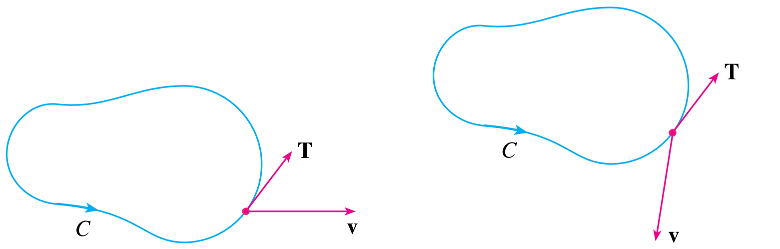


FIGURA 5 (a) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} > 0$, circulação positiva (b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} < 0$, circulação negativa

Seja agora $P_0(x_0, y_0, z_0)$ um ponto do fluido e seja S_a um pequeno círculo com raio a e centro P_0. Então $(\text{rot } \mathbf{F})(P) \approx (\text{rot } \mathbf{F})(P_0)$ para todos os pontos P em S_a porque rot $\mathbf{F}$ é contínuo. Então, pelo Teorema de Stokes, temos a seguinte aproximação do fluxo em torno do círculo fronteira C_a:

$$\int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

$$\approx \iint_{S_a} \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \, dS = \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) \pi a^2$$

Essa aproximação se torna melhor quando $a \to 0$ e temos

$$\boxed{4} \qquad \text{rot } \mathbf{v}(P_0) \cdot \mathbf{n}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_{C_a} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

Imagine uma roda pequena formada por pás colocadas em um fluido em um ponto P, como na Figura 6; essa roda vai girar mais rapidamente quando seu eixo for paralelo a rot $\mathbf{v}$.

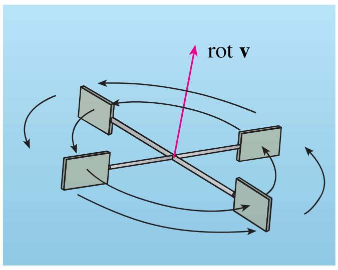


FIGURA 6

A Equação 4 fornece a relação entre o rotacional e a circulação. Ela mostra que rot $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ é uma medida do efeito de rotação do fluido em torno do eixo $\mathbf{n}$. O efeito de ondulação é maior sobre o eixo paralelo a rot $\mathbf{v}$.

Finalmente, mencionamos que o Teorema de Stokes pode ser usado para demonstrar o Teorema 16.5.4 (que afirma que, se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ sobre $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{F}$ é conservativo). Do nosso trabalho anterior (16.3.3 e 16.3.4 Teoremas), sabemos que $\mathbf{F}$ é conservativo se $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para cada caminho fechado C. Dado C, suponha que possamos encontrar uma superfície orientável S cuja fronteira é C. (Isso pode ser feito, mas a demonstração exige técnicas avançadas.) Em seguida, o teorema de Stokes fornece

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Uma curva que não seja simples pode ser quebrada em diversas curvas simples e as integrais ao longo dessas curvas simples são todas 0. Somando essas integrais, obtemos $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C.

16.8 Exercícios

1. Um hemisfério H e uma porção P de um paraboloide são mostrados. Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$ cujas componentes tenham derivadas parciais contínuas. Explique por quê
$$\iint_H \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_P \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

2–6 Use o Teorema de Stokes para calcular $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2y \cos z \, \mathbf{i} + e^x \text{ sen } z \, \mathbf{j} + xe^y \, \mathbf{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geqslant 0$, de orientação ascendente

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z^2 \, \mathbf{i} + y^2 z^2 \, \mathbf{j} + xyz \, \mathbf{k}$, S é a parte do paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, com orientação ascendente

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{tg}^{-1} (x^2 yz^2) \, \mathbf{i} + x^2 y \, \mathbf{j} + x^2 z^2 \, \mathbf{k}$, S é o cone $x = \sqrt{y^2 + z^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, orientado na direção do eixo positivo x

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz \, \mathbf{i} + xy \, \mathbf{j} + x^2 yz \, \mathbf{k}$, S é formada pelo topo e pelos quatro lados (mas não pelo fundo) do cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, com orientação para fora.

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy} \, \mathbf{i} + e^{xz} \, \mathbf{j} + x^2 z \, \mathbf{k}$, S é a metade do elipsoide

$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ que se situa à direita do plano xz orientado na direção do eixo positivo y

7–10 Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Em cada caso, C é orientado no sentido anti-horário quando visto de cima.

