesmo volume.

63. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

64. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 1)$.

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

65. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equações $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais no ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0 \text{ em } P$$

(b) Use o item (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

66. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma o item (a).

67. Suponha que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por vetores unitários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. É possível determinar ∇f nesse ponto? Em caso afirmativo, como fazê-lo?

68. Mostre que, se $z = f(x, y)$ for diferenciável em $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, então

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Dica*: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

Aplicando esse teorema uma segunda vez, temos

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) &= \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k \\ &= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k \\ &= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \end{aligned}$$

(pelo Teorema de Clairaut)

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) \tag{10}$$

Foi-nos dado que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, portanto há uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) está em B. Logo, ao olhar na Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Isso significa que se C é a curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C é côncava para cima no intervalo do comprimento 2δ. Isso é verdadeiro na direção de cada vetor $\mathbf{u}$, portanto se restringirmos (x, y) para ficar em B, o gráfico de f fica acima de seu plano horizontal tangente em P. Assim, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local.

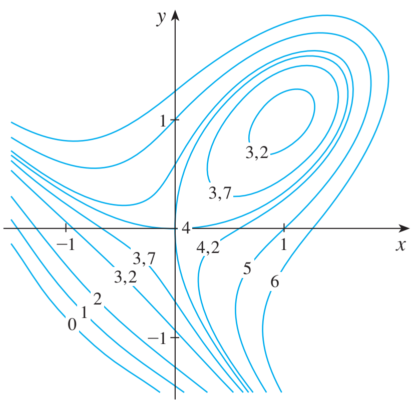
14.7 Exercícios

1. Suponha que (1, 1) seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?
   (a) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 1$, $f_{yy}(1, 1) = 2$
   (b) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $f_{xy}(1, 1) = 3$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

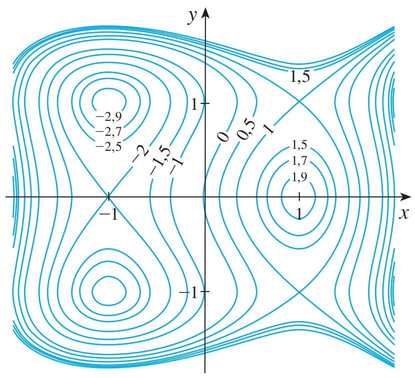
2. Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?
   (a) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 1$
   (b) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $g_{xy}(0, 2) = 2$, $g_{yy}(0, 2) = -8$
   (c) $g_{xx}(0, 2) = 4$, $g_{xy}(0, 2) = 6$, $g_{yy}(0, 2) = 9$

3–4 Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5–18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa de computador para desenhar em três dimensões, trace o gráfico da função usando um ponto de vista e domínio convenientes para mostrar os aspectos importantes da função.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = (x - y)(1 - xy)$

8. $f(x, y) = xe^{-2x^2-2y^2}$

9. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$

10. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ em um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tem valores máximos em $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ e valores máximos em $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

21–24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para determinar esses valores de modo preciso.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4, 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25–28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico, se houver.

25. $f(x, y) = x^4 + y^4 + 4x^2y + 2y$

26. $f(x, y) = y^6 - 2y^4 + x^2 - y^2 + y$

27. $f(x, y) = x^4 + y^3 - 3x^2 + y^2 + x - 2y + 1$

28. $f(x, y) = 20e^{-x^2-y^2} \operatorname{sen} 3x \cos 3y, \quad |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1$

29–36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

29. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, D é a região triangular fechada com vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$ e $(0, -2)$

30. $f(x, y) = x + y - xy$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(4, 0)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 0, -3)$ e o plano $x + y + z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - 2y + 3z = 6$ que está mais próximo do ponto $(0, 1, 1)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1.000 cm³ que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm².

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32.000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m^2 por dia; as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m^2 por dia; o piso, a uma taxa de 1 unidade/m^2 por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m^2 por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m^3.

(a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.

(b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)

(c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?

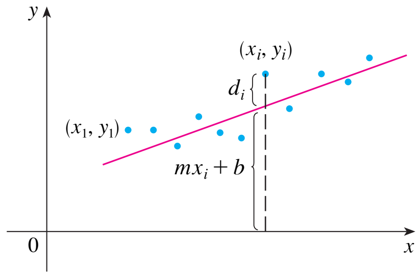
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L, qual é o maior volume possível?

54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e de b. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "ajuste" os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Dessa forma, a reta é determinada ao resolver essas duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2, no Volume I, para mais discussões e aplicações do método dos quadrados mínimos.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e que corta o menor volume do primeiro octante.

