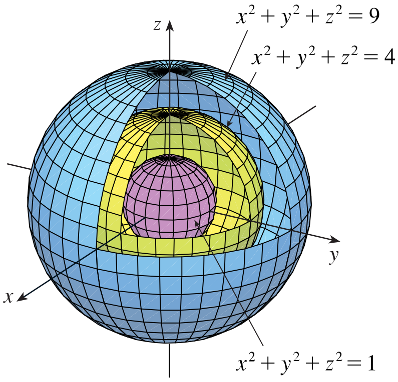


FIGURA 20

SOLUÇÃO As superfícies de nível são $x^2 + y^2 + z^2 = k$, onde $k \geqslant 0$. Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio $\sqrt{k}$. (Veja a Figura 20.) Assim, enquanto (x, y, z) varia sobre qualquer esfera com centro O, o valor de $f(x, y, z)$ permanece fixo.

Funções com qualquer número de variáveis podem ser consideradas. Uma **função com *n* variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a uma n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de números reais. Denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas essas n-uplas. Por exemplo, se uma companhia usa n ingredientes diferentes na fabricação de um produto alimentício, c_i é o custo por unidade do i-ésimo ingrediente e x_i unidades do ingrediente são usadas; então o custo total C dos ingredientes é uma função das n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\boxed{3} \qquad C = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

A função de f é de valor real cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por vezes, usamos uma notação vetorial para escrever estas funções de maneira mais compacta: Se $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$, frequentemente escrevemos $f(\mathbf{x})$ no lugar $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Com essa notação, podemos reescrever a função definida na Equação 3 como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

onde $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, \ldots, c_n \rangle$ e $\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ denota o produto escalar dos vetores $\mathbf{c}$ e $\mathbf{x}$ em V_n.

Em vista da correspondência de um-para-um entre os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ em $\mathbb{R}^n$ e seus vetores posição $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ em V_n, temos três maneiras de ver uma função f definida em um subconjunto de $\mathbb{R}^n$:

1. Como uma função de n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$
2. Como uma função de um único ponto n-dimensional $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
3. Como uma função de um único vetor n-dimensional $\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$

Veremos que todos os três pontos de vista são úteis.

14.1 Exercícios

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica, T é a temperatura real, e v é a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
   (a) Qual é o valor de $f(-15, 40)$? Qual é o seu significado?
   (b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.
   (c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T é verdade que $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.
   (d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva seu comportamento.
   (e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva seu comportamento.

2. O *índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3
Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa(%)

Temperatura real (°C): T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

   (a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
   (b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
   (c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
   (d) Quais são os significados das funções $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Um fabricante modelou sua função P da produção anual (o valor monetário de toda a produção em milhões de dólares) como uma função de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}47L^{0{,}65}K^{0{,}35}$$

onde L é o número de horas trabalhadas (em milhares) e K é o capital investido (em milhões de dólares). Encontre $P(120, 20)$ e interprete-o.

4. Verifique se, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isso também é verdade para uma função de produção genérica

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

5. Um modelo para a área da superfície de um corpo humano é dado pela função

$$S = f(w, h) = 0{,}1091w^{0{,}425}h^{0{,}725}$$

onde w é o peso (em libras), h é a altura (em polegadas) e S é medida em pés quadrados.
(a) Encontre $f(160, 70)$ e interprete-a.
(b) Qual é sua própria área de superfície?

6. O indicador de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:

$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

7. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em metros, são apresentados na Tabela 4.
(a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

8. Uma empresa fabrica caixas de papelão de três tamanhos: pequena, média e grande. O custo é de \$ 2,50 para fabricar uma caixa pequena, \$ 4,00 para uma caixa média e \$ 4,50 para uma caixa grande. Os custos fixos são de \$ 8.000.
(a) Expresse o custo da fabricação de x caixas pequenas, y caixas médias e z caixas grandes como uma função de três variáveis: $C = f(x, y, z)$.
(b) Encontre $f(3\,000, 5\,000, 4\,000)$ e interprete-a.
(c) Qual o domínio de f?