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2)\,\mathbf{i} + (y + z^2)\,\mathbf{j} + (z + x^2)\,\mathbf{k}$, C é o triângulo com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + (x + yz)\,\mathbf{j} + (xy - \sqrt{z})\,\mathbf{k}$, C é o limite da parte do plano $3x + 2y + z = 1$ no primeiro octante

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + 2xz\,\mathbf{j} + e^{xy}\,\mathbf{k}$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 2z\,\mathbf{j} + 3y\,\mathbf{k}$, C é a curva da interseção do plano $x + z = 5$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 9$

11. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 z\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$$

e C é a curva da intersecção do plano $x + y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do plano e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

12. (a) Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 y\,\mathbf{i} + \frac{1}{3}x^3\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$ e C é a curva da intersecção do paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ e o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com orientação no sentido anti-horário quando visto de cima.

(b) Trace o gráfico do paraboloide hiperbólico e do cilindro com domínios escolhidos de forma a ver a curva C e a superfície que você usou na parte (a).

(c) Determine equações paramétricas para C e use-as para traçar o gráfico de C.

13–15 Verifique que o Teorema de Stokes é verdadeiro para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície S.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - 2\,\mathbf{k}$,
S é o cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 4$, com orientação descendente

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = -2yz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 3x\,\mathbf{k}$,
S é a parte do paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z = 1$, com orientação ascendente

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + z\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $y \geqslant 0$, orientado na direção do eixo positivo y

16. Seja C uma curva fechada simples suave que se situa no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z\,dx - 2x\,dy + 3y\,dz$$

depende apenas da área da região englobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

17. Uma partícula se move ao longo de segmentos de reta da origem aos pontos $(1, 0, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(0, 2, 1)$, e de volta para a origem sob a influência do campo de forças

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j} + 4y^2\,\mathbf{k}$$

Encontre o trabalho realizado.

18. Calcule

$$\int_C (y + \operatorname{sen} x)\,dx + (z^2 + \cos y)\,dy + x^3\,dz$$

onde C é a curva curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. [*Dica*: observe que C está na superfície $z = 2xy$.]

19. Se S é uma esfera e $\mathbf{F}$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Stokes, mostre que $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

20. Suponha que S e C satisfaçam as hipóteses do Teorema de Stokes e f e g tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Use os Exercícios 24 e 26 da Seção 16.5 para demonstrar o seguinte:

(a) $\int_C (f\,\nabla g) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}$

(b) $\int_C (f\,\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

(c) $\int_C (f\,\nabla g + g\,\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = 0$

PROJETO APLICADO — TRÊS HOMENS E DOIS TEOREMAS

A ilustração mostra um vitral da Universidade de Cambridge em homenagem a George Green.

Cortesia de Masters and Fellows of Gonville e Caius College, University of Cambridge, Inglaterra

Apesar de dois dos mais importantes teoremas em cálculo vetorial terem seus nomes em homenagem a George Green e George Stokes, um terceiro homem, William Thomson (também conhecido como lorde Kelvin), teve um papel muito importante na formulação, disseminação e aplicação dos dois resultados. Os três homens estavam interessados em como usar os dois teoremas para explicar e predizer fenômenos físicos em eletricidade e magnetismo e em escoamento de fluidos.

Escreva um trabalho sobre as origens históricas dos Teoremas de Green e de Stokes. Explique as semelhanças e as relações entre os teoremas. Discuta o papel que Green, Thomson e Stokes tiveram na descoberta desses teoremas e em torná-los conhecidos. Mostre como esses teoremas apareceram em pesquisas em eletricidade e magnetismo e foram depois usados no estudo de diversos outros problemas físicos.

O dicionário editado por Gillispie [2] é uma boa fonte tanto para dados biográficos como para informações científicas. O livro de Hutchinson [5] trata da vida de Stokes e o livro de Thomson [8] é uma biografia de lorde Kelvin. Os artigos de Grattan-Guinness [3] e Gray [4] e o livro de Cannell [1] fornecem uma descrição da vida extraordinária e dos trabalhos de Green. Informações adicionais históricas e matemáticas podem ser encontradas nos livros de Katz [6] e Kline [7].

1. D. M. Cannell. *George Green, Matemático e Físico 1793–1841: O fundo para sua vida e obra* (Filadélfia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

2. C. C. Gillispie, (Ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 1974. Veja o artigo em Green por P. J. Wallis no Volume XV e os artigos no Thomson por Jed Buchwald e em Stokes por E. M. Parkinson no Volume XIII.