PROJETO APLICADO — PROJETO DE UMA CAÇAMBA

Para esse projeto, inicialmente localizamos uma caçamba de entulho retangular para estudar sua forma e construção. Tentaremos então determinar as dimensões de um recipiente de forma similar e que minimize o custo de construção.

1. Primeiro localize uma caçamba de entulho. Estude e descreva cuidadosamente todos os detalhes de sua construção e determine seu volume. Inclua um esboço do recipiente.
2. Mantendo a mesma forma geral e o método de construção, determine as dimensões que tal recipiente deveria ter para minimizar o custo de construção. Utilize as seguintes hipóteses para sua análise:
   - Os lados, a parte de trás e a da frente devem ser feitos com folhas de aço de tipo 12 (2,657 mm de espessura), que custam \$ 8,00 por metro quadrado (incluindo quaisquer cortes ou dobras necessários).
   - A base deve ser feita de uma folha de aço de tipo 10 (3,416 mm de espessura), que custa \$ 10,00 por metro quadrado.
   - As tampas custam aproximadamente \$ 50,00 cada, independentemente das dimensões.
   - A soldagem custa aproximadamente \$ 0,60 por metro para material e serviço combinados.

   Dê sua justificativa para qualquer hipótese adicional ou simplificação feita dos detalhes de construção.
3. Descreva como qualquer hipótese ou simplificação feita pode afetar o resultado.
4. Se você fosse contratado como consultor nessa pesquisa, quais seriam suas conclusões? Você recomendaria a alteração do projeto da caçamba? Se sim, descreva a economia resultante.

O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 questiona o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

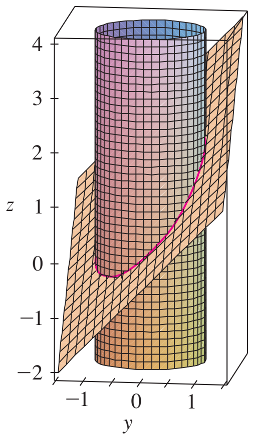


FIGURA 6

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$1 = \lambda + 2x\mu \tag{17}$$

$$2 = -\lambda + 2y\mu \tag{18}$$

$$3 = \lambda \tag{19}$$

$$x - y + z = 1 \tag{20}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{21}$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de $\boxed{19}$ em $\boxed{17}$], obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, $\boxed{18}$ dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em $\boxed{21}$, temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

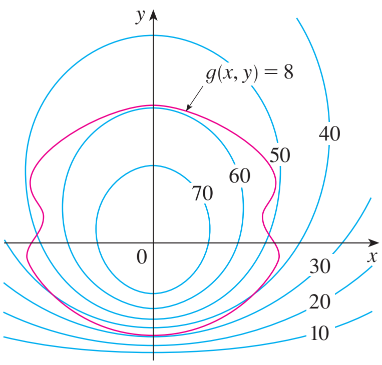
e $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, e, de $\boxed{20}$, $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.

14.8 Exercícios

1. Na figura estão um mapa de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de c dessas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3–14 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$

4. $f(x, y) = 3x + y$; $x^2 + y^2 = 10$

5. $f(x, y) = y^2 - x^2$; $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$

6. $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

7. $f(x, y, z) = 2x + 2y + z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x + y + z = 12$

9. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15–18 Determine os valores extremos de f sujeita a ambas as restrições.

15. $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy$; $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

18. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x - y = 1$, $y^2 - z^2 = 1$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

19–21 Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 4y, \quad x^2 + y^2 \leqslant 9$

20. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

21. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

22. Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) $f(25,0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?
(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de f.
(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.
(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

23. Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).
(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$ mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ.
(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

SCA **24.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita à restrição $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.
(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

25. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ segue a partir de determinadas suposições econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \quad \text{e} \quad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

26. Em relação ao Problema 25, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Quais valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

27. Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.

28. Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero.
Dica: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.

29–41 Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

29. Exercício 39 **30.** Exercício 40
31. Exercício 41 **32.** Exercício 42
33. Exercício 43 **34.** Exercício 44
35. Exercício 45 **36.** Exercício 46
37. Exercício 47 **38.** Exercício 48
39. Exercício 49 **40.** Exercício 50
41. Exercício 53

42. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm² e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

43. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

44. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.
(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.
(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

SCA **45–46** Ache os valores de máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

45. $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

46. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

47. (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

sendo que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.
(b) Deduza do item (a) que se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

48. (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.
(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \quad \text{e} \quad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

para mostrar que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\,\sqrt{\sum b_j^2}$$

para todos os números $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.