## 14.3 Exercícios

**1.** A temperatura $T$ (em °C)de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude $x$, da latitude $y$ e do tempo $t$, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.

(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulu tem longitude de 158º W e latitude de 21º N. Suponha que às 9 horas em 1º de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a Oeste e a Sul o ar esteja quente e a Norte e Leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivos ou negativos? Explique.

**2.** No início desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde $I$ era o humidex; $T$, a temperatura; e $H$, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

**3.** O índice de sensação térmica $W$ é a temperatura sentida quando a temperatura real é $T$ e a velocidade do vento, $v$. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C)

| $T$ \ $v$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −10 | −18 | −20 | −21 | −22 | −23 | −23 |
| −15 | −24 | −26 | −27 | −29 | −30 | −30 |
| −20 | −30 | −33 | −34 | −35 | −36 | −37 |
| −25 | −37 | −39 | −41 | −42 | −43 | −44 |

(a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

**4.** A altura $h$ de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento $v$ e do tempo $t$ durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)

| $v$ \ $t$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,6 | 0,6 |
| 30 | 1,2 | 1,3 | 1,5 | 1,5 | 1,5 | 1,6 | 1,6 |
| 40 | 1,5 | 2,2 | 2,4 | 2,5 | 2,7 | 2,8 | 2,8 |
| 60 | 2,8 | 4,0 | 4,9 | 5,2 | 5,5 | 5,8 | 5,9 |
| 80 | 4,3 | 6,4 | 7,7 | 8,6 | 9,5 | 10,1 | 10,2 |
| 100 | 5,8 | 8,9 | 11,0 | 12,2 | 13,8 | 14,7 | 15,3 |
| 120 | 7,4 | 11,3 | 14,4 | 16,6 | 19,0 | 20,5 | 21,1 |

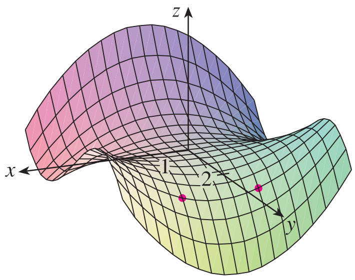
(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?

(b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

**5–8** Determine os sinais das derivadas parciais da função $f$ cujo gráfico está mostrado.



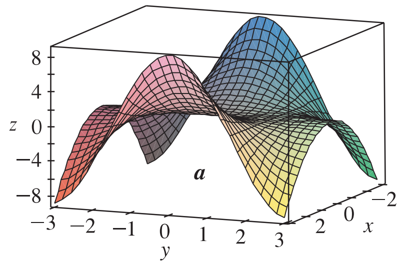

**5.** (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

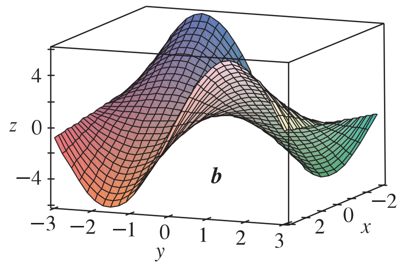
**6.** (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

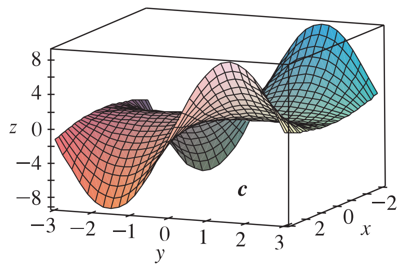
**7.** (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$

**8.** (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

**9.** As seguintes superfícies, rotuladas $a$, $b$ e $c$, são gráficos de uma função $f$ e de suas derivadas parciais $f_x$ e $f_y$. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



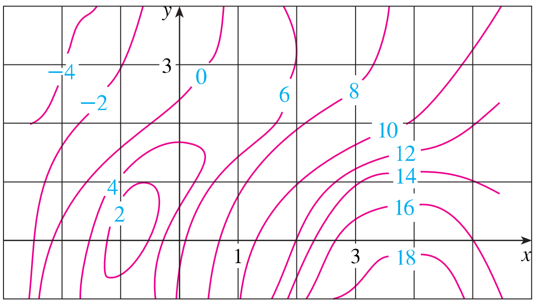




É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**10.** Um mapa de contorno de uma função $f$ é apresentado. Utilize-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.




