EXEMPLO 4 Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

SOLUÇÃO O sólido está acima do disco D cujo limite tem equação $x^2 + y^2 = 2x$ ou, após completar os quadrados,

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

(Veja as Figuras 9 e 10.)

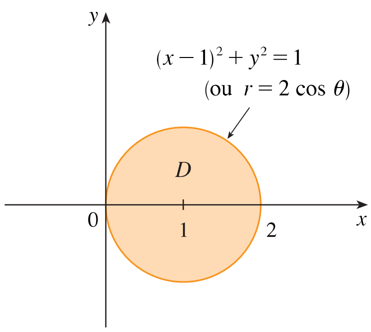


FIGURA 9

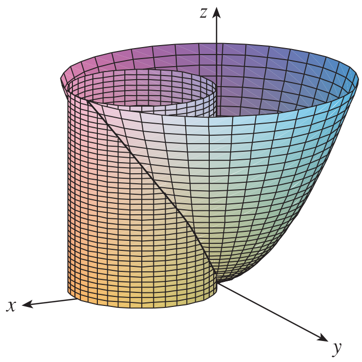


FIGURA 10

Em coordenadas polares, temos $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$, assim, o limite circular fica $r^2 = 2r\cos\theta$ ou $r = 2\cos\theta$. Portanto, o disco D é dado por

$$D = \{(r, \theta) \mid -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\ 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\}$$

e, da Fórmula 3, temos

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

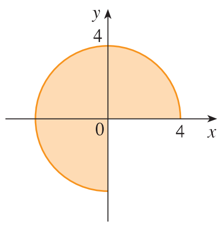
$$= 2\int_0^{\pi/2} \left[1 + 2\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta$$

$$= 2\left[\tfrac{3}{2}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

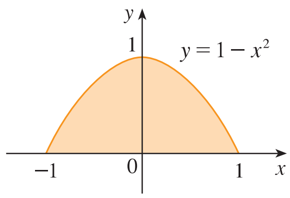
15.4 Exercícios

1–4 Uma região R é mostrada. Decida se você deve usar coordenadas polares ou retangulares, e escreva $\iint_R f(x, y)\, dA$ como uma integral iterada, onde f é uma função qualquer contínua em R.

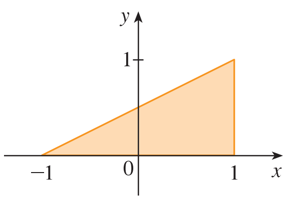
1.



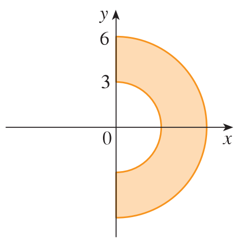
2.



3.



4.



5–6 Esboce a região cuja área é dada pela integral e calcule-a.

5. $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/4} \int_1^2 r\, dr\, d\theta$

6. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

7–14 Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares.

7. $\iint_D x^2y\,dA$, onde D é a metade superior do disco com centro na origem e raio 5

8. $\iint_R (2x - y)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo $x^2 + y^2 = 4$ e as retas $x = 0$ e $y = x$

9. $\iint_R \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dA$, onde R é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios 1 e 3

10. $\iint_R \dfrac{y^2}{x^2 + y^2}\,dA$, onde R é a região que fica entre os círculos $x^2 + y^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = b^2$ com $0 < a < b$

11. $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA$, onde D é a região limitada pelo semicírculo $x = \sqrt{4 - y^2}$ e o eixo y

12. $\iint_D \cos\sqrt{x^2 + y^2}\,dA$, onde D é o disco com centro na origem e raio 2

13. $\iint_R \operatorname{arctg}(y/x)\,dA$, onde $R = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

14. $\iint_D x\,dA$, onde D é a região no primeiro quadrante que se encontra entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 2x$

15–18 Utilize a integral dupla para determinar a área da região.

15. Um laço da rosácea $r = \cos 3\theta$

16. A região limitada por ambos os cardioides $r = 1 + \cos\theta$ e $r = 1 - \cos\theta$

17. A região dentro do círculo $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ e fora do círculo $x^2 + y^2 = 1$

18. A região dentro do círculo $r = 1 + \cos\theta$ e fora do círculo $r = 3\cos\theta$

19–27 Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido dado.

