porque $f(x) \geqslant 0$. Portanto, a área de $S$ é

$$A = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_\theta|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\, d\theta$$
$$= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Isso é precisamente a fórmula que usamos para definir a área de uma superfície de revolução no cálculo com uma única variável (8.2.4).

## 16.6 Exercícios

**1–2** Determine se os pontos $P$ e $Q$ estão na superfície dada.

**1.** $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2u + 3v, 1 + 5u - v, 2 + u + v\rangle$
$P(7, 10, 4)$, $Q(5, 22, 5)$

**2.** $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, u^2 - v, u + v^2\rangle$
$P(3, -1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$

**3–6** Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.

**3.** $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\,\mathbf{i} + (3 - v)\,\mathbf{j} + (1 + 4u + 5v)\,\mathbf{k}$

**4.** $\mathbf{r}(u, v) = 2 \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + 3\cos u\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

**5.** $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, t, t^2 - s^2\rangle$

**6.** $\mathbf{r}(s, t) = \langle s, \operatorname{sen} 2t, s^2, s\cos 2t\rangle$

**7–12** Use um computador para traçar o gráfico da superfície parametrizada. Imprima o resultado e indique sobre essa impressão quais são as curvas da grade que têm $u$ constante e quais têm $v$ constante.

**7.** $\mathbf{r}(u, v) = \langle u^2, v^2, u + v\rangle$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $-1 \leqslant v \leqslant 1$

**8.** $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, v^3, -v\rangle$, $-2 \leqslant u \leqslant 2$, $-2 \leqslant v \leqslant 2$

**9.** $\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u \operatorname{sen} v, u^5\rangle$, $-1 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

**10.** $\mathbf{r}(u, v) = \langle u, \operatorname{sen}(u + v), \operatorname{sen} v\rangle$,
$-\pi \leqslant u \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$

**11.** $x = \operatorname{sen} v$, $y = \cos u \operatorname{sen} 4v$, $z = \operatorname{sen} 2u \operatorname{sen} 4v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $-\pi/2 \leqslant v \leqslant \pi/2$

**12.** $x = \operatorname{sen} u$, $y = \cos u \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen} v$,
$0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

**13–18** Faça uma correspondência entre as equações e os gráficos identificados por I-VI e justifique sua resposta. Determine quais famílias de curvas da grade têm $u$ constante e quais têm $v$ constante.

**13.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$

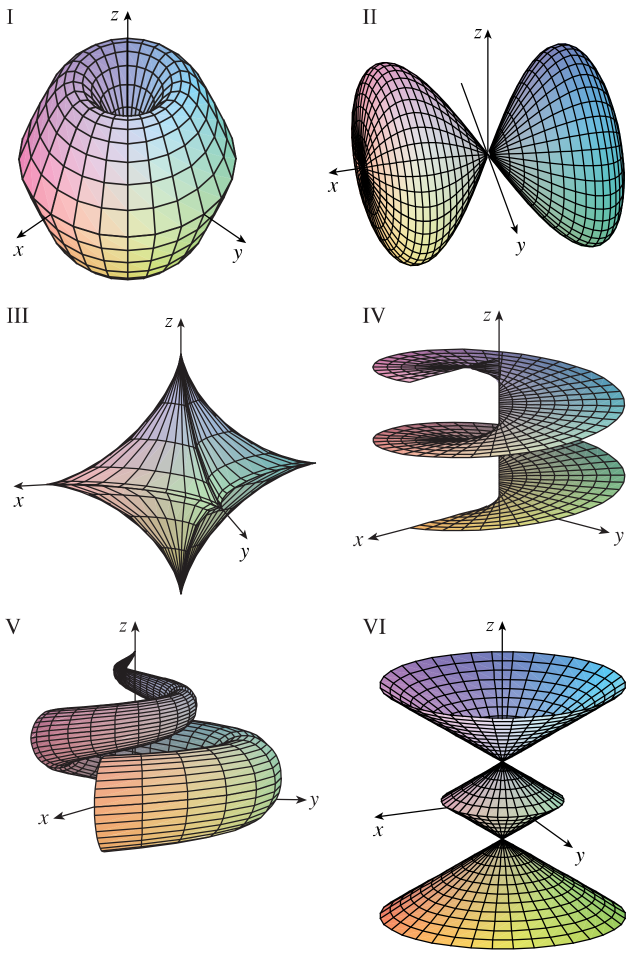
**14.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} u\,\mathbf{k}$, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$