**11.** Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

**12.** Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

**13–14** Determine $f_x$ e $f_y$ e faça os gráficos $f$, $f_x$ e $f_y$ com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

**13.** $f(x, y) = x^2y^3$ **14.** $f(x, y) = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}$

**15–40** Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

**15.** $f(x, y) = y^5 - 3xy$ **16.** $f(x, y) = x^4y^3 + 8x^2y$

**17.** $f(x, t) = e^{-t}\cos \pi x$ **18.** $f(x, t) = \sqrt{x}\ln t$

**19.** $z = (2x + 3y)^{10}$ **20.** $z = \operatorname{tg} xy$

**21.** $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$ **22.** $f(x, y) = \dfrac{x}{(x + y)^2}$

**23.** $f(x, y) = \dfrac{ax + by}{cx + dy}$ **24.** $w = \dfrac{e^v}{u + v^2}$

**25.** $g(u, v) = (u^2v - v^3)^5$ **26.** $f(x, t) = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{t}\right)$

**27.** $w = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$ **28.** $f(x, y) = x^y$

**29.** $F(x, y) = \int_y^x \cos(e^t)\,dt$ **30.** $F(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \sqrt{t^3 + 1}\,dt$

**31.** $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ **32.** $f(x, y, z) = x\,\operatorname{sen}(y - z)$

**33.** $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **34.** $w = ze^{xyz}$

**35.** $u = xy\,\operatorname{sen}^{-1}(yz)$ **36.** $u = x^{y/z}$

**37.** $h(x, y, z, t) = x^2y\cos(z/t)$

**38.** $\phi(x, y, z, t) = \dfrac{\alpha x + \beta y^2}{\gamma z + \delta y^2}$

**39.** $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

**40.** $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

**41–44** Determine as derivadas parciais indicadas.

**41.** $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

**42.** $f(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$; $f_x(2, 3)$

**43.** $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

**44.** $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

**45–46** Use a definição de derivadas parciais como limites $\boxed{4}$ para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

**45.** $f(x, y) = xy^2 - x^3y$ **46.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

**47–50** Use a derivação implícita para encontrar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

**47.** $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ **48.** $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

**49.** $e^z = xyz$ **50.** $yz + x\ln y = z^2$

**51–52** Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

**51.** (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

**52.** (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

**53–58** Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

**53.** $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ **54.** $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

**55.** $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ **56.** $v = \dfrac{xy}{x - y}$

**57.** $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$ **58.** $v = e^{xe^y}$

**59–62** Verifique se a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

**59.** $u = x^4y^3 - y^4$ **60.** $u = e^{xy}\operatorname{sen} y$

**61.** $u = \cos(x^2y)$ **62.** $u = \ln(x + 2y)$

**63–70** Determine a(s) derivada(s) parcial(is) indicada(s).

**63.** $f(x, y) = x^4y^2 - x^3y$; $f_{xxx}$, $f_{xyx}$

**64.** $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 5y)$; $f_{yxy}$

**65.** $f(x, y, z) = e^{xyz^2}$; $f_{xyz}$

**66.** $g(r, s, t) = e^r\operatorname{sen}(st)$; $g_{rst}$

**67.** $u = e^{r\theta}\operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$

**68.** $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

**69.** $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$

**70.** $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z^3}$

**71.** Se $f(x, y, z) = xy^2z^3 + \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{z}\right)$, determine $f_{xzy}$. [*Dica*: Qual ordem de diferenciação é a mais fácil?]

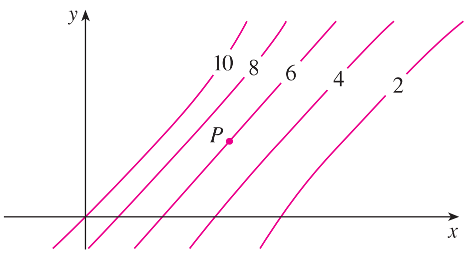
**72.** Se $g(x, y, z) = \sqrt{1 + xz} + \sqrt{1 - xy}$, determine $g_{xyz}$. [*Dica*: Use uma ordem de diferenciação diferente para cada termo.]

**73.** Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

| $x$ \ $y$ | 1,8 | 2,0 | 2,2 |
|---|---|---|---|
| 2,5 | 12,5 | 10,2 | 9,3 |
| 3,0 | 18,1 | 17,5 | 15,9 |
| 3,5 | 20,0 | 22,4 | 26,1 |

**74.** As curvas de nível são mostradas para uma função $f$. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto $P$.