19. Abaixo do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$

20. Abaixo do paraboloide $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ e acima do plano xy

21. Limitado pelo hiperboloide $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e pelo plano $z = 2$

22. Dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$

23. Uma esfera de raio a

24. Limitado pelo paraboloide $z = 1 + zx^2 + zy^2$ e pelo plano $z = 7$ no primeiro octante

25. Acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

26. Limitado pelos paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$

27. Dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ quanto do elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$

28. (a) Uma broca cilíndrica de raio r_1 é usada para fazer um furo que passa pelo centro de uma esfera de raio r_2. Determine o volume do sólido em formato de anel resultante.

(b) Expresse o volume da parte (a) em termos da altura h do anel. Observe que o volume depende somente de h e não de r_1 ou r_2.

29–32 Calcule a integral iterada, convertendo-a antes para coordenadas polares.

29. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{0} x^2y\,dx\,dy$

31. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} (x + y)\,dx\,dy$

32. $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

33–34 Expresse a integral dupla em termos de uma integral unidimensional com relação a r. Em seguida, use a calculadora para avaliar a integral correta com quatro casas decimais.

33. $\iint_D e^{(x^2+y^2)^2}\,dA$, D onde está o disco com centro na origem e raio 1

34. $\iint_D xy\sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dA$, onde D é a porção do disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que fica no primeiro quadrante

35. Uma piscina circular tem diâmetro de 10 metros. A profundidade é constante ao longo das retas de leste para oeste e cresce linearmente de 1 metro na extremidade sul para dois metros na extremidade norte. Encontre o volume de água da piscina.

36. Um pulverizador agrícola distribui água em um padrão circular de 50 m de raio. Ele fornece água até uma profundidade de e^{-r} metros por hora a uma distância de r metros do pulverizador.

(a) Se $0 < R \leqslant 50$, qual a quantidade total de água fornecida por hora para a região dentro do círculo de raio R centrada no pulverizador?

(b) Determine uma expressão para a quantidade média de água por hora por metro quadrado fornecida à região dentro do círculo de raio R.

37. Encontre o valor médio da função $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ na região anular $a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2$, onde $0 < a < b$.

38. Seja D o disco com centro na origem e raio a. Qual é a distância média dos pontos em D em relação à origem?

39. Utilize coordenadas polares para combinar a soma

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

40. (a) Definimos a integral imprópria (sobre todo o plano $\mathbb{R}^2$)

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx$$
$$= \lim_{a\to\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde D_a é o disco com raio a e centro na origem. Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \pi$$

(b) Uma definição equivalente da integral imprópria da parte (a) é

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dA = \lim_{a\to\infty}\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dA$$

onde S_a é o quadrado com vértices $(\pm a, \pm a)$. Use isto para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \pi$$

(c) Deduza que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

(d) Fazendo a mudança de variável $t = \sqrt{2}\,x$, mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

(Esse é um resultado fundamental em probabilidade e estatística.)

41. Utilize o resultado do Exercício 40, parte (c), para calcular as seguintes integrais.

(a) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$

$$M_{xy} = \iiint_E z\rho \, dV = \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \int_{0}^{x} z\rho \, dz \, dx \, dy$$

$$= \rho \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=x} dx \, dy = \frac{\rho}{2} \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} x^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{\rho}{3} \int_{0}^{1} (1 - y^6) \, dy = \frac{2\rho}{7}$$

Logo, o centro de massa é

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m} \right) = \left(\tfrac{5}{7}, 0, \tfrac{5}{14}\right)$$

15.7 Exercícios

1. Calcule a integral do Exemplo 1, integrando primeiro em relação a y, depois z e então x.

2. Calcule a integral $\iiint_E (xz - y^3)\, dV$, onde

$$E = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

utilizando três ordens diferentes de integração.

3–8 Calcule a integral iterada.

3. $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\, dx\, dy\, dz$

4. $\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^y 2xyz\, dz\, dy\, dx$

5. $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} xe^{-y}\, dy\, dx\, dz$

6. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{z}{y+1}\, dx\, dz\, dy$

7. $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z)\, dz\, dx\, dy$

8. $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^{xz} x^2 \operatorname{sen} y\, dy\, dz\, dx$

9–18 Calcule a integral tripla.