9. Seja $g(x, y) = \cos(x + 2y)$.
(a) Calcule $g(2, -1)$.
(b) Determine o domínio de g.
(c) Determine a imagem de g.

10. Seja $F(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$.
(a) Calcule $F(3,1)$.
(b) Determine e esboce o domínio de F.
(c) Determine a imagem de F.

11. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Calcule $f(1, 1, 1)$.
(b) Determine o domínio de f.

12. Seja $g(x, y, z) = x^3 y^2 z \sqrt{10 - x - y - z}$.
(a) Calcule $g(1, 2, 3)$.
(b) Determine o domínio de g.

13–22 Determine e esboce o domínio da função.

13. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

15. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

16. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

19. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

20. $f(x, y) = \text{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

21. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

22. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

23–31 Esboce o gráfico da função.

23. $f(x, y) = 1 + y$

24. $f(x, y) = 2 - x$

25. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

26. $f(x, y) = e^{-y}$

27. $f(x, y) = y^2 + 1$

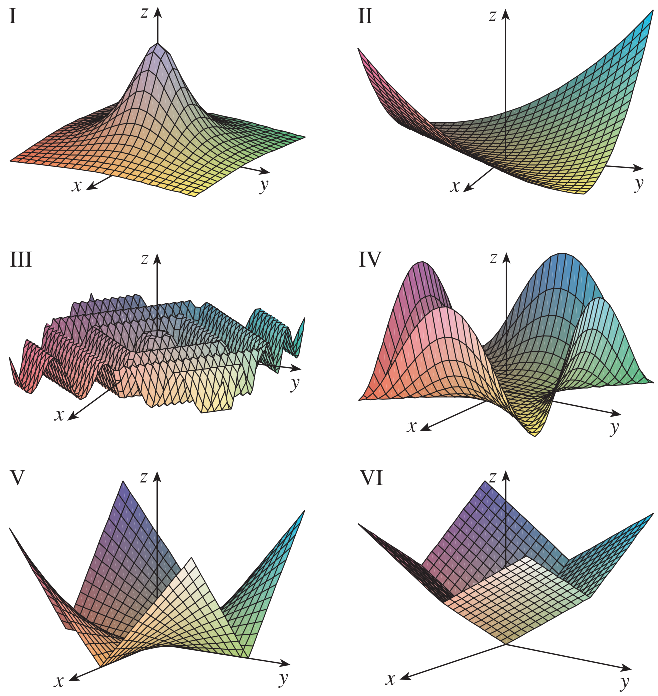
28. $f(x, y) = 1 + 2x^2 + 2y^2$

29. $f(x, y) = 9 - x^2 - 9y^2$

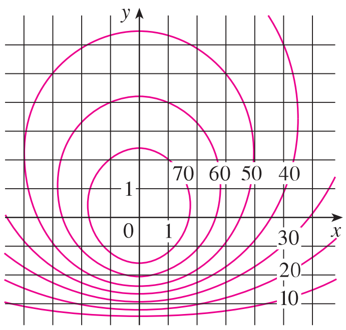
30. $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$

31. $f(x, y) = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$

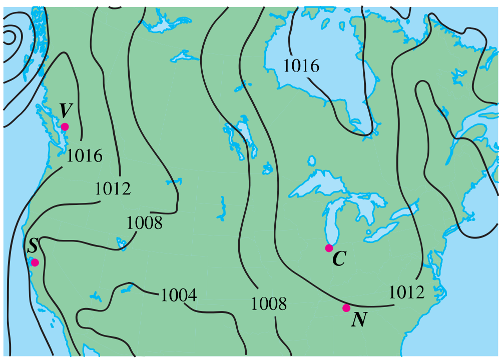
32. Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico (identificado por I–VI). Justifique sua escolha.
(a) $f(x, y) = |x| + |y|$
(b) $f(x, y) = |xy|$
(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$
(f) $f(x, y) = \text{sen}(|x| + |y|)$



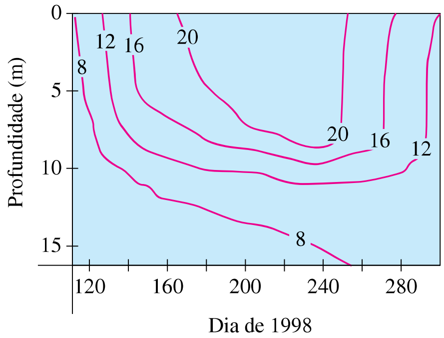
33. Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Use-o para estimar os valores de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?