(a) $f_x$ (b) $f_y$ (c) $f_{xx}$
(d) $f_{xy}$ (e) $f_{yy}$




**75.** Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2k^2t}$ sen $kx$ é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

**76.** Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
(f) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

**77.** Verifique se a função $u$ $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

**78.** Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.

(a) $u = \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

**79.** Se $f$ e $g$ são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 78.

**80.** Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

**81.** Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

**82.** A temperatura em um ponto $(x, y)$ de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde $T$ é medido em ºC e $x$, $y$ em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(2, 1)$ em (a) a direção $x$ e (b) a direção $y$.

**83.** A resistência total $R$ produzida por três condutores com resistência $R_1$, $R_2$ e $R_3$ conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

**84.** Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

**85.** Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 6.)

**86.** Cobb e Douglas usaram a equação $P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$ para o modelo de economia norte-americana de 1899 a 1922, onde $L$ é a quantidade de trabalho e $K$, a quantidade de capital. (Veja o Exemplo 3 na Seção 14.1.)

(a) Calcule $P_L$ e $P_K$.
(b) Encontre a produtividade marginal de trabalho e a produtividade marginal de capital no ano de 1920, quando $L = 194$ e $K = 407$ (em comparação com os valores atribuídos $L = 100$ e $K = 100$ em 1899). Interprete os resultados.
(c) No ano de 1920, o que trouxe mais benefícios para a produção: um aumento no capital de investimento ou um aumento nos gastos com mão de obra?

**87.** A *equação de van der Waals* para $n$ mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde $P$ é a pressão, $V$ é o volume e $T$ é a temperatura do gás. A constante $R$ é a constante universal de gás e $a$ e $b$ são constantes positivas que são características de um gás em particular. Calcule $\partial T/\partial P$ e $\partial P/\partial V$.

**88.** A lei dos gases para uma massa fixa $m$ de um gás ideal à temperatura absoluta $T$, pressão $P$ e volume $V$ é $PV = mRT$, onde $R$ é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

**89.** Para o gás ideal do Exercício 88, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

**90.** O índice de sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde $T$ é a temperatura (ºC) e $v$, a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ ºC e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente $W$ caia se a temperatura real decrescer em 1ºC? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

**91.** A energia cinética de um corpo com massa $m$ e velocidade $v$ é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

**92.** Se $a$, $b$ e $c$ são os lados de um triângulo e $A$, $B$ e $C$ são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

**93.** Disseram-lhe que existe uma função $f$ cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$. Você deve acreditar nisso?

**94.** O paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do paraboloide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

**95.** O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

**96.** No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura $T$ no instante $t$ (medido em dias) a uma profundidade $x$ (medida em metros) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e $\lambda$ é uma constante positiva.
(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?
(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?
(c) Mostre que $T$ satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante $k$.
(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.
(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\operatorname{sen}(\omega t - \lambda x)$?

**97.** Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de $f$ forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

**98.** (a) Quantas derivadas parciais de $n$-ésima ordem têm uma função de duas variáveis?
(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?
(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

**99.** (a) Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2} e^{\operatorname{sen}(x^2 y)}$, determine $f_x(1, 0)$.
[*Dica*: Em vez de determinar $f_x(x, y)$ primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

**100.** (a) Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

**101.** (a) . Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de $f$.
(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.
(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.
(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.
(e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de $f_{xy}$ e $f_{yx}$ para ilustrar sua resposta.

## 14.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I.) Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

### Planos Tangentes

Suponha que uma superfície $S$ tenha a equação $z = f(x, y)$, onde $f$ tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em $S$. Como na seção anterior, sejam $C_1$ e $C_2$ as curvas obtidas pela intersecção dos planos verticais $y = y_0$ e $x = x_0$ com a superfície $S$. Então o ponto $P$ fica em $C_1$ e $C_2$. Sejam $T_1$ e $T_2$ as retas tangentes à curva $C_1$ e $C_2$ no ponto $P$. Então o **plano tangente** à superfície $S$ no ponto $P$ é definido como o plano que contém as retas da tangente $T_1$ e $T_2$ (veja a Figura 1.)