9. $\iiint_E 2x\, dV$, onde
$E = \left\{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4 - y^2},\ 0 \leqslant z \leqslant y\right\}$

10. $\iiint_E e^{z/y}\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant xy\}$

11. $\iiint_E \frac{z}{x^2 + z^2}\, dV$, onde
$E = \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant y \leqslant 4, y \leqslant z \leqslant 4, 0 \leqslant x \leqslant z\}$

12. $\iiint_E \operatorname{sen} y\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = x$ e acima da região triangular com vértices $(0, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0)$ e $(0, \pi, 0)$

13. $\iiint_E 6xy\, dV$, onde E está abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 1$

14. $\iiint_E xy\, dV$, onde E é limitado pelos cilindros parabólicos $y = x^2$ e $x = y^2$ e pelos planos $z = 0$ e $z = x + y$

15. $\iiint_T x^2\, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

16. $\iiint_T xyz\, dV$, onde T é o tetraedro sólido com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$

17. $\iiint_E x\, dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$

18. $\iiint_E z\, dV$, onde E é limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 3x$ e $z = 0$ no primeiro octante

19–22 Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

19. O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$

20. O sólido limitado pelos paraboloides $y = x^2 + z^2$ e $y = 8 - x^2 - z^2$

21. O sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$ e $y + z = 1$

22. O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 4$ e pelos planos $y = -1$ e $y + z = 4$

23. (a) Expresse o volume da cunha no primeiro octante que é cortada do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ pelos planos $y = x$ e $x = 1$ como uma integral tripla.

SCA (b) Utilize a Tabela de Integrais (nas *Páginas de Referência 6-11*) ou um sistema de computação algébrica para determinar o valor exato da integral tripla da parte (a).

24. (a) Na **Regra do Ponto Médio para as Integrais Triplas**, usamos a soma tripla de Riemann para aproximar a integral tripla em uma caixa B, onde $f(x, y, z)$ é calculada no centro $(\bar{x}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_k)$ da caixa B_{ijk}. Utilize a Regra do Ponto Médio para estimar $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV$, onde B é o cubo definido por $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$, $0 \leqslant z \leqslant 4$. Divida B em oito cubos de igual tamanho.

SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar a integral da parte (a) com precisão para o número inteiro mais próximo. Compare com sua resposta para a parte (a).

25–26 Use a Regra do Ponto Médio para as integrais triplas (Exercício 24) para estimar o valor da integral. Divida B em oito subcaixas de igual tamanho.

25. $\iiint_B \cos(xyz)\, dV$, onde

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1\}$$

26. $\iiint_B \sqrt{x}\, e^{xyz}\, dV$, onde
$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 2\}$

27–28 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral iterada.

27. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2z} dy\, dz\, dx$

28. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_0^{4-y^2} dx\, dz\, dy$

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

SCA É necessáriou usar um sistema de computação algébrica

29–32 Expresse a integral $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ como uma integral iterada de seis modos diferentes, onde E é o sólido limitado pelas superfícies dadas.

29. $y = 4 - x^2 - 4z^2, \quad y = 0$

30. $y^2 + z^2 = 9, \quad x = -2, \quad x = 2$

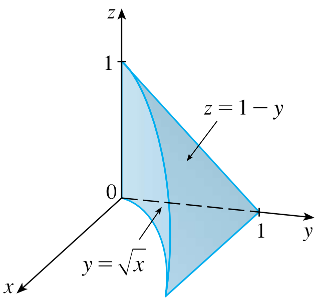
31. $y = x^2, \quad z = 0, \quad y + 2z = 4$

32. $x = 2, \quad y = 2, \quad z = 0, \quad x + y - 2z = 2$

33. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

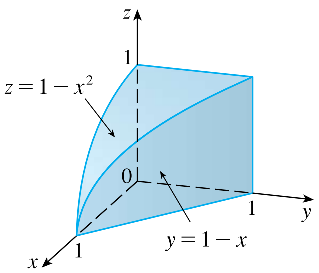
Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



34. A figura mostra a região de integração da integral

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



35–36 Escreva cinco outras integrais iteradas que sejam iguais à integral iterada dada.

35. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

36. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

37–38 Calcule a integral tripla usando apenas interpretação geométrica e simetria.

37. $\iiint_C (4 + 5x^2yz^2)\, dV$, onde C é a região cilíndrica $x^2 + y^2 \leqslant 4, -2 \leqslant z \leqslant 2$

38. $\iiint_B (z^2 + \operatorname{sen} y + 3)\, dV$, onde B é a bola unitária $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$

39–42 Determine a massa e o centro de massa do sólido dado E com função densidade dada ρ.