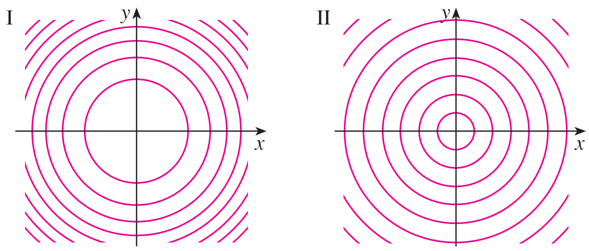
34. Um mapa de contorno da pressão atmosférica na América do Norte é mostrado em 12 de agosto de 2008. Nas curvas de nível (chamadas isobáricas) a pressão é indicada em milibares (mb).
(a) Estime a pressão em C (Chicago), N (Nashville), S (São Francisco) e V (Vancouver).
(b) Em quais desses lugares os ventos eram mais fortes?



35. As curvas de nível (isotérmicas) são mostradas para a temperatura da água (em °C) em Long Lake (Minnesota) em 1998 como uma função de profundidade e da época do ano. Estime a temperatura do lago em 9 de junho (dia 160) em uma profundidade de 10 m e em 29 de junho (dia 180) em uma profundidade de 5 m.

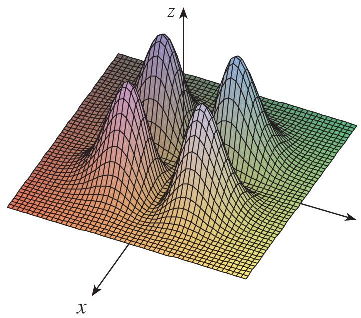


36. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?



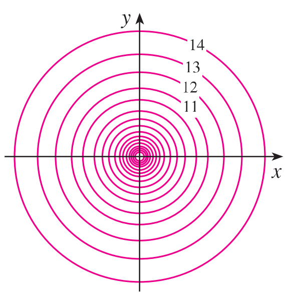
37. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? É perto de B?

38. Faça um esboço de um mapa de contorno da função cujo gráfico está mostrado.

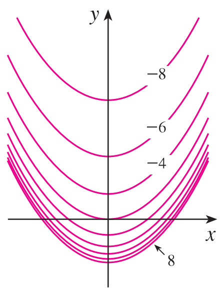


39–42 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

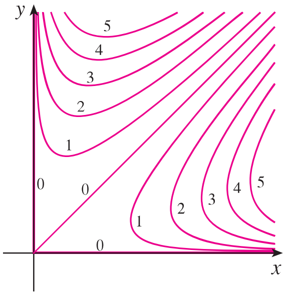
39.



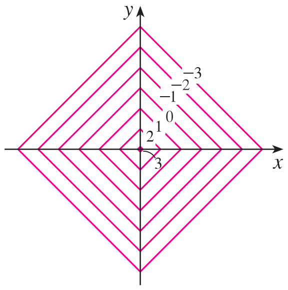
40.



41.



42.



43–50 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

43. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

44. $f(x, y) = x^3 - y$

45. $f(x, y) = \sqrt{x} + y$

46. $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$

47. $f(x, y) = ye^x$

48. $f(x, y) = y \sec x$

49. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

50. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

51–52 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

51. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

52. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

53. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma dessas curvas têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}$$

54. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico em um ponto (x, y) no plano xy, então as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque em todos os pontos dessa curva o potencial elétrico é o mesmo. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

55–58 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

55. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

56. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

57. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/3}(\text{sen}(x^2) + cos(y^2))$

58. $f(x, y) = \cos x \cos y$

59–64 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A–F a seguir), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I–VI). Justifique sua escolha.