SOLUÇÃO A dificuldade é que não temos uma equação explícita para S_2 porque S_2 é *qualquer* superfície fechada envolvendo a origem. O exemplo mais simples de tal superfície seria uma esfera. Seja então S_1 uma pequena esfera de raio a e centrada à origem. Você pode verificar que div $\mathbf{E} = 0$. (Veja a Exercício 23.) Portanto, a Equação 7 dá

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{E}\, dV = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

O ponto importante nesse cálculo é que podemos calcular a integral de superfície sobre S_1 porque S_1 é uma esfera. O vetor normal em $\mathbf{x}$ é $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Portanto,

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right) = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^4}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \frac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^2} = \frac{\varepsilon Q}{a^2}$$

uma vez que a equação de S_1 é $|\mathbf{x}| = a$. Assim, temos

$$\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}\iint_{S_1} dS = \frac{\varepsilon Q}{a^2}A(S_1) = \frac{\varepsilon Q}{a^2}4\pi a^2 = 4\pi\varepsilon Q$$

Isso mostra que o fluxo elétrico de $\mathbf{E}$ é $4\pi\varepsilon Q$ através de *qualquer* superfície fechada S_2 que contenha a origem. [Esse é um caso especial da Lei de Gauss (Equação 16.7.11) para uma única carga. A relação entre ε e ε_0 é $\varepsilon = 1/(4\pi\varepsilon_0)$.]

Outra aplicação do Teorema do Divergente aparece no escoamento de fluidos. Seja $\mathbf{v}(x, y, z)$ o campo de velocidade de um fluido com densidade constante ρ. Então $\mathbf{F} = \rho\mathbf{v}$ é a taxa de vazão do fluido por unidade de área. Se $P_0(x_0, y_0, z_0)$ é um ponto no fluido e B_a é uma bola com centro em P_0 e raio muito pequeno a, então div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ para todos os pontos em B_a uma vez que div $\mathbf{F}$ é contínuo. Aproximamos o fluxo sobre a fronteira esférica S_a como segue:

$$\iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV \approx \iiint_{B_a} \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0)\, dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) V(B_a)$$

Essa aproximação se torna melhor à medida que $a \to 0$ e sugere que

8
$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P_0) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{V(B_a)} \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

A Equação 8 diz que div $\mathbf{F}(P_0)$ é a taxa líquida de fluxo para o exterior por unidade de volume em P_0. (Esta é a razão para o nome *divergente*). Se div $\mathbf{F}(P) > 0$, o fluxo líquido é exteriormente perto de P e P é chamado uma **fonte**. Se div $\mathbf{F}(P) < 0$, o escoamento total perto de P é para dentro e P é denominado **sorvedouro**.

Para o campo vetorial da Figura 4, parece que os vetores que terminam próximo de P_1 são menores que os vetores que iniciam perto do mesmo ponto P_1. Então, o fluxo total é para fora perto de P_1, assim, div $\mathbf{F}(P_1) > 0$ e P_1 é uma fonte. Por outro lado, perto de P_2, os vetores que chegam são maiores que os que saem. Aqui o fluxo total é para dentro, assim div $\mathbf{F}(P_2) < 0$ e P_2 é um sorvedouro. Podemos usar a fórmula para $\mathbf{F}$ para confirmar essa impressão. Uma vez que $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$, temos div $\mathbf{F} = 2x + 2y$, que é positivo quando $y > -x$. Assim, os pontos acima da linha $y = -x$ são fontes e os que estão abaixo são sorvedouros.

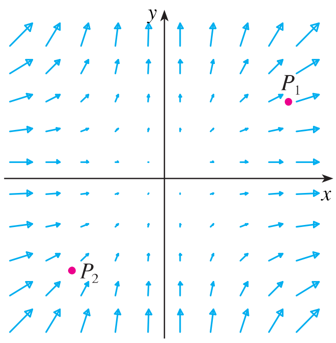


FIGURA 4
Campo vetorial $\mathbf{F} = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$

16.9 Exercícios

1–4 Verifique se o Teorema do Divergente é verdadeiro para o campo vetorial $\mathbf{F}$ na região E.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + 2xz\,\mathbf{k}$, E é o cubo limitado pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, E é o sólido delimitado pelo paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ e pelo plano xy

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle z, y, x \rangle$,
E é a bola sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle x^2, -y, z \rangle$,
E é o cilindro sólido $y^2 + z^2 \leqslant 9$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

5–15 Use o Teorema do Divergente para calcular a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$; ou seja, calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ através de S.

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + xy^2z^3\,\mathbf{j} - ye^z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície da caixa delimitada pelos planos coordenados e pelos planos $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$,
S é a superfície da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ e $z = c$, onde a, b e c são números positivos

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2\,\mathbf{i} + xe^z\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$ e os planos $x = -1$ e $x = 2$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3 + y^3)\,\mathbf{i} + (y^3 + z^3)\,\mathbf{j} + (z^3 + x^3)\,\mathbf{k}$,
S é a esfera com origem no centro e raio 2

9. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + x \cos y\,\mathbf{j} - xz \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S é a "esfera gorda" $x^8 + y^8 + z^8 = 8$