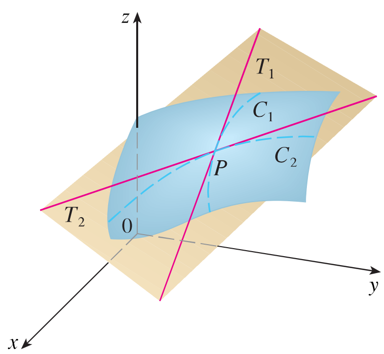



**FIGURA 1**
O plano tangente contém as retas tangentes $T_1$ e $T_2$.

Veremos na Seção 14.6 que, se $C$ é outra curva qualquer que esteja contida na superfície $S$ e que passe pelo ponto $P$, então sua reta tangente no ponto $P$ também pertence ao plano tangente. Portanto, podemos pensar no plano tangente a $S$ em $P$ como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em $S$ que passam pelo ponto $P$. O plano tangente em $P$ é o plano que melhor aproxima a superfície $S$ perto do ponto $P$.

Sabemos da Equação 12.5.7 que qualquer plano passando pelo ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ tem equação da forma

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Dividindo essa equação por $C$ e tomando $a = -A/C$ e $b = -B/C$, podemos escrevê-la como

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leqslant 0{,}2$, $|\Delta y| \leqslant 0{,}2$ e $|\Delta z| \leqslant 0{,}2$. Para estimarmos o maior erro no volume, utilizamos, portanto, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ junto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1.980 cm³ no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa.

## 14.4 Exercícios

**1–6** Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

**1.** $z = 3y^2 - 2x^2 + x$, $(2, -1, -3)$

**2.** $z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7$, $(2, -2, 12)$

**3.** $z = \sqrt{xy}$, $(1, 1, 1)$

**4.** $z = xe^{xy}$, $(2, 0, 2)$

**5.** $z = x \operatorname{sen}(x + y)$, $(-1, 1, 0)$

**6.** $z = \ln(x - 2y)$, $(3, 1, 0)$

**7–8** Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

**7.** $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$

**8.** $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

SCA **9–10** Desenhe o gráfico de $f$ e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

**9.** $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}$, $(1, 1, 0)$ $(1, 1, 0)$

**10.** $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right)$, $(1, 1, 3e^{-0{,}1})$

**11–16** Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

**11.** $f(x, y) = 1 + x \ln(xy - 5)$, $(2, 3)$

**12.** $f(x, y) = x^3y^4$, $(1, 1)$

**13.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$, $(2, 1)$

**14.** $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$

**15.** $f(x, y) = e^{-xy} \cos y$, $(\pi, 0)$

**16.** $f(x, y) = y + \operatorname{sen}(x/y)$, $(0, 3)$

**17–18** Verifique a aproximação linear em (0, 0).

**17.** $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$

**18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

**19.** Dado que $f$ é uma função diferenciável $f(2, 5) = 6$, $f_x(2, 5) = 1$ e $f_y(2, 5) = -1$, use uma aproximação linear para estimar $f(2{,}2;\ 4{,}9)$.

**20.** Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = 1 - xy \cos \pi y$ em (1, 1) e use-a para aproximar o número $f(1{,}02;\ 0{,}97)$. Ilustre, traçando o gráfico de $f$ e do plano tangente.

**21.** Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em (3, 2, 6) e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

**22.** A altura $h$ de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento $v$ e do tempo $t$ durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela. Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando $v$ está próximo de 80 km/h e $t$ está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Duração (horas)

| Velocidade do vento (km/h) $v$ \ $t$ | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 1,5 | 2,2 | 2,4 | 2,5 | 2,7 | 2,8 | 2,8 |
| 60 | 2,8 | 4,0 | 4,9 | 5,2 | 5,5 | 5,8 | 5,9 |
| 80 | 4,3 | 6,4 | 7,7 | 8,6 | 9,5 | 10,1 | 10,2 |
| 100 | 5,8 | 8,9 | 11,0 | 12,2 | 13,8 | 14,7 | 15,3 |
| 120 | 7,4 | 11,3 | 14,4 | 16,6 | 19,0 | 20,5 | 21,1 |

**23.** Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 ºC e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 ºC e a umidade relativa, 63%.

**24.** O índice de sensação térmica $W$ é a temperatura sentida quando a temperatura real é $T$ e a velocidade do vento, $v$. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1. Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando $T$ estiver a −15 ºC e $v$ estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a −17 ºC e a velocidade do vento for de 55 km/h.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

**1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com