59. $z = \text{sen}(xy)$

60. $z = e^x \cos y$

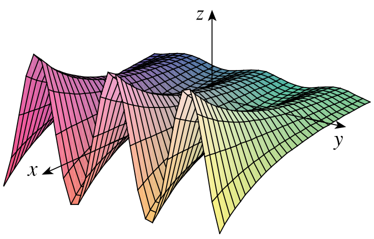
61. $z = \text{sen}(x - y)$

62. $z = \text{sen}\, x - \text{sen}\, y$

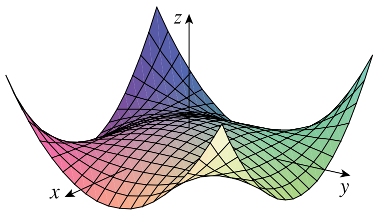
63. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

64. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

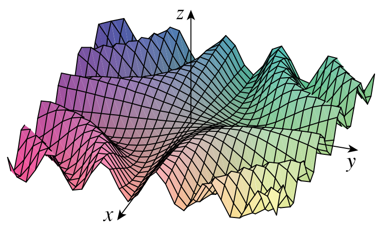
A



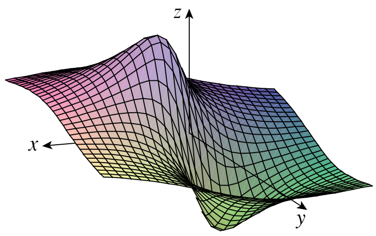
B



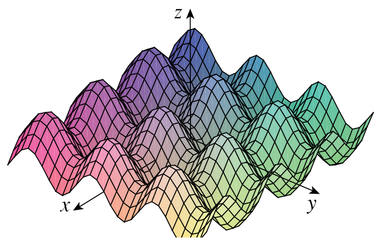
C



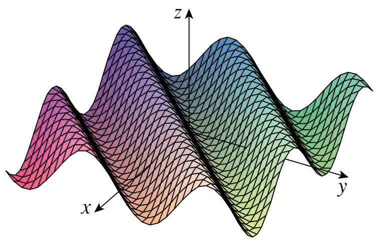
D



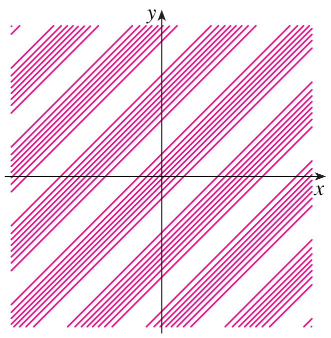
E



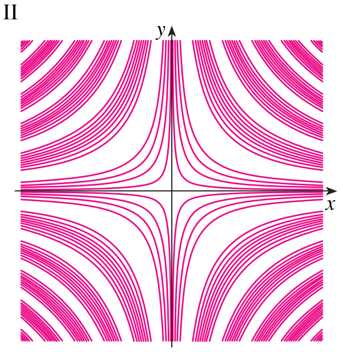
F



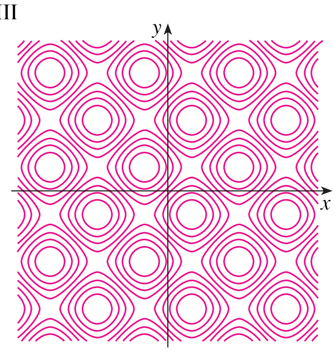
I



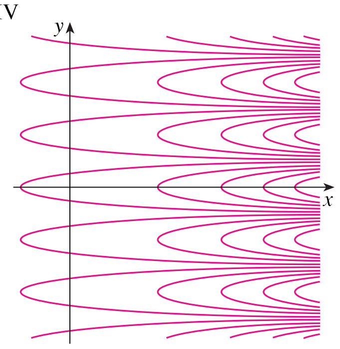
II



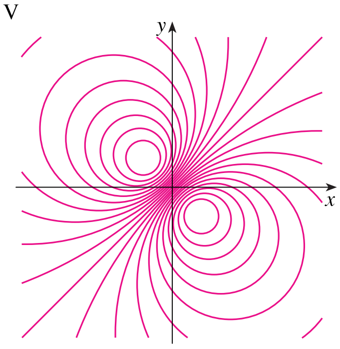
III



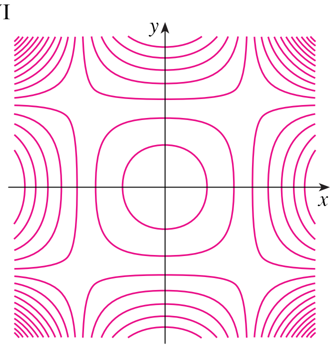
IV



V



VI



65–68 Descreva as superfícies de nível da função.

65. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

66. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

67. $f(x, y, z) = y^2 + z^2$

68. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$

69–70 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

69. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

70. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

71–72 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

71. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

72. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

73–74 Utilize um computador para traçar o gráfico da função usando vários domínios e pontos de vista. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

73. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$ **74.** $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

75. Use um computador para investigar a família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. De que maneira a forma do gráfico depende de c?

76. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

77. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição de c para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

78. Faça o gráfico da função

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$f(x, y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se $g(t)$ é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

a partir do gráfico de g?

79. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Se deixarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação no item (a) torna-se a equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Use a Tabela 2 (no Exemplo 3) para fazer a tabela dos valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos 1899–1922. Em seguida, use uma calculadora gráfica ou o computador para encontrar a linha de regressão dos quadrado mínimos pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e, portanto, o ponto (x, y) se aproxima da origem].

As Tabelas 1 e 2 mostram valores de $f(x, y)$ e $g(x, y)$, com precisão de três casas decimais, para pontos (x, y) próximos da origem. (Observe que nenhuma das funções está definida na origem.)

A função f é **contínua** em (a, b, c) se

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c)$$

Por exemplo, a função

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$$

é uma função racional em três variáveis, e portanto é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}^3$, exceto onde $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Em outras palavras, é descontínua na esfera com o centro na origem e raio 1.

Se usarmos a notação vetorial introduzida no fim da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como a seguir.

> $\boxed{5}$ Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que
>