39. E é o sólido do Exercício 13; $\rho(x, y, z) = 2$

40. E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e os planos $x + z = 1, x = 0$ e $z = 0$; $\quad \rho(x, y, z) = 4$

41. E é o cubo dado por $0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant z \leqslant a$; $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

42. E é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$; $\quad \rho(x, y, z) = y$

43–46 Suponha que o sólido tenha densidade constante k.

43. Encontre os momentos de inércia para um cubo com comprimento de lado L se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.

44. Encontre os momentos de inércia de um tijolo retangular com dimensões a, b e c e massa M se o centro do tijolo está localizado na origem e as arestas são paralelas aos eixos coordenados.

45. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cilindro sólido $x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ 0 \leqslant z \leqslant h$.

46. Encontre o momento de inércia em relação ao eixo z do cone sólido $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant h$.

47–48 Escreva, mas não calcule, as expressões integrais para (a) a massa, (b) o centro de massa e (c) o momento de inércia em relação ao eixo z.

47. O sólido do Exercício 21; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

48. O hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0$; $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

49. SCA Seja E o sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$ com função densidade $\rho(x, y, z) = 1 + x + y + z$. Use um sistema de computação algébrica para determinar os valores exatos das seguintes quantidades para E.

(a) A massa
(b) O centro de massa
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

50. SCA Se E é o sólido do Exercício 18 com função densidade $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$, determine as seguintes quantidades, com precisão de três casas decimais.

(a) A massa
(b) O centro de massa
(c) O momento de inércia em relação ao eixo z

51. A função densidade conjunta das variáveis aleatórias X, Y e Z é $f(x, y, z) = Cxyz$ se $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 2$ e $f(x, y, z) = 0$, caso contrário.

(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X + Y + Z \leqslant 1)$.

52. Suponha que X, Y e Z sejam variáveis aleatórias com função densidade conjunta $f(x, y, z) = Ce^{-(0{,}5x + 0{,}2y + 0{,}1z)}$ se $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0$ e $f(x, y, z) = 0$, caso contrário.

(a) Determine o valor da constante C.
(b) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1)$.
(c) Determine $P(X \leqslant 1, Y \leqslant 1, Z \leqslant 1)$.

53–54 O **valor médio** de uma função $f(x, y, z)$ em uma região sólida E é definido como

$$f_{\text{med}} = \frac{1}{V(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dV$$

onde $V(E)$ é o volume de E. Por exemplo, se ρ é a função densidade, então ρ_{med} é a densidade média de E.

$$= 2\pi K\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{12\pi K}{5}$$

EXEMPLO 4 Calcule $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUÇÃO Essa integral iterada é uma integral tripla sobre a região sólida

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \leqslant x \leqslant 2,\ -\sqrt{4 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4 - x^2},\ \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$. A superfície inferior de E é o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e a superfície superior é o plano $z = 2$. (Veja a Figura 9.) Essa região tem uma descrição muito mais simples em coordenadas cilíndricas:

$$E = \left\{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 2,\ r \leqslant z \leqslant 2\right\}$$

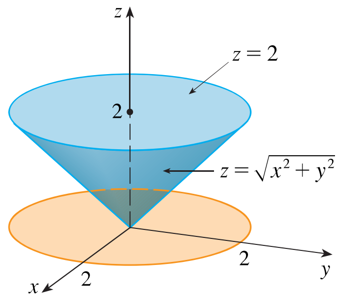


FIGURA 9

Portanto, temos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2 + y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2 + y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2\, r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2 - r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

15.8 Exercícios

1–2 Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.

1. (a) $(4, \pi/3, -2)$ (b) $(2, -\pi/2, 1)$

2. (a) $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 2)$ (b) $(1, 1, 1)$

3–4 Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas.

3. (a) $(-1, 1, 1)$ (b) $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$

4. (a) $(2\sqrt{3}, 2, -1)$ (b) $(4, -3, 2)$

5–6 Descreva com palavras a superfície cuja equação é dada.

5. $\theta = \pi/4$ **6.** $r = 5$

7–8 Identifique a superfície cuja equação é dada.

7. $z = 4 - r^2$ **8.** $2r^2 + z^2 = 1$

9–10 Escreva as equações em coordenadas cilíndricas.

9. (a) $x^2 - x + y^2 + z^2 = 1$ (b) $z = x^2 - y^2$

10. (a) $3x + 2y + z = 6$ (b) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

11–12 Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas.

11. $0 \leqslant r \leqslant 2,\quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad 0 \leqslant z \leqslant 1$

12. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2,\quad r \leqslant z \leqslant 2$

13. Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.