10. $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - zx\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

onde a, b e c são números positivos

11. $\mathbf{F}(x, y, z) = (\cos z + xy^2)\,\mathbf{i} + xe^{-z}\,\mathbf{j} + (\operatorname{sen} y + x^2z)\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^4\,\mathbf{i} - x^3z^2\,\mathbf{j} + 4xy^2z\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = x + 2$ e $z = 0$

13. $\mathbf{F} = \mathbf{r}\,|\mathbf{r}|$, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S consiste no hemisfério $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ no plano xy

14. $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^2\,\mathbf{r}$, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$,
S é a esfera com raio R e origem no centro

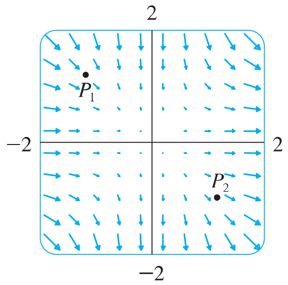
SCA **15.** $\mathbf{F}(x, y, z) = e^y \operatorname{tg} z\,\mathbf{i} + y\sqrt{3 - x^2}\,\mathbf{j} + x \operatorname{sen} y\,\mathbf{k}$,
S é a superfície do sólido que está acima do plano xy e abaixo da superfície $z = 2 - x^4 - y^4$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **16.** Use um sistema de computação algébrica para traçar o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} x \cos^2 y\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 y \cos^4 z\,\mathbf{j} + \operatorname{sen}^5 z \cos^6 x\,\mathbf{k}$ no cubo obtido cortando o primeiro octante pelos planos $x = \pi/2$, $y = \pi/2$ e $z = \pi/2$. Em seguida, calcule o fluxo através da superfície do cubo.

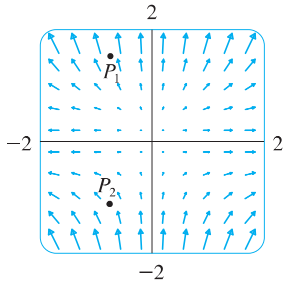
17. Use o Teorema do Divergente para calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde
$\mathbf{F}(x, y, z) = z^2x\,\mathbf{i} + (\tfrac{1}{3}y^3 + \operatorname{tg} z)\,\mathbf{j} + (x^2z + y^2)\,\mathbf{k}$
e S é a metade superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [*Dica*: Note que S não é uma superfície fechada. Calcule primeiro as integrais sobre S_1 e S_2, onde S_1 é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$, orientado para baixo, e $S_2 = S \cup S_1$.]

18. Seja $\mathbf{F}(x, y, z) = z \operatorname{tg}^{-1}(y^2)\,\mathbf{i} + z^3 \ln(x^2 + 1)\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. Determine o fluxo de $\mathbf{F}$ através da parte do paraboloide $x^2 + y^2 + z = 2$ que está acima do plano $z = 1$ e tem orientação descendente.

19. Um campo vetorial $\mathbf{F}$ é mostrado. Use a interpretação do Divergente deduzida nesta seção para determinar se div $\mathbf{F}$ é positivo ou negativo em P_1 e em P_2.



20. (a) Os pontos P_1 e P_2 são fontes ou sorvedouros no campo vetorial $\mathbf{F}$ mostrado na figura? Dê uma explicação baseada exclusivamente na figura.
(b) Dado que $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, y^2 \rangle$, use a definição de divergente para verificar sua resposta da parte (a).



SCA **21–22** Trace o campo do vetor e adivinhe onde div $\mathbf{F} > 0$ e onde div $\mathbf{F} < 0$. Então calcule div $\mathbf{F}$ para verificar o seu palpite.

21. $\mathbf{F}(x, y) = \langle xy, x + y^2 \rangle$ **22.** $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2, y^2 \rangle$

23. Verifique se div $\mathbf{E} = 0$ para o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \dfrac{\varepsilon Q}{|\mathbf{x}|^3}\,\mathbf{x}$.

24. Use o Teorema do Divergente para avaliar

$$\iint_S (2x + 2y + z^2)\,dS$$

onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

25–30 Demonstre cada identidade, supondo que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

25. $\iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\,dS = 0$, onde $\mathbf{a}$ é um vetor constante

26. $V(E) = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, onde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

27. $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

28. $\iint_S D_{\mathbf{n}} f\,dS = \iiint_E \nabla^2 f\,dV$

29. $\iint_S (f\nabla g) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dV$

30. $\iint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\,dS = \iiint_E (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dV$

31. Suponha que S e E satisfaçam as condições do Teorema do Divergente e que f seja uma função escalar com derivadas parciais contínuas. Demonstre que

$$\iint_S f\mathbf{n}\,dS = \iiint_E \nabla f\,dV$$

Estas integrais de superfície e triplos de funções vetoriais são vetores definidos por meio da integração de cada função do componente. [*Dica*: Comece por aplicar o Teorema do Divergente para $\mathbf{F} = f\mathbf{c}$, onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante arbitrário.]