> se $\mathbf{x} \in D$ e $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$, então $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$ e $\boxed{5}$ é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b \rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, de modo que $\boxed{5}$ se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z \rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c \rangle$, e $\boxed{5}$ é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Exercícios

1. Suponha que $\lim_{(x, y) \to (3, 1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
(b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
(c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3–4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$ **4.** $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 2)} (5x^3 - x^2y^2)$ **6.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, -1)} e^{-xy} \cos(x + y)$

7. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (2, 1)} \frac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$ **8.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 0)} \ln\left(\frac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^4 - {}^4y^4}{x^2 + 2y^2}$ **10.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy \cos y}{3x^2 + y^2}$ **12.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (1, 0)} \frac{xy - y}{(x - 1)^2 + y^2}$

13. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **14.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$ **16.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ **18.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (\pi, \theta, 1)} e^{y^2} \operatorname{tg}(xz)$ **20.** $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{xy + yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$ **22.** $\displaystyle\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23–24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$ **24.** $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

25–26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $\quad f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $\quad f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27–28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

28. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29–38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x, y) = \dfrac{xy}{1 + e^{x-y}}$

30. $F(x, y) = \cos\sqrt{1 + x - y}$

31. $F(x, y) = \dfrac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}$

32. $H(x, y) = \dfrac{e^x + e^y}{e^{xy} - 1}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

34. $G(x, y) = \text{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x, y, z) = \text{arcsen}\,(x^2 + y^2 + z^2)$

36. $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}\ln z$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39–41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y) com $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leqslant 0 \text{ or } y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Independentemente do item (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Dica*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas Parciais

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Desse modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C)	T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
	28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
	32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
	34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
	36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

TABELA 1
Índice de calor I como função da temperatura e umidade