**15.** $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} v\,\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} 2v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} 2v\,\mathbf{k}$

**16.** $x = (1 - u)(3 + \cos v)\cos 4\pi u$,
$y = (1 - u)(3 + \cos v)\operatorname{sen} 4\pi u$,
$z = 3u + (1 - u)\operatorname{sen} v$

**17.** $x = \cos^3 u \cos^3 v$, $y = \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v$, $z = \operatorname{sen}^3 v$

**18.** $x = (1 - |u|)\cos v$, $y = (1 - |u|)\operatorname{sen} v$, $z = u$




**19–26** Determine uma representação parametrizada para a superfície.

**19.** O plano que passa pela origem que contém os vetores $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} - \mathbf{k}$

**20.** O plano que passa pelo ponto $(0, -1, 5)$ e contém os vetores $(2, 1, 4)$ e $(-3, 2, 5)$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**21.** A parte do hiperboloide $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$ que está em frente do plano $yz$

**22.** A parte do elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ que se encontra à esquerda do plano $xz$

**23.** A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se situa acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

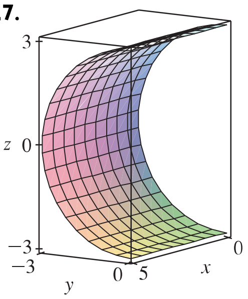
**24.** A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $z = -2$ e $z = 2$

**25.** A parte do cilindro $y^2 + z^2 = 16$ que se encontra entre os planos $x = 0$ e $x = 5$

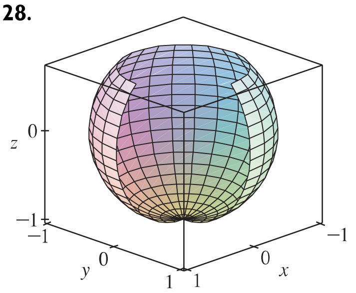
**26.** A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

SCA **27–28** Use um sistema de computação algébrica para produzir um gráfico semelhante ao das figuras.

**27.**




**28.**




**29.** Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $y = e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, em torno do eixo $x$ e use-as para traçar o gráfico da superfície.

**30.** Determine as equações paramétricas da superfície obtida pela rotação da curva $x = 4y^2 - y^4$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$, em torno do eixo $y$ e use-as para traçar o gráfico da superfície.

**31.** (a) O que acontecerá com o tubo espiral do Exemplo 2 (veja a Figura 5) se substituirmos $\cos u$ por $\operatorname{sen} u$ e $\operatorname{sen} u$ por $\cos u$?
(b) O que acontece se substituirmos $\cos u$ por $\cos 2u$ e $\operatorname{sen} u$ por $\operatorname{sen} 2u$?

**32.** A superfície com as equações paramétricas

$$x = 2\cos\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$y = 2\operatorname{sen}\theta + r\cos(\theta/2)$$
$$z = r\operatorname{sen}(\theta/2)$$

onde $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, é chamada **Faixa de Möbius**. Trace o gráfico dessa superfície sob vários pontos de vista. O que há de estranho nela?

**33–36** Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado.

**33.** $x = u + v, \quad y = 3u^2, \quad z = u - v; \qquad (2, 3, 0)$

**34.** $x = u^2 + 1, \quad y = v^3 + 1, \quad z = u + v; \qquad (5, 2, 3)$

**35.** $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}; \quad u = 1, v = \pi/3$

**36.** $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u\,\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} v\,\mathbf{k}; \quad u = \pi/6, v = \pi/6$

SCA **37–38** Determine uma equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado. Desenhe a superfície e o plano tangente.