14. Use uma ferramenta gráfica para desenhar o sólido limitado pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.

15–16 Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral e calcule-a.

15. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$ **16.** $\int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^r r\,dz\,d\theta\,dr$

17–28 Utilize coordenadas cilíndricas.

17. Calcule $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\,dV$, onde E é a região que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 16$ e entre os planos $z = -5$ e $z = 4$.

18. Calcule $\iiint_E z\,dV$, onde E é limitado pelo paraboloide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

19. Calcule $\iiint_E (x + y + z)\,dV$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$.

20. Calcule $\iiint_E x\,dV$, onde E é limitado pelos planos $z = 0$ e $z = x + y + 5$ e pelos cilindros $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

21. Calcule $\iiint_E x^2\,dV$, onde E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

22. Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ como da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

23. Determine o volume do sólido que é limitado pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

24. Determine o volume do sólido que está entre o paraboloide $z = x^2 + y^2$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

25. (a) Encontre o volume da região E limitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.
(b) Encontre o centroide do E (centro de massa no caso em que a densidade é constante).

26. (a) Determine o volume do sólido que o cilindro $r = a \cos \theta$ corta da esfera de raio a centrada na origem.
(b) Ilustre o sólido da parte (a) desenhando a esfera e o cilindro na mesma tela.

27. Determine a massa e o centro de massa do sólido S limitado pelo paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ e pelo plano $z = a$ $(a > 0)$, se S tem densidade constante K.

28. Determine a massa da bola B dada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ se a densidade em qualquer ponto for proporcional à sua distância do eixo z.

29-30 Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas.

29. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\,dz\,dx\,dy$

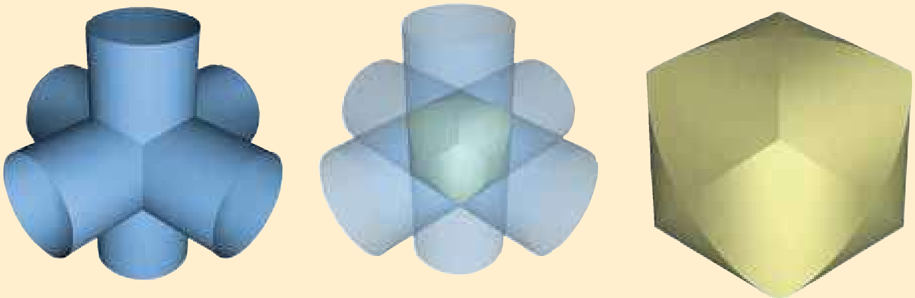
30. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

31. Quando estudam a formação de cordilheiras, os geólogos estimam a quantidade de trabalho necessária para erguer uma montanha a partir do nível do mar. Considere uma montanha que tenha essencialmente o formato de um cone circular reto. Suponha que a densidade do material na vizinhança de um ponto P seja $g(P)$ e a altura seja $h(P)$.
(a) Determine a integral definida que representa o trabalho total exercido para formar a montanha.
(b) Assuma que o monte Fuji no Japão tenha o formato de um cone circular reto com raio de 19 000 m, altura de 3 800 m e densidade constante de 3 200 kg/m³. Quanto trabalho foi feito para formar o monte Fuji se a terra estivesse inicialmente ao nível do mar?

S.R. Lee Photo Traveller/Shutterstock

PROJETO DE LABORATÓRIO A INTERSECÇÃO DE TRÊS CILINDROS

A figura mostra o sólido limitado por três cilindros circulares de mesmo diâmetro que se interceptam em ângulos retos. Neste projeto, vamos calcular seu volume e determinar como sua forma varia quando os cilindros têm diâmetros diferentes.



1. Esboce cuidadosamente o sólido limitado pelos três cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + z^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$. Indique as posições dos eixos coordenados e rotule as faces com as equações dos cilindros correspondentes.

2. Determine o volume do sólido do Problema 1.

SCA **3.** Utilize um sistema de computação algébrica para desenhar as arestas do sólido.

4. O que aconteceria ao sólido do Problema 1 se o raio do primeiro cilindro fosse diferente de 1? Ilustre com um desenho à mão livre ou com um gráfico no computador.

5. Se o primeiro cilindro for $x^2 + y^2 = a^2$, onde $a < 1$, escreva, mas não calcule, uma integral dupla que forneça o volume do sólido. E se $a > 1$?

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica