Portanto,

15 $$W = \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(b)|^2 - \tfrac{1}{2}m\,|\mathbf{v}(a)|^2$$

onde $\mathbf{v} = \mathbf{r}'$ é a velocidade.

A quantidade $\frac{1}{2}\,m\,|\mathbf{v}(t)|^2$, ou seja, a metade da massa multiplicada pelo quadrado da velocidade escalar, é chamada **energia cinética** do objeto. Portanto, podemos reescrever a Equação 15 como

16 $$W = K(B) - K(A)$$

que diz que o trabalho realizado pelo campo de forças ao longo do caminho C é igual à variação da energia cinética nas extremidades de C.

Agora vamos admitir que $\mathbf{F}$ seja um campo de forças conservativo, ou seja, podemos escrever $\mathbf{F} = \nabla f$. Em física, a **energia potencial** de um objeto no ponto de (x, y, z) é definida como $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, portanto temos $\mathbf{F} = -\nabla P$. Então, pelo Teorema 2, temos

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\int_C \nabla P \cdot d\mathbf{r} = -[P(\mathbf{r}(b)) - P(\mathbf{r}(a))] = P(A) - P(B)$$

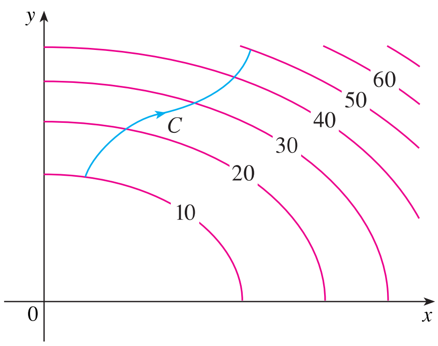
Comparando essa equação com a Equação 16, vemos que

$$P(A) + K(A) = P(B) + K(B)$$

que diz que, se um objeto se move de um ponto A para outro B sob a influência de um campo de forças conservativo, então a soma de sua energia potencial e sua energia cinética permanece constante. Essa é a chamada **Lei da Conservação de Energia** e é a razão pela qual o campo vetorial é denominado *conservativo*.

16.3 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C e um mapa de contorno de uma função f cujo gradiente é contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$.



2. É dada uma tabela de valores de uma função f com gradiente contínuo. Determine $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$, onde C tem equações paramétricas

$$x = t^2 + 1, \qquad y = t^3 + t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

x \ y	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	7
2	8	2	9

3–10 Determine se $\mathbf{F}$ é ou não um campo vetorial conservador. Se for, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (2x - 3y)\,\mathbf{i} + (-3x + 4y - 8)\,\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

5. $\mathbf{F}(x, y) = e^x \cos y\,\mathbf{i} + e^x \operatorname{sen} y\,\mathbf{j}$

6. $\mathbf{F}(x, y) = (3x^2 - 2y^2)\,\mathbf{i} + (4\,xy + 3)\,\mathbf{j}$

7. $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x + \operatorname{sen} y)\,\mathbf{i} + (e^x + x\cos y)\,\mathbf{j}$

8. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^{-2})\,\mathbf{i} + (x^2 - 2xy^{-3})\,\mathbf{j},\ y < 0$

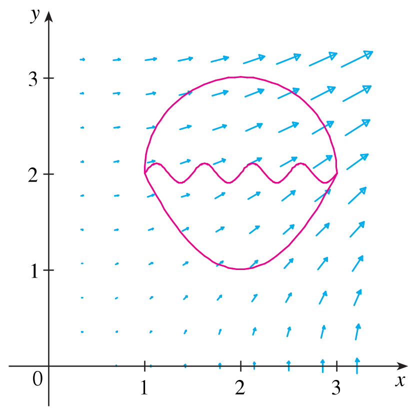
9. $\mathbf{F}(x, y) = (\ln y + 2xy^3)\,\mathbf{i} + (3x^2y^2 + x/y)\,\mathbf{j}$

10. $\mathbf{F}(x, y) = (xy \cosh xy + \operatorname{senh} xy)\,\mathbf{i} + (x^2 \cosh xy)\,\mathbf{j}$

11. A figura mostra o campo vetorial $\mathbf{F}(x, y) = \langle 2xy, x^2 \rangle$ e três curvas que começam em $(1, 2)$ e terminam em $(3, 2)$.

(a) Explique por que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ tem o mesmo valor para as três curvas.

(b) Qual é esse valor comum?



12–18 (a) Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$ e (b) use a parte (a) para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ sobre a curva C dada.

12. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j}$,
C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1, 2)$ a $(2, 8)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \langle t + \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi t,\, t + \cos \frac{1}{2}\pi t \rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\,\mathbf{i} + x^2e^{xy}\,\mathbf{j}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + (xy + 2z)\,\mathbf{k}$,
C é o segmento de reta de $(1, 0, -2)$ a $(4, 6, 3)$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2z + 2xz^2)\,\mathbf{i} + 2\,xyz\,\mathbf{j} + (xy^2 + 2x^2z)\,\mathbf{k}$,
C: $x = \sqrt{t}$, $y = t + 1$, $z = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = yze^{xz}\,\mathbf{i} + e^{xz}\,\mathbf{j} + xye^{xz}\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\,\mathbf{i} + (t^2 - 1)\,\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (x \cos y + \cos z)\,\mathbf{j} - y \operatorname{sen} z\,\mathbf{k}$,
C: $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

19–20 Mostre que a integral de linha é independente do caminho e calcule a integral.

19. $\int_C \operatorname{tg} y\, dx + x \sec^2 y\, dy$,
C é qualquer caminho de $(1, 0)$ a $(2, \pi/4)$

20. $\int_C (1 - ye^{-x})\, dx + e^{-x}\, dy$,
C é qualquer caminho de $(0, 1)$ a $(1, 2)$

21. Suponha que você seja solicitado a determinar a curva que exige o mínimo de trabalho para um campo de força $\mathbf{F}$ para mover uma partícula de um ponto a outro ponto. Você decide verificar primeiro se $\mathbf{F}$ é conservativo, e de fato verifica-se que ela é. Como você responde à solicitação?

22. Suponhamos que uma experiência determine que a quantidade de trabalho necessária para um campo de força $\mathbf{F}$ para mover uma partícula do ponto $(1, 2)$ para o ponto de $(5, -3)$ ao longo de uma curva C_1 é de 1,2 J e do trabalho realizado por $\mathbf{F}$ em mover a partícula ao longo de outra curva C_2 entre os mesmos dois pontos é de 1,4 J. O que você pode dizer sobre $\mathbf{F}$? Por quê?

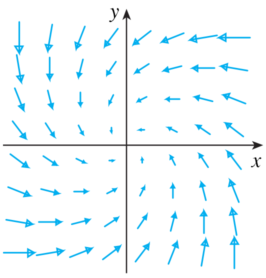
23–24 Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de P para Q.

23. $\mathbf{F}(x, y) = 2y^{3/2}\,\mathbf{i} + 3x\sqrt{y}\,\mathbf{j}$; $\quad P(1, 1)$, $Q(2, 4)$

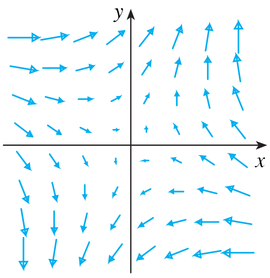
24. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\,\mathbf{i} - xe^{-y}\,\mathbf{j}$; $\quad P(0, 1)$, $Q(2, 0)$

25–26 A partir do gráfico de $\mathbf{F}$ você diria que o campo é conservativo? Explique.

25.



26.



SCA **27.** Se $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} y\,\mathbf{i} + (1 + x \cos y)\,\mathbf{j}$, use um gráfico para conjecturar se $\mathbf{F}$ é conservativo. Então, determine se sua conjectura estava correta.

28. Seja $\mathbf{F} = \nabla f$, onde $f(x, y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$. Encontre curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação.
(a) $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ $\qquad$ (b) $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1$

29. Mostre que, se um campo vetorial $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$ é conservativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

30. Use o Exercício 29 para mostrar que a integral de linha $\int_C y\, dx + x\, dy + xyz\, dz$ não é independente do caminho.

31–34 Determine se o conjunto dado é ou não: (a) aberto, (b) conexo por caminhos e (c) simplesmente conexo.

31. $\{(x, y) \mid 0 < y < 3\}$ $\qquad$ **32.** $\{(x, y) \mid 1 < |x| < 2\}$

33. $\{(x, y) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ y \geqslant 0\}$

34. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (2, 3)\}$

35. Seja $\mathbf{F}(x, y) = \dfrac{-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$.

(a) Mostre que $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$.
(b) Mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ não é independente do caminho. [*Dica*: Calcule $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ e $\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde C_1 e C_2 são as metades superior e inferior do círculo $x^2 + y^2 = 1$ de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.] Isto contradiz o Teorema 6?

36. (a) Suponha que $\mathbf{F}$ seja um campo vetorial inverso do quadrado, ou seja,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{c\,\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$$

para alguma constante c, onde $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine o trabalho realizado por $\mathbf{F}$ ao mover um objeto de um ponto P_1 por um caminho para um ponto P_2 em termos da distância d_1 e d_2 desses pontos à origem.

(b) Um exemplo de um campo de quadrado inverso é o campo gravitacional $\mathbf{F} = -(mMG)\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 4 na Seção 16.1. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo gravitacional quando a Terra se move do afélio (em uma distância máxima de $1{,}52 \times 10^8$ km do Sol) ao periélio (em uma distância mínima de $1{,}47 \times 10^8$ km). (Use os valores $m = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg, $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg e $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²/kg².)

(b) Outro exemplo de campo inverso do quadrado é o campo elétrico $\mathbf{F} = \varepsilon qQ\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ discutido no Exemplo 5 da Seção 16.1. Suponha que um elétron com carga de $-1{,}6 \times 10^{-19}$ C esteja localizado na origem. Uma carga positiva unitária é colocada à distância de 10^{-12} m do elétron e se move para uma posição que está à metade da distância original do elétron. Use a parte (a) para determinar o trabalho realizado pelo campo elétrico. (Use o valor $\varepsilon = 8{,}985 \times 10^9$.)

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{F}(x, y) = (-y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$ para todo caminho fechado simples que circunde a origem.

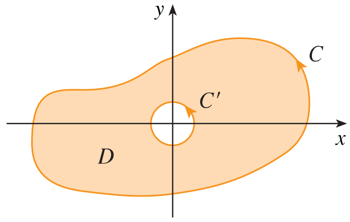


FIGURA 11

SOLUÇÃO Como C é um caminho fechado *arbitrário* contendo a origem em seu interior, é difícil calcular a integral dada diretamente. Então, vamos considerar um círculo anti-horário orientado C' com origem no centro e raio a, onde a é escolhido para ser pequeno o suficiente para que C' esteja contido em C (ver Figura 11). Seja D a região limitada por C e C'. Então a orientação positiva do limite é $C \cup (-C')$ e, aplicando a versão geral do Teorema de Green, temos

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \int_{-C'} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

$$= \iint_D \left[\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] dA = 0$$

Logo, $$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_{C'} P\,dx + Q\,dy$$

isto é, $$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Agora podemos calcular facilmente essa última integral usando a parametrização dada por $\mathbf{r}(t) = a \cos t\,\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Logo,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C'} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (a \cos t)(a \cos t)}{a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Terminaremos esta seção utilizando o Teorema de Green para discutir um resultado enunciado na seção anterior.

ESBOÇO DA DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 16.3.6 Assumimos que $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j}$ é um campo vetorial em uma região simplesmente conexa D, que P e Q têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \text{em todo o } D$$

Se C é um caminho fechado simples qualquer em D e R é a região envolvida por C, o Teorema de Green nos dá

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \iint_R 0\,dA = 0$$

Uma curva que não seja simples se autointercepta em um ou mais pontos e pode ser dividida em diversas curvas fechadas simples. Mostramos que as integrais de linha de $\mathbf{F}$ sobre essas curvas simples são todas 0 e, somando essas integrais, podemos ver que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para qualquer curva fechada C. Portanto, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ é independente do caminho em D pelo Teorema 16.3.3. Segue então que $\mathbf{F}$ é um campo vetorial conservativo.

16.4 Exercícios

1–4 Calcule a integral de linha por dois métodos: (a) diretamente e (b) utilizando o Teorema de Green.

1. $\oint_C (x - y)\,dx + (x + y)\,dy$,
C é o círculo com centro na origem e raio 2

2. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$,
C é o retângulo com vértices (0, 0) (3, 0), (3, 1) e (0, 1)

3. $\oint_C xy\,dx + x^2y^3\,dy$,
C é o triângulo com vértices (0, 0), (1, 0) e (1, 2)

4. $\oint_C x^2y^2\,dx + xy\,dy$, C consiste no arco da parábola $y = x^2$ de (0, 0) a (1, 1) e os segmentos de reta de (1, 1) a (0, 1) e de (0, 1) a (0, 0)

5–10 Use o Teorema de Green para calcular a integral de linha ao longo da curva dada com orientação positiva.

5. $\int_C xy^2\,dx + 2x^2y\,dy$,
C é o triângulo com vértices (0, 0), (2, 2) e (2, 4)

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

6. $\int_C \cos y\, dx + x^2 \operatorname{sen} y\, dy$,
C é o retângulo com vértices (0, 0), (5, 0), (5, 2) e (0, 2)

7. $\int_C \left(y + e^{\sqrt{x}}\right) dx + (2x + \cos y^2)\, dy$,
C é o limite da região englobada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$

8. $\int_C xe^{-2x}\, dx + (x^4 + 2x^2 y^2)\, dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$

9. $\int_C y^3\, dx - x^3\, dy$, C é o círculo $x^2 + y^2 = 4$

10. $\int_C \left(1 - y^3\right) dx + \left(x^3 + e^{y^2}\right) dy$, C é o limite da região entre os círculos $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$

11–14 Use o teorema de Green para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

11. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y \cos x - xy \operatorname{sen} x,\, xy + x \cos x \rangle$,
C é o triângulo de (0, 0) a (0, 4) a (2, 0) a (0, 0)

12. $\mathbf{F}(x, y) = \langle e^{-x} + y^2,\, e^{-y} + x^2 \rangle$,
C consiste no arco da curva $y = \cos x$ de $(-\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ e o segmento de reta de $(\pi/2, 0)$ a $(-\pi/2, 0)$

13. $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y,\, x \operatorname{sen} y \rangle$,
C é o círculo $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$ orientado no sentido horário

14. $\mathbf{F}(x, y) = \left\langle \sqrt{x^2 + 1},\, \operatorname{tg}^{-1} x \right\rangle$, C é o triângulo de (0, 0) a (1, 1) a (0, 1) a (0, 0)

SCA **15–16** Verifique o Teorema de Green usando um sistema de computação algébrica para calcular tanto a integral de linha como a integral dupla.

15. $P(x, y) = y^2 e^x$, $\quad Q(x, y) = x^2 e^y$,
C consiste no segmento de reta de $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ seguido pelo arco da parábola $y = 2 - x^2$ de $(1, 1)$ a $(-1, 1)$

16. $P(x, y) = 2x - x^3 y^5$, $\quad Q(x, y) = x^3 y^8$,
C é a elipse $4x^2 + y^2 = 4$

17. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $\mathbf{F}(x, y) = x(x + y)\,\mathbf{i} + xy^2\,\mathbf{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x para (1, 0), em seguida ao longo de um segmento de reta até (0, 1), e então de volta à origem ao longo do eixo y.

18. Uma partícula inicialmente no ponto $(-2, 0)$ se move ao longo do eixo x para (2, 0), e então ao longo da semicircunferência $y = \sqrt{4 - x^2}$ até o ponto inicial. Utilize o Teorema de Green para determinar o trabalho realizado nessa partícula pelo campo de força $\mathbf{F}(x, y) = \langle x, x^3 + 3xy^2 \rangle$.

19. Use uma das fórmulas em $\boxed{5}$ para achar a área sob um arco da cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$.

20. Se uma circunferência C de raio 1 rola ao longo do interior da circunferência $x^2 + y^2 = 16$, um ponto fixo P de C descreve uma curva chamada *epicicloide*, com equações paramétricas $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t$. Faça o gráfico da epicicloide e use $\boxed{5}$ para calcular a área da região que ela envolve.

21. (a) Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2), mostre que

$$\int_C x\, dy - y\, dx = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

(b) Se os vértices de um polígono, em sentido anti-horário, são $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ mostre que a área do polígono é

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_2 y_3 - x_3 y_2) + \cdots + (x_{n-1} y_n - x_n y_{n-1}) + (x_n y_1 - x_1 y_n)]$$

(c) Encontre a área do pentágono com vértices (0, 0), (2, 1), (1, 3), (0, 2) e $(-1, 1)$.

22. Seja D a região limitada por um caminho fechado simples C no plano xy. Utilize o Teorema de Green para demonstrar que as coordenadas do centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ de D são

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \oint_C x^2\, dy \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A} \oint_C y^2\, dx$$

onde A é a área de D.

23. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide de um quarto de uma região circular de raio a.

24. Use o Exercício 22 para encontrar o centroide da região triangular de vértices (0, 0), $(a, 0)$ e (a, b), onde $a > 0$ e $b > 0$.

25. Uma lâmina plana com densidade constante $\rho(x, y) = \rho$ ocupa uma região do plano xy limitada por um caminho fechado simples C. Mostre que seus momentos de inércia em relação aos eixos são

$$I_x = -\frac{\rho}{3} \oint_C y^3\, dx \qquad I_y = \frac{\rho}{3} \oint_C x^3\, dy$$

26. Utilize o Exercício 25 para achar o momento de inércia de um círculo de raio a com densidade constante ρ em relação a um diâmetro. (Compare com o Exemplo 4 da Seção 15.5.)

27. Use o método do Exercício 5 para calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{2xy\,\mathbf{i} + (y^2 - x^2)\,\mathbf{j}}{(x^2 + y^2)^2}$$

e C é qualquer curva fechada simples positivamente orientada que envolve a origem.

28. Calcule $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, onde $\mathbf{F}(x, y) = \langle x^2 + y, 3x - y^2 \rangle$ e C é a fronteira positivamente orientada de uma região D que tem área 6.

29. Se $\mathbf{F}$ é o campo vetorial do Exemplo 5, mostre que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para todo caminho fechado simples que não passe pela origem e nem a circunde.

30. Complete a demonstração do Teorema de Green demonstrando a Equação 3.

31. Utilize o Teorema de Green para demonstrar a fórmula de mudança de variáveis para as integrais duplas (Fórmula 15.10.9) para o caso onde $f(x, y) = 1$:

$$\iint_R dx\, dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

Aqui, R é a região do plano xy que corresponde à região S no plano uv sob a transformação dada por $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$.
[*Dica*: Observe que o lado esquerdo é $A(R)$ e aplique a primeira parte da Equação 5. Converta a integral de linha sobre ∂R para uma integral sobre ∂S e aplique o Teorema de Green no plano uv.]

Portanto,

$$(\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

e podemos reescrever a equação do Teorema de Green na forma vetorial

12 $$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

A Equação 12 expressa a integral de linha da componente tangencial de **F** ao longo de C como uma integral dupla da componente vertical rotacional **F** sobre a região D delimitada por C. Vamos deduzir, agora, uma fórmula semelhante, envolvendo a componente *normal* de **F**.