**37.** $\mathbf{r}(u, v) = u^2\,\mathbf{i} + 2u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + u\cos v\,\mathbf{k}; \; u = 1, v = 0$

**38.** $\mathbf{r}(u, v) = (1 - u^2 - v^2)\,\mathbf{i} - v\,\mathbf{j} - u\,\mathbf{k}; \; (-1, -1, -1)$

**39–50** Determine a área da superfície.

**39.** A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante

**40.** A parte do plano com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u + v, 2 - 3u, 1 + u - v\rangle$ que é dada por $0 \leqslant u \leqslant 2, -1 \leqslant v \leqslant 1$

**41.** A parte do plano $x + 2y + 3z = 1$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 3$

**42.** A parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que se encontra entre o plano $y = x$ e o cilindro $y = x^2$

**43.** A superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

**44.** A parte da superfície $z = 1 + 3x + 3y^2$ que está acima do triângulo com vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(2, 1)$

**45.** A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

**46.** A parte do paraboloide $x = y^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $y^2 + z^2 = 9$

**47.** A parte da superfície $y = 4x + z^2$ que se encontra entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$

**48.** O helicoide (ou rampa em espiral) com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\operatorname{sen} v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

**49.** A superfície com equações paramétricas $x = u^2$, $y = uv$, $z = \frac{1}{2}v^2$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 2$

**50.** A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, onde $0 < a < b$

**51.** Se a equação de uma superfície $S$ é $z = f(x, y)$, onde $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, e você sabe que $|f_x| \leqslant 1$ e $|f_y| \leqslant 1$, o que você pode dizer sobre $A(S)$?

**52–53** Encontre a área da superfície com precisão de quatro casas decimais, expressando-a em termos de uma integral unidimensional e usando sua calculadora para estimar a integral.

**52.** A parte da superfície $z = \cos(x^2 + y^2)$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$

**53.** A parte da superfície $z = e^{-x^2-y^2}$ que está acima do círculo $x^2 + y^2 \leqslant 4$

SCA **54.** Determine, com precisão de quatro casas decimais, a área da parte da superfície $z = (1 + x^2)/(1 + y^2)$ que está acima do quadrado $|x| + |y| \leqslant 1$. Ilustre, traçando o gráfico dessa parte de superfície.

**55.** (a) Use a Regra do Ponto Médio para integrais duplas (veja a Seção 15.1) com seis quadrados para estimar a área da superfície $z = 1/(1 + x^2 + y^2)$, $0 \leqslant x \leqslant 6$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.
SCA (b) Use um sistema de computação algébrica para aproximar área de superfície da parte (a) até a quarta casa decimal. Compare com sua resposta para a parte (a).

SCA **56.** Determine a área da superfície de equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle \cos^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v, \operatorname{sen}^3 v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant \pi$, Outra aplicação de integrais de superfície ocorre no estudo de fluxo de calor. Suponha que a temperatura em um ponto $(x, y, z)$ em um corpo seja $u(x, y, z)$. Então, o **fluxo de calor** é definido como o campo vetorial

$$\mathbf{F} = -K\,\nabla u$$

onde $K$ é uma constante determinada experimentalmente, chamada **condutividade** da substância. A taxa de transmissão de calor através da superfície $S$ no corpo é então dada pela integral de superfície

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -K \iint_S \nabla u \cdot d\mathbf{S}$$

**EXEMPLO 6** A temperatura $u$ em uma bola metálica é proporcional ao quadrado da distância do centro da bola. Determine a taxa de transmissão de calor através de uma esfera $S$ de raio $a$ e centro no centro da bola.

SOLUÇÃO Tomando o centro da bola como origem, temos

$$u(x, y, z) = C(x^2 + y^2 + z^2)$$

onde $C$ é a constante de proporcionalidade. Então o fluxo de calor é

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -K\,\nabla u = -KC(2x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 2z\,\mathbf{k})$$

onde $K$ é a condutividade do metal. Em vez de usar a parametrização usual da esfera dada no Exemplo 4, observamos que o vetor normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que aponta para fora no ponto $(x, y, z)$ é

$$\mathbf{n} = \frac{1}{a}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$$

e assim

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -\frac{2KC}{a}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Mas, sobre $S$ temos $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, então $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2aKC$. Portanto, a taxa de transmissão de calor através de $S$ é

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS = -2aKC \iint_S dS$$

$$= -2aKCA(S) = -2aKC(4\pi a^2) = -8KC\pi a^3$$

## 16.7 Exercícios

**1.** Seja $S$ a superfície que é fronteira da caixa delimitada pelos planos $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$ e $z = 6$. Aproxime $\iint_S e^{-0,1(x+y+z)}\,dS$ usando uma soma de Riemann, como na Definição 1, tomando os retalhos $S_{ij}$ como os retângulos que são as faces da caixa $S$ e os pontos $P_{ij}^*$ como os centros destes retângulos.

**2.** Uma superfície $S$ é formada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$, e por círculos no fundo e no topo Suponha que você saiba que $f$ é uma função contínua com

$$f(\pm 1, 0, 0) = 2 \qquad f(0, \pm 1, 0) = 3 \qquad f(0, 0, \pm 1) = 4$$

Estime o valor de $\iint_S f(x, y, z)\,dS$ usando a soma de Riemann, tomando como retalhos $S_{ij}$ os círculos do fundo e do topo e a lateral dividida em quatro partes.

**3.** Seja $H$ o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 50$, $z \geqslant 0$, e suponha que $f$ seja uma função contínua com $f(3, 4, 5) = 7$, $f(3, -4, 5) = 8$, $f(-3, 4, 5) = 9$ e $f(-3, -4, 5) = 12$. Ao dividir $H$ em quatro partes, estime o valor de $\iint_H f(x, y, z)\,dS$.

**4.** Suponha que $f(x, y, z) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$, onde $g$ é uma função de uma variável tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x, y, z)\,dS$, onde $S$ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

**5–20** Calcule a integral de superfície.

**5.** $\iint_S (x + y + z)\,dS$,
$S$ é o paralelogramo com equações paramétricas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = 1 + 2u + v$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 1$

**6.** $\iint_S xyz\,dS$,
$S$ é o cone com equações paramétricas $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi/2$

**7.** $\iint_S y\,dS$, $S$ é o helicoide com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle u\cos v, u \operatorname{sen} v, v\rangle$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$

**8.** $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$,
$S$ é o superfície com equação vetorial $\mathbf{r}(u, v) = \langle 2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2\rangle$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$

**9.** $\iint_S x^2yz\,dS$,
$S$ é a parte do plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está acima do retângulo $[0, 3] \times [0, 2]$

**10.** $\iint_S xz\,dS$,
$S$ é a parte do plano $2x + 2y + z = 4$ que está no primeiro octante

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica    **1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

**11.** $\iint_S x\, dS$,
$S$ é a região triangular com vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ e $(0, 0, 4)$

**12.** $\iint_S y\, dS$,
$S$ é a superfície $z = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

**13.** $\iint_S x^2 z^2\, dS$,
$S$ é a parte do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$

**14.** $\iint_S z\, dS$,
$S$ é a superfície $x = y + 2z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$

**15.** $\iint_S y\, dS$,
$S$ é a parte do paraboloide $y = x^2 + z^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + z^2 = 4$

**16.** $\iint_S y^2\, dS$,
$S$ é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano $xy$

**17.** $\iint_S (x^2 z + y^2 z)\, dS$,
$S$ é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$

**18.** $\iint_S xz\, dS$,
$S$ é o limite da região delimitada pelo cilindro $y^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$ e $x + y = 5$

**19.** $\iint_S (z + x^2 y)\, dS$,
$S$ é a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 1$ que está entre os planos $x = 0$ e $x = 3$ no primeiro octante

**20.** $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$,
$S$ é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos inferior e superior

**21–32** Avalie a integral de superfície $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial dado $\mathbf{F}$ e a superfície orientada $S$. Em outras palavras, localize o fluxo de $\mathbf{F}$ através de $S$. Para superfícies fechadas, use a orientação (para o exterior) positiva.

**21.** $\mathbf{F}(x, y, z) = ze^{xy}\,\mathbf{i} - 3ze^{xy}\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,
$S$ é o paralelogramo do Exercício 5 com orientação ascendente.

**22.** $\mathbf{F}(x, y, z) = z\,\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
$S$ é o helicoide do Exercício 7 com orientação ascendente.

**23.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$,
$S$ é a parte do paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e com orientação ascendente.

**24.** $\mathbf{F}(x, y, z) = -x\,\mathbf{i} - y\,\mathbf{j} + z^3\,\mathbf{k}$,
$S$ é a parte do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que está entre os planos $z = 1$ e $z = 3$ com orientação descendente

**25.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} - z\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
$S$ é parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ no primeiro octante, com orientação para a origem

**26.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$,
$S$ é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $y \geqslant 0$, orientado na direção do eixo positivo $y$

**27.** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j} - z\,\mathbf{k}$,
$S$ é formada pelo paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, e pelo disco $x^2 + z^2 \leqslant 1$, $y = 1$

**28.** $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\,\mathbf{i} + 4x^2\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$,
$S$ é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, com orientação ascendente

**29.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$,
$S$ é o cubo com vértices $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

**30.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$,
$S$ é o limite da região delimitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$ e pelos planos $y = 0$ e $x + y = 2$

**31.** $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k}$,
$S$ é o limite do semicilindro sólido $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$

**32.** $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{i} + (z - y)\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$,
$S$ é a superfície do tetraedro com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

SCA **33.** Calcule $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, dS$ com precisão de quatro casas decimais, quando $S$ é a superfície $z = xe^y$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **34.** Determine o valor exato de $\iint_S x^2 yz\, dS$, onde $S$ é a superfície $z = xy$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

SCA **35.** Determine o valor de $\iint_S x^2 y^2 z^2\, dS$ correto até a quarta casa decimal, onde $S$ é a parte do paraboloide $z = 3 - 2x^2 - y^2$ que está acima do plano $xy$.

SCA **36.** Determine o fluxo de

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen}(xyz)\,\mathbf{i} + x^2 y\,\mathbf{j} + z^2 e^{x/5}\,\mathbf{k}$$

através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano $xy$ e entre os planos $x = -2$ e $x = 2$ com orientação ascendente. Ilustre, usando um sistema de computação algébrica para desenhar o cilindro e o campo vetorial na mesma tela.

**37.** Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde $S$ é dada por $y = h(x, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a esquerda.

**38.** Determine uma fórmula para $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ semelhante à Fórmula 10 para o caso onde $S$ é dada por $x = k(y, z)$ e $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para a frente (ou seja, para o observador, quando os eixos estão desenhados na posição usual).

**39.** Determine o centro de massa do hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geqslant 0$, se ele tiver densidade constante.

**40.** Determine a massa de um funil fino com o formato do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leqslant z \leqslant 4$, se sua função densidade é $\rho(x, y, z) = 10 - z$.

**41.** (a) Dê uma expressão integral para o momento de inércia $I_z$ em torno do eixo $z$ de uma folha fina no formato da superfície $S$ se a função densidade é $\rho$.
(b) Determine o momento de inércia em torno do eixo $z$ do funil do Exercício 40.

**42.** Seja $S$ a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$. Se S tem densidade constante $k$, determine (a) o centro da massa e (b) o momento de inércia em torno do eixo $z$.

**43.** Um fluido tem densidade 870 kg/m³ e escoa com velocidade $\mathbf{v} = z\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}$, onde $x$, $y$ e $z$ são medidos em metros e as componentes de $\mathbf{v}$, em metros por segundo. Encontre a taxa de vazão para fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

**44.** A água do mar tem densidade 1.025 kg/m³ e flui em um campo de velocidade $\mathbf{v} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$, onde $x$, $y$ e $z$ são medidos em me-