Se C é dada pela equação vetorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

então o vetor tangente unitário (veja a Seção 13.2) é

$$\mathbf{T}(t) = \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} + \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

Você pode verificar que o vetor normal unitário externo a C é dado por

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{i} - \frac{x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\,\mathbf{j}$$

(Veja a Figura 2). Então, da Equação 16.2.3, temos

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds &= \int_a^b (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})(t)\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt \\
&= \int_a^b \left[\frac{P(x(t), y(t))\,y'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} - \frac{Q(x(t), y(t))\,x'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\right] |\mathbf{r}'(t)|\,dt \\
&= \int_a^b P(x(t), y(t))\,y'(t)\,dt - Q(x(t), y(t))\,x'(t)\,dt \\
&= \int_C P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dA
\end{aligned}$$

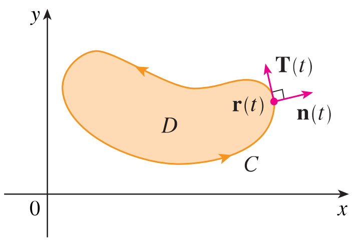


FIGURA 2

pelo Teorema de Green. Mas o integrando na integral dupla é o divergente de **F**. Logo, temos uma segunda forma vetorial do Teorema de Green:

13 $$\boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D \text{div } \mathbf{F}(x, y)\, dA}$$

Essa versão diz que a integral de linha da componente normal de **F** ao longo de C é igual à integral dupla do divergente de **F** na região D delimitada por C.

16.5 Exercícios

1–8 Determine (a) o rotacional e (b) o divergente do campo vetorial.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} - x^2y\,\mathbf{k}$

2. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2yz\,\mathbf{i} + xy^2z\,\mathbf{j} + xyz^2\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^z\,\mathbf{i} + yze^x\,\mathbf{k}$

4. $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen } yz\,\mathbf{i} + \text{sen } zx\,\mathbf{j} + \text{sen } xy\,\mathbf{k}$

5. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})$

6. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{xy}\text{sen } z\,\mathbf{j} + y\,\text{tg}^{-1}(x/z)\,\mathbf{k}$

7. $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle e^x\text{sen } y, e^y\text{sen } z, e^z\text{ sen } x\rangle$

8. $\mathbf{F}(x, y, z) = \left\langle \dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x} \right\rangle$

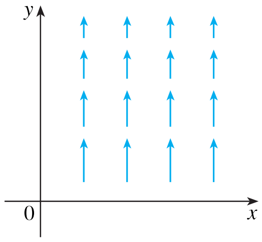
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

9–11 O campo vetorial **F** é mostrado no plano xy e é o mesmo em todos os planos horizontais (em outras palavras, **F** é independente de z e sua componente z é 0).

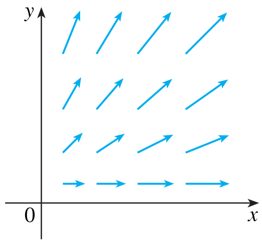
(a) O div **F** será positivo, negativo ou nulo? Explique.

(b) Determine se rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Se não, em que direção rot **F** aponta?

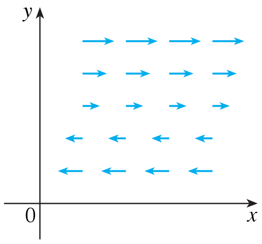
9.



10.



11.



12. Seja f um campo escalar e **F** um campo vetorial. Diga se cada expressão tem significado. Em caso negativo, explique por quê. Em caso afirmativo, diga se é um campo vetorial ou escalar.

(a) rot f (b) grad f

(c) div **F** (d) rot(grad f)

(e) grad **F** (f) grad(div **F**)

(g) div(grad f) (h) grad(div f)

(i) rot(rot **F**) (j) div(div **F**)

(k) (grad f) $\times$ (div **F**) (l) div(rot(grad f))

13–18 Determine se o campo vetorial é conservativo ou não. Se for conservativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\,\mathbf{i} + 2xyz^3\,\mathbf{j} + 3xy^2z^2\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz^2\,\mathbf{i} + x^2yz^2\,\mathbf{j} + x^2y^2z\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3xy^2z^2\,\mathbf{i} + 2x^2yz^3\,\mathbf{j} + 3x^2y^2z^2\,\mathbf{k}$

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \operatorname{sen} z\,\mathbf{j} + y\cos z\,\mathbf{k}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^{yz}\,\mathbf{i} + xze^{yz}\,\mathbf{j} + xye^{yz}\,\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \operatorname{sen} yz\,\mathbf{i} + ze^x\cos yz\,\mathbf{j} + ye^x\cos yz\,\mathbf{k}$

19. Existe um campo vetorial **G** em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle x \operatorname{sen} y, \cos y, z - xy\rangle$? Explique.

20. Existe um campo vetorial **G** em $\mathbb{R}^3$ tal que rot $\mathbf{G} = \langle xyz, -y^2z, yz^2\rangle$? Explique.

21. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\,\mathbf{i} + g(y)\,\mathbf{j} + h(z)\,\mathbf{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

22. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\,\mathbf{i} + g(x, z)\,\mathbf{j} + h(x, y)\,\mathbf{k}$$

é incompressível.

23–29 Demonstre a identidade, admitindo que as derivadas parciais apropriadas existem e são contínuas. Se f for um campo escalar e **F**, **G** forem campos vetoriais, então $f\mathbf{F}$, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ e $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ serão definidos por

$$(f\mathbf{F})(x, y, z) = f(x, y, z)\,\mathbf{F}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\cdot\mathbf{G}(x, y, z)$$

$$(\mathbf{F}\times\mathbf{G})(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)\times\mathbf{G}(x, y, z)$$

23 div($\mathbf{F} + \mathbf{G}$) = div **F** + div **G**

24. rot($\mathbf{F} + \mathbf{G}$) = rot **F** + rot **G**

25. div ($f\mathbf{F}$) = f div **F** + $\mathbf{F}\cdot\nabla f$

26. rot ($f\mathbf{F}$) = f rot **F** + $(\nabla f)\times\mathbf{F}$

27. div($\mathbf{F}\times\mathbf{G}$) = $\mathbf{G}\cdot$ rot **F** $-$ $\mathbf{F}\cdot$ rot **G**

28. div($\nabla f \times \nabla g$) = 0

29. rot (rot **F**) = grad(div **F**) $-$ $\nabla^2\mathbf{F}$

30–32 Sejam $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ e $r = |\mathbf{r}|$.

30. Verifique as identidades.

(a) $\nabla\cdot\mathbf{r} = 3$ (b) $\nabla\cdot(r\mathbf{r}) = 4r$

(c) $\nabla^2 r^3 = 12r$

31. Verifique as identidades.

(a) $\nabla r = \mathbf{r}/r$ (b) $\nabla\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$

(c) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$ (d) $\nabla \ln r = \mathbf{r}/r^2$

32. Se $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^p$, determine div **F**. Existe um valor de p para que div $\mathbf{F} = 0$?

33. Use o Teorema de Green na forma da Equação 13 para demonstrar a **primeira identidade de Green**:

$$\iint_D f\nabla^2 g\,dA = \oint_C f(\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,ds - \iint_D \nabla f\cdot\nabla g\,dA$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas. (A quantidade $\nabla g\cdot\mathbf{n} = D_{\mathbf{n}}g$ aparece na integral de linha. Essa é a derivada direcional na direção do vetor normal **n** e é chamada **derivada normal** de g.)

34. Use a primeira identidade de Green (Exercício 33) para demonstrar a **segunda identidade de Green**:

$$\iint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dA = \oint_C (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\,ds$$

onde D e C satisfazem as hipóteses do Teorema de Green e as derivadas parciais apropriadas de f e g existem e são contínuas.

35. Lembre-se, da Seção 14.3, de que uma função g é chamada *harmônica* em D se satisfaz a equação de Laplace, isto é, $\nabla^2 g = 0$ em D. Utilize primeira identidade de Green (com as mesmas hipóteses que no Exercício 33) para mostrar que se g é harmônica em D, então $\oint_C D_{\mathbf{n}}g\,ds = 0$. Aqui, $D_{\mathbf{n}}g$ é a derivada normal de g definida no Exercício 33.

36. Use a primeira identidade de Green para mostrar que se f for harmônica em D, e se $f(x, y) = 0$ na curva limite C, então $\iint_D |\nabla f|^2\,dA = 0$. (Suponha que são válidas as mesmas hipóteses que no Exercício 33.)

37. Este exercício ilustra a relação entre vetor rotacional e rotações. Seja B ser um corpo rígido girando sobre o eixo z. A rotação